



doi 10.26089/NumMet.v25r104

УДК 519.63

Численный метод расчета тепломассопереноса двухфазной жидкости в трещиновато-пористом коллекторе

Ю. О. Бобренева

Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН),
Уфа, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-4651-6080, e-mail: yu.o.bobreneva@gmail.com

Ю. А. Повещенко

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-9211-9057, e-mail: hecon@mail.ru

В. О. Подрыга

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-7874-6978, e-mail: pvictoria@list.ru

С. В. Поляков

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН),
Уфа, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-1859-9034, e-mail: polyakov@imamod.ru

Р. М. Узьянбаев

Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН),
Уфа, Российская Федерация
Уфимский государственный нефтяной технический университет,
Уфа, Российская Федерация
ORCID: 0009-0009-4399-2023, e-mail: ravil-11@mail.ru

К. Ф. Коледина

Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН),
Уфа, Российская Федерация
Уфимский государственный нефтяной технический университет,
Уфа, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-8555-0543, e-mail: koledinakamila@mail.ru

П. И. Рагимли

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-9271-5956, e-mail: pervin@rehimli.info

Аннотация: Предложен подход к численному моделированию неизотермической задачи фильтрации в трещиновато-пористой среде, основанный на методе расщепления по физическим процессам. В задаче учитывается наличие двухфазной жидкости и двойной пористости у коллектора. Применение метода расщепления по физическим процессам позволяет упростить алгоритм



решения, при этом сохранив эквивалентность к консервативной разностной аппроксимации исходных уравнений и обеспечив устойчивость решения задачи. При численном решении используются аппроксимации дифференциальных операторов, полученные в рамках метода конечных разностей. Реализация численного алгоритма основывается на методе матричной прогонки. Апробация метода и его верификация выполнена в серии вычислительных экспериментов, исходные данные для которых взяты из исследований промысловых скважин на российских нефтяных месторождениях.

Ключевые слова: фильтрация двухфазной жидкости, модель двойной пористости, коллектор трещиновато-порового типа, пьезопроводность, температура, матричная прогонка.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21–71–20047). Расчеты проводились на гибридном суперкомпьютере К60, установленном в центре коллективного пользования ИПМ имени М. В. Келдыша РАН.

Для цитирования: Бобренева Ю.О., Повешченко Ю.А., Подрыга В.О., Поляков С.В., Узьянбаев Р.М., Коледина К.Ф., Рагимли П.И. Численный метод расчета тепломассопереноса двухфазной жидкости в трещиновато-пористом коллекторе // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 1. 33–46. doi 10.26089/NumMet.v25r104.

Numerical method for calculating heat and mass transfer of two-phase fluid in fractured-porous reservoir

Yuliya O. Bobreneva

Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Ufa, Russia
ORCID: 0000-0003-4651-6080, e-mail: yu.o.bobreneva@gmail.com

Yury A. Poveshchenko

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
ORCID: 0000-0001-9211-9057, e-mail: hecon@mail.ru

Viktoriia O. Podryga

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Moscow, Russia
ORCID: 0000-0001-7874-6978, e-mail: pvictoria@list.ru

Sergey V. Polyakov

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Ufa, Russia
ORCID: 0000-0003-1859-9034, e-mail: polyakov@imamod.ru

Ravil M. Uzyanbaev

Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Ufa, Russia
Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia
ORCID: 0009-0009-4399-2023, e-mail: ravil-11@mail.ru

Kamila F. Koledina

Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Ufa, Russia
Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia
ORCID: 0000-0001-8555-0543, e-mail: koledinakamila@mail.ru

Parvin I. Rahimly

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-9271-5956, e-mail: pervin@rehimli.info

Abstract: The work proposes an approach to numerical modeling based on splitting by physical processes for a non-isothermal problem of filtration in a fractured-porous medium. The task is



complicated by the presence of a two-phase fluid and dual porosity of the reservoir. The system of equations defining the model is complex and is described by a system of strongly non-linear partial differential equations. The use of the splitting method according to physical processes makes it possible to simplify the solution algorithm while maintaining the equivalence to the conservative difference approximation of the original equations and ensuring the stability of the problem solution. In the numerical solution, the approximations of differential operators obtained in the framework of the finite difference method are used. The implementation of the numerical algorithm is based on the matrix sweep method. To test the method, a series of computational experiments were carried out. Calculations have shown that the developed methodology is correct and allows one to simulate the dynamic operating conditions of wells.

Keywords: two-phase fluid filtration, dual porosity model, fractured-pore type collector, piezoconductivity, temperature, matrix sweep.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-20047). The calculations were performed on the hybrid supercomputer K60 installed in the Center of Collective Usage of KIAM RAS.

For citation: Yu. O. Bobreneva, Yu. A. Poveshchenko, V. O. Podryga, S. V. Polyakov, R. M. Uzyanbaev, K. F. Koledina and P. I. Rahimly, “Numerical method for calculating heat and mass transfer of two-phase fluid in fractured-porous reservoir,” *Numerical Methods and Programming*, 25 (1), 33–46 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r104.

1. Введение. На сегодняшний день значительно увеличились объемы добычи углеводородов, при этом на постоянной основе вводятся в разработку новые месторождения со сложными геологическими условиями. И каждый открытый объект, как правило, имеет ухудшенные фильтрационно-емкостные свойства, что требует новых подходов к разработке [1]. На фоне этого существенно повысился уровень требований к научному подходу, к изучению движения жидкостей (газа, нефти и воды) в эксплуатируемых коллекторах.

Современная технология разработки месторождений основывается на всестороннем изучении свойств продуктивных пластов и содержащихся в них жидкостей, в том числе изучении сложных процессов, происходящих в пластах при их эксплуатации. Важно понимать фильтрационные особенности коллектора, характер движения жидкостей в пласте, пространственное распределение зон высоких и низких значений проницаемости. По-прежнему наиболее значимым и важным вопросом остается увеличение полноты выработки запасов углеводородов из залежей. Особенно актуальным данный вопрос остается для карбонатных коллекторов трещиноватого типа, в которых наличие трещиноватости приурочено к естественному геологическому процессу формирования залежи [2]. Основной проблемой разработки таких сред является сложное строение коллекторов, в которых наряду с межзерновыми порами всегда присутствуют трещины и каверны [3]. Фильтрация нефти и газа обусловлена в первую очередь трещинами и кавернами. Разработка месторождений с карбонатными коллекторами является исключительно сложным технологическим процессом и часто оказывается нерентабельной, несмотря на характерный для карбонатных коллекторов большой объем трещин. Наличие трещин и каверн придает особенности общеизвестной теории фильтрации жидкости в пластах [4]. Одна из них заключается в необходимости одновременно рассматривать процессы в разных средах, а именно в двух разных системах (система естественных трещин и поровая часть коллектора (матрица)) с разными фильтрационно-емкостными свойствами, которые в числовом выражении могут отличаться на несколько порядков [5, 6].

Сведения о коллекторе складываются из различных данных исследования образцов породы, промысловых геофизических и гидродинамических исследований скважин, анализа результатов проб нефти и воды, истории разработки месторождения. Но при таком разнообразии данных получаемая информация ограничена и не всегда достаточна для однозначного построения модели пласта. При этом проводимые эксперименты на скважинах требуют больших экономических затрат. В таких условиях задача исследования заключается в установлении качественных закономерностей, количественных соотношений, устойчивых к вариации исходных данных, и расширении совокупности сведений, которые невозможно получить экспериментально. Поэтому решение практических задач нефтяной и газовой промышленности требует использования самых современных разработок, быстрых и оптимальных решений.

В основе рассматриваемого в настоящей работе процесса лежат известные уравнения гидродинамики [5, 7, 8]. Несмотря на многообразие моделей в этой области, все еще остаются нерешенные вопросы, что связано с практическими особенностями данного процесса, которые усложняют модель.

Рассматривается процесс теплопереноса двухфазной слабосжимаемой жидкости в среде с двойной пористостью, т.е. в поровом коллекторе, расщепленном системой трещин. Каждая система описывается собственными фильтрационно-емкостными параметрами, отличие между которыми достигает от одного до нескольких порядков. Направление потока определяет течение жидкости, которое происходит только по трещинам, а поровая часть коллектора является некой емкостью скопления [4]. Переток жидкости из поровой части в трещины учитывается с помощью введения специальных функций, которые описаны в работе [9]. Течение слабосжимаемой жидкости в системе трещин находится в пределах справедливости закона Дарси.

Сложность описанной задачи заключается в большом количестве переменных, влияющих на фильтрационные процессы, в нелинейности основных уравнений гидродинамики, тепло- и массопереноса, в невозможности получения всей информации о течении процесса из-за большой трудоемкости экспериментальных исследований.

Численное моделирование подобных процессов тоже сопряжено со сложностями, связанными аналогично с большим количеством неизвестных и использованием небольших временных шагов. Возможности современных компьютерных технологий позволяют реализовывать задачи подобного рода. Для успешного решения задачи необходим эффективный численный алгоритм, с возможным запуском на архитектуре больших суперкомпьютеров [10].

В наших предыдущих работах [11–13] рассматривался изотермический процесс массопереноса двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа в одномерной постановке. Была предложена оригинальная неявная конечно-разностная схема на неравномерной пространственной сетке. Полученные результаты расчетов подтвердили эффективность предложенного алгоритма. В данной статье продолжается начатая работа и представляется математическая модель, описывающая неизотермический процесс теплопереноса двухфазной жидкости в карбонатном коллекторе трещиновато-порового типа. Для решения задачи предложен эффективный численный алгоритм. Также представлены результаты численного решения задачи, основанные на реальных данных, которые были получены в ходе натурных экспериментов на добывающей нефтяной скважине в период ее эксплуатации.

2. Постановка задачи. Исходные уравнения, описывающие представленную выше задачу, основываются на классических законах механики сплошной среды [5, 6]:

$$\frac{\partial(\phi^\alpha \rho_o^\alpha S_o^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_o^\alpha \mathbf{U}_o^\alpha) + q_o^\alpha = 0, \quad q_o^m = -q_o^f = -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\phi^\alpha \rho_w^\alpha S_w^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_w^\alpha \mathbf{U}_w^\alpha) + q_w^\alpha = 0, \quad q_w^m = -q_w^f = -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(\phi^f \rho_o^f S_o^f \varepsilon_o^f + \phi^m \rho_o^m S_o^m \varepsilon_o^m + \phi^f \rho_w^f S_w^f \varepsilon_w^f + \phi^m \rho_w^m S_w^m \varepsilon_w^m) + (1 - \phi^f - \phi^m) \rho_s \varepsilon_s] + \\ & + \operatorname{div} [\rho_o^f \varepsilon_o^f \mathbf{U}_o^f + \rho_w^f \varepsilon_w^f \mathbf{U}_w^f] + \operatorname{div} [P^f (\mathbf{U}_o^f + \mathbf{U}_w^f)] + \operatorname{div} [\mathbf{W}^f + \mathbf{W}^m + \mathbf{W}^s] = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\lambda_o^m = \frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \quad \lambda_w^m = \frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}. \quad (4)$$

Здесь $\alpha = f, m$, где f – система трещин, m – система матриц; s – скелет породы; P^f – пластовое давление в сети трещин (Па); P^m – пластовое давление в матрице (Па); ϕ^f – пористость в трещинах; ϕ^m – пористость в матрице; $\rho_o^\alpha, \rho_w^\alpha$ – плотности нефти и воды ($\text{кг}/\text{м}^3$); S_o^f, S_w^f – насыщенности нефти и воды в системе трещин: $S_o^f = 1 - S_w^f$; S_o^m, S_w^m – насыщенности нефти и воды в матрице: $S_o^m = 1 - S_w^m$; $\mathbf{U}_o^\alpha, \mathbf{U}_w^\alpha$ – скорости течения нефти и воды; q_o^α, q_w^α – функции перетока между матрицей и трещинами для нефти и воды; σ – коэффициент трещиноватой породы ($1/\text{м}^2$); $\varepsilon_o^\alpha, \varepsilon_w^\alpha$ – энергии нефти и воды; ρ_s, ε_s – плотность и энергия скелета; k^α – абсолютная проницаемость (м^2); k_{ro}, k_{rw} – относительные фазовые проницаемости нефти и воды; μ_o, μ_w – вязкости нефти и воды (Па·с).

Согласно обобщенному закону Дарси, скорости фильтрации нефти и воды равны:

$$\mathbf{U}_o^f = -\frac{k^f k_{ro}(S_o^f)}{\mu_o} \operatorname{grad} P^f, \quad \mathbf{U}_w^f = -\frac{k^f k_{rw}(S_w^f)}{\mu_w} \operatorname{grad} P^f, \quad \mathbf{U}_o^m = \mathbf{U}_w^m = 0. \quad (5)$$



Изменение плотностей для воды и нефти записывается с учетом давления: $\rho_w^\alpha = \rho_{w0}^\alpha + \beta_w(P^\alpha - P_0)$, $\rho_o^\alpha = \rho_{o0}^\alpha + \beta_o(P^\alpha - P_0)$, где β_o, β_w — коэффициенты сжимаемости нефти и воды; $\rho_{o0}^\alpha, \rho_{w0}^\alpha$ — плотности нефти и воды при атмосферном давлении в трещинах или в матрице, P_0 — атмосферное давление.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^f &= -(\phi^f [S_w^f \eta_w^f + (1 - S_w^f) \eta_o^f]) \nabla T, \\ \mathbf{W}^m &= -(\phi^m [S_w^m \eta_w^m + (1 - S_w^m) \eta_o^m]) \nabla T, \\ \mathbf{W}_s &= -[1 - \phi^f - \phi^m] \eta_s \nabla T, \\ \mathbf{W} &= \mathbf{W}^f + \mathbf{W}^m + \mathbf{W}_s, \end{aligned} \quad (6)$$

где T — температура (К); η_o^f, η_w^f — коэффициенты теплопроводности нефти и воды в системе трещин; η_o^m, η_w^m — коэффициенты теплопроводности нефти и воды в матрице; η_s — коэффициент теплопроводности в скелете.

Переток жидкости из поровой части коллектора в трещины описывается следующими функциями:

$$q_o^m = -q_o^f = -\frac{\sigma \rho_o^m k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o} (P^f - P^m), \quad q_w^m = -q_w^f = -\frac{\sigma \rho_w^m k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w} (P^f - P^m). \quad (7)$$

Задача (1)–(7) представляется сложной системой уравнений математической физики смешанного типа. Уравнения (1) и (2) описывают процесс массопереноса двухфазной жидкости в системе трещин и в матрице, (3) — уравнение энергии. В (1)–(4) искомыми функциями являются давление в сети трещин P^f , насыщенность воды в трещинах S_w^f и в матрице S_w^m и температура системы T . Остальные параметры системы представлены известными зависимостями либо константами.

Важным обстоятельством является то, что задача, сформулированная в виде законов сохранения, с общей матрицей системы относительно водонасыщенности, давления и температуры, обладает смешанными гиперболическими и параболическими свойствами. Непосредственное использование такой системы для целей определения динамики выше перечисленных переменных и построения неявной разностной схемы, требуемой для расчетов параболических уравнений с крупными шагами по времени, затруднительно. Соответственно численное решение не является тривиальной задачей. Для решения данной проблемы для исходных уравнений применяется метод расщепления по физическим процессам [11, 12, 14], позволяющий разделить уравнения на две части: 1) пьезопроводную; 2) описывающую перенос насыщенностей воды и нефти в трещинах и матрице.

Граничные и начальные условия также определяют в соответствии с принципом расщепления по физическим процессам. В первом процессе (пьезопроводного типа) происходит эволюция термодинамических переменных, уравнения носят параболический характер, соответственно на границе определяют поток, либо искомую функцию Дирихле/Неймана. Во втором процессе (переноса насыщенностей) граничное условие задают методом характеристик (вверх по потоку). В данной работе правое граничное условие представляется постоянными давлением и температурой на границе, левое граничное условие задается постоянными забойным давлением и температурой. Для начального условия используются пластовые давления и температура в матрице и трещинах в начальный момент времени.

Система (1)–(7) после алгебраических преобразований может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{S_w^f}{\rho_w^f} [\phi^f \rho_w^f]_t + \frac{(1 - S_w^f)}{\rho_o^f} [\phi^f \rho_o^f]_t + \text{DIG}^f &= 0, \quad \text{DIG}^f = \frac{1}{\rho_w^f} \text{div}(\rho_w^f \mathbf{U}_w^f) + \frac{1}{\rho_o^f} \text{div}(\rho_o^f \mathbf{U}_o^f) + \frac{q_w^f}{\rho_w^f} + \frac{q_o^f}{\rho_o^f}, \quad (8) \\ \frac{S_w^m}{\rho_w^m} [\phi^m \rho_w^m]_t + \frac{(1 - S_w^m)}{\rho_o^m} [\phi^m \rho_o^m]_t + \text{DIG}^m &= 0, \quad \text{DIG}^m = \frac{q_w^m}{\rho_w^m} + \frac{q_o^m}{\rho_o^m}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^f \left(S_w^f \rho_w^f \frac{\partial \varepsilon_w^f}{\partial t} + (1 - S_w^f) \rho_o^f \frac{\partial \varepsilon_o^f}{\partial t} \right) + \phi^m \left(S_w^m \rho_w^m \frac{\partial \varepsilon_w^m}{\partial t} + (1 - S_w^m) \rho_o^m \frac{\partial \varepsilon_o^m}{\partial t} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial t} (1 - \phi^f - \phi^m) \rho_s \varepsilon_s + \text{DIG}_\varepsilon^f + \text{DIG}_\varepsilon^m + \text{div} \mathbf{W}_s = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DIG}_\varepsilon^f &= [\text{div}(\rho_w^f \varepsilon_w^f \mathbf{U}_w^f) - \varepsilon_w^f \text{div}(\rho_w^f \mathbf{U}_w^f)] + [\text{div}(\rho_o^f \varepsilon_o^f \mathbf{U}_o^f) - \varepsilon_o^f \text{div}(\rho_o^f \mathbf{U}_o^f)] + \\ &+ \text{div} [P^f (\mathbf{U}_w^f + \mathbf{U}_o^f)] + \text{div} \mathbf{W}^f + (-\varepsilon_w^f q_w^f - \varepsilon_o^f q_o^f) = 0, \quad (10.1) \end{aligned}$$

$$\text{DIG}_\varepsilon^m = \text{div} \mathbf{W}^m + (-\varepsilon_w^m q_w^m - \varepsilon_o^m q_o^m), \quad (10.2)$$

$$\text{div} \mathbf{W}^f = - \left(\phi^f [S_w^f \eta_w^f + (1 - S_w^f) \eta_o^f] \right), \quad (10.3)$$

$$\text{div} \mathbf{W}^m = - \left(\phi^m [S_w^m \eta_w^m + (1 - S_w^m) \eta_o^m] \right). \quad (10.4)$$

3. Построение разностной схемы. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных используется неявная конечно-разностная схема на равномерной сетке [15, 16]. В работе рассматривается одномерная постановка задачи (1)–(7):

$$\overline{W}_h = (x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = L), \quad \overline{W}_\tau = (t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, M),$$

где x_i — координаты узлов сетки по пространству, h — шаг сетки по радиусу, t_k — координаты узлов сетки по времени, τ — шаг сетки по времени, N и M — число узлов по пространству и времени соответственно. В x_i определяются сеточные величины (давление и насыщенности). Под $(i + 1/2)$ -й ячейкой одномерной сетки понимается отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$, $\hat{h}_i = (h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}})/2$.

Уравнения (1)–(3) аппроксимируются их сеточными аналогами [16]:

$$(\overline{\phi}^\alpha \rho_o^\alpha S_o^\alpha)_t + \text{DIN}(\rho_o^\alpha U_o^\alpha)^\sim + q_o^{\alpha\sim} = 0, \quad q_o^{m\sim} = -q_o^{f\sim} = -\rho_o^{m\sim} \overline{\sigma}^\sim \lambda_o^{m\sim} (P^{f\sim} - P^{m\sim}), \quad (11)$$

$$(\overline{\phi}^\alpha \rho_w^\alpha S_w^\alpha)_t + \text{DIN}(\rho_w^\alpha U_w^\alpha)^\sim + q_w^{\alpha\sim} = 0, \quad q_w^{m\sim} = -q_w^{f\sim} = -\rho_w^{m\sim} \overline{\sigma}^\sim \lambda_w^{m\sim} (P^{f\sim} - P^{m\sim}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\overline{\phi}^f \rho_o^f S_o^f \varepsilon_o^f + \overline{\phi}^m \rho_o^m S_o^m \varepsilon_o^m + \overline{\phi}^f \rho_w^f S_w^f \varepsilon_w^f + \overline{\phi}^m \rho_w^m S_w^m \varepsilon_w^m) + \overline{(1 - \phi^f - \phi^m)} \rho_s \varepsilon_s \right]_t + \\ & + \text{DIN} \left[(\varepsilon_o^{f(\delta_{1f})})_{\text{up}} (\rho_o^f U_o^f)^\sim + (\varepsilon_w^{f(\delta_{1f})})_{\text{up}} (\rho_w^f U_w^f)^\sim \right] + \text{DIN} [P^f (U_o^f + U_w^f)]^\sim + \\ & + \text{DIN} [(W^f)^\sim + (W^m)^\sim + (W_s)^\sim] = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

$$(W^f)_{k+\frac{1}{2}}^\sim = -[\phi^f (S_w^f \eta_w^f + (1 - S_w^f) \eta_o^f)]_{k+\frac{1}{2}}^\sim \frac{(\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k)}{h_{k+\frac{1}{2}}}, \quad (13.1)$$

$$(W^m)_{k+\frac{1}{2}}^\sim = -[\phi^m (S_w^m \eta_w^m + (1 - S_w^m) \eta_o^m)]_{k+\frac{1}{2}}^\sim \frac{(\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k)}{h_{k+\frac{1}{2}}}, \quad (13.2)$$

$$(W_s)_{k+\frac{1}{2}}^\sim = -[(1 - \phi^f - \phi^m) \eta_s]_{k+\frac{1}{2}}^\sim \frac{(\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k)}{h_{k+\frac{1}{2}}}. \quad (13.3)$$

Здесь $\overline{\phi} = h\phi$ — пористость, $\overline{(1 - \phi^f - \phi^m)} = h - \overline{\phi}^f - \overline{\phi}^m$, $\overline{\sigma}^\sim = h\sigma^\sim$, δ_1 — вес по времени, выражение a^\sim обозначает аппроксимацию сеточной функции a между слоями по времени t и \hat{t} , $\hat{t} = t + \tau$, τ — временной шаг, up обозначает аппроксимацию выражения вверх по потоку, $(\text{DIN}a)_i = (a_{i+\frac{1}{2}} - a_{i-\frac{1}{2}})$, \hat{T} — значение температуры на временном слое \hat{t} . На временных слоях t и \hat{t} вводятся производные по времени и построенные специальным образом пространственно-точечные временные интерполяции: $a_t = (\hat{a} - a)/\tau$, $a^{(\delta_1)} = \delta_1 \hat{a} + (1 - \delta_1)a$. Интерполяционные веса для трещин δ_{1f} и матрицы δ_{1m} могут зависеть от узла пространственной сетки и будут представляться как

$$\delta_{1f} = \sqrt{(\overline{\phi}^f)^\wedge} / \left[\sqrt{(\overline{\phi}^f)^\wedge} + \sqrt{(\overline{\phi}^f)} \right], \quad \delta_{1m} = \sqrt{(\overline{\phi}^m)^\wedge} / \left[\sqrt{(\overline{\phi}^m)^\wedge} + \sqrt{(\overline{\phi}^m)} \right],$$

где $(\overline{\phi})^\wedge$ — значение пористости на временном слое \hat{t} .

После расщепления система (11)–(13) имеет вид:

$$\frac{F^f}{\tau} = \frac{(S_w^f)^{(\delta_{1f})}}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}} \left[\overline{\phi}^f \rho_w^f \right]_t + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta_{1f})}}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} \left[\overline{\phi}^f \rho_o^f \right]_t + \text{DIG}^{f\sim} = 0, \quad (14)$$

$$\text{DIG}^{f\sim} = \frac{1}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}} \text{DIN}(\rho_w^f U_w^f)^\sim + \frac{1}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} \text{DIN}(\rho_o^f U_o^f)^\sim + \frac{q_o^{f\sim}}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} + \frac{q_w^{f\sim}}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}}, \quad (14.1)$$



$$\frac{F^m}{\tau} = \frac{(S_w^m)^{(\delta_{1m})}}{(\rho_w^m)^{(\delta_{1m})}} \left[\bar{\phi}^m \rho_w^m \right]_t + \frac{(1 - S_w^m)^{(\delta_{1m})}}{(\rho_o^m)^{(\delta_{1m})}} \left[\bar{\phi}^m \rho_o^m \right]_t + \text{DIG}^{m\sim} = 0, \quad (15)$$

$$\text{DIG}^{m\sim} = \frac{q_o^{m\sim}}{(\rho_o^m)^{(\delta_{1m})}} + \frac{q_w^{m\sim}}{(\rho_w^m)^{(\delta_{1m})}}, \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi_{\varepsilon k}}{\tau} = & (\bar{\phi}^f)^{(1-\delta_{1f})} \left([S_w^f \rho_w^f]^{(\delta_{1f})} (\varepsilon_w^f)_t + [(1 - S_w^f) \rho_o^f]^{(\delta_{1f})} (\varepsilon_o^f)_t \right) + \\ & + (\bar{\phi}^m)^{(1-\delta_{1m})} \left([S_w^m \rho_w^m]^{(\delta_{1m})} (\varepsilon_w^m)_t + [(1 - S_w^m) \rho_o^m]^{(\delta_{1m})} (\varepsilon_o^m)_t \right) + \left(\overline{(1 - \phi^f - \phi^m)} \rho_s \varepsilon_s \right)_t + \\ & + \text{DIG}_{\varepsilon}^{f\sim} + \text{DIG}_{\varepsilon}^{m\sim} + \text{DINW}_s^{\sim} = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DIG}_{\varepsilon}^{f\sim} = & \left(\text{DIN} \left[(\varepsilon_w^f)^{(\delta_{1f})} \right]_{\text{up}} (\rho_w^f U_w^f)^{\sim} \right) - \varepsilon_w^f (\delta_{1f}) \text{DIN} (\rho_w^f U_w^f)^{\sim} + \\ & + \left(\text{DIN} \left[(\varepsilon_o^f)^{(\delta_{1f})} \right]_{\text{up}} (\rho_o^f U_o^f)^{\sim} \right) - \varepsilon_o^f (\delta_{1f}) \text{DIN} (\rho_o^f U_o^f)^{\sim} + \\ & + \text{DIN} [P^f (U_w^f + U_o^f)]^{\sim} + \text{DINW}^{f\sim} - (\varepsilon_w^f)^{(\delta_{1f})} q_w^{f\sim} - (\varepsilon_o^f)^{(\delta_{1f})} q_o^{f\sim}, \quad (16.1) \end{aligned}$$

$$\text{DIG}_{\varepsilon}^{m\sim} = \text{DINW}^{m\sim} - (\varepsilon_w^m)^{(\delta_{1m})} q_w^{m\sim} - (\varepsilon_o^m)^{(\delta_{1m})} q_o^{m\sim}, \quad (16.2)$$

В результате линеаризации уравнения (16) мы получим связь между приращениями давлений в матрице δP^m и в трещине δP^f , приращением температуры δT и невязкой Φ^{ms} :

$$\delta P^m = \pi_m^s \delta P^f - \Phi^{ms} - \frac{\Theta_{P_{m\tau}}^s}{\Theta_{P_{m\tau}}^s} \delta T, \quad (17)$$

где

$$\pi_m^s = \frac{\tau}{\Theta_{P_{m\tau}}^s} \left(\frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta_{1m})\approx}} \right), \quad (17.1)$$

$$\Phi^{ms} = \frac{F^{ms}}{\Theta_{P_{m\tau}}^s}, \quad (17.2)$$

$$\Theta_{P_{m\tau}}^s = \Theta_{P_m}^s + \tau \left(\frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta_{1m})\approx}} \right), \quad (17.3)$$

$$\Theta_{P_m}^s = \frac{(S_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}}{(\rho_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}} \left(\bar{\phi}^m \rho_w^m \right)_{P_m}^{ts} + \frac{(1 - S_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}}{(\rho_o^m)^{(\delta_{1m})\approx}} \left(\bar{\phi}^m \rho_o^m \right)_{P_m}^{ts}, \quad (17.4)$$

$$\Theta_{T_m}^s = \frac{(S_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}}{(\rho_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}} \left(\bar{\phi}^m \rho_w^m \right)_T^{ts} + \frac{(1 - S_w^m)^{(\delta_{1m})\approx}}{(\rho_o^m)^{(\delta_{1m})\approx}} \left(\bar{\phi}^m \rho_o^m \right)_T^{ts}. \quad (17.5)$$

Здесь a^{\sim} означает, что значения величины неявного слоя по времени берутся на известной итерации. Этот же смысл имеет индекс s , обозначающий известную вычисленную итерацию. Штрих обозначает производную по термодинамическим переменным (давлению или температуре). F^{ms} берется из (15) со значениями величин неявного слоя по времени с s -й итерации.

Далее линеаризованная система уравнений (14)–(16) с учетом (17) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} -(A_{P_k}^{11} \delta P_{k-1}^f + A_{P_k}^{12} \delta T_{k-1}) + (C_{P_k}^{11} \delta P_k^f + C_{P_k}^{12} \delta T_k) - (B_{P_k}^{11} \delta P_{k+1}^f + B_{P_k}^{12} \delta T_{k+1}) = \Phi_{P_k}^1, \\ -(A_{\varepsilon k}^{21} \delta P_{k-1}^f + A_{\varepsilon k}^{22} \delta T_{k-1}) + (C_{\varepsilon k}^{21} \delta P_k^f + C_{\varepsilon k}^{22} \delta T_k) - (B_{\varepsilon k}^{21} \delta P_{k+1}^f + B_{\varepsilon k}^{22} \delta T_{k+1}) = \Phi_{\varepsilon k}^2, \end{cases} \quad (18)$$

где матрицы системы выглядят следующим образом:

$$A_{P_k}^{12} = 0, \quad (18.1)$$

$$B_{P_k}^{12} = 0, \quad (18.2)$$

$$A_{P_k}^{11} = \frac{\tau}{[(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}]_k} \left(\frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{rw(k-\frac{1}{2})}^{\text{ups}} \right) + \frac{\tau}{[(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}]_k} \left(\frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{ro(k-\frac{1}{2})}^{\text{ups}} \right), \quad (18.3)$$

$$B_{P_k}^{11} = \frac{\tau}{[(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}]_k} \left(\frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{rw(k+\frac{1}{2})}^{\text{ups}} \right) + \frac{\tau}{[(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}]_k} \left(\frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{ro(k+\frac{1}{2})}^{\text{ups}} \right), \quad (18.4)$$

$$\begin{aligned} C_{P_k}^{11} = & \left[\frac{(S_w^f)^{(\delta_{1f})}}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}} \left(\overline{\phi^f} \rho_w^f \right)_{P_f}^{\prime s} + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta_{1f})}}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} \left(\overline{\phi^f} \rho_o^f \right)_{P_f}^{\prime s} \right]_k + \\ & + \frac{\tau}{[(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}]_k} \left(\frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{rw(k+\frac{1}{2})}^{\text{ups}} + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{rw(k-\frac{1}{2})}^{\text{ups}} \right) + \\ & + \frac{\tau}{[(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}]_k} \left(\frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{ro(k+\frac{1}{2})}^{\text{ups}} + \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{ro(k-\frac{1}{2})}^{\text{ups}} \right) + \\ & + \left(\frac{\tau}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}} (\rho_w^m \overline{\sigma} \lambda_w^m)^s (1 - \pi_m^s) \right)_k + \left(\frac{\tau}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} (\rho_o^m \overline{\sigma} \lambda_o^m)^s (1 - \pi_m^s) \right)_k, \quad (18.5) \end{aligned}$$

$$C_{P_k}^{12} = \left[\frac{\Theta_{T_m}^s}{\Theta_{P_{m\tau}}^s} \left(\frac{(\rho_w^m \overline{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}} + \frac{(\rho_o^m \overline{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} \right) \tau + \left(\frac{(S_w^f)^{(\delta_{1f})}}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}} \left(\overline{\phi^f} \rho_w^f \right)_T^{\prime s} + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta_{1f})}}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} \left(\overline{\phi^f} \rho_o^f \right)_T^{\prime s} \right) \right]_k, \quad (18.6)$$

$$\Phi_{P_k}^1 = -F^{fs} - \left(\frac{(\rho_w^m \overline{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^f)^{(\delta_{1f})}} + \frac{(\rho_o^m \overline{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^f)^{(\delta_{1f})}} \right) \tau \Phi^{ms}. \quad (18.7)$$

Здесь F^{fs} берется из (14) со значениями величин неявного слоя по времени с s -й итерации.

В следующих выражениях для матриц $A_{\varepsilon k}^{21}$, $B_{\varepsilon k}^{21}$, $C_{\varepsilon k}^{21}$, $A_{\varepsilon k}^{22}$, $B_{\varepsilon k}^{22}$, $C_{\varepsilon k}^{22}$ из (18) индекс $k \pm 1/2$ заменяется на $\pm 1/2$.

$$A_{\varepsilon k}^{21} = \tau \left(\frac{1}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{-\frac{1}{2}}^s (k_{rw}^{\text{up}})^s_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{-\frac{1}{2}}^s (k_{ro}^{\text{up}})^s_{-\frac{1}{2}} \right), \quad (18.8)$$

$$B_{\varepsilon k}^{21} = \tau \left(\frac{1}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{\frac{1}{2}}^s (k_{rw}^{\text{up}})^s_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{\frac{1}{2}}^s (k_{ro}^{\text{up}})^s_{\frac{1}{2}} \right), \quad (18.9)$$

$$C_{\varepsilon k}^{21} = C_{\varepsilon k}^{f21} + C_{\varepsilon k}^{m21} + C_{\varepsilon k}^{s21} + C_{\varepsilon P_k}^{f21}, \quad (18.10)$$

где

$$C_{\varepsilon k}^{f21} = \left(\left(\overline{\phi^f} \right)^{(1-\delta_{1f})} \left([S_w^f \rho_w^f]^{(\delta_{1f})} \left[- \left(\frac{P^f}{\rho_w^f} \right)'_{P_f} \right] + [(1 - S_w^f) \rho_o^f]^{(\delta_{1f})} \left[- \left(\frac{P^f}{\rho_o^f} \right)'_{P_f} \right] \right) \right) \approx, \quad (18.10a)$$

$$C_{\varepsilon k}^{m21} = \left(\left(\overline{\phi^m} \right)^{(1-\delta_{1m})} \left([S_w^m \rho_w^m]^{(\delta_{1m})} \left[- \left(\frac{P^m}{\rho_w^m} \right)'_{P_m} \pi_m^s \right] + [(1 - S_w^m) \rho_o^m]^{(\delta_{1m})} \left[- \left(\frac{P^m}{\rho_o^m} \right)'_{P_m} \pi_m^s \right] \right) \right) \approx, \quad (18.10b)$$

$$C_{\varepsilon k}^{s21} = \left(\left(\overline{(1 - \phi^f - \phi^m)} \rho_s \left[- \left(\frac{P^s}{\rho^s} \right)' \right] \right)_{P_s} \left[(P_s)'_{P_f} + (P_s)'_{P_m} \pi_m^s \right] \right) \approx, \quad (18.10c)$$

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon P_k}^{f21} = & \tau \left(\frac{1}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{-\frac{1}{2}}^s (k_{rw}^{\text{up}})^s_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{-\frac{1}{2}}^s (k_{ro}^{\text{up}})^s_{-\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \tau \left(\frac{1}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{\frac{1}{2}}^s (k_{rw}^{\text{up}})^s_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\frac{P^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{\frac{1}{2}}^s (k_{ro}^{\text{up}})^s_{\frac{1}{2}} \right), \quad (18.10d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon k}^{22} = & \frac{\tau}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\phi^f [S_w^f \eta_w^f + (1 - S_w^f) \eta_o^f] \right)_{-\frac{1}{2}} \approx + \frac{\tau}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\phi^m [S_w^m \eta_w^m + (1 - S_w^m) \eta_o^m] \right)_{-\frac{1}{2}} \approx + \\ & + \frac{\tau}{h_{-\frac{1}{2}}} \left((1 - \phi^f - \phi^m) \eta_s \right)_{-\frac{1}{2}} \approx, \quad (18.11) \end{aligned}$$



$$B_{\varepsilon k}^{22} = \frac{\tau}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\phi^f [S_w^f \eta_w^f + (1 - S_w^f) \eta_o^f] \right)_{\frac{1}{2}}^{\approx} + \frac{\tau}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\phi^m [S_w^m \eta_w^m + (1 - S_w^m) \eta_o^m] \right)_{\frac{1}{2}}^{\approx} + \frac{\tau}{h_{\frac{1}{2}}} \left((1 - \phi^f - \phi^m) \eta_s \right)_{\frac{1}{2}}^{\approx}. \quad (18.12)$$

Здесь полагается $P^s = (\phi^f P^f + \phi^m P^m) / (\phi^f + \phi^m)$.

Далее, обозначив через c_P удельную теплоемкость при постоянном давлении, будем иметь:

$$C_{\varepsilon k}^{22} = C_{\varepsilon k}^{f22} + C_{\varepsilon k}^{m22} + C_{\varepsilon k}^{s22} + C_{\eta k}^{f22} + C_{\eta k}^{m22} + C_{\eta k}^{s22}, \quad (18.13)$$

где

$$C_{\varepsilon k}^{f22} = \left(\left(\overline{\phi^f} \right)^{(1-\delta_{1f})} \left([S_w^f \rho_w^f]^{(\delta_{1f})} \left[c_{\rho w}^f - \left(\frac{P^f}{\rho_w^f} \right)' \right] + [(1 - S_w^f) \rho_o^f]^{(\delta_{1f})} \left[c_{\rho o}^f - \left(\frac{P^f}{\rho_o^f} \right)' \right] \right) \right)_{\varepsilon k}^{\approx}, \quad (18.13a)$$

$$C_{\varepsilon k}^{m22} = \left(\left(\overline{\phi^m} \right)^{(1-\delta_{1m})} \left([S_w^m \rho_w^m]^{(\delta_{1m})} \left[c_{\rho w}^m - \left(\frac{P^m}{\rho_w^m} \right)' \right] \frac{-\Theta_{T_m}^s}{\Theta_{P_m}^s} + [(1 - S_w^m) \rho_o^m]^{(\delta_{1m})} \left[c_{\rho o}^m - \left(\frac{P^m}{\rho_o^m} \right)' \right] \frac{-\Theta_{T_m}^s}{\Theta_{P_m}^s} \right) \right)_{\varepsilon k}^{\approx}, \quad (18.13b)$$

$$C_{\varepsilon k}^{s22} = \left(\left(\overline{(1 - \phi^f - \phi^m)} \right) \rho_s \left[c_P^s T - \left(\frac{P^s}{\rho^s} \right)' \right] \right)_{\varepsilon k}^{\approx}. \quad (18.13c)$$

Здесь принимаем $(P^s)'_{P_m} = \phi^m / (\phi^f + \phi^m)$, и с учетом этого $(P^s)'_T = [\phi^m / (\phi^f + \phi^m)] [-\Theta_{T_m}^s / \Theta_{P_m}^s]$.

$$C_{\eta k}^{f22} = \frac{\tau}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\phi^f [S_w^f \eta_w^f + (1 - S_w^f) \eta_o^f] \right)_{\frac{1}{2}}^{\approx} + \frac{\tau}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\phi^f [S_w^f \eta_w^f + (1 - S_w^f) \eta_o^f] \right)_{-\frac{1}{2}}^{\approx}, \quad (18.13d)$$

$$C_{\eta k}^{m22} = \frac{\tau}{h_{\frac{1}{2}}} \left(\phi^m [S_w^m \eta_w^m + (1 - S_w^m) \eta_o^m] \right)_{\frac{1}{2}}^{\approx} + \frac{\tau}{h_{-\frac{1}{2}}} \left(\phi^m [S_w^m \eta_w^m + (1 - S_w^m) \eta_o^m] \right)_{-\frac{1}{2}}^{\approx}, \quad (18.13e)$$

$$C_{\eta k}^{s22} = \frac{\tau}{h_{\frac{1}{2}}} \left((1 - \phi^f - \phi^m) \eta_s \right)_{\frac{1}{2}}^{\approx}, \quad (18.13f)$$

$$\Phi_{\varepsilon k}^2 = \Phi_{\varepsilon k} + \Phi_{\varepsilon k}^{s2} + \Phi_{\varepsilon k}^{m2}. \quad (18.14)$$

Здесь $\Phi_{\varepsilon k}$ берется из (16) со значениями величин неявного слоя по времени с s -й итерации. Полагаем

$$\Phi_{\varepsilon k}^{s2} = \left(- \frac{\phi^m}{\phi^m + \phi^f} \overline{(1 - \phi^f - \phi^m)} \left[\frac{F^{ms}}{\Theta_{P_{m\tau}}^s} \right] \right)_{\varepsilon k}^{\approx}, \quad (18.14a)$$

$$\Phi_{\varepsilon k}^{m2} = \left(\left(\overline{\phi^m} \right)^{(1-\delta_{1m})} \left([S_w^m \rho_w^m]^{(\delta_{1m})} \left[- \left(\frac{P^m}{\rho_w^m} \right)' \right] \frac{F^{ms}}{\Theta_{P_{m\tau}}^s} + [(1 - S_w^m) \rho_o^m]^{(\delta_{1m})} \left[- \left(\frac{P^m}{\rho_o^m} \right)' \right] \frac{F^{ms}}{\Theta_{P_{m\tau}}^s} \right) \right)_{\varepsilon k}^{\approx}. \quad (18.14b)$$

Итак, (18) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Таким образом, в работе рассмотрена математическая модель процесса тепломассопереноса двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа на основе модели двойной пористости. На основе алгоритма расщепления по физическим процессам построена разностная схема с временными весами, обеспечивающая корректность и согласованность потоков между системой естественных трещин и поровым коллектором. Для численного решения такой задачи предложена оригинальная неявная конечно-разностная схема на пространственной сетке. Полученная система уравнений линеаризуется и решается с помощью матричной прогонки.

Подход, излагаемый в данной работе, в пространственно одномерном случае обобщается на многомерные алгоритмы методом теории опорных операторов div , grad и т.д. Представленная в данной работе инвариантная запись операций векторного анализа позволяет переходить на различные размерности задачи. При этом используемые для расщепления по физическим процессам уравнения (8)–(10) являются точным разностным следствием исходной массово-энергетической балансной системы (1)–(7) в пространственно многомерном случае.

4. Матричная прогонка. Для численного решения системы уравнений двухфазной фильтрации в коллекторе трещиновато-порового типа (8)–(10) применялся метод IMPES [10]. Система уравнений относительно давления и температуры решалась с помощью неявной конечно-разностной схемы. Далее, после нахождения данных параметров в матрице и трещинах переходили к расчету второй системы уравнений относительно переноса насыщенностей. Проведя аппроксимацию частных производных соответствующими конечными разностями, получаем СЛАУ (18) с матрицей блочно-трехдиагональной структуры [16]. Для удобства решения СЛАУ (18) запишем в каноническом виде:

$$\begin{aligned} -A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} &= F_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ A_i &= \begin{pmatrix} a_{i,0,0} & a_{i,0,1} \\ a_{i,1,0} & a_{i,1,1} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} b_{i,0,0} & b_{i,0,1} \\ b_{i,1,0} & b_{i,1,1} \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} c_{i,0,0} & c_{i,0,1} \\ c_{i,1,0} & c_{i,1,1} \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} F_{i,0} \\ F_{i,1} \end{pmatrix}, \quad y_i = \begin{pmatrix} y_{i,0} \\ y_{i,1} \end{pmatrix}; \\ C_0 y_0 - B_0 y_1 &= F_0, \quad C_N y_N - A_N y_{N-1} = F_N. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь A, B, C — квадратные матрицы (блоки) размера 2×2 (первая строка — пьезопроводная часть, вторая строка — энергетическая часть, нумерация от 0); y — искомые давление δP и температура δT , F — векторы размера 2×1 .

Для решения системы (19) использовался метод матричной прогонки. Для реализации метода необходимы операции над матрицами: сложение, умножение, транспонирование, которые были реализованы в виде библиотечных функций. Метод матричной прогонки вынесен в отдельную функцию, так как в ходе расчета к ней будет обращение на каждом слое по времени (итерации). Решение состоит из двух этапов — хода вперед и хода назад:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= C_0^{-1} B_0, \quad \beta_0 = C_0^{-1} F_0, \quad \alpha_i = (C_i - A_i \alpha_{i-1})^{-1} B_i, \\ \beta_i &= (C_i - A_i \alpha_{i-1})^{-1} (F_i + A_i \beta_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N; \\ y_N &= \beta_N, \quad y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0; \\ \alpha_i &= \begin{pmatrix} \alpha_{i,0,0} & \alpha_{i,0,1} \\ \alpha_{i,1,0} & \alpha_{i,1,1} \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \begin{pmatrix} \beta_{i,0} \\ \beta_{i,1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Описанная выше схема реализована в виде программного модуля, написанного на языке C.

5. Результаты. На основе разработанного модуля проведена серия вычислительных расчетов. Входные параметры для вычислительных экспериментов взяты и варьировались на основе промысловых исследований на скважинах различных карбонатных месторождений России. Для верификации модели расчетные данные сравнивались с промысловыми, погрешность не превышала 5%, что вполне устраивает при решении практических задач.

Рассматривалась следующая задача. Скважина длительный период времени находилась в бездействии. Предполагается, что давление и температура в пласте вокруг скважины восстановились до начальных значений: $P_0^f = 33$ МПа, $P_0^m = 33$ МПа, $T_0 = 368$ К. Наличие гидродинамической связи с соседними скважинами не отмечается. Рассматриваемая скважина запускается в работу с постоянным забойным давлением. В момент запуска в пласте образуется воронка депрессии, и жидкость начинает поступать в скважину. Необходимо исследовать поведение давления и температуры вокруг работающей скважины при различных значениях проницаемости. При расчете использовались следующие параметры:

$$\begin{aligned} P_0^f &= 33 \text{ МПа}, \quad P_0^m = 33 \text{ МПа}, \quad P_{wf}^f = 25 \text{ МПа}, \quad P_{wf}^m = 25 \text{ МПа}, \\ \phi^f &= 0.01, \quad \phi^m = 0.1, \quad \rho_o = 740 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_w = 1118 \text{ кг/м}^3, \\ S_w^f &= S_w^m = 0.4, \quad \mu_w^f = \mu_w^m = 0.67 \times 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_o^f = \mu_o^m = 0.86 \times 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \sigma = 0.6 \text{ м}^{-2}, \\ k_{rw} &= 0.03(S_w)^2 + 0.002(S_w) + 0.0002, \quad k_{ro} = 7.7(S_w)^4 - 12.07(S_w)^3 + 6.9(S_w)^2 - 1.8(S_w) + 0.2, \\ k^f &= 10^{-12} \text{ м}^2, \quad k^m = 10^{-15} \text{ м}^2. \end{aligned}$$



В ходе тестовых вычислительных экспериментов выявлено, что наибольший вклад в модель вносит такой известный параметр как проницаемость, далее на рис. 1, 2 представлены расчеты с разными проницаемостями и вязкостями. Остальные параметры (вязкость, пористость и т.д.) существенных изменений на итоговый результат моделирования не оказывают. Параметры, задаваемые в модели, берутся из успешно проведенных промысловых экспериментов, где оценить погрешность каждого параметра затруднительно.

На рис. 1 представлена динамика давлений в матрице P^m и трещинах P^f около скважины для трех пар проницаемостей k^f и k^m , соответствующих значениям 10^{-13} м^2 и 10^{-15} м^2 , 10^{-12} м^2 и 10^{-14} м^2 , 10^{-11} м^2 и 10^{-14} м^2 .

Отметим, что при заданных условиях при проницаемостях $k^f = 10^{-11} \text{ м}^2$ и $k^m = 10^{-14} \text{ м}^2$ давление падает быстрее в сравнении с другими парами меньшей проницаемости. Также из графиков, представленных на рис. 1, следует, что давление в трещине просаживается быстрее, чем в самой матрице. В связи с этим для коллекторов с высокой проницаемостью необходимо подбирать характеристики работы скважины такие, чтобы за небольшой период работы давление просаживалось медленнее, в противном случае это приведет к быстрому истощению пласта.

На рис. 2 показаны графики зависимостей давлений в матрице P^m и трещинах P^f около скважины от времени для различных значений вязкости нефти $\mu_o = 0.86 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\mu_o = 1.86 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\mu_o = 2.86 \text{ Па} \cdot \text{с}$. По результатам расчетов видим (рис. 2), что, в отличие от проницаемости, изменение вязкости значительных изменений в динамику давления не вносит. Однако при низких значениях вязкости давление просаживается чуть быстрее.

На рис. 3 представлены графики изменения температуры от времени для различных значений проницаемости k^f в трещинах. Отметим, что скорость распространения температуры не зависит от проницаемости коллектора, в связи с этим она в сравнении с давлением изменяется незначительно, диапазон для рассматриваемой задачи составляет 7 К. При проницаемости $k^f = 10^{-11} \text{ м}^2$ температура снижается быстрее.

6. Заключение. В работе построена математическая модель неизоэтермического процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде с учетом двойной пористости и наличия двухфазной жидкости. На основе алгоритма расщепления по физическим процессам построена разностная схема с временными весами, обеспечивающая корректность и согласованность потоков между системой естественных трещин и поровым коллектором. Для численного решения задачи предложена оригинальная неявная конечно-разностная схема на пространственной сетке. Полученная в результате система уравнений решалась с

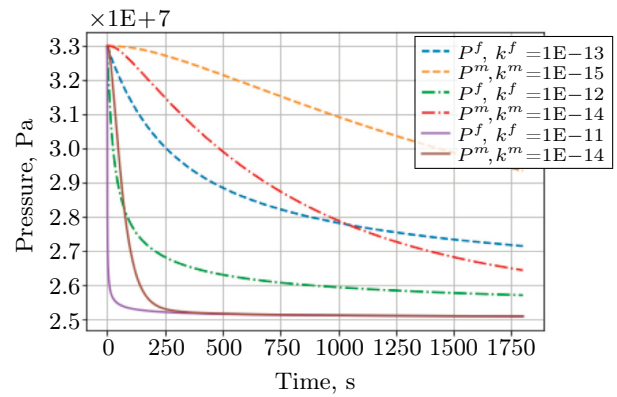


Рис. 1. Динамика давлений P^f , P^m при различных проницаемостях пласта
Fig. 1. Dynamics of pressure P^f , P^m at different formation permeabilities

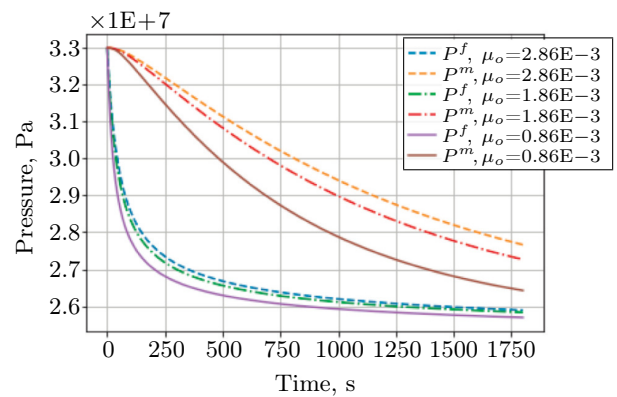


Рис. 2. Зависимости давлений P^f , P^m от времени для различных вязкостей жидкости
Fig. 2. Pressure dependences P^f , P^m on time for different liquid viscosities

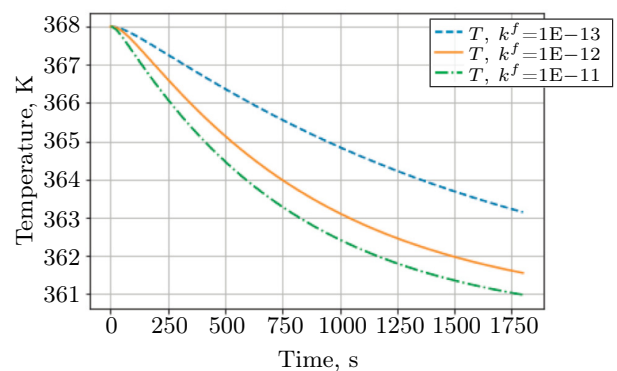


Рис. 3. Динамика температуры для разных абсолютных проницаемостей в трещинах
Fig. 3. Dynamics of temperature for different absolute permeabilities in fractures

помощью метода матричной прогонки. Проведена серия вычислительных экспериментов, которые представлены в виде динамики распределения давления и температуры в коллекторе трещиновато-порового типа около работающей добывающей скважины и на различных расстояниях от нее. Полученные результаты позволят оперативно проводить мониторинг и регулировать работу скважин с целью повышения добычи.

Список литературы

1. Сложный путь трудной нефти. Обзор. <https://www.interfax.ru/business/843599>. Дата обращения: 22 января 2024.
2. *Aguilera R.* Naturally fractured reservoirs. Tulsa: PennWell Books, 1980.
3. *Денк С.О.* Проблемы трещиноватых продуктивных объектов. Пермь: Электронные издательские системы, 2004.
4. *Golf-Racht T.D.* Fundamentals of fractured reservoir engineering. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982.
5. *Чекалюк Э.Б.* Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965.
6. *Котляков Ф.И.* Физика нефтяных и газовых коллекторов. М.: Недра, 1977.
7. *Чоловский И.П.* Справочник: Спутник нефтегазопромыслового геолога. М.: Недра, 1989.
8. *Пасконов В.М., Полержаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
9. *Warren J.E., Root P.J.* The behavior of naturally fractured reservoirs // J. Soc. Petrol. Eng. 1963. **3**, N 3. 245–255. doi 10.2118/426-PA.
10. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
11. *Bobreneva Yu.O., Rahimly P.I., Poveshchenko Yu.A., et al.* On one method of numerical modeling of piezoelectroconductive processes of a two-phase fluid system in a fractured-porous reservoir // Journal of Physics: Conference Series. 2021. **2131**, N 2. Article Identifier 022001. doi 10.1088/1742-6596/2131/2/022001.
12. *Бобреньева Ю.О.* Моделирование процесса пьезопродности двухфазной жидкой системы в коллекторе трещиновато-порового типа // Матем. моделирование. 2022. **34**, № 1. 33–46. doi 10.20948/mm-2022-01-03.
13. *Uzuanbaev R., Bobreneva Yu., Poveshchenko Yu., et al.* Modeling of two-phase fluid flow processes in a fractured-porous type reservoir using parallel computations // Communications in Computer and Information Science. Vol. 1618 Cham: Springer, 2022. 276–292. doi 10.1007/978-3-031-11623-0_19.
14. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
15. *Alekseeva N., Podryga V., Rahimly P., et al.* Mathematical modeling of gas hydrates dissociation in porous media with water-ice phase transformations using differential constrains // Mathematics. 2022. **10**, N 19. Article Number 3470. doi 10.3390/math10193470.
16. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию
30 октября 2023 г.

Принята к публикации
7 декабря 2023 г.

Информация об авторах

Юлия Олеговна Бобреньева — к.ф.-м.н., инженер; Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН), пр-кт Октября, д. 141, 450075, Уфа, Российская Федерация.

Юрий Андреевич Повешченко — д.ф.-м.н., профессор, вед. науч. сотр.; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

Виктория Олеговна Подрыга — д.ф.-м.н., доцент, вед. науч. сотр.; 1) Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация; 2) Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Ленинградский проспект, д. 64, 125319, Москва, Российская Федерация.



Сергей Владимирович Поляков — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр.; 1) Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация; 2) Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН), пр-кт Октября, д. 141, 450075, Уфа, Российская Федерация.

Рагиль Мунирович Узьянбаев — старший преподаватель; 1) Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН), пр-кт Октября, д. 141, 450075, Уфа, Российская Федерация; 2) Уфимский государственный нефтяной технический университет, ул. Космонавтов, д. 1, 450062, Уфа, Российская Федерация.

Камила Феликсовна Коледина — д.ф.-м.н., доцент, вед. науч. сотр.; 1) Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК УФИЦ РАН), пр-кт Октября, д. 141, 450075, Уфа, Российская Федерация; 2) Уфимский государственный нефтяной технический университет, ул. Космонавтов, д. 1, 450062, Уфа, Российская Федерация.

Рагимли Парвин Ильгар кызы — к.ф.-м.н., науч. сотр.; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

References

1. The Difficult Path of Difficult Oil. Review. <https://www.interfax.ru/business/843599>. Cited January 22, 2024.
2. R. Aguilera, *Naturally Fractured Reservoirs* (PenWell Books, Tulsa, 1980).
3. S. O. Denk, *Problems of Fractured Productive Objects* (Electronic Publishing, Perm, 2004) [in Russian].
4. T. D. Golf-Racht, *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering* (Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1982).
5. E. B. Chekalyuk, *Thermodynamics of Oil Reservoir* (Nedra, Moscow, 1965) [in Russian].
6. F. I. Kotyakhov, *Physics of Oil and Gas Reservoirs* (Nedra, Moscow, 1977) [in Russian].
7. I. P. Cholovsky, *Handbook: Oil and Gas Geologist's Companion* (Nedra, Moscow, 1989) [in Russian].
8. V. M. Paskonov, V. I. Polezhaev, and L. A. Chudov, *Numerical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
9. J. E. Warren and P. J. Root, "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs," *J. Soc. Petrol. Eng.* **3** (3), 245–255 (1963). doi 10.2118/426-PA.
10. H. Aziz and E. Settari, *Mathematical Modeling of Reservoir Systems* (Inst. Komp'yut. Issled., Moscow; Izhevsk, 2004) [in Russian].
11. Yu. O. Bobreneva, P. I. Rahimly, Yu. A. Poveshchenko, et al., "On One Method of Numerical Modeling of Piezoconductive Processes of a Two-Phase Fluid System in a Fractured-Porous Reservoir," *J. Phys.: Conf. Ser.* **2131** (2), Article Identifier 022001 (2021). doi 10.1088/1742-6596/2131/2/022001.
12. Yu. O. Bobreneva, "Modeling the Piezoconductivity Process of a Two-Phase Fluid System in a Fractured-Porous Reservoir," *Mat. Model.* **34** (1), 33–46 (2022) [*Math. Models Comput. Simul.* **14** (4), 645–653 (2022)]. doi 10.1134/S2070048222040032.
13. R. Uzyanbaev, Yu. Bobreneva, Yu. Poveshchenko, et al., "Modeling of Two-Phase Fluid Flow Processes in a Fractured-Porous Type Reservoir Using Parallel Computations," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2022), Vol. 1618, pp. 276–292. doi 10.1007/978-3-031-11623-0_19.
14. G. I. Marchuk, *Splitting Methods* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
15. N. Alekseeva, V. Podryga, P. Rahimly, et al., "Mathematical Modeling of Gas Hydrates Dissociation in Porous Media with Water–Ice Phase Transformations Using Differential Constrains," *Mathematics* **10** (19), Article Number 3470 (2022). doi 10.3390/math10193470.
16. A. A. Samarskii, *Introduction to the Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].

Received
 October 30, 2023

Accepted for publication
 December 7, 2023

Information about the authors

Yuliya O. Bobreneva — Ph.D., Engineer; Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Oktyabrya prospekt, 141, 450075, Ufa, Russia.

Yury A. Poveschenko – Dr. Sci., Professor, Leading Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.

Viktoriiia O. Podryga – Dr. Sci., Assistant Professor, Leading Scientist; 1) Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia; 2) Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Leningradsky prospekt, 64, 125319, Moscow, Russia.

Sergey V. Polyakov – Dr. Sci., Leading Scientist; 1) Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia; 2) Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Oktyabrya prospekt, 141, 450075, Ufa, Russia.

Ravil M. Uzyanbaev – Senior Lecturer; 1) Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Oktyabrya prospekt, 141, 450075, Ufa, Russia; 2) Ufa State Petroleum Technological University, ulitsa Kosmonavtov, 1, 450062, Ufa, Russia.

Kamila F. Koledina – Dr. Sci., Assistant Professor, Leading Scientist; 1) Institute of Petrochemistry and Catalysis (RAS), Oktyabrya prospekt, 141, 450075, Ufa, Russia; 2) Ufa State Petroleum Technological University, ulitsa Kosmonavtov, 1, 450062, Ufa, Russia.

Parvin I. Rahimly – Ph.D., Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.