

## MUSCL-схема третьего порядка точности на неравномерной структурированной сетке

**А. Р. Кочарина**

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,  
Новосибирск, Российская Федерация  
Институт теплофизики имени С. С. Кутателадзе СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0009-0008-9244-9943, e-mail: [a.kocharina@ngs.nsu.ru](mailto:a.kocharina@ngs.nsu.ru)

**Д. В. Чирков**

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,  
Новосибирск, Российская Федерация  
Институт теплофизики имени С. С. Кутателадзе СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-7772-6745, e-mail: [chirkov.itp@gmail.com](mailto:chirkov.itp@gmail.com)

**Аннотация:** Противопотоковая схема конечных объемов с MUSCL-реконструкцией на грань ячейки третьего порядка распространена на случай неравномерной структурированной сетки. На примере одномерного нелинейного уравнения переноса исследован порядок аппроксимации для исходной реконструкции с постоянными коэффициентами и модифицированной MUSCL-схемы с коэффициентами, зависящими от шагов сетки. Показано, что порядок аппроксимации зависит от вида неравномерной сетки. Рассмотрены случаи сетки с постоянным законом сгущения и произвольной неравномерной сетки. Аналитически и численно показано, что неравномерная MUSCL-схема с коэффициентами, зависящими от шагов сетки, имеет третий порядок аппроксимации на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения и второй порядок на произвольной сетке. Также показано, что MUSCL-схема с постоянными коэффициентами вообще не аппроксимирует исходное уравнение на произвольной неравномерной сетке. Неравномерная MUSCL-реконструкция внедрена в численный алгоритм расчета течений несжимаемой жидкости. На двумерной задаче обтекания кругового цилиндра и трехмерной задаче о течении жидкости в проточном тракте гидротурбины показана более высокая точность предложенной схемы.

**Ключевые слова:** MUSCL-схема, реконструкция высокого порядка, неравномерная сетка, структурированная сетка, метод конечных объемов, уравнения Навье–Стокса.

**Для цитирования:** Кочарина А.Р., Чирков Д.В. MUSCL-схема третьего порядка точности на неравномерной структурированной сетке // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 4. 386–407. doi 10.26089/NumMet.v24r427.



## MUSCL-scheme of the third order of accuracy on a non-uniform structured grid

**Alena R. Kocharina**

Novosibirsk national research state university, Novosibirsk, Russia  
 Kutateladze institute of thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia  
 ORCID: 0009-0008-9244-9943, e-mail: [a.kocharina@ng.su.ru](mailto:a.kocharina@ng.su.ru)

**Denis V. Chirkov**

Novosibirsk national research state university, Novosibirsk, Russia  
 Kutateladze institute of thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia  
 ORCID: 0000-0002-7772-6745, e-mail: [chirkov.itp@gmail.com](mailto:chirkov.itp@gmail.com)

**Abstract:** An upwind finite volume scheme with third-order MUSCL-reconstruction at the cell interface is extended to non-uniform structured grids. The order of approximation of the original MUSCL-scheme with reconstruction using constant coefficients and the modified MUSCL-scheme with coefficients dependent on the grid steps is investigated for 1D nonlinear transport equation. It is shown that the order of approximation depends on the type of non-uniform grid. The cases of a grid with a constant clustering law and an arbitrary non-uniform grid are considered. It is shown analytically and numerically, that the non-uniform MUSCL-scheme with coefficients depending on the grid spacing has the third order of approximation on a non-uniform grid with a constant clustering law and the second order on an arbitrary grid. It is also shown that the MUSCL-scheme with constant coefficients does not approximate the original equation at all on an arbitrary non-uniform grid. Non-uniform MUSCL-reconstruction is introduced into the numerical algorithm for calculating incompressible fluid flows. Higher accuracy of the proposed scheme is demonstrated for a 2D problem of the flow around a circular cylinder and for a 3D fluid flow in a hydraulic turbine.

**Keywords:** MUSCL-scheme, high-order reconstruction, non-uniform mesh, structured mesh, finite volume method, Navier–Stokes equations.

**For citation:** A. R. Kocharina, D. V. Chirkov, “MUSCL-scheme of the third order of accuracy on a non-uniform structured grid,” Numerical Methods and Programming. 24 (4), 386–407 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r427.

**1. Введение.** Для численного решения уравнений динамики жидкости и газа активно применяется метод конечных объемов, в котором для аппроксимации конвективных потоков через грани ячейки используются схемы типа Годунова [1, 2]. В этих схемах для определения потока на грани ячейки решается одномерная задача Римана о распаде разрыва для исходной или линеаризованной системы уравнений движения [3]. По сути, эти схемы являются распространением противопотоковой схемы первого порядка на случай нелинейной системы уравнений. Если в качестве начальных данных для задачи Римана (состояний справа и слева от грани) берутся значения в центрах прилегающих к грани ячеек, то такие схемы имеют первый порядок аппроксимации по пространству. Для повышения порядка аппроксимации В. П. Колган [4] предложил формировать линейное распределение переменных внутри каждой ячейки и использовать полученные значения на грани в качестве начальных данных для задачи о распаде разрыва. Полученные в результате схемы имеют второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Развитием этой идеи является предложенная Ван-Лиром схема MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) [5], в которой для нахождения состояний слева и справа от грани используется реконструкция решения высокого порядка на грань ячейки. Проиллюстрируем идею MUSCL-схемы на примере скалярного нелинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Конечно-объемная дискретизация уравнения (1) по пространству дает

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = 0. \quad (2)$$

Численный поток через грань  $i + \frac{1}{2}$  определяется в зависимости от знака  $\partial f/\partial u$  по формуле

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}), \quad \text{где } \hat{u}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^L, & \partial f/\partial u > 0, \\ u_{i+\frac{1}{2}}^R, & \partial f/\partial u < 0. \end{cases}$$

Здесь  $u_{i+\frac{1}{2}}^L$  и  $u_{i+\frac{1}{2}}^R$  определяются путем специальной интерполяции (*реконструкции*) на грань  $i + \frac{1}{2}$  ячейки сетки:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = \bar{u}_i + \frac{1}{4}[(1-k)(\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}) + (1+k)(\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i)] \quad (\text{реконструкция слева}), \quad (3)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R = \bar{u}_{i+1} - \frac{1}{4}[(1+k)(\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i) + (1-k)(\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i+1})] \quad (\text{реконструкция справа}), \quad (4)$$

где  $\bar{u}_i$  — среднее по ячейке  $i$ . Случай  $k = 1$  дает центрально-разностную схему,  $k = -1$  — чисто противотокую схему второго порядка аппроксимации,  $k = 1/2$  дает известную схему QUICK, также имеющую второй порядок. Третий порядок для схемы QUICK достигается в случае трактовки величин  $\bar{u}_i$  как взятых в центре ячейки [6]. На равномерной сетке случай  $k = 1/3$  дает третий порядок аппроксимации в методе конечных объемов, где величины  $\bar{u}_i$  трактуются как средние по ячейке [7].

Для предотвращения осцилляций вблизи разрывов и больших градиентов решения, характерных для сжимаемых течений, на этапе реконструкции вводятся функции-ограничители [8]. В то же время, для задач расчета течений несжимаемой жидкости введение ограничителей в MUSCL-схему как правило не требуется [9].

Обобщение MUSCL-схем на многомерный случай рассмотрено, например, в [10–14]. В частности, при расчете на неструктурированных сетках переменные на грани ячейки определяются по формуле

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} = u_i + (\nabla u)_i \cdot (\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{r}_i),$$

где  $(\nabla u)_i$  — аппроксимация градиента решения в центре ячейки  $i$ ,  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}}$  — радиус-векторы центра ячейки и центра грани соответственно. Для вычисления  $(\nabla u)_i$  используются различные подходы на основе метода наименьших квадратов или на основе аппроксимации формулы Гаусса, в том числе с использованием функций-ограничителей [10, 15, 16]. Различные способы реконструкции переменных на неструктурированных сетках сравниваются в [17]. По сути, в этих схемах учтена неравномерность сетки. Однако данные схемы имеют лишь второй порядок аппроксимации по пространству.

Структурированные гексаэдральные сетки активно используются в CFD-расчетах благодаря тому, что на них обеспечивается более высокая точность аппроксимации уравнений движения. Наличие выделенных направлений позволяет использовать для определения численных потоков через грани ячейки квазиодномерный подход вдоль каждого сеточного направления. Это упрощает построение программного кода и позволяет использовать MUSCL-реконструкции более высокого порядка, чем на неструктурированных сетках. По оценкам авторов, при расчете пространственных течений в проточных частях турбомашин для достижения одинаковой точности гексаэдральная блочно-структурированная сетка требует примерно в три раза меньше ячеек, чем тетраэдральная. Поэтому выбор блочно-структурированной гексаэдральной сетки предпочтителен в задачах, требующих больших вычислительных затрат, где важна скорость счета, таких как задачи оптимизации формы проточного тракта [18], нестационарные задачи и т.д. MUSCL-схемы третьего и пятого порядка для структурированных сеток используются в таких вычислительных кодах, как CFL3D [19], отечественных пакетах CADRUN [9, 18] и ЛОГОС [20], европейском пакете elsA [21] и др.

Структурированные сетки часто строятся быстрыми алгебраическими методами, такими как метод Кунца. Для применения этого подхода в задачах со сложной геометрией проточная часть разбивается на сегменты, в каждом из которых характер сгущения сетки задается независимо от других сегментов. В результате на стыке этих сегментов шаги сетки даже по одному пространственному направлению могут значительно отличаться. Пример подобной сетки показан в разделе 8 настоящей работы. Однако,



насколько можно судить по литературе, реконструкция решения на грань, как правило, производится с постоянными коэффициентами, без учета неравномерности сетки. В работе [22] показано, что точность таких MUSCL-схем деградирует на неравномерных сетках.

В работе Ч.-В. Шу [23] получены реконструкции на грань ячейки произвольного порядка  $m$  для случая неравномерной сетки, однако доказан лишь  $m$ -й порядок реконструкции функции  $u$  на грань, а вопрос аппроксимации конвективных членов исследуется только для случая равномерной сетки. В недавней работе [7] Ван Лир и Нишикава исследуют реальную точность MUSCL-схемы для случая  $k = 1/3$  в зависимости от ее реализации. Однако их анализ опять же ограничен случаем равномерной сетки.

В настоящей работе MUSCL-схема третьего порядка ( $k = 1/3$  в (3)–(4)) распространена на случай неравномерной структурированной сетки. Первая часть работы посвящена исследованию аппроксимации одномерной схемы с коэффициентами интерполяции из работы Шу [23]. Впервые найден порядок ее аппроксимации в зависимости от типа неравномерной сетки. Поскольку в настоящей работе предполагается использование MUSCL-схемы для расчета течений несжимаемой жидкости, где не требуется использования функций-ограничителей, вопрос монотонизации схемы не рассматривается. Новая схема, названная MUSCL3N, внедрена в программный комплекс CADRUN [9] и протестирована на задачах обтекания цилиндра и задаче расчета течения жидкости в гидротурбине.

**2. MUSCL-схема в 1D-случае.** Пусть требуется построить консервативную схему конечных объемов третьего порядка аппроксимации для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Разобьем область, в которой ищется решение задачи, на отрезки (ячейки)  $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  с центрами  $x_i = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}}}{2}$ . Определим шаг сетки  $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ .

Тогда уравнение (5) после интегрирования по отрезку  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  примет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi, t) d\xi + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) = 0. \quad (6)$$

Введем обозначения для среднего значения функции  $u(x, t)$  в ячейке с номером  $i$ :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi, t) d\xi. \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Для реализации метода конечных объемов нужно аппроксимировать  $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t))$  и  $f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))$  через значения  $\bar{u}_i$  в данной и близлежащих ячейках.

Соответствующие аппроксимации  $f_{i+\frac{1}{2}} \approx f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t))$ ,  $f_{i-\frac{1}{2}} \approx f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))$  назовем численными потоками. Если

$$\frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = \frac{f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))}{h_i} + O(h^3), \quad (8)$$

то разностная схема

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = 0 \quad (9)$$

будет иметь третий порядок аппроксимации по  $x$ , где  $h$  — характерный шаг по пространству, в качестве которого может рассматриваться максимальный шаг на шаблоне в разностной схеме. Подчеркнем, что нас

интересует порядок аппроксимации по пространственной переменной, поэтому мы оставляем за рамками вопрос интегрирования по времени, а также вопрос обеспечения устойчивости счета по схеме (9).

Согласно MUSCL-подходу, численные потоки рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} &= f(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}), \\ f_{i-\frac{1}{2}} &= f(\hat{u}_{i-\frac{1}{2}}), \end{aligned} \tag{10}$$

где  $\hat{u}_{i\pm\frac{1}{2}}$  находятся с помощью специальной интерполяции (реконструкции) решения  $u$  на грань ячейки:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i+\frac{1}{2}} &= u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3), \\ \hat{u}_{i-\frac{1}{2}} &= u(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^3). \end{aligned} \tag{11}$$

На равномерной сетке такая интерполяция, например для  $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}$ , дается известными формулами:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L \equiv -\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{u}_i + \frac{1}{3}\bar{u}_{i+1} \quad (\text{реконструкция слева}) \tag{12}$$

или

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R \equiv \frac{1}{3}\bar{u}_i + \frac{5}{6}\bar{u}_{i+1} - \frac{1}{6}\bar{u}_{i+2} \quad (\text{реконструкция справа}).$$

Здесь перед средними значениями функции  $u(x, t)$  в ячейках сетки, т.е. перед  $\bar{u}_j$ ,  $j = i - 1, i, i + 1, i + 2$ , стоят постоянные коэффициенты.

Для неравномерной сетки коэффициенты в аналогичной формуле имеют более сложный вид и зависят от размеров шагов сетки:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = c_{10}\bar{u}_{i-1} + c_{11}\bar{u}_i + c_{12}\bar{u}_{i+1}, \tag{13}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R = c_{00}\bar{u}_i + c_{01}\bar{u}_{i+1} + c_{02}\bar{u}_{i+2}. \tag{14}$$

Вывод общего вида коэффициентов  $c_{rj}$  и алгоритм построения одномерной реконструкции функции  $u(x)$  на грань ячейки с требуемым порядком точности на произвольной сетке подробно описаны в работе [23]. В ней, учитывая местоположение ячейки  $I_i$  и необходимый порядок точности  $k$  (в нашем случае  $k = 3$ ), выбирается шаблон  $S(i)$ , основанный на  $r$  ячейках влево,  $s$  ячейках вправо и на самой ячейке  $I_i$ , т.е.  $S(i) = \{I_{i-r}, \dots, I_{i+s}\}$ ,  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$ ,  $r + s + 1 = k$ . На выбранном шаблоне  $S(i)$  коэффициенты для одномерной реконструкции функции  $u(x)$  на грань ячейки  $x_{i+\frac{1}{2}}$  с  $k$ -м порядком для произвольной сетки выглядят следующим образом [23]:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{L,R} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj}\bar{u}_{i-r+j}, \quad c_{rj} = h_{i-r+j} \frac{\sum_{l=0, l \neq m}^k \prod_{q=0, q \neq m, l}^k (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{l=0, l \neq m}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})}.$$

Выбирая для интерполяции третьего порядка слева на грань  $i + \frac{1}{2}$  шаблон  $S(i) = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$ , получим коэффициенты для (13):

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{-(h_i + h_{i-1})h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} + \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{h_i} - \frac{h_{i-1}}{h_{i+1}} + \frac{(h_i + h_{i-1})h_i h_{i-1}}{(h_{i-1} + h_i + h_{i+1})(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}, \\ c_{11} &= \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} + 1 - \frac{h_i}{h_{i+1}} + \frac{(h_i + h_{i-1})h_i^2}{(h_{i-1} + h_i + h_{i+1})(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}, \\ c_{12} &= \frac{(h_i + h_{i-1})h_i}{(h_{i-1} + h_i + h_{i+1})(h_i + h_{i+1})}. \end{aligned} \tag{15}$$



Выбирая для интерполяции третьего порядка справа на грань  $i + \frac{1}{2}$  шаблон  $S(i) = \{I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$ , получим коэффициенты для (14):

$$\begin{aligned}
 c_{00} &= 1 - \frac{h_i}{h_{i+1}} - \frac{h_i}{h_{i+1} + h_{i+2}} + \frac{h_i^2(h_{i+1} + h_{i+2})}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}h_{i+2}} - \frac{h_i^2h_{i+1}}{h_{i+2}(h_i + h_{i+1} + h_{i+2})(h_{i+1} + h_{i+2})}, \\
 c_{01} &= \frac{h_i(h_{i+1} + h_{i+2})}{(h_i + h_{i+1})h_{i+2}} - \frac{h_i h_{i+1}^2}{h_{i+2}(h_i + h_{i+1} + h_{i+2})(h_{i+1} + h_{i+2})}, \\
 c_{02} &= -\frac{h_i h_{i+1}}{(h_i + h_{i+1} + h_{i+2})(h_{i+1} + h_{i+2})}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что хотя формулы (15) и (16) для коэффициентов реконструкции были получены ранее, результирующий порядок аппроксимации MUSCL-схемы на неравномерной сетке не исследовался.

**3. Доказательство третьего порядка реконструкции для неравномерной сетки.** Покажем, что, если в качестве  $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}$  взять  $u_{i+\frac{1}{2}}^L$  по формуле (13), будет верно (11), а также найдем вид главного члена погрешности аппроксимации в (11). Для этого разложим функцию  $u(x, t)$  в ряд Тейлора в точке  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Для удобства будем писать  $u(x)$  вместо  $u(x, t)$ , так как все операции будут по переменной  $x$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= u(x_{i+\frac{1}{2}}) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} (x - x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} (x - x_{i+\frac{1}{2}})^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} (x - x_{i+\frac{1}{2}})^3 + O(h^4).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Проинтегрируем (17) по некоторому отрезку  $[a, b]$ , на котором определена функция  $u(x)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b u(x) dx &= \int_a^b u(x_{i+\frac{1}{2}}) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_a^b (x - x_{i+\frac{1}{2}}) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_a^b (x - x_{i+\frac{1}{2}})^2 dx + \\
 &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_a^b (x - x_{i+\frac{1}{2}})^3 dx + \int_a^b O(h^4) dx.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь используем полученное соотношение (18) для вычисления средних значений функции  $u(x)$  в ячейках  $i - 1$ ,  $i$ ,  $i + 1$  согласно определению (7):

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_{i-1} &= \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-\frac{3}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} u(x) dx = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{h_{i-1}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[\frac{h_i^2}{2} - \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2}\right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2h_{i-1}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[-\frac{h_i^3}{3} + \frac{(h_i + h_{i-1})^3}{3}\right] + \frac{1}{6h_{i-1}} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[\frac{h_i^4}{4} - \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{4}\right] + O(h^4), \\
 \bar{u}_i &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x) dx = u(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{h_i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{h_i^2}{6} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{h_i^3}{24} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} + O(h^4), \\
 \bar{u}_{i+1} &= \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{3}{2}}} u(x) dx = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{h_{i+1}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{h_{i+1}^2}{6} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} + \\
 &\quad + \frac{h_{i+1}^3}{24} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} + O(h^4).
 \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения для  $\bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}$  в выражение для  $u_{i+\frac{1}{2}}^L$  в формуле (13), получим:

$$\begin{aligned}
 u_{i+\frac{1}{2}}^L &= c_{10}\bar{u}_{i-1} + c_{11}\bar{u}_i + c_{12}\bar{u}_{i+1} = u\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) [c_{10} + c_{11} + c_{12}] + \\
 &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[ c_{10} \frac{1}{h_{i-1}} \left( \frac{h_i^2}{2} - \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2} \right) - c_{11} \frac{h_i}{2} + c_{12} \frac{h_{i+1}}{2} \right] + \\
 &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[ c_{10} \frac{1}{2} \frac{1}{h_{i-1}} \left( -\frac{h_i^3}{3} + \frac{(h_i + h_{i-1})^3}{3} \right) + c_{11} \frac{h_i^2}{6} + c_{12} \frac{h_{i+1}^2}{6} \right] + \\
 &+ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[ c_{10} \frac{1}{6} \frac{1}{h_{i-1}} \left( \frac{h_i^4}{4} - \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{4} \right) - c_{11} \frac{h_i^3}{24} + c_{12} \frac{h_{i+1}^3}{24} \right] + \\
 &+ O(h^4) [c_{10} + c_{11} + c_{12}]. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $c_{1j}, j = 0, 1, 2$ , имеют вид (15). Подставив их в коэффициенты при  $u(x_{i+\frac{1}{2}})$  и при  $\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}}, k = 1, 2, 3$ , в формуле (19), получим:

$$\begin{cases}
 c_{10} + c_{11} + c_{12} = 1, \\
 c_{10} \frac{1}{h_{i-1}} \left( \frac{h_i^2}{2} - \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2} \right) - c_{11} \frac{h_i}{2} + c_{12} \frac{h_{i+1}}{2} = 0, \\
 c_{10} \frac{1}{2} \frac{1}{h_{i-1}} \left( -\frac{h_i^3}{3} + \frac{(h_i + h_{i-1})^3}{3} \right) + c_{11} \frac{h_i^2}{6} + c_{12} \frac{h_{i+1}^2}{6} = 0, \\
 c_{10} \frac{1}{6} \frac{1}{h_{i-1}} \left( \frac{h_i^4}{4} - \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{4} \right) - c_{11} \frac{h_i^3}{24} + c_{12} \frac{h_{i+1}^3}{24} \neq 0.
 \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, первые три коэффициента зануляются, четвертый коэффициент имеет порядок  $O(h^3)$ , что доказывает третий порядок (11) для реконструкции (13), (15).

Отметим, что первые три уравнения системы (20) можно рассматривать как СЛАУ для нахождения  $c_{10}, c_{11}, c_{12}$ . Последнее уравнение (20) дает главный член погрешности аппроксимации в (11).

Справедливость (11) для интерполяции на грань ячейки справа  $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^R$ , определенной по формуле (14), показывается аналогично.

Таким же образом можно найти коэффициенты перед  $\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}}$  в (19) в случае, когда  $c_{10} = -\frac{1}{6}$ ,  $c_{11} = \frac{5}{6}, c_{12} = \frac{1}{3}$ :

$$\begin{cases}
 -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = 1, \\
 -\frac{1}{6} \frac{1}{h_{i-1}} \left( \frac{h_i^2}{2} - \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2} \right) - \frac{5}{6} \frac{h_i}{2} + \frac{1}{3} \frac{h_{i+1}}{2} = O(h), \\
 -\frac{1}{12} \frac{1}{h_{i-1}} \left( -\frac{h_i^3}{3} + \frac{(h_i + h_{i-1})^3}{3} \right) + \frac{5}{6} \frac{h_i^2}{6} + \frac{1}{3} \frac{h_{i+1}^2}{6} \neq 0, \\
 -\frac{1}{36} \frac{1}{h_{i-1}} \left( \frac{h_i^4}{4} - \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{4} \right) - \frac{5}{6} \frac{h_i^3}{24} + \frac{1}{3} \frac{h_{i+1}^3}{24} \neq 0.
 \end{cases}$$

Отсюда видно, что на произвольной сетке MUSCL-реконструкция с постоянными коэффициентами (12) дает, вообще говоря, лишь первый порядок реконструкции  $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h)$ . Однако можно показать, что на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения порядок реконструкции будет  $O(h^2)$ . Доказательство этого факта аналогично тому, что представлено ниже в разделе 4.



**4. Исследование аппроксимации MUSCL-схемы для неравномерной сетки.** Заметим, что  $k$ -й порядок реконструкции решения на грань сетки еще не означает  $k$ -го порядка аппроксимации в схеме (9) с численными потоками (10). Исследуем порядок аппроксимации конвективного члена  $\frac{\partial f}{\partial x}$  в MUSCL-схеме, т.е. проверим выполнение (8).

Без ограничения общности положим, что численные потоки вычисляются через реконструкции слева:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(u_{i+\frac{1}{2}}^L), \quad f_{i-\frac{1}{2}} = f(u_{i-\frac{1}{2}}^L),$$

где  $u_{i+\frac{1}{2}}^L, u_{i-\frac{1}{2}}^L$  имеют вид (13) и для них верно:

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}^L &= u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3), \\ u_{i-\frac{1}{2}}^L &= u(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^3). \end{aligned} \tag{21}$$

Разложим функцию  $f(u)$  в ряд Тейлора в точках  $u(x_{i+\frac{1}{2}})$  и  $u(x_{i-\frac{1}{2}})$ :

$$f(u) = f(u(x_{i\pm\frac{1}{2}})) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Big|_{u(x_{i\pm\frac{1}{2}})} \cdot (u - u(x_{i\pm\frac{1}{2}})) + O(\Delta u^2), \tag{22}$$

где  $\Delta u = u - u(x_{i\pm\frac{1}{2}})$ .

Применяя формулу (22), получим:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} &= \frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^L) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^L)}{h_i} = \frac{f(u(x_{i+\frac{1}{2}})) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}))}{h_i} + \\ &+ \frac{1}{h_i} \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Big|_{u(x_{i+\frac{1}{2}})} \cdot (u_{i+\frac{1}{2}}^L - u(x_{i+\frac{1}{2}})) - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Big|_{u(x_{i-\frac{1}{2}})} \cdot (u_{i-\frac{1}{2}}^L - u(x_{i-\frac{1}{2}})) \right] + O(h^5). \end{aligned} \tag{23}$$

Из (23) сразу следует, что при выполнении условий (21)

$$\frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \text{ сходится к } \frac{f(u(x_{i+\frac{1}{2}})) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}))}{h_i}$$

со вторым порядком на любой неравномерной сетке. Таким образом, на произвольной сетке MUSCL-схема с неравномерной реконструкцией имеет по крайней мере второй порядок аппроксимации по пространству.

Для дальнейшего анализа необходимо уточнить характер неравномерной сетки. Важным частным случаем неравномерной сетки является сетка с постоянным законом сгущения

$$x = X(\xi),$$

где  $\xi$  принадлежит отрезку  $[0, 1]$ , на котором вводится равномерная сетка. Покажем, что на сетке с постоянным законом сгущения MUSCL-схема (9) имеет третий порядок аппроксимации. Для этого сначала проанализируем главный член погрешности  $u_{i+\frac{1}{2}}^L - u(x_{i+\frac{1}{2}})$  в (19). Он равен:

$$\frac{1}{24} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[ c_{10} \left(\frac{h_i^4}{h_{i-1}} - \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{h_{i-1}}\right) - c_{11}h_i^3 + c_{12}h_{i+1}^3 \right]. \tag{24}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= g(x), \\ c_{10} \left(\frac{h_i^4}{h_{i-1}} - \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{h_{i-1}}\right) - c_{11}h_i^3 + c_{12}h_{i+1}^3 &= L(h_{i-1}, h_i, h_{i+1}). \end{aligned} \tag{25}$$



С учетом (24), введенных обозначений (25), а также разложения в ряд Тейлора  $g(x_{i+\frac{1}{2}}) = g(x_{i-\frac{1}{2}} + h_i) = g(x_{i-\frac{1}{2}}) + h_i g'(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^2)$  формула (23) примет вид:

$$\frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = \frac{f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}})\right) - f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}})\right)}{h_i} + \frac{h_i^2}{24} \cdot \left[ g(x_{i-\frac{1}{2}}) \left( \frac{L(h_{i-1}, h_i, h_{i+1})}{h_i^3} - \frac{L(h_{i-2}, h_{i-1}, h_i)}{h_i^3} \right) + h_i g'(x_{i-\frac{1}{2}}) \frac{L(h_{i-1}, h_i, h_{i+1})}{h_i^3} + O(h^2) \right]. \quad (26)$$

Если сетка имеет постоянный закон сгущения, то выполнено:

$$\frac{L(h_{i-1}, h_i, h_{i+1})}{h_i^3} = c_{10} \left( \frac{h_i}{h_{i-1}} - \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{h_{i-1} h_i^3} \right) - c_{11} + c_{12} \frac{h_{i+1}^3}{h_i^3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2.$$

Это следует из того, что  $\frac{h_{i+1}}{h_i} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$  и коэффициенты  $c_{10}, c_{11}, c_{12}$  сходятся к коэффициентам для аналогичной формулы на равномерной сетке, т.е.  $c_{10} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{6}, c_{11} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{5}{6}, c_{12} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{3}$ .

Аналогично можно показать, что  $\frac{L(h_{i-2}, h_{i-1}, h_i)}{h_i^3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2$ .

Теперь нужно оценить скорость этой сходимости. Если удастся показать, что  $\frac{L(h_{i-1}, h_i, h_{i+1})}{h_i^3} - 2 = O(h)$  и  $\frac{L(h_{i-2}, h_{i-1}, h_i)}{h_i^3} - 2 = O(h)$ , то член в квадратных скобках в (26) будет иметь порядок  $O(h)$  и, тем самым, будет доказан третий порядок аппроксимации в (23).

Для этого посмотрим, с какой скоростью  $\frac{h_{i+1}}{h_i} - 1$  сходится к 0 при  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{h_{i+1}}{h_i} - 1 &= \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i} = h_i \frac{x_{i+\frac{3}{2}} - 2x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}}}{(\Delta\xi)^2} \frac{1}{\left(\frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta\xi}\right)^2} = \\ &= h_i \left( \left( \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} \right)_{\xi_{i+\frac{1}{2}}} + O((\Delta\xi)^2) \right) \frac{1}{\left( \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{\xi_{i+\frac{1}{2}}} + O(\Delta\xi) \right)^2} = h_i \frac{\left( \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} \right)_{\xi_{i+\frac{1}{2}}}}{\left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{\xi_{i+\frac{1}{2}}}^2} + O(h_i \Delta\xi). \quad (27) \end{aligned}$$

Потребуем от закона сгущения выполнения следующих естественных условий:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} \geq C_1 > 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} \leq C_2 \quad \text{при } \xi \in [0, 1]. \quad (28)$$

Эти условия выполняются для большинства применяемых на практике законов сгущения сетки, в частности для экспоненциального сгущения  $X(\xi) = \frac{(1+a)^\xi - 1}{a}, a = const > 0$ .

Из (27) следует, что при выполнении условий (28)

$$\delta = \frac{h_{i+1}}{h_i} - 1 = O(h).$$

Заметим, что каждое слагаемое в  $\frac{L(h_{i-1}, h_i, h_{i+1})}{h_i^3}$  можно выразить через бесконечно малую  $\delta$ . По отдельности оценим порядок сходимости этих слагаемых к их пределам при  $h \rightarrow 0$ .

Например, покажем, что  $c_{12} \frac{h_{i+1}^3}{h_i^3} - \frac{1}{3} = O(h)$ . Для этого достаточно показать, что  $c_{12} - \frac{1}{3} = O(h)$ ,  $\frac{h_{i+1}^3}{h_i^3} - 1 = O(h)$ .



Действительно,

$$\begin{aligned}
 c_{12} - \frac{1}{3} &= \frac{(h_i + h_{i-1})h_i}{(h_{i-1} + h_i + h_{i+1})(h_i + h_{i+1})} - \frac{1}{3} = \left( \frac{1}{1 + \frac{h_{i+1}}{h_i}} \right) \left( \frac{1 + \frac{h_{i-1}}{h_i}}{\frac{h_{i-1}}{h_i} + 1 + \frac{h_{i+1}}{h_i}} \right) - \frac{1}{3} = \\
 &= \left( \frac{1}{2 + \frac{h_{i+1}}{h_i} - 1} \right) \left( \frac{1 + \frac{1}{\frac{1}{1 + \frac{h_{i-1}}{h_i}} - 1}}{\frac{1}{\frac{1}{1 + \frac{h_{i-1}}{h_i}} - 1} + 2 + \frac{h_{i+1}}{h_i} - 1} \right) - \frac{1}{3} = \left( \frac{1}{2 + O(h)} \right) \left( \frac{1 + \frac{1}{1 + O(h)}}{\frac{1}{1 + O(h)} + 2 + O(h)} \right) - \frac{1}{3} = \\
 &= \left( \frac{1}{2} + O(h) \right) \left( \frac{1 + 1 + O(h)}{1 + O(h) + 2} \right) - \frac{1}{3} = \left( \frac{1}{2} + O(h) \right) \left( \frac{2}{3} + O(h) \right) - \frac{1}{3} = O(h),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{h_{i+1}^3}{h_i^3} - 1 &= \frac{h_{i+1}^3 - h_i^3}{h_i^3} = \frac{(h_{i+1} - h_i)(h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_i + h_i^2)}{h_i^3} = \left( \frac{h_{i+1}}{h_i} - 1 \right) \left( \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2} + \frac{h_{i+1}}{h_i} + 1 \right) = \\
 &= \delta \left( \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2} - 1 + \frac{h_{i+1}}{h_i} - 1 + 3 \right) = \delta(\delta + 2) + \delta + 3 = O(h).
 \end{aligned}$$

Для остальных слагаемых  $\frac{L(h_{i-1}, h_i, h_{i+1})}{h_i^3}$  и  $\frac{L(h_{i-2}, h_{i-1}, h_i)}{h_i^3}$  рассуждения аналогичны.

Таким образом, для сетки с постоянным законом сгущения  $x = X(\xi)$  формула (26) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} &= \frac{f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}})\right) - f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}})\right)}{h_i} + \frac{h_i^2}{24} \cdot \left[ g(x_{i+\frac{1}{2}})O(h) + h_i g'(x_{i+\frac{1}{2}})(2 + O(h)) + O(h^2) \right] = \\
 &= \frac{f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}})\right) - f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}})\right)}{h_i} + O(h^3).
 \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что при условиях (28) для неравномерной сетки с постоянным сгущением и, в частности для равномерной сетки, MUSCL-схема (9) имеет третий порядок аппроксимации по пространству.

Пусть вместо (21) выполняется:

$$\begin{aligned}
 u_{i+\frac{1}{2}}^L &= u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^k), \\
 u_{i-\frac{1}{2}}^L &= u(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^k).
 \end{aligned}$$

Тогда, аналогично (23), получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} &= \frac{f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}})\right) - f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}})\right)}{h_i} + \\
 &+ \frac{1}{h_i} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{u(x_{i+\frac{1}{2}})} \cdot O(h^k) - \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{u(x_{i-\frac{1}{2}})} \cdot O(h^k) \right] + \frac{O(h^{2k}) - O(h^{2k})}{h_i}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что на произвольной неравномерной сетке порядок аппроксимации  $\frac{\partial f}{\partial u}$  равен  $k - 1$ :

$$\frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = \frac{f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}})\right) - f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}})\right)}{h_i} + O(h^{k-1}). \quad (30)$$

Рассуждая аналогично случаю  $k = 3$ , получим, что на сетке с постоянным законом сгущения член в квадратных скобках в (29) равен  $O(h^{k+1})$  и порядок аппроксимации  $\frac{\partial f}{\partial u}$  сохраняется равным  $k$ :

$$\frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = \frac{f(u(x_{i+\frac{1}{2}})) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}))}{h_i} + O(h^k). \quad (31)$$

**5. Тестирование в 1D-случае.** Рассмотрим два вида сеток — неравномерную сетку с постоянным законом сгущения и неравномерную сетку произвольного вида.

Неравномерную сетку с постоянным законом сгущения построим следующим образом: с помощью специального отображения (32) плавно сгустим равномерную сетку на отрезке  $[0, 1] = [x_{\frac{1}{2}}, x_{N-\frac{1}{2}}]$  к его концу  $x = 0$ . Возьмем коэффициент сгущения  $a = 12$ , чтобы  $\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \simeq 10$ , где  $h_{\max} = \max_i h_i = h_{N-1}$ ,  $h_{\min} = \min_i h_i = h_1$ .

$$x_{i-\frac{1}{2}}(\xi_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{(1+a)^{\xi_{i-\frac{1}{2}}} - 1}{a}, \quad a > 0, \quad \xi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{i-1}{N-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (32)$$

В качестве неравномерной сетки произвольного вида возьмем сетку с чередованием шагов. Будем называть ее также неравномерной сеткой с постоянной неравномерностью. Построим ее на отрезке  $[0, 1] = [x_{\frac{1}{2}}, x_{N-\frac{1}{2}}]$  следующим образом:

$$h_1^* = 0.2, \quad h_2^* = 0.3, \quad h_3^* = 0.5, \quad M = \frac{3}{N-1},$$

$$h_i = M \begin{cases} h_1^*, & i = 3k + 1, \\ h_2^*, & i = 3k + 2, \\ h_3^*, & i = 3k + 3. \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{3} - 1,$$

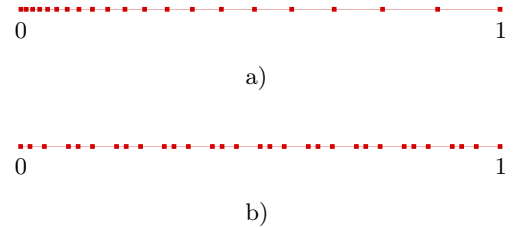


Рис. 1. Неравномерная сетка: а) с постоянным законом сгущения; б) с постоянной неравномерностью

Fig. 1. Non-uniform grid: a) with a constant refinement law; b) with a constant non-uniformity

Очевидно, на этой сетке  $\frac{h_{i+1}}{h_i} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ .

На рис. 1 а, б представлены примеры таких сеток для  $N = 21$  и  $N = 31$  соответственно.

Введем следующие равномерные нормы для определения порядков аппроксимации:

$$\varepsilon^u = \max_i |u_{i+\frac{1}{2}}^L - u(x_{i+\frac{1}{2}})|, \quad i = 1, \dots, N-3,$$

$$\varepsilon^f = \max_i \left| \frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^L) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^L)}{h_i} - \frac{f(u(x_{i+\frac{1}{2}})) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}))}{h_i} \right|, \quad i = 1, \dots, N-4.$$

Для тестирования возьмем  $u(x) = \sin x$  и  $f(u(x)) = u^2(x)$ .

Средние значения функции  $u(x) = \sin x$  на ячейках вычисляются аналитически:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sin(\xi) d\xi = \frac{\cos(x_{i-\frac{1}{2}}) - \cos(x_{i+\frac{1}{2}})}{h_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Сравним результаты, полученные для этих сеток MUSCL-схемой с постоянными коэффициентами и MUSCL-схемой с коэффициентами, зависящими от шагов сетки, с теоретическими, полученными в разделах 3, 4.

Далее будем называть MUSCL-схему с постоянными коэффициентами, описанную формулой (12), — MUSCL3, а MUSCL-схему с коэффициентами, зависящими от шагов сетки, описанную формулой (13), — MUSCL3N.



Для определения порядков аппроксимации будем в два раза измельчать сетку и смотреть, как при этом меняются погрешности  $\varepsilon^u$  и  $\varepsilon^f$ . Логарифм по основанию 2 от отношения максимумов погрешности для сеток, отличающихся по количеству ячеек в два раза, т.е.  $\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u} \right)$  будет равен порядку аппроксимации.

**5.1. MUSCL-схема с постоянными коэффициентами.** Результаты, полученные при применении схемы MUSCL3, на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения представлены в табл. 1, а на неравномерной сетке с постоянной неравномерностью — в табл. 2.

Из табл. 1 видно, что на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения:

- $u_{i+\frac{1}{2}}^L = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^2)$ ;
- верно (31), т.е. исходная MUSCL-схема (9) также имеет второй порядок аппроксимации.

Из табл. 2 следует, что на неравномерной сетке с постоянной неравномерностью:

- $u_{i+\frac{1}{2}}^L = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h)$ ;
- верно (30), т.е. исходная MUSCL-схема (9) имеет нулевой порядок аппроксимации, на один ниже, чем порядок интерполяции на грань ячейки.

Таким образом, результаты вычислительного эксперимента совпадают с теоретическими результатами, полученными в разделах 3, 4.

**5.2. MUSCL-схема с коэффициентами, зависящими от шагов сетки.** Результаты, полученные при применении схемы MUSCL3N, на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения представлены в табл. 3, а на неравномерной сетке с постоянной неравномерностью — в табл. 4.

Из табл. 3 видно, что на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения:

- $u_{i+\frac{1}{2}}^L = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3)$ ;
- верно (31), т.е. исходная MUSCL-схема (9) также имеет третий порядок аппроксимации.

Таблица 1. Зависимость  $\varepsilon^u$  и  $\varepsilon^f$  для схемы MUSCL3 от количества интервалов на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения

Table 1. Dependence of  $\varepsilon^u$  and  $\varepsilon^f$  for the MUSCL3-scheme on the number of intervals on a non-uniform grid with a constant refinement law

$N - 1$	$\varepsilon^u$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u} \right)$	$\varepsilon^f$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f} \right)$
10	$2.72 \cdot 10^{-3}$	—	—	$6.79 \cdot 10^{-3}$	—	—
20	$7.04 \cdot 10^{-4}$	3.86	1.949	$1.75 \cdot 10^{-3}$	3.88	1.956
40	$1.86 \cdot 10^{-4}$	3.78	1.918	$4.57 \cdot 10^{-4}$	3.82	1.934
80	$4.90 \cdot 10^{-5}$	3.79	1.922	$1.18 \cdot 10^{-4}$	3.87	1.952
160	$1.26 \cdot 10^{-5}$	3.88	1.956	$3.05 \cdot 10^{-5}$	3.86	1.949
320	$3.22 \cdot 10^{-6}$	3.91	1.967	$7.75 \cdot 10^{-6}$	3.93	1.975

Таблица 2. Зависимость  $\varepsilon^u$  и  $\varepsilon^f$  для схемы MUSCL3 от количества интервалов на неравномерной сетке с постоянной неравномерностью

Table 2. Dependence of  $\varepsilon^u$  and  $\varepsilon^f$  for the MUSCL3-scheme on the number of intervals on a non-uniform grid with constant non-uniformity

$N - 1$	$\varepsilon^u$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u} \right)$	$\varepsilon^f$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f} \right)$
30	$6.63 \cdot 10^{-3}$	—	—	0.545263	—	—
60	$3.32 \cdot 10^{-3}$	1.997	0.993	0.543346	1.0035	0.0050
120	$1.66 \cdot 10^{-3}$	2.000	1.000	0.542542	1.0014	0.0020
240	$8.33 \cdot 10^{-4}$	1.993	0.993	0.542148	1.0007	0.0010
480	$4.16 \cdot 10^{-4}$	2.002	1.001	0.541905	1.0004	0.0005

Таблица 3. Зависимость  $\varepsilon^u$  и  $\varepsilon^f$  для схемы MUSCL3N от количества интервалов на неравномерной сетке с постоянным законом сгущения

Table 3. Dependence of  $\varepsilon^u$  and  $\varepsilon^f$  for the MUSCL3N-scheme on the number of intervals on a non-uniform grid with a constant refinement law

$N - 1$	$\varepsilon^u$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u} \right)$	$\varepsilon^f$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f} \right)$
10	$4.97 \cdot 10^{-4}$	–	–	$2.11 \cdot 10^{-3}$	–	–
20	$9.06 \cdot 10^{-5}$	5.48	2.454	$3.86 \cdot 10^{-4}$	5.46	2.449
40	$1.32 \cdot 10^{-5}$	6.86	2.778	$5.23 \cdot 10^{-5}$	7.38	2.884
80	$1.77 \cdot 10^{-6}$	7.45	2.897	$6.57 \cdot 10^{-6}$	7.96	2.993
160	$2.29 \cdot 10^{-7}$	7.72	2.949	$8.22 \cdot 10^{-7}$	7.99	2.998
320	$2.90 \cdot 10^{-8}$	7.89	2.980	$1.02 \cdot 10^{-7}$	8.05	3.009

Таблица 4. Зависимость  $\varepsilon^u$  и  $\varepsilon^f$  для схемы MUSCL3N от количества интервалов на неравномерной сетке с постоянной неравномерностью

Table 4. Dependence of  $\varepsilon^u$  and  $\varepsilon^f$  for the MUSCL3N-scheme on the number of intervals on a non-uniform grid with constant non-uniformity

$N - 1$	$\varepsilon^u$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^u}{\varepsilon_N^u} \right)$	$\varepsilon^f$	$\frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f}$	$\log_2 \left( \frac{\varepsilon_{N/2}^f}{\varepsilon_N^f} \right)$
30	$3.32 \cdot 10^{-6}$	–	–	$8.19 \cdot 10^{-5}$	–	–
60	$4.16 \cdot 10^{-7}$	7.98	2.99	$2.01 \cdot 10^{-5}$	4.07	2.02
120	$5.20 \cdot 10^{-8}$	8.00	3.00	$4.98 \cdot 10^{-6}$	4.03	2.01
240	$6.51 \cdot 10^{-9}$	7.98	2.99	$1.24 \cdot 10^{-6}$	4.01	2.00
480	$8.13 \cdot 10^{-10}$	8.01	3.00	$3.09 \cdot 10^{-7}$	4.01	2.00

Из табл. 4 следует, что на неравномерной сетке с постоянной неравномерностью:

- $u_{i+\frac{1}{2}}^L = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^3)$ ;
- верно (30), т.е. исходная MUSCL-схема (9) имеет второй порядок аппроксимации, на один ниже, чем порядок интерполяции на грань ячейки.

Таким образом, результаты вычислительного эксперимента совпадают с теоретическими результатами, полученными в разделах 3, 4.

**5.3. Порядки аппроксимации MUSCL-схем.** Порядок аппроксимации схемы на неравномерной сетке во многом зависит от характера сетки, она может иметь постоянный закон сгущения или быть произвольной. Полученные выше теоретические и численные оценки порядка реконструкции и аппроксимации MUSCL-схем систематизированы в табл. 5, 6.

Таблица 5. Зависимость порядка реконструкции  $u_{i+\frac{1}{2}}^L$  от схемы и от типа сетки  
 Table 5. Dependence of  $u_{i+\frac{1}{2}}^L$  reconstruction order on the scheme and on the type of grid

Схема Scheme	Неравномерная сетка Non-uniform grid	
	С постоянным законом сгущения With a constant refinement law	Произвольная Arbitrary
MUSCL3	2	1
MUSCL3N	3	3



Таблица 6. Зависимость порядка аппроксимации  $\frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^L) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^L)}{h_i}$  от схемы и от типа сетки

Table 6. Dependence of the approximation order of  $\frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}^L) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^L)}{h_i}$  on the scheme and on the type of grid

Схема Scheme	Неравномерная сетка Non-uniform grid	
	С постоянным законом сгущения With a constant refinement law	Произвольная Arbitrary
MUSCL3	2	0
MUSCL3N	3	2

Из табл. 5, 6 видно, что:

- MUSCL3 имеет второй порядок аппроксимации на неравномерных сетках с постоянным законом сгущения и нулевой порядок аппроксимации на произвольных неравномерных сетках, т.е. на произвольной неравномерной сетке MUSCL-схема с постоянными коэффициентами интерполяции вообще не аппроксимирует уравнение (2);
- MUSCL3N имеет третий порядок аппроксимации на неравномерных сетках с постоянным законом сгущения и второй порядок на произвольных неравномерных сетках.

Эти результаты показаны теоретически в разделах 3, 4 и в ходе вычислительного эксперимента в разделах 5.1, 5.2.

**6. MUSCL-схема для уравнений Навье–Стокса.** В настоящем разделе схема MUSCL3N распространяется на случай решения многомерных уравнений Эйлера и Навье–Стокса несжимаемой жидкости. Уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (33)$$

где

$$\tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность жидкости,  $u_1, u_2, u_3$  — компоненты вектора скорости,  $p$  — давление,  $\nu$  — коэффициент вязкости,  $\tau_{ij}$  — коэффициенты тензора вязких напряжений. Частный случай уравнений Навье–Стокса при  $\nu = 0$  — уравнения Эйлера, описывающие движение идеальной несжимаемой жидкости.

Уравнения Навье–Стокса решаются методом искусственной сжимаемости, в котором вводится член  $\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t}$  в уравнение неразрывности, где  $\beta$  — коэффициент искусственной сжимаемости. В результате система (33) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \end{cases} \quad (34)$$

Коэффициент  $\beta = K \cdot U_{\text{ref}}^2$ , где  $U_{\text{ref}}$  — величина характерной скорости течения в расчетной области, а коэффициент  $K$  рекомендуется выбирать из диапазона [1, 10] (см. например, [9]).

Стационарное решение этой системы совпадает со стационарным решением исходных уравнений Навье–Стокса. Система уравнений (34) может быть записана в дивергентном виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad (35)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \beta u_1 \\ u_1^2 + \hat{p} - \tau_{11} \\ u_1 u_2 - \tau_{12} \\ u_1 u_3 - \tau_{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \beta u_2 \\ u_1 u_2 - \tau_{12} \\ u_2^2 + \hat{p} - \tau_{22} \\ u_2 u_3 - \tau_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \beta u_3 \\ u_1 u_3 - \tau_{13} \\ u_2 u_3 - \tau_{23} \\ u_3^2 + \hat{p} - \tau_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — вектор неизвестных,  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  — векторы потоков,  $\hat{p} = \frac{p}{\rho_0}$ .

Уравнения (35) представляются в форме интегральных законов сохранения для произвольного фиксированного объема  $V$ :

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} K \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (36)$$

где  $K = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)$  — матрица потоков, составленная из векторов потоков, которую можно представить в виде суммы невязкой и вязкой составляющих:  $K = K^{\text{inv}} + K^{\text{vis}}$ .

Интегральное уравнение (36) решается методом конечных объемов на структурированной сетке. Для этого сегмент расчетной области разбивается на элементарные ячейки с индексами  $(i, j, k)$  в виде криволинейных шестигранников. Аппроксимация уравнения (36) неявным методом конечных объемов для ячейки  $(i, j, k)$  выглядит следующим образом:

$$\frac{\mathbf{Q}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{Q}_{ijk}^n}{\Delta t} V_{ijk} = \mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1}, \quad (37)$$

где  $\mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1}$  содержит сумму потоков через все грани ячейки  $(i, j, k)$ :

$$\mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1} = - \left[ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} + \mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}} + \mathbf{F}_{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{k-\frac{1}{2}} \right]^{n+1}. \quad (38)$$

Здесь  $V_{ijk}$  — объем ячейки с индексами  $(i, j, k)$ ,  $\Delta t$  — шаг по времени,  $n$  — номер слоя по времени,  $i \pm \frac{1}{2}$ ,  $j \pm \frac{1}{2}$ ,  $k \pm \frac{1}{2}$  — индексы граней ячейки  $(i, j, k)$ . Каждый поток разбивается на сумму вязкого и невязкого потоков:  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{inv}} + \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{vis}}$ .

В пакете программ CADRUN [9] для вычисления невязких потоков  $\mathbf{F}_{m \pm \frac{1}{2}}^{\text{inv}}$  используется схема Рой [2] с MUSCL-реконструкцией. Рассмотрим аппроксимацию невязкого потока через грань  $i + \frac{1}{2}$ :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{inv}} = \frac{1}{2} \left[ (K^{\text{inv}}(\mathbf{Q}_L) + K^{\text{inv}}(\mathbf{Q}_R)) \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} - |\hat{A}| (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L) \right],$$

$$\hat{A} = A(\mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}), \quad A(\mathbf{Q}) = \frac{\partial K^{\text{inv}}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R}{2},$$

где  $A(\mathbf{Q})$  — матрица Якоби,  $\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}}$  — нормаль к грани  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$  ячейки  $(i, j, k)$ , длина которой равна площади грани. Для вычисления матрицы  $|\hat{A}|$  используется расщепление матрицы Якоби по знакам собственных значений:  $|\hat{A}| = R|D|L$ , где  $R$  и  $L$  — матрицы правых собственных векторов-столбцов и левых собственных векторов-строк соответственно, а  $|D|$  — диагональная матрица, содержащая модули собственных чисел матрицы  $A$ . Векторы  $\mathbf{Q}_L$  и  $\mathbf{Q}_R$  вычисляются с помощью MUSCL-реконструкции. В [9] для этого используется MUSCL-реконструкция с постоянными коэффициентами, соответствующая схеме третьего порядка для равномерной сетки:

$$\mathbf{Q}_L = -\frac{1}{6} \bar{\mathbf{Q}}_{i-1} + \frac{5}{6} \bar{\mathbf{Q}}_i + \frac{1}{3} \bar{\mathbf{Q}}_{i+1},$$

$$\mathbf{Q}_R = \frac{1}{3} \bar{\mathbf{Q}}_i + \frac{5}{6} \bar{\mathbf{Q}}_{i+1} - \frac{1}{6} \bar{\mathbf{Q}}_{i+2}, \quad (39)$$

где  $\bar{\mathbf{Q}}_{i-1}, \bar{\mathbf{Q}}_i, \bar{\mathbf{Q}}_{i+1}, \bar{\mathbf{Q}}_{i+2}$  — короткие обозначения для векторов  $\mathbf{Q}_{i-1,j,k}, \mathbf{Q}_{i,j,k}, \mathbf{Q}_{i+1,j,k}, \mathbf{Q}_{i+2,j,k}$  соответственно.



В настоящей работе предлагается использовать аналог этой схемы для неравномерной сетки:

$$\begin{aligned} Q_L &= c_{10}\bar{Q}_{i-1} + c_{11}\bar{Q}_i + c_{12}\bar{Q}_{i+1}, \\ Q_R &= c_{00}\bar{Q}_i + c_{01}\bar{Q}_{i+1} + c_{02}\bar{Q}_{i+2}, \end{aligned} \tag{40}$$

где  $c_{ij}$  вычисляются с использованием шагов сетки  $h_i$ . А именно,  $c_{1j}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) считаются по формулам (15), а  $c_{0j}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) — по формулам (16). Шаг  $h_{ijk}^{(m)}$  сетки вдоль криволинейного сеточного направления  $m$  определялся как расстояние между центрами противоположных граней данной ячейки:  $m + \frac{1}{2}$  и  $m - \frac{1}{2}$ . Как и прежде, схему с реконструкцией (39) назовем MUSCL3, схему (40) — MUSCL3N.

Конечно, при переходе к многомерному случаю порядок аппроксимации метода конечных объемов с MUSCL-реконструкцией снижается, в лучшем случае до второго. И здесь нас интересует даже не формальный порядок аппроксимации, а поведение решения вблизи скачкообразного изменения густоты сетки. Необходимо также отметить, что в MUSCL3N мы учитываем только неравномерность шагов сетки вдоль данного координатного направления (1D-реконструкция). Искривление координатных направлений, а также скошенность ячеек сетки никак не учитываются.

Неявная схема (37) линеаризуется относительно известного временного слоя  $n$ . При линеаризации отбрасываются члены, отвечающие за повышенный порядок аппроксимации в схеме MUSCL. Иными словами, предполагается, что невязкие потоки вычисляются по схеме первого порядка аппроксимации. Также при линеаризации отбрасываются члены, отвечающие за аппроксимацию смешанных производных в вязких потоках. В результате такого упрощения шаблон на  $(n + 1)$ -м слое по времени становится трехточечным в каждом пространственном направлении. Вся сложная MUSCL-реконструкция осуществляется при расчете потоков на известном слое  $n$ . Далее проводится приближенная LU-факторизация неявного оператора. В результате решение на слое  $(n + 1)$  находится за два обхода расчетной области бегущим счетом. Реализация алгоритма подробно описана в монографии [9].

Для дискретизации вязких членов используется центрально-разностная схема, распространенная на случай криволинейной структурированной сетки конечных объемов [9]. Уравнения  $k - \varepsilon$  замыкания решаются с использованием неявной противопотоковой схемы первого порядка, по сути аналогичной схеме для расчета основных параметров потока [9].

**7. Тестирование на 2D-задаче.** Рассмотрим 2D-задачу обтекания кругового цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью. В этой задаче течение жидкости описывается уравнениями Эйлера. Задача обтекания цилиндра — классическая тестовая задача для решения уравнений несжимаемой жидкости, поскольку имеет известное точное решение.

Вид расчетной области показан на рис. 2 а. Задача симметричная, поэтому рассматривается только половина области течения. Граничные условия задачи:

- $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — плоскости симметрии,
- $\Gamma_3$  — твердая стенка (поверхность цилиндра), здесь ставятся условия непротекания  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ,
- $\Gamma_4$  — удаленная граница, на ней держится постоянная скорость набегающего потока  $\mathbf{U}_\infty = (1, 0, 0)$  и давление  $p_\infty = 0$ . Радиус удаленной границы взят в 40 раз больше радиуса цилиндра, чтобы заданные условия на удаленной границе не влияли на точность решения.

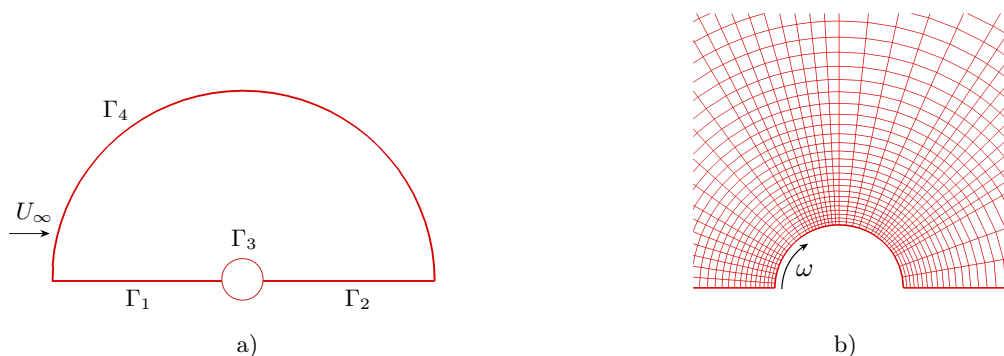


Рис. 2. Задача обтекания кругового цилиндра: а) схема расчетной области; б) вид неравномерной сетки

Fig. 2. The problem of flow past a circular cylinder: a) the scheme of the computational domain; b) the type of non-uniform grid



При решении задачи методом установления задаются следующие начальные данные: нулевое поле скорости и постоянное давление, равное давлению на удаленной границе.

Задача имеет точное стационарное решение [24].

На рис. 2 б изображен фрагмент неравномерной сетки в окрестности цилиндра. Сетка плавно сгущена по радиальному направлению к границе цилиндра  $\Gamma_3$ , по окружному направлению  $\omega$  сетка состоит из 6 частей — чередующихся грубой и подробной сеток.

Шаг по времени взят равным  $\Delta t = 0.2$ . Результаты расчетов представлены на рис. 3, 4.

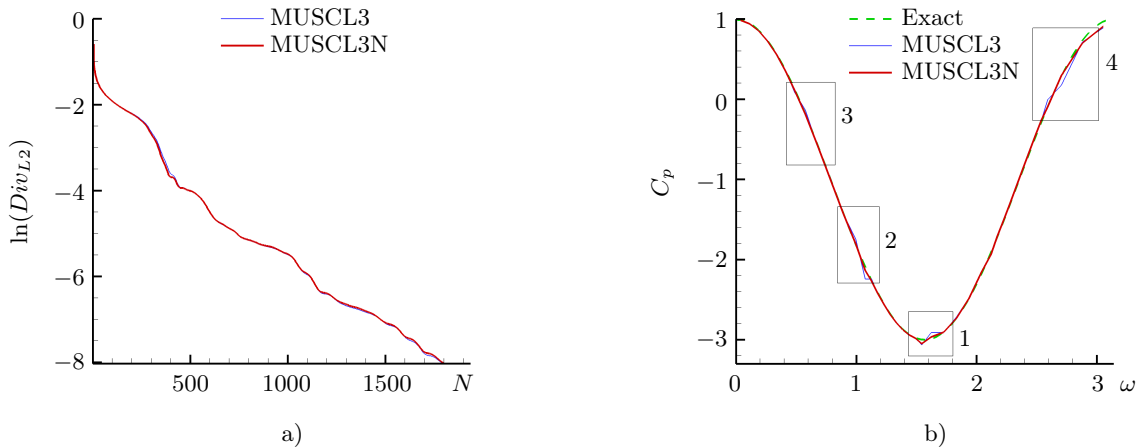


Рис. 3. 2D-обтекание цилиндра: а) зависимость логарифма погрешности от количества итераций; б) распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра

Fig. 3. 2D flow past a circular cylinder: a) the dependence of the logarithm of the error on the number of iterations; b) the distribution of the pressure coefficient over the cylinder surface

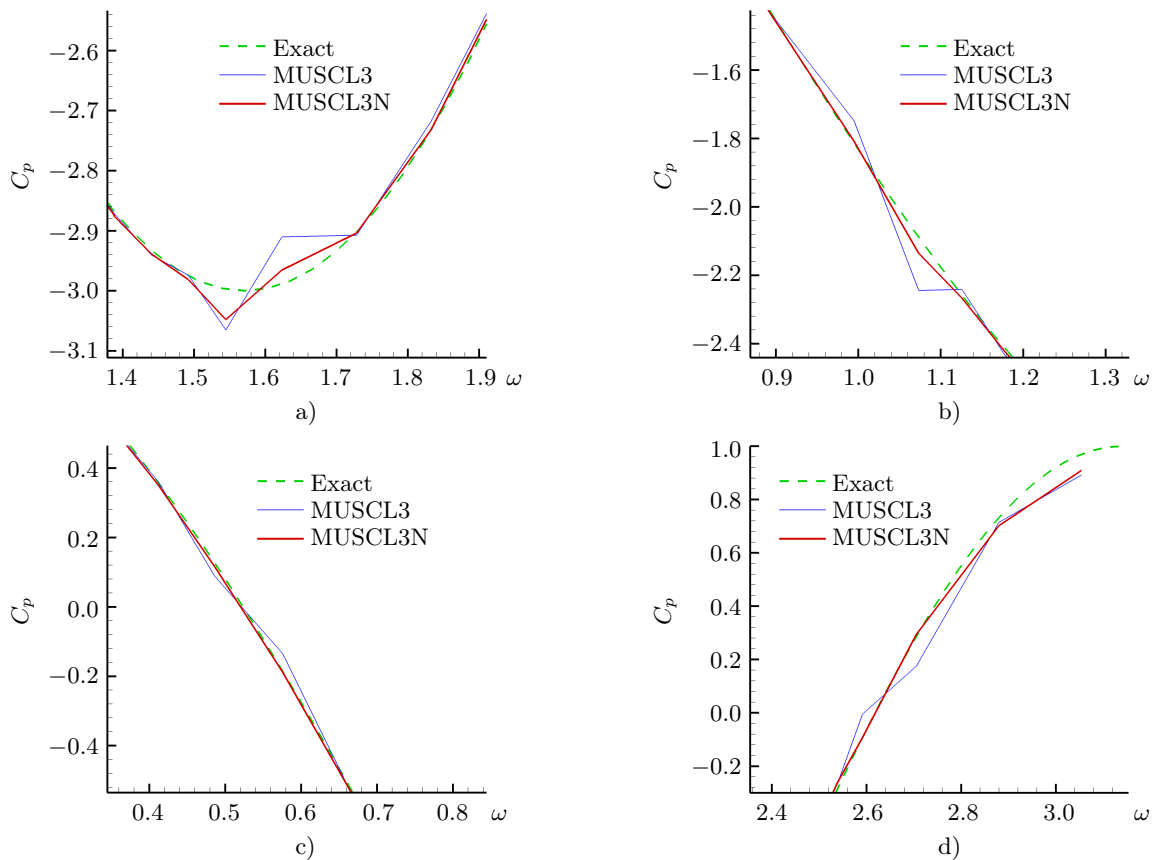


Рис. 4. Фрагменты графика, показанного на рис. 3 б: а) область 1; б) область 2; с) область 3; д) область 4

Fig. 4. Fragments of the graph shown in Fig. 3 b: a) area 1; b) area 2; c) area 3; d) area 4



Для оценки погрешности использован разностный аналог  $L_2$ -нормы невязки решения уравнения неразрывности:

$$Div_{L2} = \sqrt{\frac{\sum_{ijk} Div_{ijk}^2 V_{ijk}}{\sum_{ijk} V_{ijk}}}, \quad Div_{ijk} = \frac{|RHS_{ijk}[1]|}{V_{ijk}\beta},$$

где  $RHS[1]$  — первая компонента вектора  $RHS$  (38).

На рис. 3 а показана история сходимости для схем MUSCL3 и MUSCL3N. Из рисунка видно, что истории сходимости обеих схем похожи. Для падения ошибки на 8 порядков достаточно 1700 итераций.

На рис. 3 б изображено распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра  $C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5|U_\infty|^2}$ , полученное в результате расчетов в сравнении с точным распределением из [24]. На рис. 4 показаны увеличенные фрагменты графика  $C_p(\omega)$ , представленного на рис. 3 б. Видно, что MUSCL3N дает меньше осцилляций, чем MUSCL3, а также лучше приближает точное решение задачи.

**8. Тестирование на 3D-задаче.** В качестве 3D задачи рассматривалось течение воды в радиально-осевой гидротурбине (рис. 5). Расчет проводился в одном межлопаточном канале направляющего аппарата, одном межлопаточном канале рабочего колеса и во всей отсасывающей трубе. Для моделирования турбулентности использовалась  $k - \epsilon$  модель турбулентности. На входной границе заданы полные давления и направление вектора скорости, на выходной — распределение давления. В начальный момент заданы нулевое поле скорости и постоянное давление, равное давлению в выходном сечении. Постановка задачи расчета течения в гидротурбине подробно описана в работах [9, 18]. Сетки в расчетной области и ее фрагменты изображены на рис. 5. Сетка строится алгебраическим методом Кунца. Видна сильная неравномерность сетки, в некоторых местах шаги соседних ячеек отличаются в несколько раз.

Тестирование описанного метода проводилось на четырех последовательно сгущающихся сетках, содержащих в сумме от 100 тыс. до 1.5 млн ячеек. На рис. 6 показана зависимость расхода через турбину от подробности сетки при использовании схем MUSCL3 и MUSCL3N. Здесь  $N_{cells}$  — количество ячеек сетки.

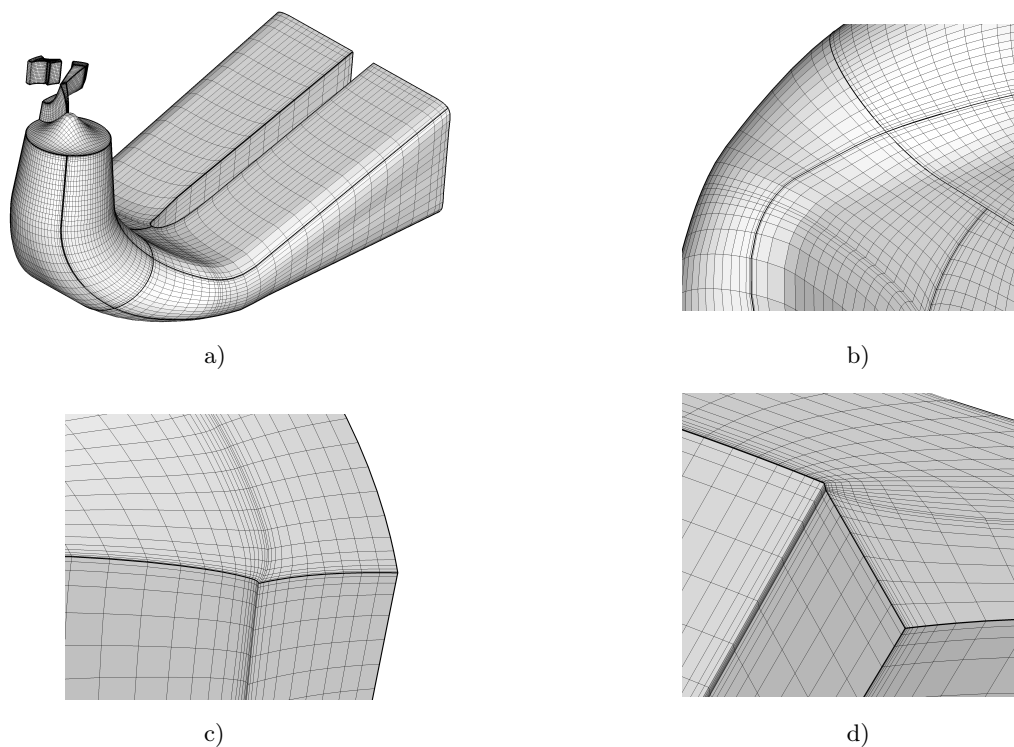


Рис. 5. Неравномерная сетка в проточном тракте гидротурбины: а) общий вид; б)-д) фрагменты  
 Fig. 5. Non-uniform grid in the flow path of the hydraulic turbine: а) general view; б)-d) fragments

Из рис. 6 можно сделать вывод, что результат, полученный при использовании MUSCL3N на сетке, содержащей 162 тыс. ячеек (448 тыс. ячеек), близок к результату, полученному при использовании MUSCL3 на сетке, содержащей 448 тыс. ячеек (1.5 млн ячеек). Следовательно, при использовании MUSCL3N можно взять менее подробную сетку, чтобы получить результат, близкий к тому, который дала бы схема MUSCL3 на более подробной сетке. Отсюда очевидное преимущество использования MUSCL3N — для достижения требуемой точности используется менее подробная сетка.

**9. Заключение.** Впервые в одномерном случае исследована аппроксимация MUSCL-схемы третьего порядка с коэффициентами, зависящими от шагов неравномерной сетки. Показано, что порядок аппроксимации зависит от характера самой сетки. В работе рассмотрены два важнейших случая: 1) сетка имеет постоянный закон сгущения и 2) произвольная неравномерная сетка.

Для одномерного случая в работе получены следующие результаты.

1. Исходная MUSCL-схема (без учета неравномерности) имеет лишь второй порядок аппроксимации на неравномерных сетках с постоянным законом сгущения и нулевой порядок аппроксимации для неравномерных сеток произвольного типа. Это фундаментальный результат, который показывает, что на произвольной искаженной сетке MUSCL-схема с постоянными коэффициентами интерполяции вообще не аппроксимирует исходное уравнение. Переход к многомерному случаю только усугубляет эту проблему. Поэтому использование MUSCL-схемы с постоянными коэффициентами оправдано лишь на неравномерных сетках с плавным изменением шагов.
2. MUSCL-схема с учетом неравномерности имеет третий порядок аппроксимации на неравномерных сетках с постоянным законом сгущения и второй порядок на произвольных неравномерных сетках.
3. В случае использования реконструкции четвертого порядка и более высокого порядка на грань ячейки порядок аппроксимации MUSCL-схемы становится по крайней мере третьим на произвольных неравномерных сетках.

Указанные выше результаты показаны теоретически и подтверждены в ходе вычислительного эксперимента.

Полученная MUSCL-схема с учетом неравномерности сетки (MUSCL3N) внедрена в численный алгоритм искусственной сжимаемости для решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса несжимаемой жидкости. Схема протестирована на задаче обтекания цилиндра идеальной жидкостью, а также на задаче о турбулентном течении воды в проточном тракте гидротурбины. Показано, что MUSCL-схема с учетом неравномерности имеет ту же скорость сходимости, что и базовая, но дает более гладкое решение в областях с резким изменением шагов сетки. Время счета одной итерации по схеме MUSCL3N увеличивается на 5–7% по сравнению с базовой схемой MUSCL3. Затраты оперативной памяти возрастают незначительно: для каждой ячейки сетки необходимо дополнительно хранить три числа — предварительно рассчитанный шаг сетки по каждому пространственному направлению. Таким образом, схема MUSCL3N рекомендуется к использованию для решения многомерных задач на неравномерных структурированных сетках.

### Список литературы

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидромеханики // Математический сборник (новая серия). 1959. 47(89), № 3. 271–306. [https://www.ece.uvic.ca/~bctill/papers/numacoust/Godunov\\_1959.pdf](https://www.ece.uvic.ca/~bctill/papers/numacoust/Godunov_1959.pdf). Cited October 29, 2023.
2. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. 43, N 2. 357–372. doi 10.1016/0021-9991(81)90128-5.

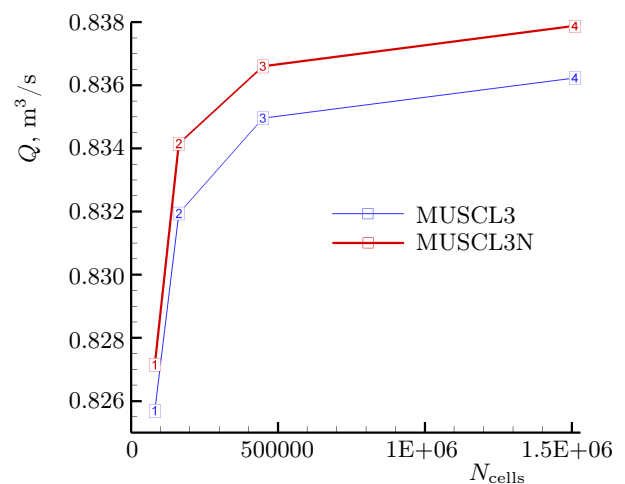


Рис. 6. Зависимость величины расхода от количества ячеек сетки

Fig. 6. The dependence of the flow rate on the number of grid cells



3. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer, 2009. doi 10.1007/978-3-540-49834-6.
4. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1975. 6, № 1. 9–14. <https://cyberleninka.ru/article/n/konechno-razno-stnaya-shema-dlya-rascheta-dvuhmernyh-razryvnyh-resheniy-nestatsionarnoy-gazovoy-dinamiki/viewer>. Cited October 29, 2023.
5. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. 32, N 1. 101–136. doi 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
6. Nishikawa H. The QUICK scheme is a third-order finite-volume scheme with point-valued numerical solutions // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2021. 93, N 7. 2311–2338. doi 10.1002/flid.4975.
7. Van Leer B., Nishikawa H. Towards the ultimate understanding of MUSCL: pitfalls in achieving third-order accuracy // J. Comput. Phys. 2021. 446. Article Number 110640. doi 10.1016/j.jcp.2021.110640.
8. Волков К.Н. Разностные схемы расчета потоков повышенной разрешающей способности и их применение для решения задач газовой динамики // Вычислительные методы и программирование. 2005. 6, № 1. 146–167. <https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/159>. Cited October 29, 2023.
9. Черный С.Г., Чурков Д.В., Лапин В.Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006.
10. Barth T.J., Jespersen D.C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper 89-0366. 1989. doi 10.2514/6.1989-366.
11. Buffard T., Clain S. Monoslope and multislope MUSCL methods for unstructured meshes // J. Comput. Phys. 2010. 229, N 10. 3745–3776. doi 10.1016/j.jcp.2010.01.026.
12. Hou J., Simons F., Hinkelmann R. Improved total variation diminishing schemes for advection simulation on arbitrary grids // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2012. 70, N 3. 359–382. doi 10.1002/flid.2700.
13. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015.
14. Le Touze C., Murrone A., Guillard H. Multislope MUSCL method for general unstructured meshes // J. Comput. Phys. 2015. 284. 389–418. doi 10.1016/j.jcp.2014.12.032.
15. Bruner C., Walters R. Parallelization of the Euler equations on unstructured grids // AIAA Paper 97-1894. 1997. doi 10.2514/6.1997-1894.
16. Darwish M.S., Moukalled F. TVD schemes for unstructured grids // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. 46, N 4. 599–611. doi 10.1016/S0017-9310(02)00330-7.
17. Колесник Е.В., Смирнов Е.М. Тестирование различных схем с квазиодномерной реконструкцией газодинамических переменных при расчетах на неструктурированных сетках // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. 10, № 3. 123–139. doi 10.18721/JPM.10312.
18. Lyutov A.E., Chirkov D.V., Skorospelov V.A., Turuk P.A., Cherny S.G. Coupled multipoint shape optimization of runner and draft tube of hydraulic turbines // J. Fluids Eng. 2015. 137, N 11. Paper Number FE-14-1769. doi 10.1115/1.4030678.
19. Anderson W.K., Thomas J.L., van Leer B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA J. 1986. 24, N 9. 1453–1460. doi 10.2514/3.9465.
20. Веселова Е.А., Жалнин Р.В., Дерюгин Ю.Н. и др. Пакет программ ЛОГОС. Методики расчета течения вязкого сжимаемого газа на блочно-структурированных сетках // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. <http://science-education.ru/ru/article/view?id=12601>. Дата обращения 28.10.2023.
21. De la Llave Plata M., Couaillier V., Le Pape M.-C., Marmignon C., Gazaix M. elsA-Hybrid: an all-in-one structured/unstructured solver for the simulation of internal and external flows. Application to turbomachinery // Progress in Propulsion Physics. 2013. 4. 417–444. doi 10.1051/eucass/201304417.
22. Wellner J. Comparison of finite volume high-order schemes for the two-dimensional Euler equations // Proc. VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Greece, Crete Island, June 5–10, 2016. <https://www.eccomas2016.org/proceedings/pdf/9251.pdf>. Cited October 28, 2023.
23. Shu C.-W. High order ENO and WENO schemes for computational fluid dynamics // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 9. Berlin: Springer, 1999. 439–582. doi 10.1007/978-3-662-03882-6\_5.
24. Ждан С.А., Рябченко В.П., Тешуков В.М. Лекции по гидродинамике. Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2002.

Поступила в редакцию  
10 июля 2023 г.

Принята к публикации  
20 октября 2023 г.

### Информация об авторах

Алена Романовна Кочарина — инженер-исследователь; 1) Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, ул. Пирогова, д. 2, 630090, Новосибирск, Российская Федерация; 2) Институт теплофизики имени С. С. Кутателадзе СО РАН, пр-кт ак. Лаврентьева, д. 1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Денис Владимирович Чирков — к.ф.-м.н., ст. научн. сотр.; 1) Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, ул. Пирогова, д. 2, 630090, Новосибирск, Российская Федерация; 2) Институт теплофизики имени С. С. Кутателадзе СО РАН, пр-кт ак. Лаврентьева, д. 1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

### References

1. S. K. Godunov, “A Difference Method for Numerical Calculation of Discontinuous Solutions of the Equations of Hydrodynamics,” *Mat. Sb. (Novaya Seriya)* **47(89)** (3), 271–306 (1959).
2. P. L. Roe, “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes,” *J. Comput. Phys.* **43** (2), 357–372 (1981). doi 10.1016/0021-9991(81)90128-5.
3. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (Springer, Berlin, 2009). doi 10.1007/978-3-540-49834-6.
4. V. P. Kolgan, “Finite Difference Scheme for Calculating Two-Dimensional Discontinuous Solutions of Unsteady Gas Dynamics,” *Uchen. Zap. TsAGI* **6** (1), 9–14 (1975).
5. B. van Leer, “Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov’s Method,” *J. Comput. Phys.* **32** (1), 101–136 (1979). doi 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
6. H. Nishikawa, “The QUICK Scheme is a Third-Order Finite-Volume Scheme with Point-Valued Numerical Solutions,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **93** (7), 2311–2338 (2021). doi 10.1002/flid.4975.
7. B. van Leer and H. Nishikawa, “Towards the Ultimate Understanding of MUSCL: Pitfalls in Achieving Third-Order Accuracy,” *J. Comput. Phys.* **446**, Article Number 110640 (2021). doi 10.1016/j.jcp.2021.110640.
8. K. N. Volkov, “High-Resolution Difference Schemes of Flux Calculation and Their Application for Solution of Gas Dynamics Problems,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)* **6** (1), 146–167 (2005).
9. S. G. Cherny, D. V. Chirkov, V. N. Lapin, et al., *Numerical Modeling of Flows in Turbomachines* (Nauka, Novosibirsk, 2006) [in Russian].
10. T. J. Barth and D. C. Jespersen, “The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes,” *AIAA Paper* 89-0366 (1989). doi 10.2514/6.1989-366.
11. T. Buffard and S. Clain, “Monoslope and Multislope MUSCL Methods for Unstructured Meshes,” *J. Comput. Phys.* **229** (10), 3745–3776 (2010). doi 10.1016/j.jcp.2010.01.026.
12. J. Hou, F. Simons, and R. Hinkelmann, “Improved Total Variation Diminishing Schemes for Advection Simulation on Arbitrary Grids,” *Int. J. Numer. Methods Fluids* **70** (3), 359–382 (2012). doi 10.1002/flid.2700.
13. K. N. Volkov, Yu. N. Deryugin, V. N. Emel’yanov, et al., *Difference Schemes in Gas Dynamics on Unstructured Grids* (Fizmatlit, Moscow, 2015) [in Russian].
14. C. Le Touze, A. Murrone, and H. Guillard, “Multislope MUSCL Method for General Unstructured Meshes,” *J. Comput. Phys.* **284**, 389–418 (2015). doi 10.1016/j.jcp.2014.12.032.
15. C. Bruner and R. Walters, “Parallelization of the Euler Equations on Unstructured Grids,” *AIAA Paper* 97-1894 (1997). doi 10.2514/6.1997-1894.
16. M. S. Darwish and F. Moukalled, “TVD Schemes for Unstructured Grids,” *Int. J. Heat Mass Transf.* **46** (4), 599–611 (2003). doi 10.1016/S0017-9310(02)00330-7.
17. E. V. Kolesnik and E. M. Smirnov, “Testing of Various Schemes with Quasi-One-Dimensional Reconstruction of Gasdynamic Variables in the Case of Unstructured-Grid Calculations,” *St. Petersburg State Polytech. Univ. J.: Phys. Math.* **3** (3), 259–270 (2017). doi 10.1016/j.spjpm.2017.09.010.
18. A. E. Lyutov, D. V. Chirkov, V. A. Skorospelov, et al., “Coupled Multipoint Shape Optimization of Runner and Draft Tube of Hydraulic Turbines,” *J. Fluids Eng.* **137** (11), Paper Number FE-14-1769 (2015). doi 10.1115/1.4030678.
19. W. K. Anderson, J. L. Thomas, and B. van Leer, “Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations,” *AIAA J.* **24** (9), 1453–1460 (1986). doi 10.2514/3.9465.



20. E. A. Veselova, R. V. Zhalnin, Yu. N. Deryugin, et al., “The Software LOGOS. Calculation Method for Viscous Compressible Gas Flows on a Block-Structured Meshes,” *Modern Problems of Science and Education. Surgery*. No. 2 (2014). <https://science-education.ru/en/article/view?id=12601>. Cited October 28, 2023.
21. M. de la Llave Plata, V. Couaillier, M.-C. Le Pape, et al., “elsA-Hybrid: an All-in-One Structured/Unstructured Solver for the Simulation of Internal and External Flows. Application to Turbomachinery,” *Prog. Prop. Phys.* 4, 417–444 (2013). doi 10.1051/eucass/201304417.
22. J. Wellner, “Comparison of Finite Volume High-Order Schemes for the Two-Dimensional Euler Equations,” in *Proc. VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Greece, Crete Island, June 5–10, 2016*. <https://www.eccomas2016.org/proceedings/pdf/9251.pdf>. Cited October 28, 2023.
23. C.-W. Shu, “High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics,” in *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* (Springer, Berlin, 1999), Vol. 9, pp. 439–582. doi 10.1007/978-3-662-03882-6\_5.
24. S. A. Zhdan, V. P. Ryabchenko, and V. M. Teshukov, *Lectures on Hydrodynamics* (Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk, 2002) [in Russian].

Received  
July 10, 2023

Accepted for publication  
October 20, 2023

#### Information about the authors

*Alena R. Kocharina* — research engineer; 1) Novosibirsk national research state university, Pirogova ulitsa, 2, 630090, Novosibirsk, Russia; 2) Kutateladze institute of thermophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva prospekt, 1, 630090, Novosibirsk, Russia.

*Denis V. Chirkov* — Ph.D., Senior Researcher; 1) Novosibirsk national research state university, Pirogova ulitsa, 2, 630090, Novosibirsk, Russia; 2) Kutateladze institute of thermophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva prospekt, 1, 630090, Novosibirsk, Russia.