



## Разработка численных алгоритмов решения прямой задачи распространения ультразвуковых волн в тонких пластинах

**А. С. Беляев**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, Москва, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0001-9762-1505, e-mail: beliaev.as19@physics.msu.ru

**А. В. Гончарский**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский вычислительный центр, Москва, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0001-9953-611X, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

**С. Ю. Романов**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский вычислительный центр, Москва, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0001-7882-2061, e-mail: romanov60@gmail.com

**Аннотация:** Статья посвящена разработке эффективных численных методов решения прямых задач распространения волн в твердых телах в векторных математических моделях. Итерационные методы решения обратных задач волновой томографии используют на каждой итерации решение прямой задачи распространения волн как в прямом, так и в обратном времени для вычисления градиента функционала невязки. Поэтому решение прямой задачи распространения волн в упругих средах является неотъемлемой частью решения обратных задач волновой томографии. Целью статьи также является определение с помощью методов математического моделирования характеристик волн Лэмба для ультразвуковой диагностики дефектов в тонких пластинах, определение диапазонов значений характерных параметров эксперимента по томографической диагностике в тонких пластинах на волнах Лэмба. Инструментом для проведения математического моделирования являются разрабатываемые численные методы и программы решения прямых задач. Конечной целью исследований является разработка методов решения обратных задач томографического неразрушающего ультразвукового контроля как на волнах Лэмба, так и на объемных волнах.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, ультразвуковая томография, прямая и обратная задачи, векторная волновая модель, неразрушающий контроль, волны Лэмба.

**Благодарности:** Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова.

**Для цитирования:** Беляев А.С., Гончарский А.В., Романов С.Ю. Разработка численных алгоритмов решения прямой задачи распространения ультразвуковых волн в тонких пластинах // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 3. 275–290. doi 10.26089/NumMet.v24r320.



## Development of numerical algorithms for solving the direct problem of propagation of ultrasonic waves in thin plates

**Alexander S. Belyaev**

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia  
ORCID: 0000-0001-9762-1505, e-mail: beliaev.as19@physics.msu.ru

**Alexander V. Goncharsky**

Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Moscow, Russia  
ORCID: 0000-0001-9953-611X, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

**Sergey Y. Romanov**

Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Moscow, Russia  
ORCID: 0000-0001-7882-2061, e-mail: romanov60@gmail.com

**Abstract:** This article is devoted to the development of efficient numerical methods for solving direct problems of wave propagation in solids in vector mathematical models. Iterative methods for solving inverse problems of wave tomography use, at each iteration, the solution of the direct problem of wave propagation both in forward and backward time to calculate the gradient of the residual functional. Therefore, the solution of the direct problem of wave propagation in elastic media is an integral part of the solution of inverse problems of wave tomography. The purpose of the article is also to determine, using the methods of mathematical modeling characteristics of Lamb waves for ultrasonic diagnostics of defects in thin plates, determination of the ranges of values of the characteristic parameters of the experiment on tomographic diagnostics in thin plates on Lamb waves. The tools for mathematical modeling are the developed numerical methods and programs for solving direct problems. The ultimate goal of the research is to develop methods for solving inverse problems of tomographic non-destructive ultrasonic testing both on Lamb waves and on bulk waves.

**Keywords:** mathematical modeling, ultrasound tomography, forward and inverse problems, vector wave model, non-destructive testing, Lamb waves.

**Acknowledgements:** The research is carried out using the equipment of the shared research facilities of HPC computing resources at Lomonosov Moscow State University.

**For citation:** A. S. Belyaev, A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Development of numerical algorithms for solving the direct problem of propagation of ultrasonic waves in thin plates,” Numerical Methods and Programming. 24 (3), 275–290 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r320.

---

**1. Введение.** В последние десять лет значительно возросло количество публикаций в области волновой томографии [1–4]. С математической точки зрения эти задачи являются обратными. В отличие от хорошо известных задач рентгеновской томографии, задачи волновой томографии являются нелинейными, что приводит к большим проблемам при разработке приближенных методов их решения.

В задачах волновой томографии в простейшей скалярной модели используются только продольные волны. Примером может служить томографическая диагностика мягких тканей человека, где в исследуемом объекте распространяется лишь одна продольная волна. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для скалярного волнового уравнения. Обратную задачу можно свести к итерационному поиску минимума функционала невязки между экспериментальными данными и теоретическим волновым полем, рассчитанным при заданных коэффициентах волнового уравнения. В разных постановках получено представление для градиента функционала [5–9]. Разработка ультразвуковых томографов для диагностики рака молочной железы находится на стадии экспериментальных установок и макетов [4, 10, 11].

Однако даже в скалярной модели итерационные методы приближенного решения обратной задачи не обеспечивают, вообще говоря, сходимость к глобальному минимуму функционала. Математической проблеме поиска глобального минимума посвящено большое количество работ [12–14]. Наиболее интересные результаты получены с использованием функций априорной информации. В работах [15, 16] предложен итерационный метод приближенного решения обратных задач волновой томографии, получивший название MSM (MultiStage Method). Суть метода заключается в том, что на первой стадии итерационного



процесса используются лишь низкочастотные компоненты импульса. Как показано в работах [17, 18], при частотах, стремящихся к нулю, обратную задачу можно свести к решению интегрального уравнения. Последнее означает, что при зондировании исследуемого объекта низкочастотными импульсами задача сводится к поиску минимума выпуклого функционала, что обеспечивает сходимость итерационного метода в любой окрестности точного решения. Однако полученное приближение не обеспечивает высокого пространственного разрешения. На второй стадии MSM-метода используется весь спектральный диапазон, при этом в качестве начального приближения используется приближение, полученное на первом этапе.

В задачах неразрушающего контроля методы волновой томографии делают только первые шаги. В работе [2] впервые был реализован томографический подход, позволяющий получить не только высокое пространственное разрешение, но и разрешение по контрасту. В качестве источников и приемников в схеме на прохождение используются две линейки детекторов с частотой зондирования порядка 5 МГц, которые закреплены неподвижно. Исследуемый объект поворачивается на 360 градусов. Скорость продольных и поперечных волн различна, что дало возможность выделять только продольные волны. Для интерпретации данных использовался итерационный градиентный алгоритм, основанный на MSM-методе.

В общем случае при диагностике твердых тел в исследуемом объекте распространяются как продольные, так и поперечные волны, а также волны Рэлея, волны Лэмба и прочие. К задачам ультразвукового неразрушающего томографического контроля на продольных и поперечных волнах [19–21] очень близка задача томографии на волнах Лэмба в тонких пластинах, в которой волны Лэмба используются для ультразвукового контроля пластин. Фазовая скорость волны Лэмба сильно зависит от толщины пластины, в которой она распространяется. Этот физический эффект приводит к рассеянию волн Лэмба на дефектах в пластинах и позволяет надеяться на эффективное использование волн Лэмба при томографической диагностике тонких пластин, слоистых сред. В работах [1, 22–26] проведены экспериментальные измерения в лаборатории и визуализация дефектов в пластинах с использованием волн Лэмба.

Целью настоящей работы является разработка эффективных численных методов и программ решения прямой задачи распространения волн Лэмба в тонких пластинах в векторных моделях. Методы решения обратных задач волновой томографии используют на каждой итерации решение прямой задачи распространения волн как в прямом, так и в обратном времени для вычисления градиента функционала невязки. Поэтому решение прямой задачи распространения волн в упругих средах является неотъемлемой частью интерпретации данных эксперимента и представляет собой инструмент для проведения численных экспериментов по решению томографических задач на волнах Лэмба. Целью работы также является определение с помощью методов математического моделирования характеристик волн Лэмба для диагностики дефектов, определение диапазонов значений характерных параметров томографического эксперимента по томографической диагностике в тонких пластинах.

**2. Постановка прямой задачи распространения упругих волн в твердых телах.** Распространение упругих волн в изотропной идеально упругой среде описывается уравнениями динамической теории упругости в следующем виде в  $\mathbb{R}^3$  [27]:

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, \quad \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}, \quad \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{22} \\ f_{33} \\ f_{23} \\ f_{13} \\ f_{12} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скоростей смещений,  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $f_{ij}$  — компоненты, задающие внешнее возмущение,  $\rho$  — плотность,  $\lambda$  — модуль объемной упругости,  $\mu$  — модуль сдвиговой упругости.

Полагаем нулевые начальные условия:

$$u_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{ij}|_{t=0} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

На границах тела, представляющего собой параллелепипед с линейными размерами  $L_1, L_2, L_3$ , ставятся условия свободной поверхности:

$$\sigma_{1j}|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{1j}|_{x_1=L_1} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{2j}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{2j}|_{x_2=L_2} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{3j}|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{3j}|_{x_3=L_3} = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Система уравнений (1) решается с помощью явной разностной схемы, предполагающей дискретизацию расчетной области с использованием прямоугольных сеток. Шаг сетки, как правило, выбирается из расчета от 15 до 25 точек на центральную длину волны импульса.

**3. Стандартная разностная схема для аппроксимации системы уравнений динамической теории упругости.** Для построения стандартной схемы на сдвинутых сетках [28, 29], аппроксимирующей (1), введем целые и полуцелые узлы сетки. Будем использовать обозначения:

$$(x_1)_i = ih_1, \quad (x_1)_{i+1/2} = (i + 1/2)h_1,$$

$$(x_2)_j = jh_2, \quad (x_2)_{j+1/2} = (j + 1/2)h_2,$$

$$(x_3)_k = kh_3, \quad (x_3)_{k+1/2} = (k + 1/2)h_3,$$

$$t^n = n\tau, \quad t^{n+1/2} = (n + 1/2)\tau,$$

где  $h_m$  — шаг сетки по координате  $x_m$ ,  $\tau$  — шаг по времени. Также введем сеточные функции в целых и полуцелых узлах сетки:

$$(u_1)_{i+1/2,j,k}^n = u_1((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_j, (x_3)_k, t^n),$$

$$(u_2)_{i,j+1/2,k}^n = u_2((x_1)_i, (x_2)_{j+1/2}, (x_3)_k, t^n),$$

$$(u_3)_{i,j,k+1/2}^n = u_3((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_{k+1/2}, t^n),$$

$$(\sigma_{11})_{i,j,k}^{n+1/2} = \sigma_{11}((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k, t^{n+1/2}),$$

$$(\sigma_{22})_{i,j,k}^{n+1/2} = \sigma_{22}((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k, t^{n+1/2}),$$

$$(\sigma_{33})_{i,j,k}^{n+1/2} = \sigma_{33}((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k, t^{n+1/2}),$$

$$(\sigma_{23})_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \sigma_{23}((x_1)_i, (x_2)_{j+1/2}, (x_3)_{k+1/2}, t^{n+1/2}),$$

$$(\sigma_{13})_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} = \sigma_{13}((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_j, (x_3)_{k+1/2}, t^{n+1/2}),$$

$$(\sigma_{12})_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} = \sigma_{12}((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_{j+1/2}, (x_3)_k, t^{n+1/2}).$$

На рис. 1 приведена одна угловая часть сетки, которая объясняет расположение компонент волнового поля и постановку граничных условий.

Для построения явной конечно-разностной схемы используются следующие аппроксимации для производных по времени:

$$D_t[f]_{I,J,K}^N = \frac{1}{\tau} (f_{I,J,K}^{N+1/2} - f_{I,J,K}^{N-1/2}),$$

где  $f$  — некоторая функция. Индексы, записанные строчными буквами, обозначают целые значения, индексы, записанные прописными буквами, могут использоваться как для целых, так и полуцелых значений.

Аппроксимация производной по координате  $x_1$  имеет вид:

$$D_1[f]_{I,J,K}^N = \frac{1}{h_1} (f_{I+1/2,J,K}^N - f_{I-1/2,J,K}^N).$$

Аппроксимации производных по остальным координатам строятся по аналогии.

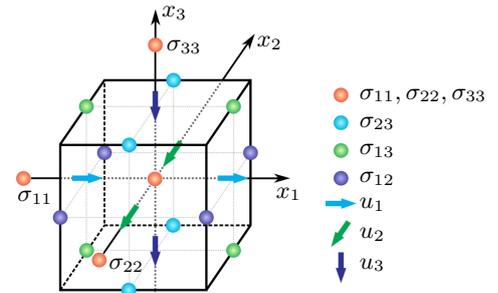


Рис. 1. Угловая часть сетки для стандартной схемы на сдвинутых сетках с пространственным распределением переменных

Fig. 1. Corner part of the grid for the standard scheme on shifted grids with spatial distribution of variables



Таким образом, разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений (1), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \rho_{i+1/2,j,k} D_t [u_1]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{11}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{12}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + D_3 [\sigma_{13}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2}, \\
 \rho_{i,j+1/2,k} D_t [u_2]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{12}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{22}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + D_3 [\sigma_{23}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2}, \\
 \rho_{i,j,k+1/2} D_t [u_3]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{13}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{23}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + D_3 [\sigma_{33}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2}, \\
 D_t [\sigma_{11}]_{i,j,k}^n &= (\lambda_{i,j,k} + 2\mu_{i,j,k}) D_1 [u_1]_{i,j,k}^n + \lambda_{i,j,k} D_2 [u_2]_{i,j,k}^n + \lambda_{i,j,k} D_3 [u_3]_{i,j,k}^n + [f_{11}]_{i,j,k}^n, \\
 D_t [\sigma_{22}]_{i,j,k}^n &= \lambda_{i,j,k} D_1 [u_1]_{i,j,k}^n + (\lambda_{i,j,k} + 2\mu_{i,j,k}) D_2 [u_2]_{i,j,k}^n + \lambda_{i,j,k} D_3 [u_3]_{i,j,k}^n + [f_{22}]_{i,j,k}^n, \\
 D_t [\sigma_{33}]_{i,j,k}^n &= \lambda_{i,j,k} D_1 [u_1]_{i,j,k}^n + \lambda_{i,j,k} D_2 [u_2]_{i,j,k}^n + (\lambda_{i,j,k} + 2\mu_{i,j,k}) D_3 [u_3]_{i,j,k}^n + [f_{33}]_{i,j,k}^n, \\
 D_t [\sigma_{23}]_{i,j+1/2,k+1/2}^n &= \mu_{i,j+1/2,k+1/2} (D_2 [u_3]_{i,j+1/2,k+1/2}^n + D_3 [u_2]_{i,j+1/2,k+1/2}^n) + [f_{23}]_{i,j+1/2,k+1/2}^n, \\
 D_t [\sigma_{13}]_{i+1/2,j,k+1/2}^n &= \mu_{i+1/2,j,k+1/2} (D_3 [u_1]_{i+1/2,j,k+1/2}^n + D_1 [u_3]_{i+1/2,j,k+1/2}^n) + [f_{13}]_{i+1/2,j,k+1/2}^n, \\
 D_t [\sigma_{12}]_{i+1/2,j+1/2,k}^n &= \mu_{i+1/2,j+1/2,k} (D_1 [u_2]_{i+1/2,j+1/2,k}^n + D_2 [u_1]_{i+1/2,j+1/2,k}^n) + [f_{12}]_{i+1/2,j+1/2,k}^n.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Условие устойчивости для схемы (2) имеет вид:

$$\tau c_p \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2}} \leq 1, \tag{3}$$

где  $c_p$  — скорость продольной волны в данном материале.

#### 4. Модельные расчеты волнового поля в различных средах.

**4.1. Способ задания внешнего возмущения.** Во всех расчетах, приведенных ниже, для осуществления внешнего возмущения был выбран следующий импульс:

$$f_{33}(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = \begin{cases} C \sin\left(\frac{2}{3}\pi\nu_0 t\right) \sin(2\pi\nu_0 t) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - b_1)^2}{R^2}}\right), & t \in \left[0, \frac{3}{\nu_0}\right], \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4}$$

причем  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - b_1)^2 \leq R^2$ ,  $f_{11} = 0$ ,  $f_{22} = 0$ ,  $f_{23} = 0$ ,  $f_{13} = 0$ ,  $f_{12} = 0$ . Здесь  $\nu_0$  — центральная частота импульса. Константа  $C$  определяет амплитуду внешнего возмущения. Для расчетов, приведенных ниже, полагаем  $C = 1$  ГПа/мкс =  $10^{-6}$  кг/(мм·мкс<sup>3</sup>). Временная часть импульса (4) представляет собой гладкую функцию с нулевой производной по времени на границах и нулевым интегралом по времени действия, при данных условиях в спектре импульса отсутствуют низкие и высокие частоты. На рис. 2

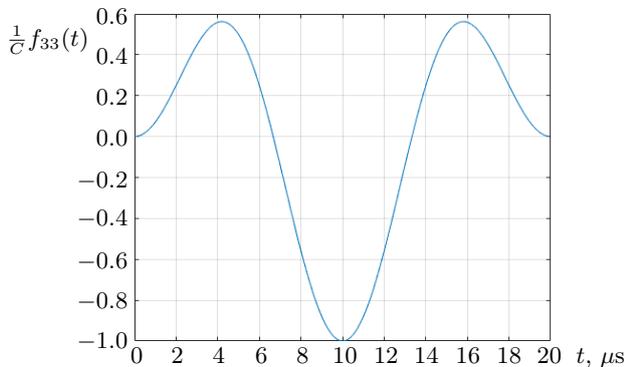


Рис. 2. Временная зависимость нормированного импульса внешнего возмущения  $f_{33}$  из формулы (4)

Fig. 2. Time dependence of the normalized external disturbance impulse  $f_{33}$  from the formula (4)

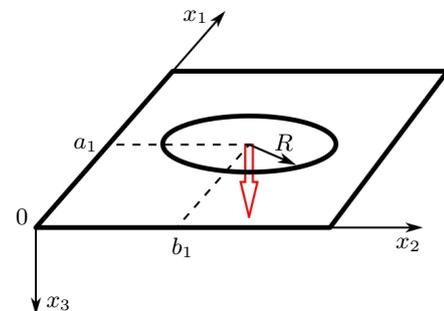


Рис. 3. Пространственное задание импульса внешнего возмущения  $f_{33}$  из формулы (4). Стрелкой отмечено направление действия импульса

Fig. 3. Spatial specification of the disturbance impulse  $f_{33}$  from the formula (4). The arrow marks the direction of the impulse

изображена временная часть импульса, а на рис. 3 приведен способ его пространственного задания. Стоит отметить, что импульс задается не в отдельной точке, а на круговой площадке, которая расположена либо на одной из поверхностей объекта, либо в плоскости, параллельной одной из граней объекта (рис. 3). При этом координаты  $x_1$  и  $x_2$  в формуле (4) пробегает все значения внутри круга радиуса  $R$  ( $R \sim 5\text{--}10$  мм) с координатами центра  $x_1 = a_1$  и  $x_2 = b_1$ . Пространственную непрерывность обеспечивает непрерывное шивание импульса на границах круга. Представленный способ пространственного задания импульса необходим для уменьшения посторонних шумов.

**4.2. Распространение различных видов волн в изотропном стальном кубе.** Рассмотрим задачу нахождения волнового поля в изотропном стальном кубе с ребром  $L$ , на границах которого поставлены условия свободной поверхности. Внешнее возмущение на куб будем осуществлять с помощью импульса (4) при следующих параметрах:

- $\nu_0 = 75$  кГц — центральная частота импульса;
- $R = 8.6$  мм — радиус круга приложения возмущения;
- $L = 312.5$  мм — длина ребра куба;
- $a_1 = 107.8$  мм,  $b_1 = 156.3$  мм — координаты центра приложения возмущения;
- расчетная сетка  $290 \times 290 \times 290$  точек.

На рис. 4 представлено распределение значений компоненты  $u_3$  вектора скоростей смещений, направленной вдоль оси  $x_3$ , в сечении куба в плоскости  $x_1x_3$  для различных моментов времени. Точки желтого цвета соответствуют положительному значению компоненты  $u_3$ , а синего цвета — отрицательному значению.

На рис. 4 можно одновременно наблюдать распространение трех видов волн. Первый тип волн — поверхностные акустические волны или волны Рэлея (отмечены на рис. 4 красным). Данные волны распространяются вблизи поверхности, амплитуда этих волн экспоненциально убывает с расстоянием от поверхности, скорость рэлеевских волн составляет порядка 0.92 от скорости поперечной волны (отмечена на рис. 4 оранжевым). Второй тип волн — поперечные волны, обусловленные сдвиговой упругостью, интенсивность поперечной волны в направлении приложения внешнего возмущения, как известно, минимальна, что и наблюдается на рис. 4b внизу фронта поперечной волны. Третий тип волн — продольные волны (отмечены на рис. 4 желтым), интенсивность данных волн максимальна в направлении приложения внешнего возмущения, что также можно наблюдать на рис. 4b внизу фронта продольной волны. Скорости продольной и поперечной волн в стали с коэффициентом Пуассона  $\sigma = 0.25$  и модулем Юнга  $E = 200$  ГПа можно получить с помощью хорошо известных формул

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{1 + \sigma},$$

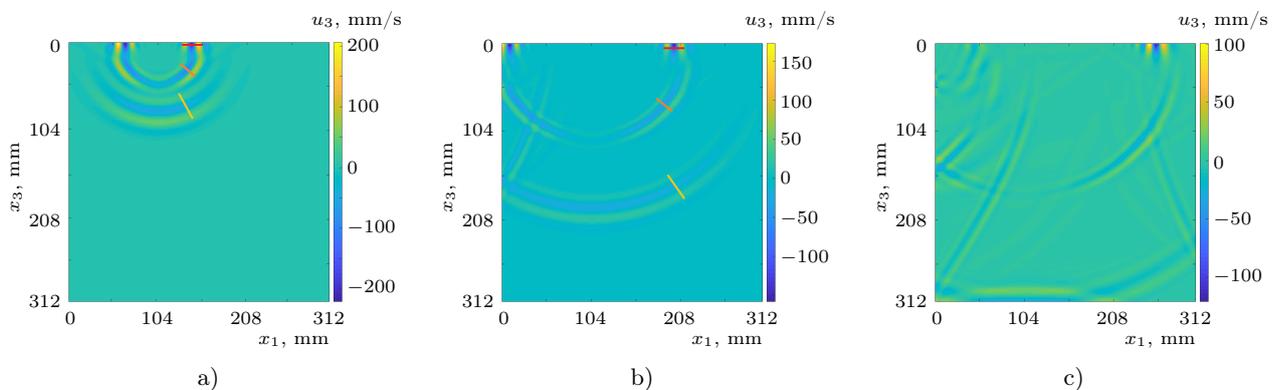


Рис. 4. Распределение скорости  $u_3$  в сечении  $x_2 = 156.3$  мм в моменты времени: а) 21.0 мкс; б) 42.0 мкс; в) 63.0 мкс

Fig. 4. Speed distribution  $u_3$  in the section  $x_2 = 156.3$  mm at different times: а) 21.0  $\mu\text{s}$ ; б) 42.0  $\mu\text{s}$ ; в) 63.0  $\mu\text{s}$



в которых  $\lambda$  — модуль объемной упругости,  $\mu$  — модуль сдвиговой упругости,  $\rho$  — плотность среды. Скорости продольной и поперечной волн, полученные из модельных расчетов, соответствуют теоретическим значениям в пределах 5%.

### 4.3. Рассеяние упругих волн на препятствии.

§ 4.3.1. *Рассеяние упругих волн на неоднородности (алмазный шар).* Рассмотрим задачу нахождения волнового поля в стальном кубе с ребром  $L$  с центрально расположенной неоднородностью в форме шара радиуса  $r$ . На границах куба поставлены условия свободной поверхности. Внешнее возмущение на куб будем осуществлять с помощью импульса (4) при следующих параметрах:

- $\nu_0 = 150$  кГц — центральная частота импульса;
- $R = 10$  мм — радиус круга приложения возмущения;
- $L = 312.5$  мм — длина ребра куба;
- $r = 50$  мм — радиус неоднородности;
- $a_1 = 156.3$  мм,  $b_1 = 156.3$  мм — координаты центра приложения возмущения;
- расчетная сетка  $250 \times 250 \times 250$  точек.

На рис. 5 представлено распределение скорости  $u_3$  в сечении куба в плоскости  $x_1x_3$  для различных моментов времени. Для демонстрации возможностей волновой модели была выбрана неоднородность с параметрами алмаза, которые сильно отличаются от параметров стали, благодаря чему можно детально рассмотреть различные физические явления. На рис. 5 можно наблюдать явление рассеяния продольной и поперечной волн на неоднородности. Так как скорость продольной волны в алмазе примерно в два раза выше, чем в стали, можно наблюдать значительное искривление волнового фронта, которое влечет за собой пространственную расфокусировку падающей на неоднородность волны. На рис. 5 б, с выше неоднородности можно увидеть идущие от центра куба продольные и поперечные волны, отраженные от поверхности неоднородности. Также слева вверху на рис. 5 б можно рассмотреть так называемую боковую волну, которая имеет конический фронт.

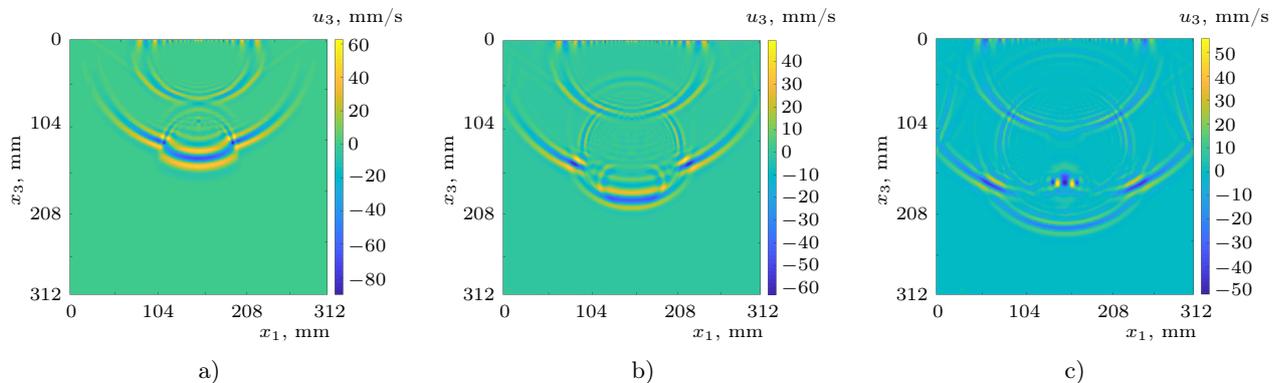


Рис. 5. Распределение скорости  $u_3$  в сечении  $x_2 = 156.3$  мм в моменты времени: а) 27.7 мкс; б) 33.4 мкс; в) 40.0 мкс

Fig. 5. Speed distribution  $u_3$  in the section  $x_2 = 156.3$  mm at different times: а) 27.7  $\mu$ s, б) 33.4  $\mu$ s, в) 40.0  $\mu$ s

§ 4.3.2. *Рассеяние упругих волн на неоднородности (золотой шар).* Рассмотрим похожую на предыдущую задачу нахождения волнового поля в стальном кубе с ребром  $L$  с центрально расположенной неоднородностью в форме шара радиуса  $r$ . На границах куба поставлены условия свободной поверхности. Внешнее возмущение на куб будем осуществлять с помощью импульса (4) при следующих параметрах:

- $\nu_0 = 322$  кГц — центральная частота импульса;
- $R = 10$  мм — радиус круга приложения возмущения;
- $L = 312.5$  мм — длина ребра куба;
- $r = 50$  мм — радиус неоднородности;
- $a_1 = 156.3$  мм,  $b_1 = 156.3$  мм — координаты центра приложения возмущения;
- расчетная сетка  $250 \times 250 \times 250$  точек.

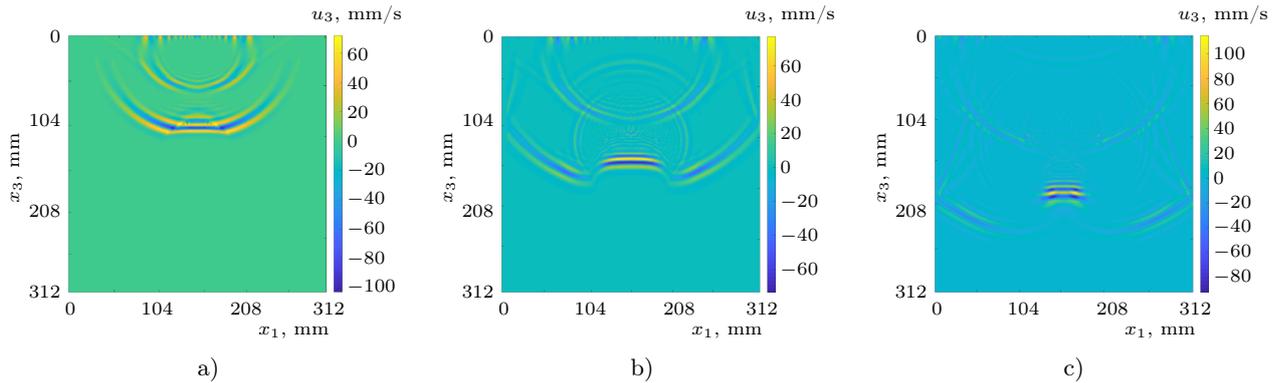


Рис. 6. Распределение скорости  $u_3$  в сечении  $x_2 = 156.3$  мм в моменты времени: а) 24.6 мкс; б) 36.9 мкс; в) 49.2 мкс

Fig. 6. Speed distribution  $u_3$  in the section  $x_2 = 156.3$  mm at different times: а) 24.6  $\mu$ s; б) 36.9  $\mu$ s; в) 49.2  $\mu$ s

На рис. 6 представлено распределение скорости  $u_3$  в сечении куба в плоскости  $x_1x_3$  для различных моментов времени. В данном случае параметры неоднородности соответствуют параметрам золота. Скорость продольной волны при данных параметрах примерно в два раза ниже, чем в стали. На рис. 6, как и в предыдущем расчете, можно наблюдать явление рассеяния продольной и поперечной волн на неоднородности. Из-за большой разности скоростей волн в двух средах можно наблюдать значительное искривление волнового фронта, которое влечет за собой пространственную фокусировку падающей на неоднородность волны. Как и в случае предыдущего расчета, отчетливо видны отраженные поперечная и продольная волны (рис. 6 б, в), а также боковая волна (рис. 6 а).

**4.4. Моделирование волнового поля в тонких пластинах.** Особый интерес в настоящей работе уделен задаче расчета волнового поля в объектах в виде тонких пластин, что связано с дальнейшими планами разработки томографических методов диагностики в тонких пластинах на волнах Лэмба. Из-за сложных явлений интерференции в тонких пластинах возникают так называемые нормальные волны, или волны Лэмба. Нормальные волны распространяются только в пластинах с толщиной, сопоставимой с длиной волны. В некоторых случаях в пластине могут возникать сложные резонансные явления, ведущие к образованию стоячих волн.

Нормальные волны имеют различные моды, движущиеся с различной скоростью. Различают симметричные (обозначаемые  $S_i$ ) и асимметричные (обозначаемые  $A_i$ ) моды нормальных волн. При движении симметричной моды верхняя и нижняя поверхности пластины движутся в противоположных направлениях вдоль оси  $x_3$ , а при движении асимметричной моды — в одном направлении.

Важной особенностью волн Лэмба является то, что для заданной толщины пластины для частот ниже определенной частоты возбуждаются только моды  $A_0$  и  $S_0$  нулевого порядка. При увеличении частоты появляются дополнительно моды более высоких порядков. В томографических экспериментах целесообразно использовать частоты ниже этой определенной частоты, чтобы избежать появления дополнительных мод. Чем меньше мод, тем проще и достовернее получаемые экспериментальные данные.

Мода  $A_0$  возбуждается намного проще, чем мода  $S_0$ , ударом по пластине сверху. Кроме того, при таком возбуждении импульса, как следует из модельных расчетов, амплитуда моды  $A_0$  существенно выше амплитуды моды  $S_0$ . Скорости распространения мод  $A_0$  и  $S_0$  могут различаться до двух раз, что позволяет надежно разделять их при обработке экспериментальных данных в обратных задачах диагностики тонких пластин.

*§ 4.4.1. Распространение моды  $A_0$  волн Лэмба в тонкой пластине.* Рассмотрим задачу нахождения волнового поля в однородной тонкой стальной пластине с длиной  $L$  и толщиной  $d$ , на границах которой поставлены условия свободной поверхности. Внешнее возмущение на пластину будем осуществлять на поверхности пластины с помощью импульса (4) при следующих параметрах:

- $\nu_0 = 75$  кГц — центральная частота импульса;
- $R = 5$  мм — радиус круга приложения возмущения;

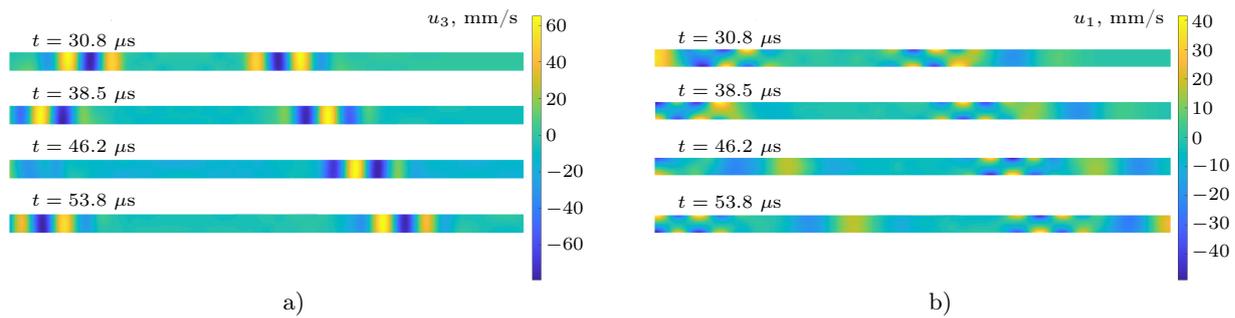


Рис. 7. Распределение скоростей а)  $u_3$ , б)  $u_1$  в сечении  $x_2 = 156.3$  мм в моменты времени: 30.8 мкс, 38.5 мкс, 46.2 мкс, 53.8 мкс

Fig. 7. Speed distribution а)  $u_3$ , б)  $u_1$  in the section  $x_2 = 156.3$  mm at different times: 30.8  $\mu$ s, 38.5  $\mu$ s, 46.2  $\mu$ s, 53.8  $\mu$ s

- $L = 312.5$  мм — длина пластины;
- $d = 10$  мм — толщина пластины;
- $a_1 = 106.3$  мм,  $b_1 = 156.3$  мм — координаты центра приложения возмущения;
- расчетная сетка  $500 \times 500 \times 16$  точек.

На рис. 7 представлены распределения компонент  $u_3$  и  $u_1$  вектора скорости в сечении пластины в плоскости  $x_1x_3$  для различных моментов времени. Компонента  $u_3$  направлена вдоль оси  $x_3$ , компонента  $u_1$  направлена вдоль оси  $x_1$ . Точки желтого цвета соответствуют положительному значению компоненты скорости, а синего цвета — отрицательному значению.

При данных параметрах возбуждаются только моды нулевого порядка. В силу асимметричной специфики внешнего воздействия на пластину симметричная мода имеет малую интенсивность по сравнению с асимметричной. Рис. 7 демонстрирует распространение моды  $A_0$  волн Лэмба. На рис. 7 а верхняя и нижняя поверхности пластины движутся в одном направлении. На рис. 7 б правее моды  $A_0$  видно моду  $S_0$ , скорость распространения которой выше, чем у  $A_0$ . Интенсивность моды  $S_0$  меньше и характер изменения скорости вдоль оси  $x_3$  иной, чем у моды  $A_0$ .

Модельные расчеты позволяют оценить групповую скорость моды  $A_0$ . В данном случае она равна 3000 м/с, что соответствует теоретическому значению, полученному с помощью дисперсионной кривой (данному расчету соответствует точка 0.75 по оси абсцисс на графике рис. 11 б).

§ 4.4.2. Распространение моды  $S_0$  волн Лэмба в тонкой пластине. Рассмотрим задачу нахождения волнового поля в однородной тонкой стальной пластине с длиной  $L$  и толщиной  $d$ , на границах которой поставлены условия свободной поверхности. В данном случае удобно возбуждать  $\sigma_{33}$  с помощью импульса аналогичного (4), приложенного в середине пластины по толщине. Параметры расчета:

- $\nu_0 = 75$  кГц — центральная частота импульса;
- $R = 10$  мм — радиус круга приложения возмущения;
- $L = 312.5$  мм — длина пластины;
- $d = 20$  мм — толщина пластины;
- $a_1 = 106.3$  мм,  $b_1 = 156.3$  мм — координаты центра приложения возмущения;
- расчетная сетка  $500 \times 500 \times 32$  точек.

На рис. 8 представлены распределения скоростей  $u_3$  и  $u_1$  в сечении пластины в плоскости  $x_1x_3$  для различных моментов времени.

При возбуждении колебаний в толщине пластины из-за симметрии внешнего воздействия относительно пластины интенсивно возбуждаются симметричные колебания, которые при данных параметрах имеют только нулевую моду. Асимметричные колебания при этом имеют малую интенсивность. На рис. 8 можно наблюдать распространение моды  $S_0$  волн Лэмба. При сравнении рис. 7 и рис. 8 видно, что характеры изменения компонент скорости вдоль оси  $x_3$  для мод  $A_0$  и  $S_0$  сильно отличаются. На рис. 8 а для компоненты  $u_3$  верхняя и нижняя поверхности пластины движутся в разных направлениях, что ха-

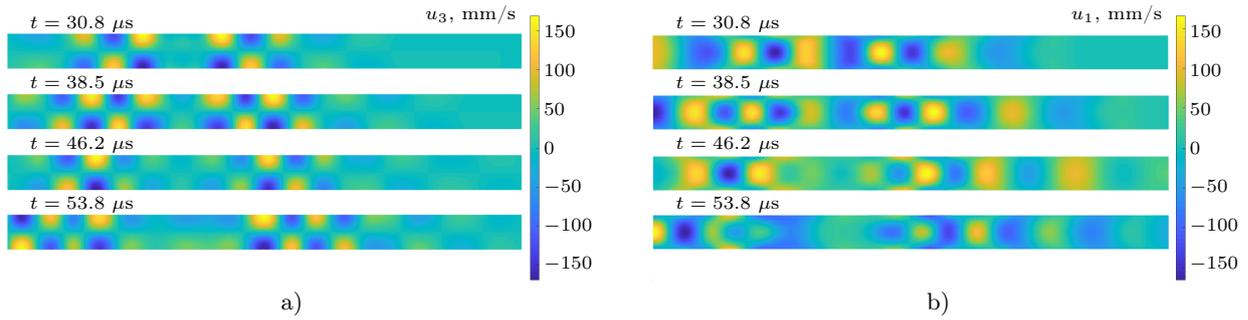


Рис. 8. Распределение скоростей а)  $u_3$ , б)  $u_1$  в сечении  $x_2 = 156.3$  мм в моменты времени: 30.8 мкс, 38.5 мкс, 46.2 мкс, 53.8 мкс

Fig. 8. Speed distribution а)  $u_3$ , б)  $u_1$  in the section  $x_2 = 156.3$  mm at different times: 30.8  $\mu$ s, 38.5  $\mu$ s, 46.2  $\mu$ s, 53.8  $\mu$ s

рактрно для моды  $S_0$ . Исходя из приведенных модельных расчетов, групповая скорость моды  $S_0$  была определена равной 4100 м/с, что соответствует теоретическому значению, полученному с помощью дисперсионной кривой [30].

§ 4.4.3. Изучение дисперсии моды  $A_0$ . Характерной особенностью нормальной волны является дисперсия — зависимость скорости распространения волны от характерного параметра  $\pi\nu d/c_t$  — произведения частоты на толщину пластины [30]. Зависимость скорости распространения волны от толщины пластины можно использовать в задачах томографии для обнаружения различного рода дефектов, связанных с изменением толщины пластины.

Как отмечено выше, для неразрушающего контроля тонких пластин удобно использовать моду  $A_0$  волн Лэмба, поскольку ее легче сформировать. Для решения обратной задачи неразрушающего контроля при диагностике пластины важно подобрать правильный диапазон характерного параметра  $\pi\nu d/c_t$ , на котором дисперсия скорости будет позволять обнаруживать дефекты. Проведем модельные расчеты для моды  $A_0$ , демонстрирующие дисперсию групповой скорости при заданной толщине пластины в зависимости от центральной частоты импульса. В качестве объекта для изучения дисперсии была выбрана пластина толщиной  $d$ , в разных расчетах на которую действовал внешний импульс (4) при различных центральных частотах.

Параметры расчета:

- $d = 5$  мм — толщина пластины;
- центральные частоты импульса:  $\nu_0^1 = 20.0$  кГц,  $\nu_0^2 = 60.9$  кГц,  $\nu_0^3 = 101.5$  кГц,  $\nu_0^4 = 142.0$  кГц,  $\nu_0^5 = 182.6$  кГц;
- $R = 2.5$  мм — радиус круга приложения возмущения;
- $L = 312.5$  мм — длина пластины;
- $a_1 = 156.3$  мм,  $b_1 = 156.3$  мм — координаты центра приложения возмущения;
- расчетная сетка  $500 \times 500 \times 8$  точек.

Нашей целью является нахождение групповых скоростей моды  $A_0$  при различных центральных частотах. Продемонстрируем процедуру вычисления групповой скорости по данным модельных расчетов на примере с центральной частотой  $\nu_0^4$ . На рис. 9 представлены распределения компоненты  $u_3$  вектора ско-

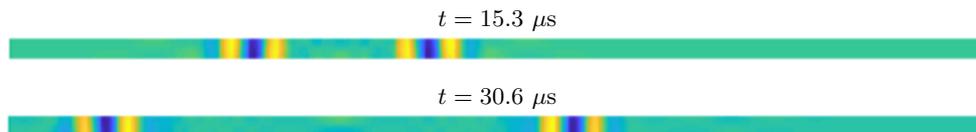


Рис. 9. Распределение скорости  $u_3$  в сечении  $x_2 = 156.3$  мм в моменты времени а) 15.3 мкс; б) 30.6 мкс

Fig. 9. Speed distribution  $u_3$  in the section  $x_2 = 156.3$  mm at time а) 15.3  $\mu$ s; б) 30.6  $\mu$ s

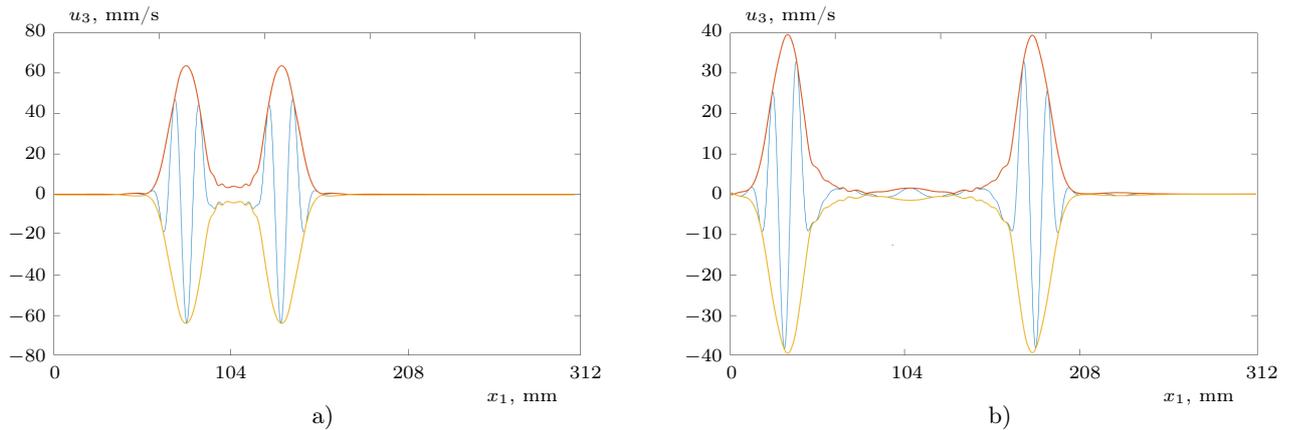


Рис. 10. График скорости  $u_3$  в сечении  $x_2 = 156.3$  мм,  $x_3 = 2.5$  мм в моменты времени а) 15.3 мкс; б) 30.6 мкс

Fig. 10. Graph of  $u_3$  velocity in the section  $x_2 = 156.3$  mm,  $x_3 = 2.5$  mm at a) 15.3  $\mu$ s; б) 30.6  $\mu$ s

рости смещения в сечении пластины в плоскости  $x_1x_3$  в моменты времени 15.3 мкс и 30.6 мкс. Для более точного определения групповой скорости рассмотрим подробнее график компоненты  $u_3$  вектора скорости смещения в те же моменты времени (рис. 10). На рис. 10 синим цветом изображен профиль волны, а красным изображена огибающая данного профиля. Скорость перемещения огибающей есть групповая скорость распространения импульса. Находя скорость перемещения огибающей для каждой из пяти частот, получаем пять значений групповой скорости. Из теории известно [30], что фазовые скорости асимметричных волн Лэмба можно найти как вещественные корни неявного уравнения

$$\frac{\tanh\left(\frac{d}{2}\sqrt{k_a^2 - k_p^2}\right)}{\tanh\left(\frac{d}{2}\sqrt{k_a^2 - k_t^2}\right)} = \frac{4k_a^2\sqrt{k_a^2 - k_p^2}\sqrt{k_a^2 - k_t^2}}{(2k_a^2 - k_t^2)^2}, \quad k_a = \frac{2\pi\nu}{c_{ph}}, \quad k_p = \frac{2\pi\nu}{c_p}, \quad k_t = \frac{2\pi\nu}{c_t},$$

в котором  $k_a, k_p, k_t$  — волновые числа лэмбовской, продольной и поперечной волн соответственно, а  $c_{ph}, c_p, c_t$  — скорости лэмбовской фазовой, продольной и поперечной волн соответственно. На рис. 11 а представлен график зависимости отношения фазовой скорости моды  $A_0$  к скорости поперечной волны от характерного параметра  $\pi\nu d/c_t$ . По формуле Рэлея

$$c_{gr} = c_{ph} - \lambda \frac{dc_{ph}}{d\lambda} = \frac{c_{ph}^2}{c_{ph} - \frac{dc_{ph}}{d\nu}\nu}$$

фазовую скорость можно пересчитать в групповую. На рис. 11 б представлен график зависимости отношения групповой скорости моды  $A_0$  к скорости поперечной волны от произведения частоты и толщины пластины. Красными кружочками отмечены пять значений групповой скорости, полученных с помощью модельных расчетов для пяти центральных частот  $\nu = \nu_0^i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Сравнивая теоретические и модельные значения групповых скоростей, можно убедиться в их соответствии. Погрешность составляет порядка 5%, что для описанной методики с учетом ошибок измерения является приемлемым результатом.

Для решения обратных задач ультразвуковой томографии на волнах Лэмба используемый диапазон частот должен быть согласован с учетом особенностей MSM-метода. Низкие частоты спектра обеспечивают сходимость итерационного процесса, высокие частоты отвечают за повышение пространственного разрешения. Проведенное математическое моделирование позволяет сделать вывод, что для задач диагностики дефектов тонких пластин толщиной около 5 мм можно использовать диапазон частот зондирования от 20 до 200 кГц. Этому диапазону спектра соответствуют длины волн 10–50 мм в стали.

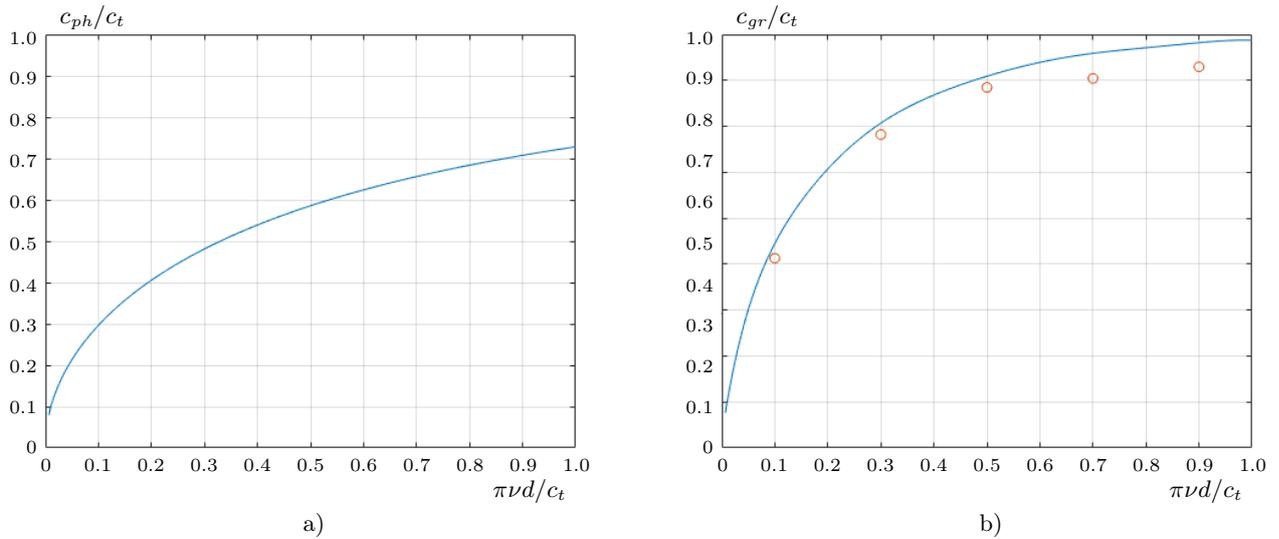


Рис. 11. Графики зависимостей от параметра  $\pi\nu d/c_t$ : а) отношения фазовой скорости  $c_{ph}$  волны Лэмба моды  $A_0$  к скорости поперечной волны  $c_t$ ; б) отношения групповой скорости  $c_{gr}$  волны Лэмба моды  $A_0$  к скорости поперечной волны  $c_t$

Fig. 11. Graphs of dependences on the parameter  $\pi\nu d/c_t$ : а) the ratio of the phase velocity  $c_{ph}$  of the Lamb wave of the mode  $A_0$  to the speed of the transverse wave  $c_t$ ; б) the ratio of the group velocity  $c_{gr}$  of the Lamb wave mode  $A_0$  to the velocity transverse wave  $c_t$

**5. Особенности программной реализации разностной схемы.** Явная разностная схема (2) на сдвинутых сетках аппроксимирует систему уравнений динамической теории упругости со вторым порядком по пространству и времени. Приведенные выше расчеты выполнены на равномерных пространственных и временной сетках, при этом основным критерием при выборе количества пространственных узлов было условие 15–25 точек на длину волны, обеспечивающее достаточно гладкую аппроксимацию распространяющегося импульса. Шаг по времени при этом определялся из критерия устойчивости схемы (3).

Использувавшийся в расчетах импульс (4) представляет собой гладкую функцию с нулевой производной по времени в начале и в конце импульса и нулевым интегралом по времени действия. Также стоит отметить, что импульс задается не в отдельной точке, а на площадке, характерные размеры которой составляют около 10 мм. Такой способ задания импульса необходим для уменьшения посторонних шумов.

Система (1) содержит три компоненты скорости, шесть компонент тензора напряжений, шесть компонент внешнего возмущения и три параметра среды. Для хранения всех сеточных значений данных величин используется 18 трехмерных массивов. Для перехода на следующий временной слой необходимо одновременно хранить данные массивы на предыдущем и текущем временных слоях. Необходимый объем памяти для хранения этих данных с одинарной точностью (тип float), требуемый в случае, например, расчета в кубической области размером  $300 \times 300 \times 300$  точек, составляет порядка 3.6 ГБ памяти.

Тело программы составляет цикл по времени, в котором вычисляются значения скоростей и напряжений. Количество итераций по времени для типичных расчетов составляет от 5000 до 15000. Один шаг по времени состоит из  $60 \cdot N^3$  операций типа сложения и умножения ( $N$  — количество точек по одной оси). Программа написана на языке C++ и в однопроцессорном варианте при расчетах в кубе  $300 \times 300 \times 300$  точек тратит на одну итерацию по времени порядка 0.3 с. При этом общее время расчетов составляет приблизительно один час.

Для реальных задач количество точек на одно измерение должно быть порядка 1000. При использовании однопроцессорного варианта расчет одной прямой задачи в кубе  $1000 \times 1000 \times 1000$  точек может занять около 100 часов. При решении обратной задачи неразрушающего контроля на каждой итерации градиентного метода необходимо решать прямую задачу. Как показывает практика решения обратных задач ультразвукового исследования в мягких тканях, число таких итераций в обратной задаче достигает нескольких сотен.

Из-за большой вычислительной трудоемкости данного процесса требуется проводить распараллеливание вычислений в прямой задаче и использовать суперкомпьютер. Наиболее естественным является



распараллеливание по источникам ультразвуковых зондирующих импульсов. Вторым уровнем распараллеливания является декомпозиция всей области расчетов на подобласти. В каждой из подобластей расчеты проводятся независимо, с последующим обменом данными по границам соседних областей [31, 32].

**6. Заключение.** Рассмотрена постановка прямой задачи расчета волнового поля распространения волн в упругих средах в векторной модели. Предложены численные методы и программы реализации расчета прямой задачи. Модельные расчеты продемонстрировали, что разработанные численные методы не только на качественном уровне описывают физические процессы такие как дифракция, рефракция, переотражение, но и хорошо согласуются с численными расчетами других авторов и с теорией распространения упругих волн.

Разработанные методы являются неотъемлемой частью решения обратных задач диагностики неразрушающего контроля в твердых телах. Для решения этих задач необходимо использовать итерационные алгоритмы минимизации функционала невязки между экспериментальными данными волнового поля и расчетными данными, полученными в ходе решения прямой задачи. Таким образом, решение прямой задачи используется сотни раз и для эффективной реализации алгоритмов необходимо использовать суперкомпьютерные технологии.

Также в статье методами математического моделирования определены оптимальные параметры волн Лэмба, наиболее подходящие для решения обратных задач томографической диагностики тонких пластин. Наиболее естественным является использование волн Лэмба моды  $A_0$ . Для использования MSM-метода зондирующие импульсы должны иметь характерный параметр  $\pi\nu d/c_t$  в пределах от 0.1 до 1.

### Список литературы

1. *Huthwaite P., Simonetti F.* High-resolution guided wave tomography // *Wave Motion*. 2013. **50**, N 5. 979–993. doi 10.1016/j.wavemoti.2013.04.004.
2. *Bazulin E., Goncharsky A., Romanov S., Seryozhnikov S.* Ultrasound transmission and reflection tomography for nondestructive testing using experimental data // *Ultrasonics*. 2022. **124**. Article Number 106765. doi 10.1016/j.ultras.2022.106765.
3. *Virieux J., Operto S.* An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics // *Geophysics*. 2009. **74**, N 6. WCC1–WCC26. doi 10.1190/1.3238367.
4. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Низкочастотная ультразвуковая томография: математические методы и эксперимент // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*. 2019. № 1. 40–47.
5. *Natterer F.* Numerical solution of bilinear inverse problems // *Technical Report 19/96 N. Department of Mathematics*. Münster: University of Münster, 1996.
6. *Beilina L., Klivanov M.V., Kokurin M.Yu.* Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem // *J. Math. Sci.* 2010. **167**. 279–325. doi 10.1007/s10958-010-9921-1.
7. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Iterative methods for solving coefficient inverse problems of wave tomography in models with attenuation // *Inverse Problems*. 2017. **33**, N 2. Article ID 025003. doi 10.1088/1361-6420/33/2/025003.
8. *Klivanov M.V., Kolesov A.E.* Convexification of a 3-D coefficient inverse scattering problem // *Computers and Mathematics with Applications*. 2019. **77**, N 6. 1681–1702. doi 10.1016/j.camwa.2018.03.016.
9. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* A method of solving the coefficient inverse problems of wave tomography // *Computers and Mathematics with Applications*. 2019. **77**, N 4. 967–980. doi 10.1016/j.camwa.2018.10.033.
10. *Jirik R., Peterlik I., Ruitter N., et al.* Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 2012. **59**, N 2. 254–264. doi 10.1109/TUFFC.2012.2185.
11. *Sak M., Duric N., Littrup P., et al.* Using speed of sound imaging to characterize breast density // *Ultrasound in Medicine & Biology*. 2017. **43**, N 1. 91–103. doi 10.1016/j.ultrasmedbio.2016.08.021.
12. *Liberti L., Maculan N. (Eds.)* Global optimization: from theory to implementation. Berlin: Springer, 2006.
13. *Гельфанд И.М., Цетлин М.Л.* О некоторых способах управления сложными системами // *Успехи матем. наук*. 1962. **17**, № 1. 3–25.
14. *Sulimov A.V., Zheltkov D.A., Oferkin I.V., et al.* Tensor train global optimization: application to docking in the configuration space with a large number of dimensions // *Communications in Computer and Information Science*. Vol. 793. Cham: Springer, 2017. 151–167. doi 10.1007/978-3-319-71255-0\_12.

15. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю. Низкочастотная 3D ультразвуковая томография: двухчастотный метод // Вычислительные методы и программирование. 2018. 19, № 4. 479–495. doi10.26089/NumMet.v19r443.
16. Natterer F. Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging // Contemporary Mathematics. Vol. 559. Providence: American Mathematical Society, 2011. 151–162. doi 10.1090/conm/559.
17. Backushinsky A., Goncharky A., Romanov S., Seatzu S. On the identification of velocity in seismics and in acoustic sounding // Pubblicazioni Dell'istituto di Analisa Globale e Applicazioni, Serie "Problemi non ben posti e inversi". Florence, 1994. Issue 71, pp. 1–14.
18. Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. 43, № 8. 1201–1209.
19. Базулин Е.Г., Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю. Обратные задачи ультразвуковой томографии в неразрушающем контроле: математические методы и эксперимент // Дефектоскопия. 2019. № 6. 30–39. doi 10.1134/S0130308219060046.
20. Bazulin E.G., Goncharky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Parallel CPU- and GPU-algorithms for inverse problems in nondestructive testing // Lobachevskii J. Math. 2018. 39, N 4. 486–493. doi 10.1134/S1995080218040030.
21. Romanov S.Y. Supercomputer simulations of nondestructive tomographic imaging with rotating transducers // Supercomput. Front. Innov. 2018. 5, N 3. 98–102. doi 10.14529/jfsfi180318.
22. Yu L., Giurgiutiu V., Pollock P. A multi-mode sensing system for corrosion detection using piezoelectric wafer active sensors // Proc. SPIE. 2008. Vol. 6932. doi 10.1117/12.776670.
23. Rao J., Ratasseppe M., Fan Z. Guided wave tomography based on full waveform inversion // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2016. 63, N 5. 737–745. doi 10.1109/TUFFC.2016.2536144.
24. Zhao X., Rose J.L. Ultrasonic guided wave tomography for ice detection // Ultrasonics. 2016. 67. 212–219. doi 10.1016/j.ultras.2015.12.005.
25. Tong J., Lin M., Wang X., et al. Deep learning inversion with supervision: a rapid and cascaded imaging technique // Ultrasonics. 2022. 122. Article Number 106686. doi 10.1016/j.ultras.2022.106686.
26. Rodriguez S., Deschamps M., Castaigns M., Ducasse E. Guided wave topological imaging of isotropic plates // Ultrasonics. 2014. 54, N 7. 1880–1890. doi 10.1016/j.ultras.2013.10.001.
27. Ландау Л.Д., Lifshits E.M. Теоретическая физика. Теория упругости. Т. VII. М.: Наука, 1987.
28. Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity–stress finite-difference method // Geophysics. 1986. 51, N 4. 889–901. doi 10.1190/1.1442147.
29. Лисица В.В. Численные методы и алгоритмы расчета волновых сейсмических полей в средах с локальными осложняющими факторами // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. 2017. <https://www.dissercat.com/content/chislennye-metody-i-algoritmy-rascheta-volnovykh-seismicheskikh-polei-v-sredakh-s-lokalnymi>. Дата обращения 10 июля 2023.
30. Викторов И.А. Ультразвуковые волны Лэмба // Акустический журнал. 1965. 11, № 1. 1–18.
31. Goncharky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Supercomputer technologies in tomographic imaging applications // Supercomput. Front. Innov. 2016. 3, N 1. 41–66. doi 10.14529/jfsfi160103.
32. Воеводин Вад.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Разработка высокоэффективных масштабируемых программ в задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. 2012. 13, № 2. 307–315.

Поступила в редакцию  
10 февраля 2023 г.

Принята к публикации  
3 мая 2023 г.

### Информация об авторах

Александр Сергеевич Беляев — студент; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, ГСП-1, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119991, Москва, Российская Федерация.

Александр Владимирович Гончарский — д.ф.-м.н., профессор, зав. лаб.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 1, стр. 4, 119234, Москва, Российская Федерация.

Сергей Юрьевич Романов — д.ф.-м.н., вед. научн. сотр.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 1, стр. 4, 119234, Москва, Российская Федерация.



## References

1. P. Huthwaite and F. Simonetti, “High-Resolution Guided Wave Tomography,” *Wave Motion* **50** (5), 979–993 (2013). doi [10.1016/j.wavemoti.2013.04.004](https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.04.004).
2. E. Bazulin, A. Goncharsky, S. Romanov, and S. Seryozhnikov, “Ultrasound Transmission and Reflection Tomography for Nondestructive Testing Using Experimental Data,” *Ultrasonics* **124**, Article Number 106765 (2022). doi [10.1016/j.ultras.2022.106765](https://doi.org/10.1016/j.ultras.2022.106765).
3. J. Virieux and S. Operto, “An Overview of Full-Waveform Inversion in Exploration Geophysics,” *Geophysics* **74** (6), WCC1–WCC26 (2009). doi [10.1190/1.3238367](https://doi.org/10.1190/1.3238367).
4. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “Low-Frequency Ultrasonic Tomography: Mathematical Methods and Experimental Results,” *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz. Astron., No. 1*, 40–47 (2019) [Moscow Univ. Phys. Bull. **74** (1), 43–51 (2019)]. doi [10.3103/S0027134919010090](https://doi.org/10.3103/S0027134919010090).
5. F. Natterer, *Numerical Solution of Bilinear Inverse Problems*, Technical Report **19/96 N** (Department of Mathematics, University of Münster, 1996).
6. L. Beilina, M. V. Klibanov, and M. Yu. Kokurin, “Adaptivity with Relaxation for Ill-Posed Problems and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem,” *J. Math. Sci.* **167**, 279–325 (2010). doi [10.1007/s10958-010-9921-1](https://doi.org/10.1007/s10958-010-9921-1).
7. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Iterative Methods for Solving Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography in Models with Attenuation,” *Inverse Probl.* **33** (2), Article ID 025003 (2017). doi [10.1088/1361-6420/33/2/025003](https://doi.org/10.1088/1361-6420/33/2/025003).
8. M. V. Klibanov and A. E. Kolesov, “Convexification of a 3-D Coefficient Inverse Scattering Problem,” *Comput. Math. Appl.* **77** (6), 1681–1702 (2019). doi [10.1016/j.camwa.2018.03.016](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.03.016).
9. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “A Method of Solving the Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography,” *Comput. Math. Appl.* **77** (4), 967–980 (2019). doi [10.1016/j.camwa.2018.10.033](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.033).
10. R. Jirik, I. Peterlik, N. Ruitter, et al., “Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography,” *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **59** (2), 254–264 (2012). doi [10.1109/TUFFC.2012.2185](https://doi.org/10.1109/TUFFC.2012.2185).
11. M. Sak, N. Duric, P. Littrup, et al., “Using Speed of Sound Imaging to Characterize Breast Density,” *Ultrasound Med. Biol.* **43** (1), 91–103 (2017). doi [10.1016/j.ultrasmedbio.2016.08.021](https://doi.org/10.1016/j.ultrasmedbio.2016.08.021).
12. L. Liberti and N. Maculan (Eds.), *Global Optimization: From Theory to Implementation* (Springer, Berlin, 2006).
13. I. M. Gel’fand and M. L. Tsetlin, “Some Methods of Control for Complex Systems,” *Usp. Mat. Nauk* **17** (1), 3–25 (1962) [Russ. Math. Surv. **17** (1), 95–117 (1962)]. doi [10.1070/rm1962v017n01abeh001124](https://doi.org/10.1070/rm1962v017n01abeh001124).
14. A. V. Sulimov, D. A. Zheltkov, I. V. Oferkin, et al., “Tensor Train Global Optimization: Application to Docking in the Configuration Space with a Large Number of Dimensions,” in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 793, pp. 151–167. doi [10.1007/978-3-319-71255-0\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-71255-0_12).
15. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, “Low-Frequency 3D Ultrasound Tomography: Dual-Frequency Method,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)* **19** (4), 479–495 (2018). doi [10.26089/NumMet.v19r443](https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r443).
16. F. Natterer, “Possibilities and Limitations of Time Domain Wave Equation Imaging,” in: *Contemporary Mathematics* (American Mathematical Society, Providence, 2011), Vol. 559, pp. 151–162. doi [10.1090/conm/559](https://doi.org/10.1090/conm/559).
17. A. Backushinsky, A. Goncharsky, S. Romanov, and S. Seatzu, “On the Identification of Velocity in Seismics and in Acoustic Sounding,” *Pubblicazioni Dell’istituto di Analisa Globale e Applicazioni, Serie "Problemi non ben posti e inversi"*, Florence (1994), Issue 71, pp. 1–14.
18. A. B. Bakushinskii, A. I. Kozlov, and M. Y. Kokurin, “On Some Inverse Problem for a Three-Dimensional Wave Equation,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **43** (8), 1201–1209 (2003) [Comput. Math. Math. Phys. **43** (8), 1149–1158 (2003)].
19. E. G. Bazulin, A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, “Inverse Problems of Ultrasonic Tomography in Nondestructive Testing: Mathematical Methods and Experiment,” *Defektoskopiya*, No. 6, 30–39 (2019) [Russ. J. Nondestruct. Test. **55** (6), 453–462 (2019)]. doi [10.1134/S1061830919060020](https://doi.org/10.1134/S1061830919060020).
20. E. G. Bazulin, A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “Parallel CPU- and GPU-Algorithms for Inverse Problems in Nondestructive Testing,” *Lobachevskii J. Math.* **39** (4), 486–493 (2018). doi [10.1134/S1995080218040030](https://doi.org/10.1134/S1995080218040030).
21. S. Y. Romanov, “Supercomputer Simulations of Nondestructive Tomographic Imaging with Rotating Transducers,” *Supercomput. Front. Innov.* **5** (3), 98–102 (2018). doi [10.14529/jsfi180318](https://doi.org/10.14529/jsfi180318).

22. L. Yu, V. Giurgiutiu, and P. Pollock, “A Multi-Mode Sensing System for Corrosion Detection Using Piezoelectric Wafer Active Sensors,” Proc. SPIE, Vol. 6932 (2008). doi [10.1117/12.776670](https://doi.org/10.1117/12.776670).
23. J. Rao, M. Ratssepp, and Z. Fan, “Guided Wave Tomography Based on Full Waveform Inversion,” IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **63** (5), 737–745 (2016). doi [10.1109/TUFFC.2016.2536144](https://doi.org/10.1109/TUFFC.2016.2536144).
24. X. Zhao and J. L. Rose, “Ultrasonic Guided Wave Tomography for Ice Detection,” Ultrasonics **67**, 212–219 (2016). doi [10.1016/j.ultras.2015.12.005](https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.12.005).
25. J. Tong, M. Lin, X. Wang, et al., “Deep Learning Inversion with Supervision: A Rapid and Cascaded Imaging Technique,” Ultrasonics **122**, Article Number 106686 (2022). doi [10.1016/j.ultras.2022.106686](https://doi.org/10.1016/j.ultras.2022.106686).
26. S. Rodriguez, M. Deschamps, M. Castaings, and E. Ducasse, “Guided Wave Topological Imaging of Isotropic Plates,” Ultrasonics **54** (7), 1880–1890 (2014). doi [10.1016/j.ultras.2013.10.001](https://doi.org/10.1016/j.ultras.2013.10.001).
27. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, Vol. 7: *Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1987; Pergamon, Oxford, 1995).
28. J. Virieux, “*P*-*SV* Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity–Stress Finite-Difference method,” Geophysics **51** (4), 889–901 (1986). doi [10.1190/1.1442147](https://doi.org/10.1190/1.1442147).
29. V. V. Lisitsa, *Numerical Methods and Algorithms for Calculating Wave Seismic Fields in Media with Local Complicating Factors* Doctoral Thesis in Physics and Mathematics (Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, 2017). <https://www.dissercat.com/content/chislennyye-metody-i-algoritmy-rascheta-volnovykh-seismicheskikh-polei-v-sredakh-s-lokalnymi>. Cited July 10, 2023.
30. I. A. Viktorov, “Lamb Ultrasonic Waves,” Akust. Zh. **11** (1), 1–18 (1965).
31. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “Supercomputer Technologies in Tomographic Imaging Applications,” Supercomput. Front. Innov. **3** (1), 41–66 (2016). doi [10.14529/jsfi160103](https://doi.org/10.14529/jsfi160103).
32. Vad. V. Voevodin, S. L. Ovchinnikov, and S. Yu. Romanov, “Development of High-Performance Scalable Software for Ultrasound Tomography,” Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie). **13** (2), 307–315 (2012).

Received  
February 10, 2023

Accepted for publication  
May 3, 2023

### Information about the authors

*Alexander S. Belyaev* — Student; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, GSP-1, Leninskiye Gory 1, building 2, 119991, Moscow, Russia.

*Alexander V. Goncharsky* — Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory; Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Leninskiye Gory, 1, building 4, 119234, Moscow, Russia.

*Sergey Y. Romanov* — Dr. Sci., Leading Scientist; Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Leninskiye Gory, 1, building 4, 119234, Moscow, Russia.