

doi 10.26089/NumMet.v25r218

УДК 519.853.6, 517.97, 539.3

Метод уточнения численного решения задачи оптимизации кинематической схемы формообразования панелей

К. С. Бормотин

Комсомольский-на-Амуре государственный университет,
Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-3154-3481, e-mail: cvmi@knastu.ru

Аннотация: При решении задач оптимального управления деформированием твердых тел по общей схеме метода динамического программирования требуются значительные вычислительные ресурсы. Для сокращения времени расчета предлагается уточнять грубое решение, полученное по схеме динамического программирования, методом блуждающих трубок. С помощью программной реализации данного алгоритма получены численные решения оптимального изгиба пластинки в режиме ползучести, которые сравниваются с аналитическими данными.

Ключевые слова: ползучесть, формообразование, поврежденность, метод конечных элементов, задача оптимального управления, метод динамического программирования.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21–11–00165).

Для цитирования: Бормотин К.С. Метод уточнения численного решения задачи оптимизации кинематической схемы формообразования панелей // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 2. 238–245. doi 10.26089/NumMet.v25r218.

A method for refining the numerical solution to the problem of optimizing the kinematic scheme for forming panels

Konstantin S. Bormotin

Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia
ORCID: 0000-0003-3154-3481, e-mail: cvmi@knastu.ru

Abstract: When solving optimal control problems of the solids deformation according to the general scheme of the dynamic programming method, significant computing resources are required. To reduce the calculation time, it is proposed to refine the rough solution obtained using the dynamic programming scheme using the wandering tube method. Using the software implementation of this algorithm, numerical solutions for the optimal bending of the plate in creep mode were obtained, which were compared with analytical data.

Keywords: creep, shaping, damage, finite element method, optimal control problem, dynamic programming method.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 21–11–00165).

For citation: K. S. Bormotin, “A method for refining the numerical solution to the problem of optimizing the kinematic scheme for forming panels,” Numerical Methods and Programming, 25 (2), 238–245 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r218.



1. Введение. Для технологических процессов формообразования монолитных панелей при задании аэродинамической формы в авиастроении актуальна разработка метода расчета оптимальной кинематической схемы деформирования заготовки. Особенно это важно при использовании оборудования с числовым программным управлением, такого как обтяжной пресс, реконфигурируемый стержневой пуансон [1–3]. Разработанные и программно-реализованные методы решения задач оптимизации на основе метода динамического программирования сводятся к многочисленному решению однотипных задач [4, 5]. Для получения более точного решения задачи необходимо брать более густую сетку точек на шкалах и увеличить число шкал. При этом число перебираемых величин значительно возрастает, тогда как уже при малых размерностях сетки становится невозможным решение задачи об оптимизации траекторий деформирования твердого тела даже с помощью мощных современных ЭВМ. В таком случае необходимо исследовать альтернативные методы или их модификации. В частности, для сокращения времени расчета возможно применение *методов уточнения грубого решения*, например метода локальных вариаций или метода блуждающих трубок [6, 7].

Предложенный способ уточнения грубого решения методом локальных вариаций [8] не всегда позволяет получить локально кратчайший путь [6]. В этом случае получение оптимальной траектории зависит от порядка анализа шкал [6]. В данной работе рассматривается применение метода блуждающих трубок для уточнения грубого решения задачи оптимизации кинематической схемы деформирования заготовки.

2. Формулировка задачи оптимального управления при формообразовании тонкостенных конструкций. Задача оптимального формообразования тонкостенных конструкций в условиях ползучести представляет собой поиск оптимальной функции прогиба.

Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — область деформируемого тела с границей S . Поверхность с заданными кинематическими условиями обозначается через S^* ($S^* \subset S$). Обозначим через $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ вектор перемещений деформируемого тела.

Математическая формулировка задачи формообразования в условиях ползучести с учетом малых деформаций, но больших перемещений и поворотов (общая лагранжева формулировка [9]) представляется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом

$$J(\dot{\mathbf{u}}) = a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}), \quad \dot{\mathbf{u}}|_{S^*} = \dot{\mathbf{u}}^*, \tag{1}$$

где $\dot{\mathbf{u}}^*$ — заданные скорости перемещений в момент времени t ; $t \in [0, T]$ — время деформирования тела под нагрузкой; потенциальная форма определяется в виде $a(\dot{\mathbf{u}}, \delta\dot{\mathbf{u}}) = \int_V \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \delta\dot{u}_{i,j} dV$, где $E(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl}^c + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j}$, c_{ijpl} — компоненты тензора упругих констант, $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{p,i} u_{p,j} + u_{p,i} \dot{u}_{p,j})$ — компоненты скоростей деформаций, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ — компоненты скоростей деформаций ползучести, определяемые по закону установившейся ползучести [9]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \tag{2}$$

s_{ij} — компоненты деватора тензора напряжений, $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ — эффективное напряжение (интенсивность напряжений), B, n — константы материала; точкой сверху обозначены скорости перемещений \dot{u} , $i, j, p, l = 1, 2, 3$.

Таким образом, математическая формулировка задачи оптимального управления включает уравнения механики деформируемого твердого тела, полученные из условий стационарности (1), и функционал оптимизации:

$$A = \max_V \int_0^T \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c dt \rightarrow \min. \tag{3}$$

Данный функционал представляет максимальное значение работы рассеяния в теле и характеризует параметр поврежденности, который должен быть минимизирован [10].

В качестве функций управления принимаются перемещения $\mathbf{u}(t) = f(t)\mathbf{u}^*$, заданные на границе S^* , а функций состояния — перемещения, деформации, напряжения в теле V . Таким образом, определив некоторое решение \mathbf{u}^* обратной задачи [11], перейдем к поиску оптимальной функции $f(t)$.

3. Численный метод оптимизации кинематической схемы формообразования панелей.

Применяя основные процедуры метода конечных элементов к вариационному уравнению с функционалом (1), получим дискретные уравнения задачи деформирования [9, 12]

$${}^{t+dt}K^{(r-1)}\Delta U^{(r)} = {}^{t+dt}R^{(r-1)}, \quad (4)$$

где ${}^{t+dt}K^{(r-1)}$ — симметричная матрица касательной жесткости, ${}^{t+dt}R^{(r-1)}$ — вектор внутренних и внешних сил, $\Delta U^{(r)}$ — вектор узловых приращений перемещений. Верхние индексы $t + dt$ указывают на момент времени, для которого производятся вычисления. Верхние индексы $(r - 1)$ указывают на номер итерации при уточнении решения методом Ньютона–Рафсона.

Наряду с дискретизацией по параметру t , вызванной решением нелинейных задач механики методом конечных элементов, для приближенного решения задачи оптимального управления вводится дополнительная сетка: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Дискретная задача оптимального управления будет включать дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (4) и дискретный аналог минимизируемого функционала (3). В такой постановке строится функция Беллмана и задача решается методом динамического программирования [6, 7].

При решении аддитивных задач применяется алгоритм, который состоит в формулировке правил последовательного сжатия множества конкурентоспособных вариантов [6, 7]. Алгоритм представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге которого производится исключение некоторого множества вариантов, о котором в процессе работы алгоритма становится известно, что оно не содержит оптимального варианта.

Для разработки алгоритма оптимизации функции прогиба в качестве управляющих параметров рассматривается функция узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластинки, в виде $U_z(t) = f(t)U_z^*$, где U_z^* — решение обратной задачи с линейной функцией [11], обеспечивающее необходимую остаточную форму панели. В этом случае строится сетка в пространстве (t, z) . Шаг по аргументу t задан и равен $\tau = t_{k+1} - t_k$, шаг по пространственной переменной z равен Δz . Узлы сетки обозначим через $P_g(k)$. Индекс k означает номер гиперплоскости Σ_k (шкалы) при заданном значении t , а индекс g означает номер узла в гиперплоскости Σ_k . Каждые два узла, лежащие в гиперплоскостях $P_q(k)$ и $P_g(k + 1)$, соединены отрезками, длины этих отрезков обозначаются $l_{qg}(k) = f_k(P_q(k), P_g(k + 1))$ [7].

В результате таких операций можно получить граф, в котором роль вершин играют узлы $P_g(k)$, и вместо исходной задачи будет рассматриваться задача поиска на этом графе кратчайшего пути, соединяющего гиперплоскости Σ_0 и Σ_N . Обозначая через $l_q(k)$ ломаную кратчайшей длины, соединяющую узел $P_q(k)$ с гиперплоскостью Σ_0 , можно прийти к рекуррентному соотношению [7]

$$l_g(k + 1) = \min_q (l_q(k) + l_{qg}(k)).$$

Минимум берется по тем номерам q , для которых узлы лежат в допустимой области G_k и принадлежат гиперплоскости Σ_k .

Для программной реализации метода динамического программирования и построения функций $f(t)$ предлагается следующий способ задания граничных условий для рассматриваемой сетки при решении уравнений (4). Шаги метода динамического программирования вычисляются по формулам

$$\tau = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad t_0 = 0, \quad \Delta z = \frac{U_z^*}{M}. \quad (5)$$

На каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ при решении уравнений (4) задаются граничные условия с перемещениями ΔU_z по алгоритму 1.

Граничные условия на всех отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ могут быть представлены с помощью системы параметров

$$[\xi_1, \zeta_1; \xi_2, \zeta_2; \dots; \xi_N, \zeta_N], \quad (6)$$

где ξ_k могут принимать значения $0, 1, \dots, N$ (при условии $\xi_k > \xi_{k-1}$), а ζ_k — принимать значения $0, 1, \dots, M$.

Алгоритм 1. Алгоритм вычисления граничных условий
 Algorithm 1. Algorithm for calculating boundary conditions

```

1: do
2:    $\Delta t_{\text{step}} = \xi_k \tau$ 
3:    $\Delta U_z = (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \frac{\Delta z}{\tau} dt$ 
4:    $k = k + 1$ 
5: while  $\Delta t_{\text{step}} \leq t + dt$  //  $dt \leq \tau$ 
    
```



Вычисления рекуррентных соотношений выполняются путем построения итераций с различными системами параметров (6) и решения уравнений (4) в программе Marc [13]. Ввод граничных условий и вывод значения критерия оптимизации выполняется с помощью разработанных пользовательских программ.

Для заданных формулами (5) значений N, M полученная траектория уточняется методом блуждающих трубок. Пусть s — шаг уменьшения сетки на шкалах, $s = 1, 2, \dots$. Уменьшаем шаг сетки на каждой шкале в q^s раз ($s = 1$). Тогда на каждой шкале образуется по $q^s M$ узлов. Устанавливается ширина трубки равная $2w$ узлов, т.е. по w узлов сверху и снизу от траектории ($w = 1, 2, 3, \dots$). Система параметров (6) для исходной траектории вычисляется для новой сетки: $[\xi_1, \bar{\zeta}_1^{0,s}; \xi_2, \bar{\zeta}_2^{0,s}; \dots; \xi_N, \bar{\zeta}_N^{0,s}]$, где $\bar{\zeta}_k^{0,s} = q^s \zeta_k$.

В алгоритме цикл по времени остается тот же, $N^s = N$. Цикл по пространственной переменной для каждого момента времени изменяется от $\bar{\zeta}_k^{0,s} - w$ до $\bar{\zeta}_k^{0,s} + w$ ($M^s = q^s M$, $\Delta_z^s = \frac{U_z^*}{M^s}$, при $k = 0$ и $k = N$ рассматривается одна начальная и конечная точка траектории 0 и $\bar{\zeta}_N^{0,s} = M^s$). Если граница трубки выходит за пределы рассматриваемой сетки шкалы ($\bar{\zeta}_k^{0,s} - w < 0$ или $\bar{\zeta}_k^{0,s} + w > M^s$), то она устанавливается в крайний узел шкалы. После перебора траекторий находится оптимальная: $[\xi_1, \bar{\zeta}_1^{1,s}; \xi_2, \bar{\zeta}_2^{1,s}; \dots; \xi_N, \bar{\zeta}_N^{1,s}]$. Вычисления следующей итерации цикла повторяются с измененными параметрами от $\bar{\zeta}_k^{1,s} - w$ до $\bar{\zeta}_k^{1,s} + w$. Выполнение итераций продолжается, пока траектории не будут совпадать: $[\xi_1, \bar{\zeta}_1^{d+1,s}; \xi_2, \bar{\zeta}_2^{d+1,s}; \dots; \xi_N, \bar{\zeta}_N^{d+1,s}] = [\xi_1, \bar{\zeta}_1^d; \xi_2, \bar{\zeta}_2^d; \dots; \xi_N, \bar{\zeta}_N^d]$, d — номер итерации для данного шага уменьшения сетки на шкалах.

На следующем шаге $s = 2$ уменьшается сетка в q^s раз, $M^s = q^s M$, $\Delta_z^s = \frac{U_z^*}{M^s}$ и выполняется тот же алгоритм. Процесс измельчения сетки на шкалах и поиск оптимальных траекторий повторяется, пока траектории не будут совпадать с заданной точностью ε . Например, точность можно определить по формуле

$$\sqrt{\sum_{k=0}^N (\bar{\zeta}_k^{d,s+1} \Delta_z^{s+1} - \bar{\zeta}_k^{d,s} \Delta_z^s)^2} < \varepsilon.$$

Затем увеличивается количество шкал, т.е. сгущается сетка по времени, и повторяется процесс. Таким образом, при $N^s = q^s N$ увеличивается количество параметров (6), а новые промежуточные значения определяются приближенно по последней оптимальной траектории.

4. Результаты расчета. Решение задачи оптимизации траектории деформирования рассматривается на примере задания формы двойной кривизны квадратной пластинке с выступами толщиной 12 мм и с длиной стороны 180 мм. С помощью выступов задается остаточная форма с двойной кривизной [14], по которой определяются узловые перемещения по координате z (значения максимальных перемещений в углах — 80 мм) (рис. 1). Модель включает 672 конечных элемента типа Hex8.

В расчетах предполагается, что пластинка выполнена из алюминиевого сплава АК4–1Т, характеристики которого приведены в [14, 15]. Рассматривается изотропный материал с параметрами упругости: модуль Юнга $E = 7000 \text{ кг/мм}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$. При температуре $T = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ стадия установившейся ползучести в течение 260 ч задается законом Нортонa (2) с одинаковыми коэффициентами при сжатии и растяжении $B = 0.25 \cdot 10^{-14} (\text{кг/мм}^2)^{-n} (\text{час})^{-1}$, $n = 8$.

Численное решение задачи оптимизации траектории деформирования сводится к перебору вариантов при каждом параметре t_k . Набор вариантов функции $f(t)$ задается ломаными линиями, проходящими от точки O к точке B . В результате оптимальное решение, полученное методом динамического программирования при $N = 4, M = 12$ и $N = 6, M = 18$ (рис. 2, 3), приближается к аналитической кривой и не совпадает с линейной функцией (жирная кривая — численные результаты, штрихпунктирная кривая — аналитические данные для больших прогибов пластинки [16, 17] $U_z(t) = \sqrt{t/TU_z^*}$). Как показано

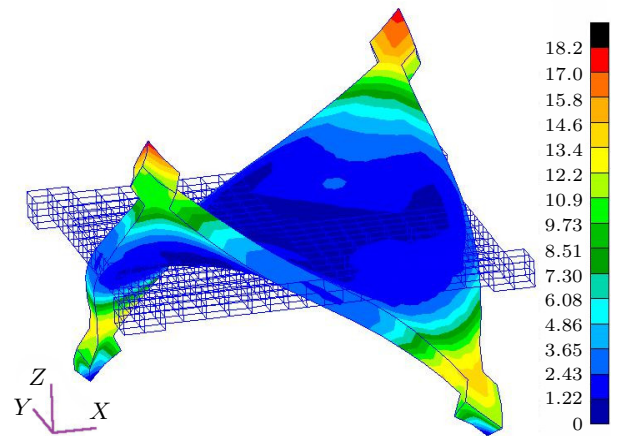


Рис. 1. Деформированная конфигурация пластинки и распределение значений работы рассеяния

Fig. 1. Deformed plate configuration and distribution of dissipation work values

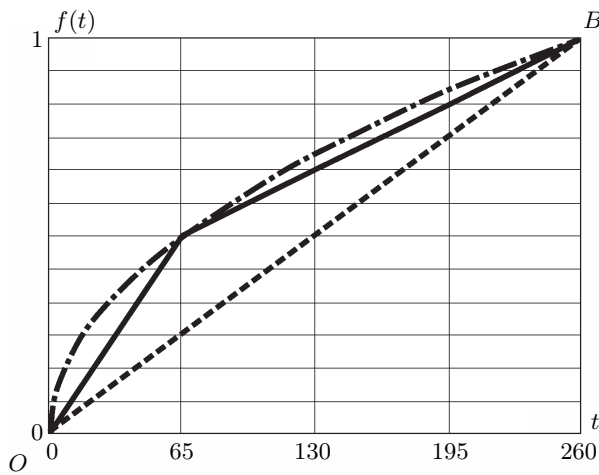


Рис. 2. Траектория деформирования пластинки при $N = 4, M = 12$

Fig. 2. Trajectory of plate deformation at $N = 4, M = 12$

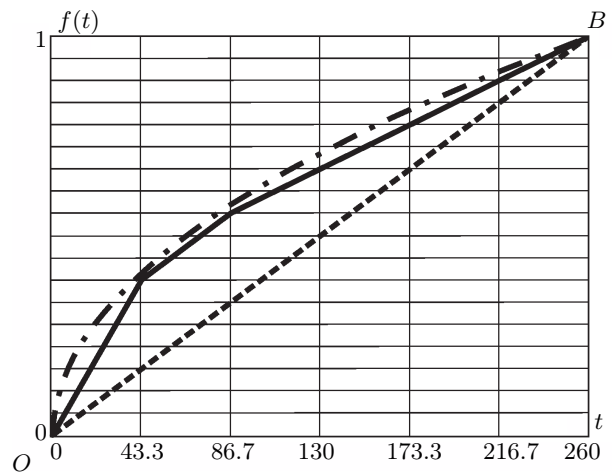


Рис. 3. Траектория деформирования пластинки при $N = 6, M = 18$

Fig. 3. Trajectory of plate deformation at $N = 6, M = 18$

в [16, 17], оптимальное деформирование возникает при постоянной скорости деформаций ползучести, и в случае рассмотрения тонкой пластинки, прогибы которой могут во много раз превысить ее толщину, при ряде ограничений находится данный нелинейный закон $U_z(t) = \sqrt{t/T}U_z^*$. В случае малых прогибов оптимальное деформирование происходит по линейному закону (рис. 2, 3, штриховая линия).

Для сокращения времени расчета применяется метод блуждающих трубок, уточняющий грубое решение задачи оптимального деформирования пластинки. Рассматривается пример уменьшения сетки по пространственной переменной. Грубое решение, полученное после оптимизации траектории деформирования по общей схеме метода динамического программирования при $N = M = 4$ и $N = M = 6$, представляет собой линейную функцию. Для уточнения решения уменьшается шаг сетки на каждой шкале в $q^1 = 3$ раза, устанавливается ширина трубки $w = 2$ и запускается алгоритм перебора траекторий по схеме метода динамического программирования. На рис. 4, 5 представлены отдельные этапы работы алгоритма метода блуждающих трубок. На рис. 4 даны исследуемые варианты траекторий для узла на второй шкале при $N = M = 4$ (жирной линией представлено грубое решения задачи оптимизации, область, ограниченная

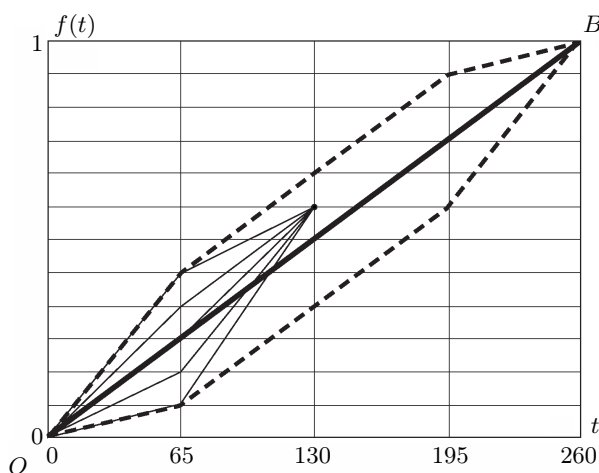


Рис. 4. Метод блуждающих трубок для $N = M = 4$ (первая итерация)

Fig. 4. Walking tube method for $N = M = 4$ (first iteration)

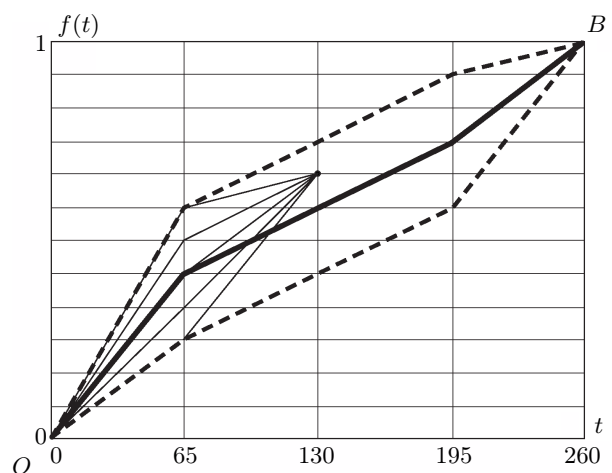


Рис. 5. Метод блуждающих трубок для $N = M = 4$ (вторая итерация)

Fig. 5. Walking tube method for $N = M = 4$ (second iteration)



штриховой линией, задает границы трубки). В результате перебора вариантов из области трубки находится траектория с минимальным значением критерия, вокруг которой строится новая трубка, и выполняется вторая итерация решения. На рис. 5 представлены исследуемые варианты траекторий для узла на второй шкале при $N = M = 4$ и границы новой трубки ($q^2 = 3, w = 2$). В результате решения второй итерации находится оптимальная траектория деформирования пластинки, которая совпадает с решением задачи оптимизации по общей схеме метода динамического программирования при $N = 4, M = 12$ (рис. 2).

Аналогично выполняется алгоритм метода блуждающих трубок при $N = M = 6$, результат которого совпадает с решением задачи оптимизации по общей схеме метода динамического программирования при $N = 6, M = 18$ (рис. 3).

Решение данных задач выполнялось с учетом распараллеливания конечно-элементных методов. В данном случае вычисление отдельной задачи с заданной системой параметров (6) распределялось на отдельный поток или вычислительную машину. В качестве примера, решения задач оптимизации выполнялись с целью уменьшения времени простоя процессора с распределением на 4 потока на многопроцессорной вычислительной машине (Core i9-10900X, 4×8 ГБ). Анализ параллельных вычислений методом динамического программирования с различным количеством потоков [4] свидетельствует о сокращении времени расчета при увеличении количества вычислительных потоков. Реализация алгоритма выполняется с помощью протокола распределенной модели COM (Distributed COM) [18]. Время решения задач оптимизации траектории по общей схеме метода динамического программирования и с учетом метода блуждающих трубок на каждой итерации дано в табл. 1. Параметры общей схемы и метода уточнения выбраны так, чтобы исследуемые траектории при уточнении входили в набор траекторий общей схемы. Конечные значения целевого функционала для этих методов совпадают. Данные в таблице показывают сокращение времени решения методом с уточнением грубого приближения более чем в 3 раза.

5. Заключение. Таким образом, метод блуждающих трубок значительно сокращает время расчета, а разработанный алгоритм позволяет на стадии подготовки производства оптимизировать параметры

Таблица 1. Время решения задач оптимизации траектории

Table 1. Time to solve trajectory optimization problems

Параметры задачи Task parameters	Время расчета, мин Calculation time, min	Параметры задачи Task parameters	Время расчета, мин Calculation time, min
$N = M = 4$, общая схема $N = M = 4$, general scheme	65	$N = 4, M = 12$, общая схема $N = 4, M = 12$, general scheme	912
$N = M = 4, q^1 = 3, w = 2$, уточнение, первая итерация $N = M = 4, q^1 = 3, w = 2$, refinement, first iteration	86	—	—
$N = M = 4, q^2 = 3, w = 2$, уточнение, вторая итерация $N = M = 4, q^2 = 3, w = 2$, refinement, second iteration	96	—	—
Итого Total	247	—	912
$N = M = 6$, общая схема $N = M = 6$, general scheme	500	$N = 6, M = 18$, общая схема $N = 6, M = 18$, general scheme	3032
$N = M = 6, q^1 = 3, w = 2$, уточнение, первая итерация $N = M = 6, q^1 = 3, w = 2$, refinement, first iteration	243	—	—
$N = M = 6, q^2 = 3, w = 2$, уточнение, вторая итерация $N = M = 6, q^2 = 3, w = 2$, refinement, second iteration	238	—	—
Итого Total	981	—	3032

технологического процесса. В частности, для формообразования деталей в обтяжном пуансоне и реконфигурируемом стержневом пуансоне определяется оптимальная система траекторий деформирования для разных точек пластинки при учете разносопротивляемости и анизотропии, обеспечивающих заданные остаточные деформации и максимальное сбережение ресурса материала конструкции [4, 5].

Список литературы

1. Михеев В.А., Сурудин С.В. Основы расчета процесса формообразования обтяжкой тонких оболочек двойной кривизны // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. 19, № 1(3). 555–562.
2. Simon D., Kern L., Wagner J., Reinhart G. A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Procedia CIRP. 2014. 17. 853–858.
3. Соснин О.В., Шубин И.А., Горев Б.В., Раевская Г.А. Способ формообразования деталей двойной кривизны и устройство для его осуществления // Авторское свидетельство SU1147471A1. Патентообладатель: Новосибирск, ИГиЛ СО РАН. 1985.
4. Бормотин К.С., Кривенюк А.А. Численная оптимизация кинематической схемы многоточечного формообразования панелей в условиях ползучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 5. 150–163. doi 10.31857/S057232992205004X.
5. Бормотин К.С., Буренин А.А., Кривенюк А.А. Об оптимизации кинематической схемы формообразования обтяжкой тонких упругопластических обшивок // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 2. 14–24. doi 10.31857/S0572329922020064.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
8. Бормотин К.С., Вин А. Метод динамического программирования в задачах оптимального деформирования панели в режиме ползучести // Вычислительные методы и программирование. 2018. 19, № 4. 470–478. doi 10.26089/NumMet.v19r442.
9. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск.: Изд-во СО РАН, 2000.
10. Соснин О.В., Никитенко А.Ф., Горев Б.В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // Прикладная механика и техническая физика. 2010. 51, № 4. 188–197.
11. Бормотин К.С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2013. 53, № 12. 2091–2099. doi 10.7868/2FS004446691312003X.
12. Wriggers P. Computational contact mechanics. Berlin: Springer, 2006. doi 10.1007/978-3-540-32609-0.
13. Marc: Advanced Nonlinear Simulation Solution. <https://hexagon.com/products/marc>. Cited May 10, 2024.
14. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычислительные методы и программирование. 2008. 9, № 3. 346–365.
15. Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В. Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Сб. трудов № 117. Новосибирск: Новосиб. ин-т инженеров вод. трансп., 1976. 78–88.
16. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
17. Бормотин К.С., Олейников А.И. Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 5. 136–146.
18. Трельсен Э. Модель СОМ и применение ATL 3.0. СПб.: БХВ-Петербург, 2001.

Поступила в редакцию
31 октября 2023 г.

Принята к публикации
8 мая 2024 г.

Информация об авторе

Константин Сергеевич Бормотин — д.ф.-м.н., профессор; Комсомольский-на-Амуре государственный университет, проспект Ленина, 27, 681013, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация.



References

1. V. A. Mikheev and S. V. Surudin, “Bases of Calculation Stretch Forming Process Thin Double-Convex Shells,” *Izv. Samara Nauch. Tsentra Ross. Akad. Nauk* **19** (1(3)), 555–562 (2017).
2. D. Simon, L. Kern, J. Wagner, and G. Reinhart, “A Reconfigurable Tooling System for Producing Plastic Shields,” *Procedia CIRP* **17**, 853–858 (2014).
3. O. V. Sosnin, I. A. Shubin, B. V. Gorev, and G. A. Raevskaya, “Method of Forming Double Curvature Parts and Device for Its Implementation,” Inventor’s Certificate SU1147471A1. Patentee: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Novosibirsk, 1985.
4. K. S. Bormotin and A. A. Krivenok, “Numerical Optimization of the Kinematic Scheme of Multi-Point Forming of Panel in the Creep Mode,” *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, No. 5, 150–163 (2022) [*Mech. Solids* **57** (5), 1086–1096 (2022)]. doi [10.3103/S0025654422050156](https://doi.org/10.3103/S0025654422050156).
5. K. S. Bormotin, A. A. Burenin, and A. A. Krivenok, “On the Optimization of the Kinematic Scheme for Shaping Thin Elastoplastic Coverings,” *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, No. 2, 14–24 (2022) [*Mech. Solids* **57** (2), 214–222 (2022)]. doi [10.3103/S0025654422020030](https://doi.org/10.3103/S0025654422020030).
6. F. P. Vasiliev, *Optimization Methods* (Faktorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].
7. N. N. Moiseev, *Elements of the Theory of Optimal Systems* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
8. K. S. Bormotin and A. Win, “A Method of Dynamic Programming in the Problems of Optimal Panel Deformation in the Creep Mode,” *Vychisl. Metody Program. (Numerical Methods and Programming)*. **19** (4), 470–478 (2018). doi [10.26089/NumMet.v19r442](https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r442).
9. S. N. Korobeinikov, *Nonlinear Deformation of Solid Bodies* (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
10. O. V. Sosnin, A. F. Nikitenko, and B. V. Gorev, “Justification of the Energy Variant of the Theory of Creep and Long-Term Strength of Metals,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 188–197 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 608–614 (2010)]. doi [10.1007/s10808-010-0078-y](https://doi.org/10.1007/s10808-010-0078-y).
11. K. S. Bormotin, “Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping under Creep Conditions,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (12), 2091–2099 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (12), 1908–1915 (2013)]. doi [10.1134/S0965542513120026](https://doi.org/10.1134/S0965542513120026).
12. P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics* (Springer, Berlin, 2006). doi [10.1007/978-3-540-32609-0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0).
13. Marc: Advanced Nonlinear Simulation Solution. <https://hexagon.com/products/marc>. Cited May 10, 2024.
14. S. N. Korobeinikov, A. I. Oleinikov, B. V. Gorev, and K. S. Bormotin, “Mathematical Simulation of Creep Processes in Metal Patterns Made of Materials with Different Extension Compression Properties,” *Vychisl. Metody Program. (Numerical Methods and Programming)*. **9** (3), 346–365 (2008).
15. O. V. Sosnin, B. V. Gorev, and V. V. Rubanov, “Torsion of a Square Plate in a Material with Differing Resistance to Creep in Tension and Compression,” in *Raschety Prochn. Sudovykh Konstruktsii i Mekhanizmov* (Siberian State University of Water Transport, Novosibirsk, 1976), Issue 117, pp. 78–88.
16. I. Yu. Tsvlodub, *Stability Postulate and Its Applications in the Theory of Creep of Metallic Materials* (Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, 1991) [in Russian].
17. K. S. Bormotin and A. I. Oleinikov, “Variational Principles and Optimal Solutions of the Inverse Problems of Creep Bending of Plates,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, No. 5, 136–146 (2012) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **53** (5), 751–760 (2012)]. doi [10.1134/S0021894412050148](https://doi.org/10.1134/S0021894412050148).
18. A. W. Troelsen, *Developer’s Workshop to COM and ATL 3.0* (Wordware Publ., Plano, 2000; BHV-Petersburg Publ., Petersburg, 2001).

Received
 October 31, 2023

Accepted for publication
 May 8, 2024

Information about the author

Konstantin S. Bormotin — Dr. Sci., professor; Komsomolsk-on-Amur State University, Lenin prospect, 27, 681013, Komsomolsk-on-Amur, Russia.