



Алгоритмы численного моделирования процессов высокочастотного акустического зондирования в океане

П. А. Ворновских

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Российская Федерация
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-6128-5845, e-mail: vornovskikh_pa@dvfu.ru

И. В. Прохоров

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-4004-0632, e-mail: prokhorov@iam.dvo.ru

И. П. Яровенко

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-8969-8334, e-mail: yarovenko@iam.dvo.ru

Аннотация: Рассмотрена кинетическая модель распространения звука во флуктуирующей морской среде, основанная на интегро-дифференциальном уравнении переноса излучения. Сформулирована обратная задача для уравнения переноса излучения со сосредоточенным импульсным источником звука, заключающаяся в определении поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению плотности потока. Разработан численный алгоритм решения обратной задачи, основанный на введении специальной индикаторной функции, явно указывающей на местоположение искомых поверхностей. Проведенное компьютерное моделирование процесса высокочастотного зондирования на частотах от 100 до 600 кГц показало эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: акустическое зондирование, уравнение переноса излучения, обратная задача, коэффициент рассеяния, поверхности разрыва функции.

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания НИОКР АААА–А20–120120390006–0 при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075–02–2023–946).

Для цитирования: Ворновских П.А., Прохоров И.В., Яровенко И.П. Алгоритмы численного моделирования процессов высокочастотного акустического зондирования в океане // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 1. 19–32. doi 10.26089/NumMet.v25r103.

Algorithms for numerical modeling of high-frequency acoustic sounding processes in the ocean

Polina A. Vornovskikh

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia
Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
ORCID: 0000-0001-6128-5845, e-mail: vornovskikh_pa@dvfu.ru

Igor V. Prokhorov

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia
ORCID: 0000-0003-4004-0632, e-mail: prokhorov@iam.dvo.ru

Ivan P. Yarovenko

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia
ORCID: 0000-0001-8969-8334, e-mail: yarovenko@iam.dvo.ru

Abstract: In this paper, we present a kinetic model for sound propagation in a fluctuating marine environment based on an integro-differential radiative transfer equation. The paper formulates an inverse problem for the radiative transfer equation with a localized pulsed sound source to determine the discontinuity surfaces of the scattering coefficient from the known time-angular density flux distribution. We develop a numerical algorithm to solve the inverse problem, based on introducing a special indicator function that identifies the locations of the sought surfaces. Computer simulations of the probing process at frequencies from 100 to 600 kHz demonstrate the effectiveness of algorithm proposed in identifying the boundaries of inhomogeneities at long distances.

Keywords: acoustic sounding, radiative transfer equation, inverse problem, scattering coefficient, function discontinuity surfaces.

Acknowledgements: The work was carried out within the framework of the state order R&D AAAA-A20-120120390006-0, and with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2023-946).

For citation: P. A. Vornovskikh, I. V. Prokhorov, and I. P. Yarovenko, “Algorithms for numerical modeling of high-frequency acoustic sounding processes in the ocean,” *Numerical Methods and Programming*, 25 (1), 19–32 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r103.

1. Введение. Вопросы математического моделирования распространения звука в морской флуктуирующей среде на протяжении многих лет являются объектом пристального внимания специалистов [1, 2]. Прежде всего это связано с задачами экологического мониторинга морских акваторий, поиском и разведкой промысловых объектов, обследованием трубопроводов и кабелей. Не менее актуальным является развитие методов дистанционного акустического зондирования для обнаружения, оконтуривания и исследования месторождений полезных ископаемых в придонном слое морского дна [3–5]. Методы математического моделирования не только позволяют существенно снизить затраты на производство гидроакустической аппаратуры и разработку программного обеспечения, но и зачастую являются источником новых схем и алгоритмов дистанционного зондирования.

Для математического моделирования ключевым фактором является выбор модели, которая, с одной стороны, адекватно описывает физические процессы, а с другой — обладает достаточной простотой с тем, чтобы успешно осуществить все этапы математического моделирования. При описании распространения высокочастотного акустического излучения в рассеивающей среде такими качествами обладает модель, основанная на интегро-дифференциальном уравнении переноса излучения [1]. Это уравнение, прежде всего, известно своими приложениями в рентгеновской и оптической томографии [6–8]. В настоящее время разработаны эффективные вычислительные методы, позволяющие решать широкий спектр обратных задач для уравнений переноса излучения [9–12].



Данная работа посвящена продолжению исследований, начатых в работах [13, 14], где была рассмотрена обратная задача для уравнения переноса излучения со сосредоточенным импульсным источником, заключающаяся в нахождении коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению плотности потока в заданной точке пространства. Было предложено решение обратной задачи в случае приближения однократного рассеяния и проведен численный анализ погрешности решения задачи, вызванный отказом от учета рассеяния высокой кратности. Обозначены границы применимости приближения однократного рассеяния при высокочастотном акустическом зондировании.

В отличие от предыдущих работ, в данной статье рассматривается обратная задача, заключающаяся в определении поверхностей разрыва коэффициента рассеяния, а не его значений. Подобные постановки обратных задач для уравнений переноса излучения не являются новыми. В частности, в монографии [6] разработаны и обоснованы методы определения поверхностей разрыва коэффициентов стационарного уравнения переноса излучения. Для широкого круга моделей томографии в настоящее время создано множество алгоритмов локализации линий разрыва функции для различных схем сканирования в условиях неполноты и неточности исходных данных [15–24].

Как правило, при решении подобных задач используются особенности у производных решения уравнения переноса, которые позволяют выделить семейство касательных к искомым поверхностям. При построении соответствующих численных методов естественным образом возникают вопросы, связанные с регуляризацией процедуры дифференцирования. В данной работе для локализации поверхностей разрыва коэффициента рассеяния строится специальная индикаторная функция, явно указывающая на местоположение искомым поверхностей. В отличие от подхода, развитого в [6], индикаторная функция не содержит операций дифференцирования и интегрирования, что положительно сказывается на устойчивости, вычислительной сложности и быстродействии предлагаемого алгоритма.

Для тестирования предлагаемого подхода было проведено компьютерное моделирование процесса акустического зондирования на частотах 100–600 кГц, которое показало, что предложенный алгоритм свободен от ограничений, присущих приближению однократного рассеяния, и может быть применен для локализации неоднородностей в морской среде.

2. Кинетическая модель импульсного акустического зондирования морской среды. Для описания распространения высокочастотных звуковых полей в рассеивающих средах нередко прибегают к кинетическим уравнениям для плотности потока излучения [1, 2, 25–28]. Функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$, интерпретируемая как плотность потока энергии звуковой волны в момент времени $t \in [0, T]$ в точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, распространяющейся в направлении $\mathbf{k} \in \Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$ со скоростью c , удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \quad (1)$$

и начальному условию

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, 0) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega, \quad (2)$$

где $I^{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{r} \pm \varepsilon \mathbf{k}, t \pm \varepsilon)$. Неотрицательные величины μ и σ в уравнении (1) характеризуют среду и имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники излучения.

Прямой задачей будем называть задачу определения функции I из уравнения (1) и начального условия (2) при заданных c, μ, σ и J .

При рассмотрении процессов зондирования ультракороткими импульсами в пространственно протяженных областях зачастую ограничиваются использованием сосредоточенных источников следующего вида:

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad (3)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Относительно коэффициента рассеяния предполагается, что $\sigma(\mathbf{r})$ — кусочно-постоянная функция в \mathbb{R}^3 : $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_i, \mathbf{r} \in G_i, i = 0, 1, \dots, p$, где $G_i, i = 1, \dots, p$ — ограниченные попарно не пересекающиеся области и $G_0 = \mathbb{R}^3 \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_p)$. Поверхности ∂G_i — достаточно гладкие класса C^1 , а разбиение G_1, G_2, \dots, G_p удовлетворяет условию обобщенной выпуклости [6], а именно: множество $\gamma = \partial G_1 \cup \dots \cup \partial G_p$ пересекается любой прямой в конечном числе точек.

Учитывая указанные требования на μ, σ, J , сформулируем *обратную задачу*, которая будет рассматриваться в работе. Необходимо определить поверхности разрыва функции σ (множество γ) из соотношений (1)–(3) и дополнительного условия

$$I^+(0, \mathbf{k}, t) = P(\mathbf{k}, t), \quad (4)$$

если c и P известны.

Таким образом, в обратной задаче требуется определить только поверхности разрыва функции σ , что существенно упрощает ее исследование, а для практических приложений такой информации об искомом коэффициенте бывает вполне достаточно.

3. Метод Монте-Карло для вычисления приближенного решения прямой задачи. Зачастую решение обратных задач сводится к необходимости нахождения решения большого количества прямых задач. Рассматриваемая в данной работе обратная задача позволяет получить решение непосредственно из информации, известной при ее постановке, без необходимости решения набора вспомогательных прямых задач. Отметим, что подобная ситуация достаточно характерна для задач томографии [6]. Тем не менее для полноценного тестирования таких томографических алгоритмов требуется проводить большое число измерений, что бывает весьма затруднительно и с экономической точки зрения не всегда оправдано. При отсутствии реальных экспериментальных данных можно обойтись синтезированными данными, полученными путем решения прямой задачи. При этом такой подход позволяет более полно проводить анализ различных факторов, влияющих на точность решения обратной задачи, путем имитационного моделирования специально подобранных пространственных структур исследуемой среды и с учетом различных физических эффектов, возникающих при взаимодействии излучения с веществом. Поскольку процесс имитационного моделирования в прикладных задачах требует существенных вычислительных ресурсов, в последнее время наиболее актуальными стали алгоритмы, допускающие параллельную реализацию. В данном разделе мы приведем описание метода решения прямой задачи (1), (2) и обсудим его параллельную реализацию. Для построения имитационных данных в рамках настоящей работы требуется получить синтезированные данные о временно-угловом распределении плотности потока излучения в заданной точке пространства (см. условие (4)).

Для численного решения задачи Коши (1), (2) воспользуемся представлением функции I в виде ряда Неймана [13, 14]:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t). \quad (5)$$

Функции I_n , $n = 0, 1, \dots$, в представлении (5) определяются последовательным образом:

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{4\pi} \int_{\Omega} I_{n-1}\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' d\tau, \quad (6)$$

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \times J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau. \quad (7)$$

В работах [13, 14] получены выражения для всех компонент ряда Неймана I_n , $n = 2, 3, \dots$, при условии, что функция J имеет вид (3):

$$I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{2c \exp(-\mu ct)}{4\pi |\mathbf{r} - ct\mathbf{k}|^2} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)), \quad (8)$$

$$I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{c \exp(-\mu ct)}{8\pi^2} \int_0^{\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)} \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k} - \tau(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, t - \tau_1/c)\mathbf{k}_1)}{|\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k} - (ct - \tau_1)\mathbf{k}_1|^2} d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \quad (9)$$

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{2c \exp(-\mu ct)}{(4\pi)^n} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \sigma(\mathbf{r}_i) \times \\ \times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \quad (10)$$



где $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$, $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i\mathbf{k}_{i-1}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$, $t_i = t_{i-1} - \tau_i/c$, $t_0 = t$, $i = 1, \dots, n-1$, $\chi_a(x)$ – характеристическая функция интервала $[0, a]$ и

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s) = \frac{1}{2} \frac{(cs)^2 - |\mathbf{r}|^2}{cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k})}.$$

Таким образом, выражение для функции I имеет вид

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{4\pi} \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1. \quad (11)$$

Приведем схему применения метода Монте-Карло для вычисления усеченной суммы ряда Неймана (11) в точке $(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = (\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ [29]. Строится траектория

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0), (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1), \dots, (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}), \quad (12)$$

где

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i\mathbf{k}_{i-1}, \quad t_i = t_{i-1} - \tau_i/c, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (13)$$

\mathbf{k}_i – случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере Ω , τ_i – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, \tau(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}, t_{i-1})]$.

Процесс построения марковской цепочки (12) завершается вычислением еще одной дополнительной точки $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$. Затем вычисляется случайная величина

$$\Theta_N = \frac{c \exp(-\mu ct_0)}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} \theta_{n-1}, \quad (14)$$

где случайные величины θ_n определяются рекуррентным образом при $n = 1, 2, \dots$:

$$\theta_n = \theta_{n-1} \sigma(\mathbf{r}_n) \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}), \quad \theta_0 = 1.$$

Указанная процедура повторяется M раз, и полученная выборка случайной величины Θ_N усредняется. Полученное значение дает оценку математического ожидания случайной величины Θ_N , а это, в свою очередь, является оценкой для плотности потока излучения $I(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)$ в приближении N -кратного рассеяния.

Метод Монте-Карло для вычисления $I(0, \mathbf{k}, t)$ был программно реализован на языке C++ с применением технологии MPI. Поскольку в методе Монте-Карло использовался алгоритм сопряженных блужданий, то более предпочтительным и простым оказался способ распараллеливания не по траекториям (количеству испытаний), а по точкам (\mathbf{k}, t) , общее количество которых в рассматриваемых ниже экспериментах было порядка 80000. При таком большом количестве точек, в которых необходимо найти решение задачи Коши (1), (2), применение параллельных вычислений позволило существенно уменьшить время, затрачиваемое на компьютерное моделирование. На рис. 1 приведены графики зависимости времени исполнения программы от числа процессов в случае компьютерного моделирования процесса зондирования в морской среде на частоте 300 кГц и дальности

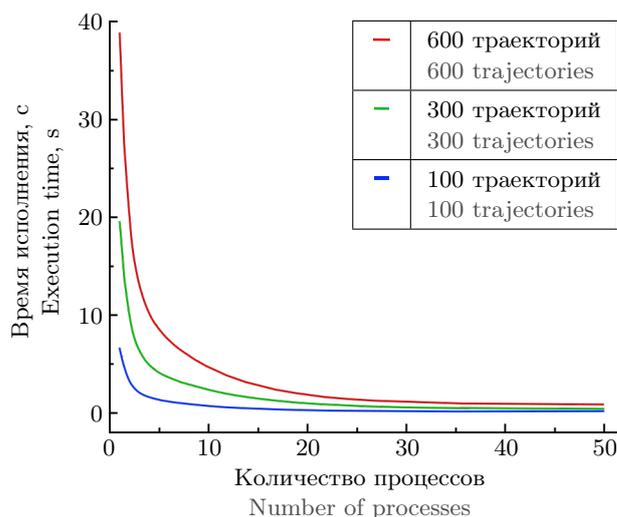


Рис. 1. Зависимость времени исполнения программы от числа процессов для разного количества разыгранных траекторий

Fig. 1. Speedup of program execution time with an increase in the number of processes for a different number of played trajectories at each point

порядка 400 м ($t \leq 2 \cdot 400/c$). Расчеты проводились на вычислительном кластере ИПМ ДВО РАН, включающем 8 серверов HPE ProLiant XL170r Gen10, в каждом по 24 Intel Xeon-Gold 6230R, 2.1 GHz/26-core/150 W, 192 GB DDR4.

Экспериментально было установлено (рис. 1), что оптимальное количество процессов, необходимое для распараллеливания программы, как правило, не превышает 20, при большем их количестве время работы программы уменьшается незначительно.

4. Численный метод локализации поверхностей разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$.

В этом разделе мы опишем численный алгоритм восстановления поверхности разрывов коэффициента рассеяния. Очевидно, что данная задача является частным случаем задачи о восстановлении значений коэффициента рассеяния. Действительно, если мы сможем найти функцию σ , мы автоматически найдем как области ее непрерывности, так и поверхности разрывов. Однако восстановление коэффициента рассеяния — достаточно сложная задача и ее решение без наложения дополнительных ограничений затруднительно, даже в случае геометрически простых сред. Для построения алгоритма нахождения поверхностей разрыва мы воспользуемся результатами работ [13, 14], где задача восстановления коэффициента σ была решена в приближении однократного рассеяния. При данном ограничении, учитывая, что при $\mathbf{r}_0 = 0$ функция $\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}, t) = ct/2$ и $\chi_{ct}(ct/2) = 1$, из соотношения (8) вытекает

$$I_1^+(0, \mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-\mu ct)}{2\pi ct^2} \sigma\left(-\frac{ct}{2} \mathbf{k}\right). \quad (15)$$

При $\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ и $t = \frac{2|\mathbf{r}|}{c}$ из (15) находим искомую функцию $\sigma(\mathbf{r})$:

$$\sigma(\mathbf{r}) = I_1^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) \left(\frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2}\right)^{-1}. \quad (16)$$

Формула (16) дает явный вид коэффициента рассеяния в приближении однократного рассеяния.

При постановке рассматриваемой обратной задачи считается известным полный поток излучения

$$P(\mathbf{k}, t) = I^+(0, \mathbf{k}, t) = I_1^+(0, \mathbf{k}, t) + \dots + I_n^+(0, \mathbf{k}, t) + \dots$$

в точке $\mathbf{r} = 0$, а не каждая функция $I_n^+(0, \mathbf{k}, t)$ в отдельности, поэтому нахождение функции $\sigma(\mathbf{r})$ по формуле

$$\sigma(\mathbf{r}) = P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) \left(\frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2}\right)^{-1} \quad (17)$$

приводит к ожидаемой ошибке. В работах [13, 14] проведен количественный и качественный анализ искажений при расчете функции σ по формуле (16) в зависимости от учитываемой кратности рассеяния.

Из формулы (17) видно, что поверхности разрыва функции $\sigma(\mathbf{r})$ совпадают с линиями разрыва функции $\hat{I}_1(\mathbf{r}) = I_1^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right)$. Можно показать, что при условии обобщенной выпуклости функции $\hat{I}_n(\mathbf{r}) = I_n^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right)$ при $n = 2, 3, \dots$ непрерывны по переменной \mathbf{r} . Непрерывные свойства функций $\hat{I}_n(\mathbf{r})$ хорошо известны и являются следствием сглаживающих свойств интегральных операторов, входящих в разложение решения уравнения переноса излучения в ряд Неймана [6].

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\hat{P}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi}{c} \exp(2\mu|\mathbf{r}|) |\mathbf{r}|^2 P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) = \frac{8\pi}{c} \exp(2\mu|\mathbf{r}|) |\mathbf{r}|^2 \left(\hat{I}_1(\mathbf{r}) + \hat{I}_2(\mathbf{r}) + \dots\right). \quad (18)$$

В случае постоянного коэффициента μ очевидно, что поверхности разрывов функций $\sigma(\mathbf{r})$ и $\hat{P}(\mathbf{r})$ совпадают. Это свойство функции $\hat{P}(\mathbf{r})$ лежит в основе предлагаемого алгоритма для локализации поверхностей разрыва коэффициента рассеяния.

Приведем краткое описание алгоритма. Выбирается кубическая область интереса изменения переменных r_1, r_2, r_3 . В этой области на сетке $\mathbf{r}_{i,j,k} = (r_{1,i}, r_{2,j}, r_{3,k})$ с некоторым шагом h , $r_{1,i} = r_{1,0} + ih$, $r_{2,j} = r_{2,0} + jh$, $r_{3,k} = r_{3,0} + kh$, вычисляется функция

$$\text{Ind}(\mathbf{r}_{i,j,k}) = (\hat{P}(\mathbf{r}_{i+1,j,k}) - \hat{P}(\mathbf{r}_{i-1,j,k}))^2 + (\hat{P}(\mathbf{r}_{i,j+1,k}) - \hat{P}(\mathbf{r}_{i,j-1,k}))^2 + (\hat{P}(\mathbf{r}_{i,j,k+1}) - \hat{P}(\mathbf{r}_{i,j,k-1}))^2. \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что при стремлении h к нулю функция $\text{Ind}(\mathbf{r})$ стремится к нулю всюду в области интереса за исключением точек из h -окрестности поверхности разрыва функции \hat{P} . С практической точки зрения более выгодно восстанавливать поверхности разрыва послойно, например в горизонтальной плоскости $r_3 = l$:

$$\text{Ind}(\mathbf{r}_{i,j}) = (\hat{P}(\mathbf{r}_{i+1,j}) - \hat{P}(\mathbf{r}_{i-1,j}))^2 + (\hat{P}(\mathbf{r}_{i,j+1}) - \hat{P}(\mathbf{r}_{i,j-1}))^2, \quad (20)$$

где $\mathbf{r}_{i,j} = (r_{1,i}, r_{2,j}, l)$. Так как поверхности разрыва функций σ и \hat{P} совпадают, то после применения указанного алгоритма приближенное решение обратной задачи будет найдено как местоположение точек, где функция $\text{Ind}(\mathbf{r})$ принимает значения больше некоторого порогового. Функция $\text{Ind}(\mathbf{r})$ является в некотором смысле индикаторной функцией множества γ .

В определении функции $\hat{P}(\mathbf{r})$ входит параметр μ , который в общем случае неизвестен в постановке обратной задачи о нахождении границ неоднородностей. При реализации алгоритма нахождения решения обратной задачи параметр μ можно положить равным нулю либо воспользоваться его априорными приближенными значениями. В последнем случае экспоненциальный сомножитель в формуле (18) будет играть роль коррекции данных на ослабление в зависимости от дальности зондирования, которая часто применяется в практических приложениях зондирования океана, и его правильный выбор может улучшить качество реконструкции при большой дальности зондирования.

5. Результаты численного моделирования процесса акустического зондирования в диапазоне частот от 100 до 600 кГц. Основные цели проводимых ниже численных экспериментов следующие. Во-первых, мы покажем работоспособность алгоритма в средах с сильным рассеянием, а во-вторых, проведем анализ качества томографических изображений в зависимости от частоты зондирования.

Для удобства описания численных результатов обозначим через $\hat{P}_n(\mathbf{r})$ функцию, определяемую соотношением (18), где вместо бесконечной суммы $\hat{I}_1(\mathbf{r}) + \hat{I}_2(\mathbf{r}) + \dots$ стоит конечная сумма из n слагаемых $\hat{I}_1(\mathbf{r}) + \dots + \hat{I}_n(\mathbf{r})$. Фактически, функция $\hat{P}_n(\mathbf{r})$ определяется через решение уравнения переноса излучения в точке 0 в приближении n -кратного рассеяния. Обозначим через Ind_n соответствующую индикаторную функцию

$$\text{Ind}_n(\mathbf{r}_{i,j}) = (\hat{P}_n(\mathbf{r}_{i+1,j}) - \hat{P}_n(\mathbf{r}_{i-1,j}))^2 + (\hat{P}_n(\mathbf{r}_{i,j+1}) - \hat{P}_n(\mathbf{r}_{i,j-1}))^2. \quad (21)$$

Функция $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ локализует линии разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(r)$ в модели переноса излучения, учитывающей многократное рассеяние в среде до n -й кратности включительно.

Тестирование алгоритма проводилось на фантоме, моделирующем водоем, разделенный поверхностью $\sin(0.5|r_1|) + 60 < r_2$ на две части. В верхней части содержится морская вода, а в нижней — придонный слой. Каждая из этих областей содержит включения эллипсоидальной, шарообразной и кубической формы. Одно из самых больших включений представляет собой разность двух эллипсоидов. На рис. 2

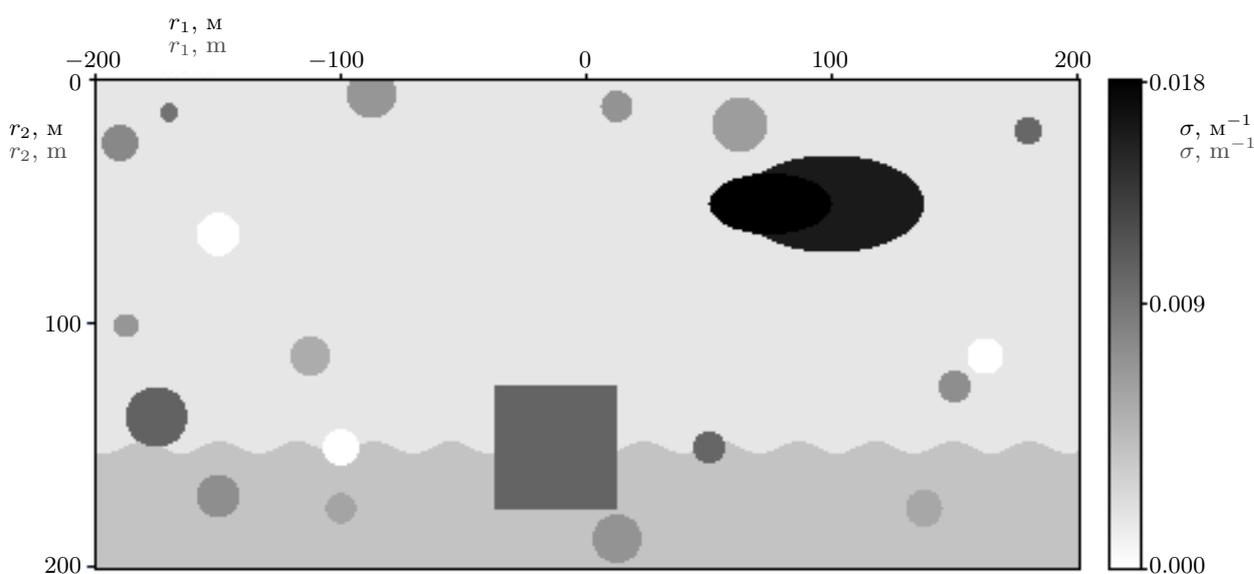


Рис. 2. Карта распределения функции $\sigma(r_1, r_2, 0)$ в области зондирования $400 \times 200 \text{ м}^2$ на частоте 600 кГц
 Fig. 2. Distribution map of the function $\sigma(r_1, r_2, 0)$ in the sounding area $400 \times 200 \text{ м}^2$ at a frequency of 600 kHz

в графическом виде приведено распределение функции $\sigma(\mathbf{r})$ в плоскости $r_3 = 0$. Скорость звука и коэффициент затухания соответствуют реальным величинам, характерным для акустического зондирования в морской среде на частотах от 100 до 600 кГц [30]. В частности, коэффициент ослабления с ростом частоты монотонно возрастает и содержится в интервале значений $(0.0038, 0.0184) \text{ м}^{-1}$. Отношение σ/μ в основной водной среде составляло 0.1, в придонном слое 0.2 [25], и во включениях уровень рассеяния колебался в диапазоне от 0 до 1.

Ниже приведены результаты двух численных экспериментов, отличающихся дальностью зондирования и размерами реконструируемых областей. В каждом эксперименте проводилось компьютерное моделирование процесса зондирования на частотах: 100 кГц, 300 кГц и 600 кГц.

В первом эксперименте восстановление объектов проводилось в плоскости $r_3 = 0$ в области зондирования с размерами $400 \times 200 \text{ м}^2$ ($r_1 \in [-200, 200], r_2 \in [0, 200]$) и с шагом дискретизации $h = 1 \text{ м}$ на сетке $r_{1,i} = r_{1,0} + ih, r_{2,j} = r_{2,0} + jh, i = 1, \dots, 400, j = 1, \dots, 200, r_{1,0} = -200, r_{2,0} = 0$. Во второй тройке экспериментов область интереса была увеличена в два раза с соответствующим увеличением масштаба самих включений и местом их расположения, т.е. реконструкция включений осуществлялась в области зондирования с размерами $800 \times 400 \text{ м}^2$ и с шагом дискретизации $h = 2 \text{ м}$ на сетке $r_{1,i} = r_{1,0} + ih, r_{2,j} = r_{2,0} + jh, i = 1, \dots, 400, j = 1, \dots, 200, r_{1,0} = -400, r_{2,0} = 0$ на тех же частотах, что и в первом эксперименте.

С математической точки зрения для моделирования процесса переноса излучения в средах, отличающихся лишь размерами с сохранением структуры рассеивающих объектов, достаточно пропорционально увеличить или уменьшить коэффициенты ослабления и рассеяния без изменения размеров региона зондирования. В нашем случае коэффициенты ослабления и рассеяния из первого эксперимента нужно увеличить в два раза.

На рис. 3 в графическом виде представлены результаты расчетов функций $\text{Ind}_2, \text{Ind}_5, \text{Ind}_8$ для первого эксперимента на различных частотах. Более темные цвета на рисунках соответствуют большим значениям функций $\text{Ind}_2, \text{Ind}_5$ и Ind_8 . Распределения указанных функций позволяют локализовать линии

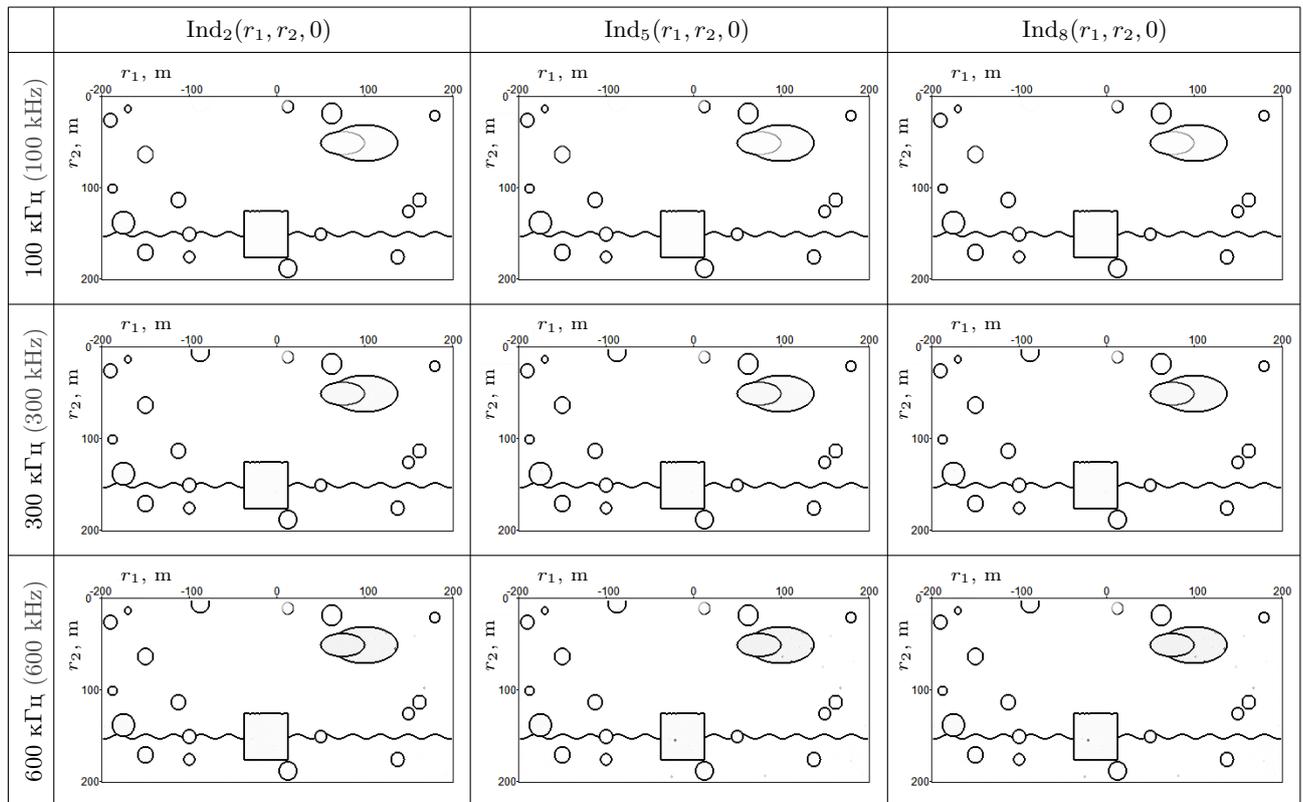


Рис. 3. Результаты восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$ для области зондирования $400 \times 200 \text{ м}^2$
 Fig. 3. Results of reconstructing discontinuity lines of the scattering coefficient $\sigma(\mathbf{r})$ for the sounding area $400 \times 200 \text{ м}^2$

разрыва $\sigma(\mathbf{r})$, если решение уравнения переноса вычисляется в приближении двукратного, пятикратного и восьмикратного рассеяния соответственно.

Визуальный анализ рисунков показывает, что качество реконструкции, в отличие от результатов работ [13, 14] по восстановлению коэффициента рассеяния в приближении однократного рассеяния, практически не зависит от n .

Для количественной оценки качества локализации линий разрыва нужно подобрать соответствующую метрику. В работе [14] для этой цели была выбрана относительная среднеквадратичная ошибка между точным значением коэффициента рассеяния и его приближенным значением. Использование такой величины для анализа точности восстановления линий разрыва коэффициента не подходит, поэтому мы взяли следующую характеристику:

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (\text{Ind}_1(r_{1,i}, r_{2,j}, 0) - \text{Ind}_n(r_{1,i}, r_{2,j}, 0))^2}{\sum_i \sum_j \text{Ind}_1^2(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)}}. \quad (22)$$

Фактически величина ε_n есть относительная среднеквадратичная погрешность между Ind_1 и Ind_n . Так как однократное рассеяние I_1 вычисляется аналитически, то на расчет функции Ind_1 оказывают влияние только ошибки дискретизации на сетке $(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)$. В этом смысле ее изображение можно считать эталонным.

В табл. 1 приведены значения величин $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8$, вычисленные по формуле (22). Погрешность практически не зависит от учитываемой кратности рассеяния, а с ростом частоты зондирования она незначительно увеличивается, но не превышает 0.5%.

На рис. 4 приведены результаты эксперимента для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$. В этом случае даже при визуальном анализе можно заметить появление погрешности и артефактов на томографических изображениях с ростом частоты зондирования и увеличением учитываемой кратности рассеяния. Количе-

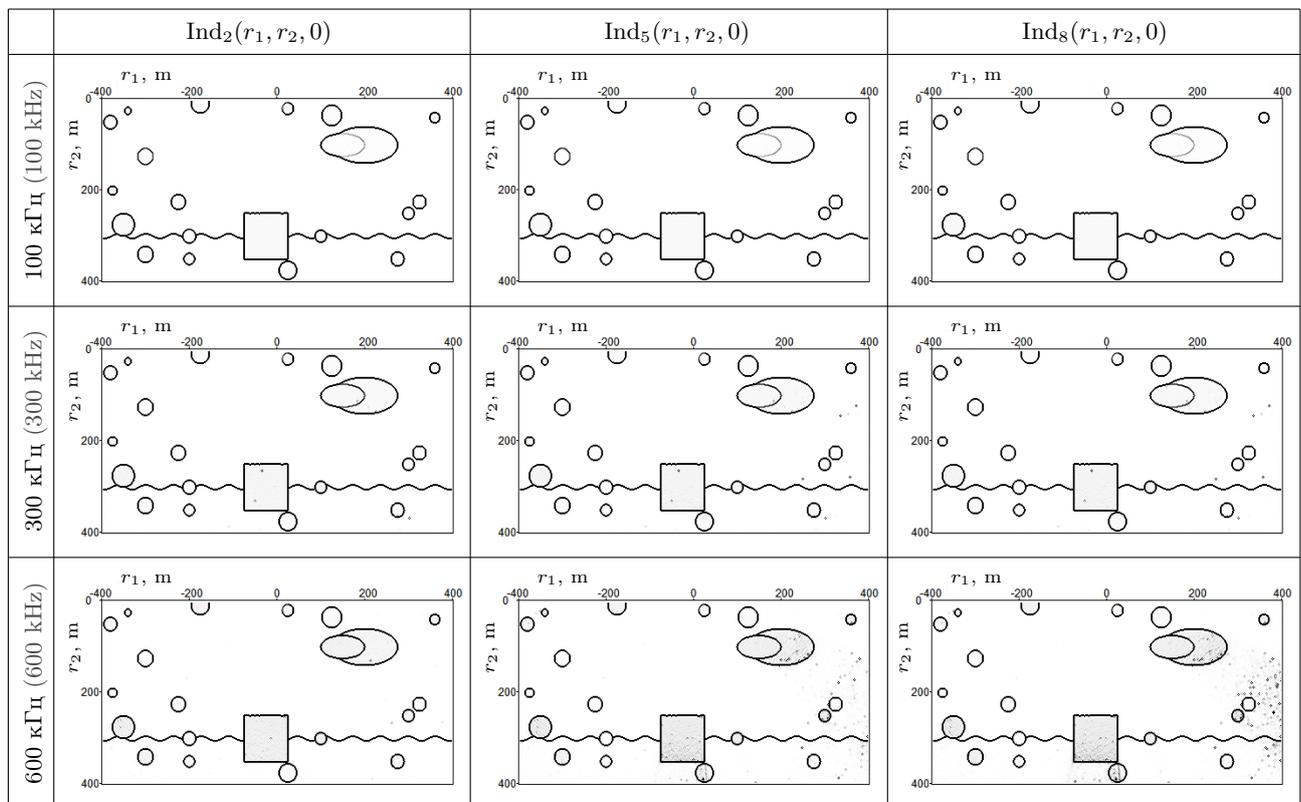


Рис. 4. Результаты восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$ для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$
 Fig. 4. Results of reconstructing discontinuity lines of the scattering coefficient $\sigma(\mathbf{r})$ for the sounding area $800 \times 400 \text{ м}^2$

Таблица 1. Среднеквадратичное отклонение функции $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования $400 \times 200 \text{ м}^2$ на частотах 100 кГц, 300 кГц и 600 кГц

Table 1. Root mean square deviation of the function $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ from $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ for the sounding area $400 \times 200 \text{ м}^2$ at frequencies 100 kHz, 300 kHz and 600 kHz

Частота, кГц Frequency, kHz	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
100	0.000374	0.000399	0.000400	0.000400	0.000400	0.000400	0.000400
300	0.004520	0.004617	0.004646	0.004650	0.004650	0.004650	0.004650
600	0.009049	0.011562	0.011669	0.011734	0.011747	0.011749	0.011749

Таблица 2. Среднеквадратичное отклонение функции $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$ на частотах 100 кГц, 300 кГц и 600 кГц

Table 2. Root mean square deviation of the function $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ from $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ for the sounding area $800 \times 400 \text{ м}^2$ at frequencies 100 kHz, 300 kHz and 600 kHz

Частота, кГц Frequency, kHz	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
100	0.001161	0.001410	0.001437	0.001443	0.001444	0.001444	0.001444
300	0.002599	0.003595	0.004132	0.004450	0.004521	0.004539	0.004544
600	0.004532	0.022579	0.026491	0.028083	0.028802	0.029595	0.029871

ственные оценки подтверждают данные визуального анализа. Максимальная погрешность восстановления около 3% и достигается при $n = 8$ на частоте 600 кГц (табл. 2).

Такое увеличение погрешности обусловлено ростом ошибки расчета решения прямой задачи и не является дефектом предложенного алгоритма. При расчете непрерывной части ряда Неймана (5) с помощью метода Монте-Карло возникают ошибки случайного характера. С увеличением размеров зондируемого региона вклад суммы $I_2 + I_3 + \dots + I_n$ растет, начиная превалировать над вкладом первого слагаемого I_1 . При численной реализации такое поведение решения приводит к увеличению погрешности при расчете функции $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$, которая может воспринимать случайные выбросы в соседних точках как нарушение непрерывности измеряемого сигнала. В то же время увеличение точности расчета прямой задачи при моделировании измеряемого сигнала приводит к увеличению точности реконструкции границ разрывов.

Уменьшение шага дискретизации в области зондирования без увеличения точности вычисления прямой задачи не приводит к какому-либо значимому улучшению качества восстановления томографического изображения. На рис. 5 для сравнения приведены изображения функции $\text{Ind}_8(\mathbf{r})$ в области $800 \times 400 \text{ м}^2$ на

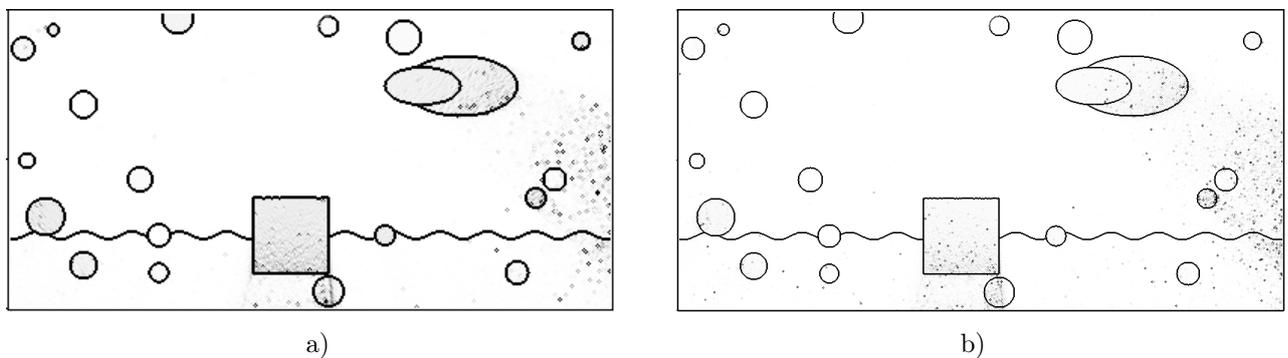


Рис. 5. Восстановление линий разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$ при различной дискретизации области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$ на частоте 600 кГц: а) карта распределения функции $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ с шагом дискретизации $h = 2 \text{ м}$; б) карта распределения функции $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ с шагом дискретизации $h = 1 \text{ м}$

Fig. 5. Reconstruction of discontinuity lines of the scattering coefficient $\sigma(\mathbf{r})$ for different sampling of the probing area $800 \times 400 \text{ м}^2$ at a frequency of 600 kHz: а) function distribution map $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ с with sampling step $h = 2 \text{ м}$; б) function distribution map $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ с with sampling step $h = 1 \text{ м}$



Таблица 3. Среднеквадратичное отклонение функции $\text{Ind}_8(\mathbf{r})$ от $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$ на частоте 600 кГц с шагом дискретизации $h = 1 \text{ м}$

Table 3. Root mean square deviation of the function $\text{Ind}_8(\mathbf{r})$ from $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ for the sounding area $800 \times 400 \text{ м}^2$ at a frequency of 600 kHz with a sampling step $h = 1 \text{ м}$

Частота, кГц Frequency, kHz	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
600	0.004843	0.012069	0.017658	0.023687	0.024614	0.028143	0.028649

частоте зондирования 600 кГц. Несмотря на ожидаемое уменьшение толщины линий разрыва при уменьшении шага дискретизации на рис. 5 b, так же как и на рис. 5 а, наблюдается наличие шумовых искажений, вносимых сильно рассеивающими включениями, лежащими на пути сигнала от зоны появления артефактов до детектора излучения. В табл. 3 приведены среднеквадратичные отклонения функций $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ для $n = 2, \dots, 8$, которые также свидетельствуют лишь о небольшом повышении точности.

Может показаться, что полученные результаты находятся в некотором противоречии с известными фактами. Как правило, с увеличением дальности зондирования ухудшение качества гидроакустических изображений происходит не только из-за роста оптической толщины области, но и по причине недостаточной разрешающей способности детектирующего устройства по направлению приема сигнала. При слабой разрешающей способности приемного устройства качественное восстановление объектов невозможно даже на сравнительно небольшом расстоянии от приемника, поскольку близко лежащим пространственным точкам будут соответствовать проекционные данные одного и того же направления.

Если увеличивать или уменьшать шаг дискретизации области зондирования $\mathbf{r}_{i,j} = (r_{1,i}, r_{2,j}, 0)$ и по этим точкам определять соответствующие направления $\mathbf{k}_{i,j} = \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{|\mathbf{r}_{i,j}|}$ и временные отсчеты $t_{i,j} = 2|\mathbf{r}_{i,j}|/c$, то происходит равномерное изменение пространственного разрешения восстанавливаемого изображения. В этом случае ухудшение или улучшение изображения слабо зависит от расположения источника излучения и региона восстановления коэффициента рассеяния.

В данной статье полноценный анализ влияния неполноты данных $(\mathbf{r}, t) \in \Omega \times [0, T]$ не проводился. В представленных численных экспериментах наблюдается лишь незначительное ухудшение качества томографических изображений в дальней зоне, обусловленное ростом погрешности “измеряемого сигнала” $P(\mathbf{k}, t)$ при больших t . Изучение влияния неполноты проекционных данных на качество изображений и разработка алгоритмов малоракурсной томографии — основной приоритет дальнейших наших исследований.

6. Заключение. В рамках модели, основанной на интегро-дифференциальном уравнении переноса излучения, проведено компьютерное исследование процессов высокочастотного акустического импульсного зондирования в рассеивающей среде. Рассмотрена задача восстановления поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению потока излучения в заданной точке пространства. Предложен численный метод локализации искомых поверхностей, основанный на построении специальной индикаторной функции. Проведенное численное моделирование дает нам основание надеяться, что в диапазоне частот от 100 до 600 кГц разработанный алгоритм может успешно применяться для локализации неоднородностей в рассеивающих средах на дальности 500 м при достаточной разрешающей способности приемного устройства и точности измерений.

Список литературы

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981.
2. Bal G. Kinetics of scalar wave fields in random media // Wave Motion. 2005. **43**, N 2. 132–157. doi 10.1016/j.wavevoti.2005.08.002.
3. Саломатин А.С., Юсупов В.И., Верецагина О.Ф., Черных Д.В. Акустическая оценка концентрации метана в водной толще в областях его пузырьковой разгрузки // Акустический журнал. 2014. **60**, № 6. 638–644. <https://www.elibrary.ru/item.asp?doi=10.7868/S032079191405013X>. Дата обращения: 29 января 2024.

4. Юсупов В.И., Семилетов И.П., Черных Д.В., Саломатин А.С. Активная высокочастотная акустическая термометрия мерзлых водонасыщенных сред // Акустический журнал. 2022. **68**, № 5. 501–509. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49273407>. Дата обращения: 30 января 2024.
5. Yusupov V., Salomatina A., Shakhova N., et al. Echo sounding for remote estimation of seabed temperatures on the arctic shelf // Geosciences. 2022. **12**, № 9. Article Number 315. doi [10.3390/geosciences12090315](https://doi.org/10.3390/geosciences12090315).
6. Anikonov D.S., Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V. Transport equation and tomography // Inverse and Ill-Posed Problems Series. **30**. Utrecht: VSP, 2002.
7. Терещенко С.А. Методы вычислительной томографии. Москва: Физматлит, 2004.
8. Bal G. Inverse transport theory and applications // Inverse Problems. 2009. **25**, N 5. Article Identifier 053001. doi [10.1088/0266-5611/25/5/053001](https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/5/053001).
9. Acosta S. Time reversal for radiative transport with applications to inverse and control problems // Inverse Problems. 2013. **29**, N 8. Article Identifier 085014. doi [10.1088/0266-5611/29/8/085014](https://doi.org/10.1088/0266-5611/29/8/085014).
10. Wang C., Zhou T. A hybrid reconstruction approach for absorption coefficient by fluorescence photoacoustic tomography // Inverse Problems. 2018. **35**, N 2. Article Identifier 025005. doi [10.1088/1361-6420/aaf073](https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaf073).
11. Bellassoued M., Boughanja Y. An inverse problem for the linear Boltzmann equation with a time-dependent coefficient // Inverse Problems. 2019. **35**, N 8. Article Identifier 085003. doi [10.1088/1361-6420/ab159f](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab159f).
12. Li Q., Sun W. Applications of kinetic tools to inverse transport problems // Inverse Problems. 2020. **36**, N 3. Article Identifier 035011. doi [10.1088/1361-6420/ab59b8](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab59b8).
13. Ворновских П.А., Ким А., Прохоров И.В. Применимость приближения однократного рассеяния при импульсном зондировании неоднородной среды // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. **12**, № 5. 1063–1079. doi [10.20537/2076-7633-2020-12-5-1063-1079](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-5-1063-1079).
14. Ворновских П.А., Прохоров И.В. Сравнительный анализ погрешности приближения однократного рассеяния при решении одной обратной задачи в двумерном и трехмерном случаях // Дальневосточный математический журнал. 2021. **21**, № 2. 151–165. doi [10.47910/FEMJ202113](https://doi.org/10.47910/FEMJ202113).
15. Faridani A., Ritman E.L., Smith K.T. Local tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. **52**, N 2. 459–484. doi [10.1137/0152026](https://doi.org/10.1137/0152026).
16. Faridani A., Finch D.V., Ritman E.L., Smith K.T. Local tomography II // SIAM J. Appl. Math. 1997. **57**, N 4. 1095–1127. doi [10.1137/S0036139995286357](https://doi.org/10.1137/S0036139995286357).
17. Quinto E.T. Singularities of the X-ray transform and limited data tomography in R² and R³ // SIAM J. Math. Anal. 1993. **24**, N 5. 1215–1225. doi [10.1137/0524069](https://doi.org/10.1137/0524069).
18. Ramm A.G., Katsevich A.I. The Radon transform and local tomography. Boca Raton: CRC Press, 1996.
19. Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V. Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. **18**, N 8. 885–893. doi [10.1515/JIIP.2011.009](https://doi.org/10.1515/JIIP.2011.009).
20. Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В. Интегродифференциальный индикатор для задачи однонакурсной томографии // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. **17**, № 2. 3–10.
21. Романов В.Г. Определение разрывов в рентгеновской томографии // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. **17**, № 3. 98–110. doi [10.1134/S1990478914040164](https://doi.org/10.1134/S1990478914040164).
22. Деревцов Е.Ю., Мальцева С.В., Светов И.Е. Определение разрывов функции, заданной в области с рефракцией, по ее экспоненциальному лучевому преобразованию // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. **21**, № 4. 51–74. doi [10.17377/sibjim.2018.21.405](https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.405).
23. Maltseva S.V., Svetov I.E., Polyakova A.P. Reconstruction of a function and its singular support in a cylinder by tomographic data // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2020. **8**, N 2. 86–97. doi [10.32523/2306-6172-2020-8-2-86-97](https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-86-97).
24. Яровенко И.П. Метод определения поверхности разрыва плотности источников активности в позитронно-эмиссионной томографии // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. **13**. 694–703. doi [10.17377/semi.2016.13.054](https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.054).
25. Мендус В.И., Постнов Г.А. Об угловом распределении высокочастотных динамических шумов океана // Акустический журнал. 1993. **39**, № 6. 1107–1116.
26. Андреева И.Б., Белоусов А.В. О допустимости использования приближения однократного рассеяния акустических волн в задачах о скоплениях гидробионтов // Акустический журнал. 1996. **42**, № 4. 560–562.
27. Прохоров И.В., Золотарев В.В., Агафонов И.Б. Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане // Дальневост. матем. журн. 2011. **11**, № 1. 76–87.
28. Прохоров И.В., Сущенко А.А. Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения // Акустический журнал. 2015. **61**, № 3. 400–408. doi [10.7868/S0320791915020100](https://doi.org/10.7868/S0320791915020100).



29. Михайлов Г.А., Медведев И.Н. Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. Новосибирск: Омега Принт, 2011.
30. Jackson D.R. APL-UW high-frequency ocean environmental acoustic models handbook. Technical report TR 9407. Seattle: University of Washington, 1994.

Поступила в редакцию
23 октября 2023 г.

Принята к публикации
18 декабря 2023 г.

Информация об авторах

Полина Андреевна Ворновских — инженер-исследователь; 1) Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, 690041, Владивосток, Российская Федерация; 2) Дальневосточный федеральный университет, п. Аякс, 10, о. Русский, 690922, Владивосток, Российская Федерация.

Игорь Васильевич Прохоров — д.ф.-м.н., гл. науч. сотр.; Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, 690041, Владивосток, Российская Федерация.

Иван Петрович Яровенко — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.; Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, 690041, Владивосток, Российская Федерация.

References

1. A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (Academic Press, New York, 1978; Mir, Moscow, 1981).
2. G. Bal, “Kinetics of Scalar Wave Fields in Random Media,” *Wave Motion*. **43** (2), 132–157 (2005). doi [10.1016/j.wavemoti.2005.08.002](https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2005.08.002).
3. A. S. Salomatin, V. I. Yusupov, O. F. Vereshchagina, and D. V. Chernykh, “An Acoustic Estimate of Methane Concentration in a Water Column in Regions of Methane Bubble Release,” *Akust. Zh.* **60** (6), 638–644 (2014). [*Acoust. Phys.* **60** (6), 671–677 (2014)]. <https://link.springer.com/article/10.1134/S1063771014050133>. Cited January 29, 2024.
4. V. I. Yusupov, I. P. Semiletov, D. V. Chernykh, and A. S. Salomatin, “Active High-Frequency Acoustic Thermometry of Frozen Water-Saturated Media,” *Akust. Zh.* **68** (5), 501–509 (2022). [*Acoust. Phys.* **68** (5), 459–466 (2022)]. doi [10.1134/S1063771022050128](https://doi.org/10.1134/S1063771022050128).
5. V. Yusupov, A. Salomatin, N. Shakhova, et al., “Echo Sounding for Remote Estimation of Seabed Temperatures on the Arctic Shelf,” *Geosciences* **12** (9), Article Number 315 (2022). doi [10.3390/geosciences12090315](https://doi.org/10.3390/geosciences12090315).
6. D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk, and I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, in *Inverse and Ill-Posed Problems Series*, Vol. 30 (VSP, Utrecht, 2002).
7. S. A. Tereshchenko, *Methods of Computer Tomography* (Fizmatlit, Moscow, 2004) [in Russian].
8. G. Bal, “Inverse Transport Theory and Applications,” *Inverse Probl.* **25** (5), Article Identifier 053001 (2009). doi [10.1088/0266-5611/25/5/053001](https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/5/053001).
9. S. Acosta, “Time Reversal for Radiative Transport with Applications to Inverse and Control Problems,” *Inverse Probl.* **29** (8), Article Identifier 085014 (2013). doi [10.1088/0266-5611/29/8/085014](https://doi.org/10.1088/0266-5611/29/8/085014).
10. C. Wang and T. Zhou, “A Hybrid Reconstruction Approach for Absorption Coefficient by Fluorescence Photoacoustic Tomography,” *Inverse Probl.* **35** (2), Article Identifier 025005 (2018). doi [10.1088/1361-6420/aaf073](https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaf073).
11. M. Bellassoued and Y. Boughanja, “An Inverse Problem for the Linear Boltzmann Equation with a Time-Dependent Coefficient,” *Inverse Probl.* **35** (8), Article Identifier 085003 (2019). doi [10.1088/1361-6420/ab159f](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab159f).
12. Q. Li and W. Sun, “Applications of Kinetic Tools to Inverse Transport Problems,” *Inverse Probl.* **36** (3), Article Identifier 035011 (2020). doi [10.1088/1361-6420/ab59b8](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab59b8).
13. P. A. Vornovskikh, A. Kim, and I. V. Prokhorov, “The Applicability of the Approximation of Single Scattering in Pulsed Sensing of an Inhomogeneous Medium,” *Comput. Res. Model.* **12** (5), 1063–1079 (2020). doi [10.20537/2076-7633-2020-12-5-1063-1079](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-5-1063-1079).
14. P. A. Vornovskikh and I. V. Prokhorov, “Comparative Analysis of the Error of the Single Scattering Approximation when Solving One Inverse Problem in Two-Dimensional and Three-Dimensional Cases,” *Dal’nevost. Mat. Zh.* **21** (2), 151–165 (2021). doi [10.47910/FEMJ202113](https://doi.org/10.47910/FEMJ202113).

15. A. Faridani, E. L. Ritman, and K. T. Smith, “Local Tomography,” *SIAM J. Appl. Math.* **52** (2), 459–484 (1992). doi [10.1137/0152026](https://doi.org/10.1137/0152026).
16. A. Faridani, D. V. Finch, E. L. Ritman, and K. T. Smith, “Local Tomography II,” *SIAM J. Appl. Math.* **57** (4), 1095–1127 (1997). doi [10.1137/S0036139995286357](https://doi.org/10.1137/S0036139995286357).
17. E. T. Quinto, “Singularities of the X-Ray Transform and Limited Data Tomography in R^2 and R^3 ,” *SIAM J. Math. Anal.* **24** (5), 1215–1225 (1993). doi [10.1137/0524069](https://doi.org/10.1137/0524069).
18. A. G. Ramm and A. I. Katsevich, *The Radon Transform and Local Tomography* (CRC Press, Boca Raton, 1996).
19. D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, and I. V. Prokhorov, “Algorithm of Finding a Body Projection within an Absorbing and Scattering Medium,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **18** (8), 885–893 (2011). doi [10.1515/JIIP.2011.009](https://doi.org/10.1515/JIIP.2011.009).
20. D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, and I. V. Prokhorov, “An Integrodifferential Indicator for the Problem of Single Beam Tomography,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **17** (2), 3–10 (2014). [*J. Appl. Ind. Math.* **8** (3), 301–306 (2014)]. doi [10.1134/S1990478914030016](https://doi.org/10.1134/S1990478914030016).
21. V. G. Romanov, “Recovering Jumps in X-Ray Tomography,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **17** (3), 98–110 (2014). [*J. Appl. Ind. Math.* **8** (4), 582–593 (2014)]. doi [10.1134/S1990478914040164](https://doi.org/10.1134/S1990478914040164).
22. E. Yu. Derevtsov, S. V. Maltseva, and I. E. Svetov, “Determination of Discontinuities of a Function in a Domain with Refraction from Its Attenuated Ray Transform,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **21** (4), 51–74 (2018). [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (4), 619–641 (2018)]. doi [10.1134/S1990478918040038](https://doi.org/10.1134/S1990478918040038).
23. S. V. Maltseva, I. E. Svetov, and A. P. Polyakova, “Reconstruction of a Function and Its Singular Support in a Cylinder by Tomographic Data,” *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **8** (2), 86–97 (2020). doi [10.32523/2306-6172-2020-8-2-86-97](https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-86-97).
24. I. P. Yarovenko, “The Method for Finding Activity Discontinuities in Positron Emission Tomography,” *Sib. Electron. Math. Izv.* **13**, 694–703 (2016) doi [10.17377/semi.2016.13.054](https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.054).
25. V. I. Mendus and G. A. Postnov, “On Angular Intensity Distribution of High-Frequency Ambient Dynamic Noise of the Ocean,” *Akust. Zh.* **39** (6), 1107–1116 (1993).
26. I. B. Andreeva and A. V. Belousov, “Applicability of the Single-Scattering Approximation to Problems of Acoustic Scattering from Clusters of Sea Creatures,” *Akust. Zh.* **42** (4), 560–562 (1996). [*Acoust. Phys.* **42** (4), 495–496 (1996)]. <https://acnpsearch.unibo.it/singlejournalindex/1941588>. Cited February 1, 2024.
27. I. V. Prokhorov, V. V. Zolotarev, and I. B. Agafonov, “The Problem of Acoustic Sounding within Fluctuation Ocean,” *Dal’nevost. Mat. Zh.* **11** (1), 76–87 (2011).
28. I. V. Prokhorov and A. A. Sushchenko, “Studying the Problem of Acoustic Sounding of the Seabed Using Methods of Radiative Transfer Theory,” *Akust. Zh.* **61** (3), 400–408 (2015). [*Acoust. Phys.* **61** (3), 368–375 (2015)]. doi [10.1134/S1063771015020104](https://doi.org/10.1134/S1063771015020104).
29. G. A. Mikhailov and I. N. Medvedev, *Optimization of Weighted Algorithms for Statistical Modeling* (Omega Print, Novosibirsk, 2011) [in Russian].
30. D. R. Jackson, *APL-UW High-Frequency Ocean Environmental Acoustic Models Handbook*, Technical Report TR 9407 (University of Washington, Seattle, 1994).

Received
October 23, 2023

Accepted for publication
December 18, 2023

Information about the authors

Polina A. Vornovskikh — research engineer; 1) Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Radio ulitsa, 7, 690041, Vladivostok, Russia; 2) Far Eastern Federal University, 10 Ajax Bay, Russky Island, 690922, Vladivostok, Russia.

Igor V. Prokhorov — Dr. Sci, Leading Scientist; Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Radio ulitsa, 7, 690041, Vladivostok, Russia.

Ivan P. Yarovenko — Ph.D., Senior Scientist; Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Radio ulitsa, 7, 690041, Vladivostok, Russia.