



Численное моделирование задачи атмосферного электричества с неизвестным ионосферным потенциалом

И. Г. Милешин

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров,
Саров, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-4668-6568, e-mail: komrad.mileshin@yandex.ru

В. М. Головизнин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-4354-9290, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

М. М. Хапаев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-0701-7043, e-mail: vmhap@cs.msu.ru

Аннотация: В работе рассматриваются подходы к численному решению задачи о распределении электрического потенциала в рамках двумерной модели атмосферного участка глобальной электрической цепи. Для этой модели формулируется нестандартная стационарная эллиптическая краевая задача с неклассическим граничным условием. Для численного решения этой задачи, с целью изучения возможности и эффективности распараллеливания вычислений, используются два численных алгоритма на основе метода конечных элементов. Приводятся результаты расчетов для модельной задачи, в которой не учитываются особенности рельефа земной поверхности, используется простая модель проводимости и токов.

Ключевые слова: глобальная электрическая цепь, ионосферный потенциал, метод конечных элементов, FreeFEM++.

Для цитирования: Милешин И.Г., Головизнин В.М., Хапаев М.М. Численное моделирование задачи атмосферного электричества с неизвестным ионосферным потенциалом // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 3. 305–315. doi 10.26089/NumMet.v24r322.



Numerical simulation of atmospheric electricity problem with unknown ionosphere potential

Ivan G. Mileschin

Sarov Branch of Moscow State University,
Sarov, Russia

ORCID: 0000-0002-4668-6568, e-mail: komrad.mileschin@yandex.ru

Vasily M. Goloviznin

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Moscow, Russia

ORCID: 0000-0003-4354-9290, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Mikhail M. Khapaev

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Moscow, Russia

ORCID: 0000-0003-0701-7043, e-mail: vmhap@cs.msu.ru

Abstract: The paper considers approaches to the numerical solution of the problem of the distribution of the electric potential in the framework of a two-dimensional model of the atmospheric section of the global electrical circuit. For this model, a nonstandard stationary elliptic boundary value problem with a nonclassical boundary condition is formulated. For the numerical solution of this problem, in order to study the possibility and efficiency of parallelization of calculations, two numerical algorithms based on the finite element method are used. The results of calculations for a model problem are presented, in which the features of the earth's surface topography are not taken into account, a simple model of conductivity and currents is used.

Keywords: global electric circuit, ionospheric potential, finite element method, FreeFEM++.

For citation: I. G. Mileschin, V. M. Goloviznin, M. M. Khapaev, "Numerical simulation of atmospheric electricity problem with unknown ionosphere potential," *Numerical Methods and Programming*, 24 (3), 305–315 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r322.

1. Введение. В настоящее время основной моделью атмосферного электричества является концепция глобальной электрической цепи [1, 2]. Основные физические аспекты для задачи, рассматриваемой в данной работе, приведены в [3, 4].

Рассматривается двумерная модель, в которой эквипотенциальными границами являются поверхность Земли и условная граница, разделяющая атмосферу и ионосферу. Атмосфера является проводящей средой с неоднородной проводимостью. Существует устойчивая разность потенциалов между поверхностью Земли и условной границей, разделяющей атмосферу и ионосферу. Также внутри области протекают токи проводимости. Кроме того, в состав модели входят облака, которые являются независимыми источниками токов. Таким образом, потенциалы поверхности Земли и условной границы, разделяющей атмосферу и ионосферу, токи проводимости в атмосфере и источники тока в облаках образуют распределенную электрическую цепь.

Математическое моделирование для этой задачи требует суперкомпьютерных вычислений и эффективного распараллеливания, так как площадь рассматриваемой области в двумерном случае более 2 миллионов квадратных километров. В нашей работе мы рассматриваем два базовых подхода к численному моделированию скалярного электрического потенциала в атмосфере. Токи и проводимость считаются заданными. Оба подхода основаны на методе конечных элементов, но один из них основан на регулярных



сетках и многопоточных вычислениях для итерационного решения сеточных уравнений, а другой, реализованный в пакете FreeFem++, использует нерегулярные адаптивные сетки и может использовать методы разделения областей, MPI. Целью нашей работы является исследование двух численных алгоритмов на основе метода конечных элементов для выявления их преимуществ и недостатков.

2. Постановка стационарной задачи. Коротко изложим вывод основных уравнений и постановку стационарной задачи. Подробно эти вопросы обсуждаются в работах [4–6].

Основой стационарной модели глобальной электрической цепи служит одно из уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{H}(x) = \sigma(x)\mathbf{E}(x) + \mathbf{J}^{\text{ext}}(x). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{H}(x)$ — вектор магнитного поля, $\sigma(x)$ — проводимость атмосферы, $\mathbf{E}(x)$ — вектор электрического поля, $\mathbf{J}^{\text{ext}}(x)$ — плотность сторонних токов, $x \in \mathbb{R}^3$.

В задаче атмосферного электричества рассматривается область, гомеоморфная шаровому слою с границей, состоящей из двух компонент связности (рис. 1). В рассматриваемой области Γ_1 — поверхность Земли, Γ_2 — условная граница, разделяющая атмосферу и ионосферу, \mathbf{J}^{ext} (облака) являются генераторами электрических токов в атмосфере. В дальнейшем будем обозначать рассматриваемую область, где ищется решение, Ω .

Введем потенциал электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi(x). \quad (2)$$

Из (1) следует уравнение для нахождения электрического потенциала и вектора магнитного поля

$$\nabla \times \mathbf{H}(x) = -\sigma(x) \nabla \phi(x) + \mathbf{J}^{\text{ext}}(x). \quad (3)$$

В (3) исключим магнитное поле $\mathbf{H}(x)$, для этого применим оператор дивергенции к каждой из частей уравнения. В результате получим уравнение для нахождения скалярного электрического потенциала $\phi(x)$, т.е. уравнение (1) перепишем в виде

$$\nabla \cdot (\sigma(x) \nabla \phi(x)) = \nabla \cdot \mathbf{J}^{\text{ext}}(x). \quad (4)$$

Уравнение (4) является основным уравнением рассматриваемой математической модели. Однако кроме (4) из (3) следуют дополнительные интегральные соотношения.

Исходя из того, что область Ω гомеоморфна шаровому слою, для того чтобы переход от (3) к (4) был равносильным, необходимо выполнение интегральных равенств для потоков [4]:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \\ \oint_{\Gamma_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_i = 0, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (5)$$

Эти соотношения являются следствием теоремы Стокса.

Проводимость земной поверхности намного больше проводимости нижних слоев атмосферы, следовательно нижнюю границу можно считать идеальным проводником. Как известно, проводимость атмосферы растет экспоненциально с ростом высоты, так что проводимость на высоте 70 км намного выше проводимости атмосферы у поверхности Земли. Таким образом, верхнюю границу на достаточно большой высоте также можно считать идеальным проводником. Положим [5] $\phi(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$, $\phi(x) = C$, $x \in \Gamma_2$,

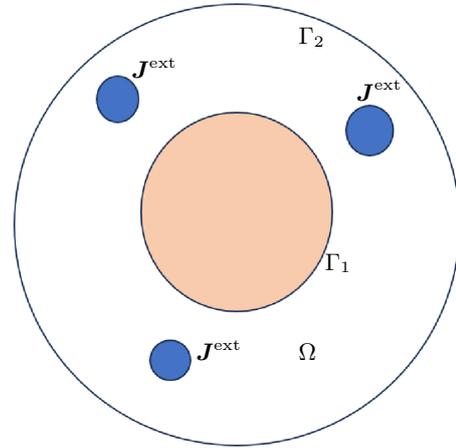


Рис. 1. Схематичный разрез модели земного шара. Границами атмосферы Ω являются поверхность земли Γ_1 и нижняя граница ионосферы Γ_2 . Облака являются источниками тока

Fig. 1. Schematic section of the globe model. The boundaries of the atmosphere Ω are the ground surface Γ_1 and the lower boundary of the ionosphere Γ_2 . The clouds are current sources

где C — неизвестная константа, которую называют ионосферным потенциалом. В результате, воспользовавшись (3)–(5), получим следующую постановку задачи для нахождения скалярного электрического потенциала:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma(x) \nabla \phi(x)) &= \nabla \cdot \mathbf{J}^{\text{ext}}(x), & (6) \\ \oint_{\Gamma_2} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_2 &= \oint_{\Gamma_2} \mathbf{J}^{\text{ext}}(x) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_2, & (7) \\ \phi(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_1, & (8) \\ \phi(x) &= C, \quad x \in \Gamma_2. & (9) \end{aligned}$$

Отметим, что в (7) интеграл берется по границе Γ_2 . Такое же соотношение должно выполняться для границы Γ_1 . Его можно получить, если воспользоваться теоремой Гаусса–Остроградского для (6) и учесть (7).

В задаче (6)–(9) ионосферный потенциал C является искомой величиной. Источники тока $\mathbf{J}^{\text{ext}}(x)$ считаются заданными. Таким образом получена математическая постановка для рассматриваемой задачи атмосферного электричества с неизвестным ионосферным потенциалом.

Заметим, что ионосферный потенциал можно найти следующим образом. Представим решение (6)–(9) в виде суммы $\phi(x) = C \cdot \phi_1(x) + \phi_2(x)$, где $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ являются решениями следующих стандартных краевых задач:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma(x) \nabla \phi_1(x)) &= 0, & (10) \\ \phi_1(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \phi_1(x) = 1, \quad x \in \Gamma_2, & (11) \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma(x) \nabla \phi_2(x)) &= \nabla \cdot \mathbf{J}^{\text{ext}}(x), & (12) \\ \phi_2(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \phi_2(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2. & (13) \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $\phi(x)$ в виде суммы в контурный интеграл, получим

$$\oint_{\Gamma_2} \sigma(x) \cdot (C \cdot \nabla \phi_1(x) + \nabla \phi_2(x)) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_2 = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{J}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_2. \quad (14)$$

Из (14) следует выражение для ионосферного потенциала

$$C = \frac{\oint_{\Gamma_2} \mathbf{J}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_2 - \oint_{\Gamma_2} \sigma(x) \nabla \phi_2(x) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_2}{\oint_{\Gamma_2} \sigma(x) \nabla \phi_1(x) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_2}. \quad (15)$$

2.1. Вывод обобщенной формулировки задачи. Покажем, что можно определить ионосферный потенциал C иным способом, в котором требуется решать только одну краевую задачу.

Для того чтобы выполнить конечно-элементную дискретизацию задачи (6)–(9), необходимо сформулировать ее в виде некоторого интегрального тождества (билинейной формы). Приведем необходимые выкладки для получения интегрального тождества для задачи (6)–(9). Пусть $\psi(x)$ — некоторая пробная функция. Домножим правую и левую части уравнения (6) на эту функцию и проинтегрируем по области Ω . Получим

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma(x) \nabla \phi(x)) \psi(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J}^{\text{ext}}(x) \psi(x) \, d\Omega. \quad (16)$$

Воспользуемся известным интегральным тождеством для интегрирования по частям

$$\nabla \cdot \psi \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

Преобразовывая (16), получим, что

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma(x) \nabla \phi(x) \psi(x) - \mathbf{J}^{\text{ext}}(x) \psi(x)) \, d\Omega - \int_{\Omega} \sigma(x) \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{J}^{\text{ext}} \nabla \psi(x) \, d\Omega. \quad (17)$$



Воспользовавшись теоремой Гаусса–Остроградского для первого интеграла в левой части, получим уравнение

$$\oint_{\Gamma} (\sigma(x) \nabla \phi(x) - \mathbf{J}^{\text{ext}}) \psi(x) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma(x) \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{J}^{\text{ext}} \nabla \psi(x) \, d\Omega. \quad (18)$$

В (6) проинтегрируем левую и правую части равенства, а затем воспользуемся теоремой Гаусса–Остроградского. Получим:

$$\oint_{\Gamma} (\sigma(x) \nabla \phi(x) - \mathbf{J}^{\text{ext}}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0. \quad (19)$$

Далее, функцию $\psi(x)$ будем выбирать в классе функций, равных 0 на границе Γ_1 и равных некоторой константе, например 1, на границе Γ_2 . Тогда из (7), (17)–(19), а также с учетом граничных условий (8), (9) получим:

$$\oint_{\Gamma} (\sigma(x) \nabla \phi(x) - \mathbf{J}^{\text{ext}}) \psi \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0. \quad (20)$$

Таким образом, воспользовавшись (20), получим основное интегральное тождество, которое имеет простой вид

$$\int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J}^{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(x) \, d\Omega. \quad (21)$$

В этом тождестве, или билинейной форме, неявно присутствующий ионосферный потенциал C является одной из искомым величин. Сама билинейная форма (21) очень похожа на билинейную форму для задачи Дирихле.

Для завершения постановки задачи формально определим пространство, в котором ищется решение $\phi(x)$: $V(\Omega) = \{\phi(x) \in H^1(\Omega), \phi(x) = 0, x \in \Gamma_1, \phi(x) = C, x \in \Gamma_2\}$. Здесь $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева. В этом же пространстве следует выбирать пробную функцию $\psi(x)$, полагая $\psi(x) = 1, x \in \Gamma_2$.

Корректность задачи (21) доказывается с помощью леммы Лакса–Мильграма. Доказательство существования и единственности решения задачи подробно рассмотрено в [6].

3. Численная реализация двумерной задачи на структурированной четырехугольной сетке. Все расчеты проводились для двумерных областей в полярной системе координат (r, θ) . Этими областями являлись кольцо и сектора с периодическими краевыми условиями (“цилиндрическая Земля”).

Рассмотрим задачу в кольце с радиусами, соответствующими радиусу Земли и радиусу ионосферы. Для этой задачи $r \in [6370000, 6440000]$ м, $\theta \in [0, 2\pi]$. Здесь 6440000.0 м — расстояние от центра Земли до условной границы, разделяющей атмосферу и ионосферу. Таким образом, данная область в полярных координатах представляет тонкий прямоугольник с парой склеенных сторон (цилиндр). Проводимость атмосферы неоднородна и имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \sigma_0 e^{(r-r_0)/r_s} \text{ См/м}, \\ r_s &= 5000 \text{ м}, \quad r_0 = 6370000.0 \text{ м}, \\ \sigma_0 &= 5 \cdot 10^{-14} \text{ См/м}. \end{aligned}$$

Сторонние токи $\mathbf{J}^{\text{ext}}(r, \theta)$ локализованы внутри рассматриваемой области.

В дальнейшем для краткости будем опускать единицы размерности.

Простая структура области позволяет ввести структурированную сетку с прямоугольными ячейками. С помощью этой сетки мы строим известный метод конечных элементов, в котором по каждому направлению используется кусочно-линейная аппроксимация [7]. Элементы матрицы сеточных уравнений имеют вид

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \sigma(r, \theta) \cdot \nabla u_i(r, \theta) \cdot \nabla u_j(r, \theta) \, d\Omega,$$

где $u_i(r, \theta)$ являются билинейными функциями конечно-элементной аппроксимации. Метод конечных элементов настоящей работы отличается от классического только тем обстоятельством, что все точки на

границе ионосферы оказываются склееными, так как они соответствуют единственной неизвестной, ионосферному потенциалу. В свою очередь, это обстоятельство приводит к повышенной заполненности соответствующих столбца и строки разреженной матрицы сеточных уравнений.

Элементы вектора правой части имеют вид

$$b_i = \int_D \mathbf{J}^{\text{ext}} \cdot \nabla \phi_i(x) ds.$$

В этой формуле область D представляет собой совокупность ячеек сетки, в которых правая часть $\mathbf{J}^{\text{ext}}(x)$ отлична от 0. В проводившихся расчетах это была некоторая прямоугольная область, в которой $\mathbf{J}^{\text{ext}}(x)$ имеет постоянное значение.

Матрица системы сеточных уравнений такого метода конечных элементов является сильно разреженной. В строке матрицы для внутренних узлов имеется не более 9 ненулевых элементов. Матрица является симметричной и положительно определенной по построению.

Для работы с разреженными матрицами использовался пакет Eigen [8]. Так как матрица системы сеточных уравнений симметрична и положительно определена, для решения системы линейных уравнений был использован алгоритм сопряженных градиентов с диагональным предобуславливанием. Для сборки матрицы и умножения матрицы на вектор использовались средства OpenMP.

Программа написана на C++.

С помощью описанной программы был проведен ряд расчетов. В этих расчетах число узлов достигало нескольких миллионов.

Проведенные расчеты показывают, что решение резко меняется около границ облаков и слабо меняется на достаточном удалении от облака (рис. 2).

Представляет также интерес зависимость времени счета от размерности системы и числа потоков. Эти результаты приведены на рис. 3.

Такая простая многопоточность позволяет легко получить заметное практическое ускорение вычис-

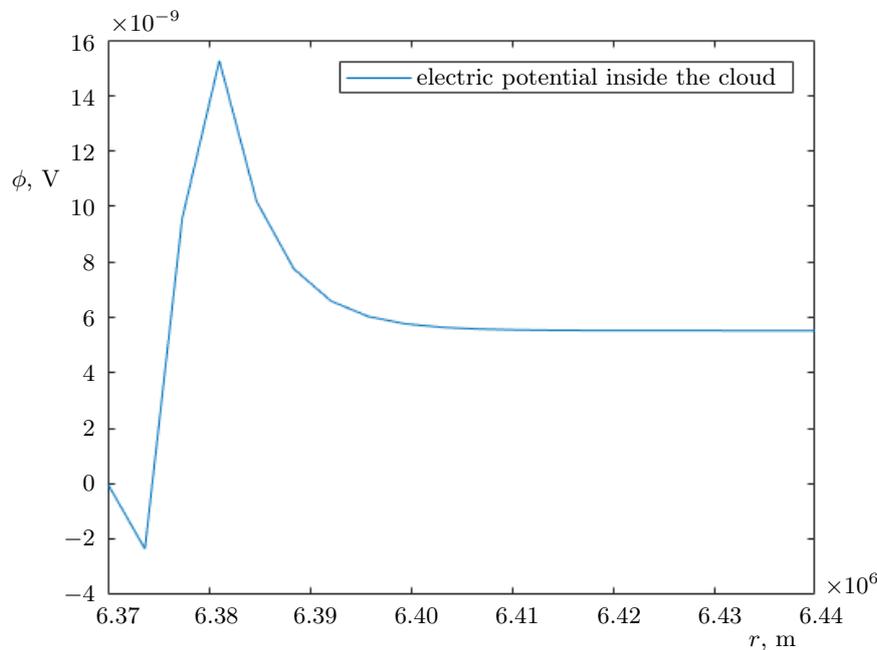


Рис. 2. Зависимость электрического потенциала от радиуса. Структура решения хорошо согласуется с физическими особенностями задачи. Наблюдается скачок потенциала около границ облака. Также наблюдается плавное изменение решения при удалении от облака

Fig. 2. The dependence of the electric potential on the radius. The structure of the solution is in good agreement with the physical features of the problems. A jump of the potential near the cloud is observed. We also observe a smooth change in the solution when moving away from the cloud

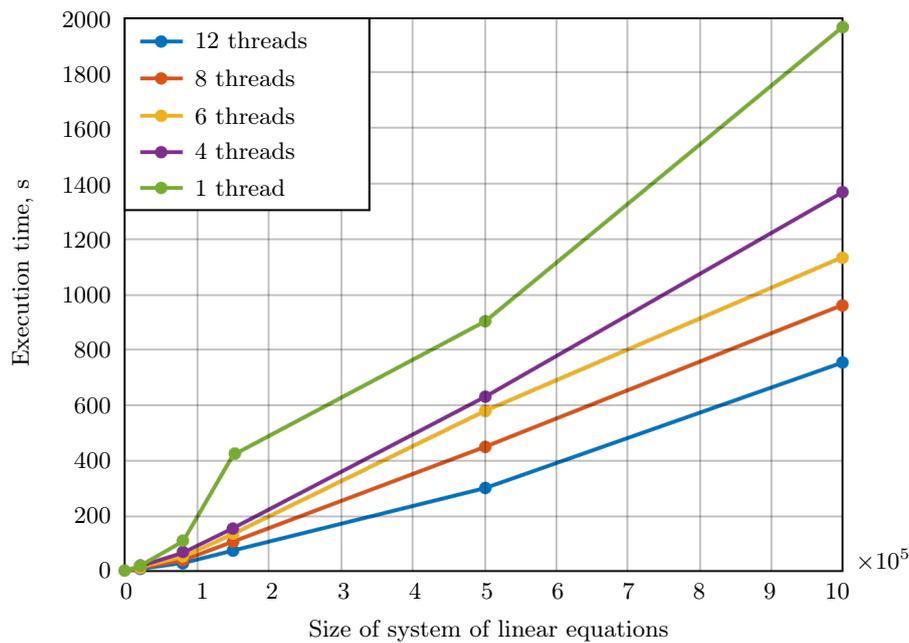


Рис. 3. Зависимость времени выполнения программы от размерности системы и числа потоков OpenMP. Расчеты проводились на 6-ядерном процессоре Intel Core i7-9750h. Для расчетов было доступно 16 гб оперативной памяти. Простая многопоточность позволяет заметно ускорить вычисления в задачах, не требующих алгоритмов разделения области

Fig. 3. Dependence of program runtime on system size and number of OpenMP threads. Calculations were performed on a 6-core Intel Core i7-9750h processor. For the calculations, 16 gb of RAM were available. Simple multithreading allows to significantly accelerate calculations in tasks that do not require area partitioning algorithms

лений. Однако, как видно из графиков, ускорения, пропорционального числу процессов, достичь не удастся. Отдельно хотелось бы отметить, что процессор, используемый в расчете, обладает технологией Intel Hyper-Threading, поэтому наблюдается некоторое ускорение выполнения расчетов даже при количестве процессоров больше 6.

4. Численная реализация с использованием пакета FreeFEM++. Кроме максимально простого подхода, описанного в предыдущем разделе, представляет интерес алгоритм, допускающий нерегулярные треугольные (в двумерном случае) сетки, области сложной структуры, адаптацию сетки к решениям, эффективный метод разделения областей, полномасштабные параллельные вычисления с помощью аппарата MPI, удобные средства визуализации и постпроцессинга решения, потенциальный переход к решению реальных трехмерных задач. Такими возможностями обладает известный пакет FreeFEM++, который является в значительной степени энциклопедией метода конечных элементов и сопутствующих алгоритмов, а также имеет внутренний язык программирования, основанный на C/C++.

Хотя пакет FreeFEM++ допускает программирование билинейной формы (21), в этой работе мы рассматриваем подход на основе решения двух краевых задач (10), (11) и (12), (13), а также формулы (15). Коротко опишем этапы решения задачи с помощью пакета FreeFEM++.

1. Средствами пакета (C++-подобный скриптовый язык) описываются геометрия задачи, поверхность Земли и ионосферы, а также облака. В рассматриваемой геометрии облако моделируется прямоугольником в полярных координатах, но в принципе может иметь любую форму. Для этого необходимо аналитически задать две границы (окружности радиуса 6370000.0 и 6440000.0 соответственно) и внутренние границы для облака. Каждая из границ приближается множеством отрезков. Далее с помощью логических операций необходимо описать внутренность области, соответственно из окружности большего радиуса вырезается окружность меньшего радиуса.
2. Генерация начальной сетки. Сгенерируем начальную сетку с использованием триангуляции Делоне для исходной области. Исходя из величин радиусов окружностей (6370000.0 и 6440000.0), оказывае-

ся, что для подробного описания области требуется несколько миллионов узлов и треугольных ячеек сетки, в качестве начальной сетки для процедуры адаптации к решению целесообразно использовать сетки с разрешающей способностью не менее 2 градусов по углу и не менее 10 узлов по радиусу.

3. С использованием внутреннего синтаксиса FreeFEM++ необходимо записать решаемые задачи в виде интегральных тождеств. Это делается на основе (10)–(13). Данные выражения в терминах внутреннего синтаксиса FreeFEM++ выглядят следующим образом:

```
varf vPoisson(u, v1) = int2d(Th3)(grad(u)'*grad(v1)*f()) + on(a,u=0) + on(bb,u=1);
varf vPoisson1(v,vv) = int2d(Th3)(dx(v)*dx(vv)*f() + dy(v)*dy(vv)*f() + on(2,v=0) +
on(1,v=0) + int2d(Th3)(-dx(vv)*jext1() - dy(vv)*jext2());
```

Здесь $jext1$ — x компонента вектора \mathbf{J}^{ext} , $jext2$ — y компонента вектора \mathbf{J}^{ext} . После описания билинейных форм и правых частей можно выполнить решение задач.

4. Сначала вычисления проводятся на начальной простой сетке, затем можно выполнить адаптацию сетки к решению. Это делается с помощью итерационной процедуры. Критерием измельчения или укрупнения сетки служит значение градиента для найденного решения. Адаптация сетки проводится до тех пор, пока ионосферный потенциал перестанет меняться более чем на 0.5%. Все эти процедуры реализованы в пакете FreeFEM++.
5. Визуализация решения. Для этого пакет имеет встроенные средства, однако в нашем случае сетка настолько велика, что требуется использование внешних программ, для которых пакет FreeFEM++ может подготовить все данные, в частности осуществляется выгрузка найденного решения в формате `.vtk`.
6. Обработка (постпроцессинг) полученного решения. Постобработка полученных файлов формата `.vtk` осуществляется с помощью известной программы Paraview.

На рис. 4 для той же задачи, что и в предыдущем разделе, представлен пример части сгенерированной сетки внутри атмосферного облака, с распределением скалярного электрического потенциала после проведения необходимой серии уточняющих расчетов. Для решения полной исходной задачи, для всей поверхности планеты или хотя бы достаточно большого телесного сектора, требуются значительные вычислительные ресурсы, для чего в дальнейшем планируется использование суперкомпьютера.

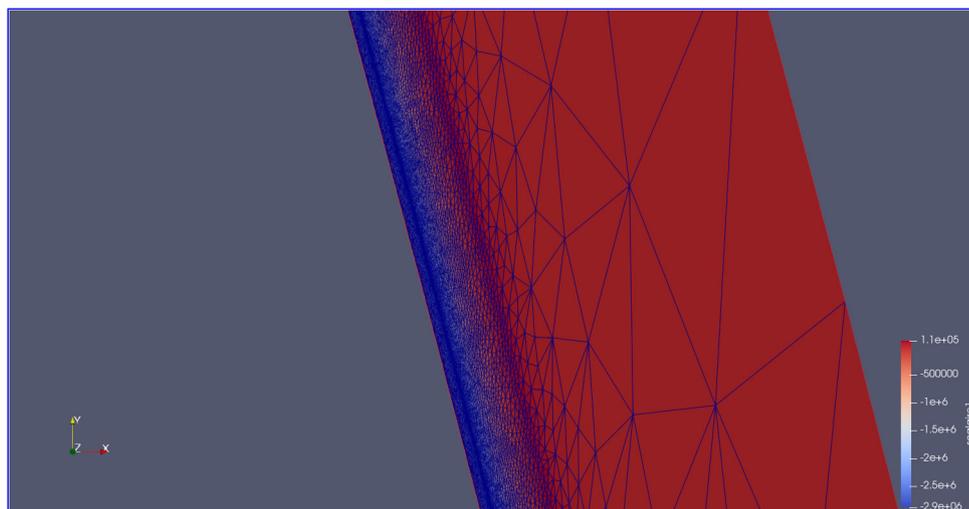


Рис. 4. Пример адаптивной расчетной сетки и распределения электрического потенциала. После проведения сеточных адаптаций сетка учитывает физические особенности задачи. Произошло сгущение сетки в областях с высоким градиентом решения. Сетка более подробная в облаке и его окрестности. Кроме того, сетка учитывает экспоненциальную структуру проводимости по радиальному направлению

Fig. 4. Example of an adaptive computational grid and electric potential distribution. After performing mesh adaptations, the mesh takes into account the physical features of the problem. The mesh more dense in areas with a high solution gradient. The grid is more detailed in the cloud and its vicinity. In addition, the grid takes into account the exponential structure of the conductivity along the radial direction



Следует отметить, что при адаптации сетки она измельчается при приближении к облаку. Кроме того, структура сетки учитывает экспоненциальную структуру проводимости. Эти особенности приводят к тому, что строится детальная сетка в тех подобластях, где происходит резкое изменение решения, и крупная сетка в тех подобластях, где изменение решения происходит не столь значительно.

Для решения систем линейных уравнений, которые возникают в ходе решения задач, имеется возможность распараллеливания с использованием средств FreeFEM++. Доступно большое число как прямых, так и итерационных алгоритмов. Для данной задачи использовался многосеточный алгебраический решатель из библиотеки PETSc. На персональном компьютере удалось посчитать задачу на 4 миллиона неизвестных.

По сравнению с четырехугольной структурированной сеткой, алгоритм FreeFEM++ допускает построение треугольной сетки с меньшим количеством узлов. Тем не менее, при решении задач близких к реальным, число узлов все равно остается достаточно большим, что делает необходимым распараллеливание алгоритма. Поэтому решение системы линейных уравнений осуществлялось с использованием алгоритмов распараллеливания MPI, которые являются частью пакета.

5. Простейшее аналитическое решение. Приведем другой пример расчетов, в котором точность приведенных выше численных алгоритмов верифицируется на основе простейшего численного решения. В качестве аналитического решения выберем функцию, которая равна нулю на нижней границе рассматриваемой области и постоянна на верхней границе. Опишем такую функцию в полярных координатах. Один из возможных вариантов такой функции:

$$\phi = (r - r_0) \cdot (r - r_1)$$

Тогда сторонние токи можно получить, если выполнить подстановку заданной функции электрического потенциала в (6).

В данном случае получим в полярных координатах:

$$J^{\text{ext}} = \{\sigma \cdot (2 \cdot r - r_0 - r_1), 0\}.$$

Оба численных метода показали хорошую сходимость к аналитическому решению, относительная погрешность для простых сеток с небольшим числом узлов не превосходила 2%.

6. Заключение. В работе описаны два варианта метода конечных элементов решения задачи атмосферного электричества.

В первом подходе используются структурированные сетки и простой билинейный метод конечных элементов, а параллельность вычислений достигается многопоточностью на этапе формирования матрицы системы сеточных уравнений и итерационного решения этой системы. Можно сказать, что этот подход следует идее вокселизации вычислений (простой однородный метод, прямоугольные регулярные сетки), которая в нашем случае служит хорошим приближением для физической проблемы. Достоинством этого подхода является также достаточно простой переход к полной трехмерной задаче, где, однако, потребуются полное распараллеливание с использованием алгоритмов разделения области. Стоит отметить, что в данном случае количество неизвестных в строке матрицы сеточных уравнений возрастает примерно в три раза.

Второй вариант использует более универсальный и эффективный метод конечных элементов, который реализован в пакете FreeFEM++. Этот подход имеет много практических преимуществ перед простым методом конечных элементов, так как данный пакет является полноценной средой программирования вычислительных алгоритмов и не требует программирования на уровне сетки и конечных элементов, поскольку содержит обширный набор известных конечноэлементных аппроксимаций. FreeFEM++ включает в себя множество свободно доступных библиотек решения систем сеточных уравнений, а также включает в себя алгоритмы разделения областей. Также этот пакет содержит готовую реализацию параллельных вычислений с использованием MPI. В данном пакете возможен переход к трехмерной задаче, но в этом случае актуальным становится выбор решателя СЛАУ из-за особенностей задачи и существенного изменения структуры матрицы.

Интересно, что простой метод на прямоугольной сетке сохраняет конкурентоспособность на достаточно больших задачах и заслуживает дальнейшего развития, например применения иерархически измельчаемых сеток.

Список литературы

1. *Leblanc F., Aplin K.L., Yair Y., et al. (Eds.) Planetary atmospheric electricity.* New York: Springer, 2008. doi 10.1007/978-0-387-87664-1.
2. *Wilson C.T.R. Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms // Philos. Trans. Roy. Soc. Lon. A. 1921. 221. 73–115.* doi 10.1098/rsta.1921.0003.
3. *Anisimov S.V., Bakastov S.S., Mareev E.A. Spatiotemporal structures of electric field and space charge in the surface atmospheric layer // J. Geophys. Res. Atmos. 1994. 99, N D5. 10603–10610.* doi 10.1029/93JD03519.
4. *Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. 450, N 1. 112–136.* doi 10.1016/j.jmaa.2017.01.025.
5. *Slyunyaev N.N., Mareev E.A., Kalinin A.V., Zhidkov A.A. Influence of large-scale conductivity inhomogeneities in the atmosphere on the global electric circuit // J. Atmos. Sci. 2014. 71, N 11. 4382–4396.* doi 10.1175/JAS-D-14-0001.1
6. *Жидков А.А., Калинин А.В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. 123–129.*
7. *Jin J.-M. The finite element method in electromagnetics.* Hoboken: Wiley, 2014.
8. Eigen. <https://eigen.tuxfamily.org/index.php>. Дата обращения: 2 августа 2023.

Поступила в редакцию
11 апреля 2023 г.

Принята к публикации
8 июля 2023 г.

Информация об авторах

Иван Геннадьевич Милешин — студент; Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров, Нижегородская обл., г. Саров, ул. Парковая, д. 8, 607328, Саров, Российская Федерация.

Василий Михайлович Головизнин — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, 119991, Москва, Российская Федерация.

Михаил Михайлович Хапаев — к.ф.-м.н., доцент; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. F. Leblanc, K. L. Aplin, Y. Yair, et al. (Eds.), *Planetary Atmospheric Electricity* (Springer, New York, 2008). doi 10.1007/978-0-387-87664-1.
2. C. T. R. Wilson, “Investigations on Lightning Discharges and on the Electric Field of Thunderstorms,” *Philos. Trans. Roy. Soc. Lon. A.* **221**, 73–115 (1921). doi 10.1098/rsta.1921.0003.
3. S. V. Anisimov, S. S. Bakastov, and E. A. Mareev, “Spatiotemporal Structures of Electric Field and Space Charge in the Surface Atmospheric Layer,” *J. Geophys. Res. Atmos.* **99** (D5), 10603–10610 (1994). doi 10.1029/93JD03519.
4. A. V. Kalinin and N. N. Slyunyaev, “Initial-Boundary Value Problems for the Equations of the Global Atmospheric Electric Circuit,” *J. Math. Anal. App.* **450** (1), 112–136 (2017). doi 10.1016/j.jmaa.2017.01.025.
5. N. N. Slyunyaev, E. A. Mareev, A. V. Kalinin, and A. A. Zhidkov, “Influence of Large-Scale Conductivity Inhomogeneities in the Atmosphere on the Global Electric Circuit,” *J. Atmos. Sci.* **71** (11), 4382–4396 (2014). doi 10.1175/JAS-D-14-0001.1
6. A. A. Zhidkov and A. V. Kalinin, “Correctness of One Mathematical Problem of Atmospheric Electricity,” *Vestn. Lobachevskii Univ. Nizhni Novgorod*, No. 4, 123–129 (2009).



7. J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics* (Wiley, Hoboken, 2014).
8. Eigen <https://eigen.tuxfamily.org/index.php>. Cited August 2, 2023.

Received
April 11, 2023

Accepted for publication
July 8, 2023

Information about the authors

Ivan G. Mileshin — Student; Sarov Branch of Moscow State University, Parkovaya ulitsa, 8, 607328, Sarov, Russia.

Vasily M. Goloviznin — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.

Mikhail M. Khapaev — Ph.D., Associate Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.