2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

doi 10.26089/NumMet.v24r213 УДК 519.633; 517.938

О гибридном методе проектирования на устойчивое многообразие одномерного уравнения типа Бюргерса

А. Б. Калинина
ГБОУ Школа № 2007 (ФМШ), Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-0047-230X, e-mail: ya-nast@ya.ru

А. А. Корнев
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Москва, Российская Федерация
Институт вычислительной математики имени Г. И. Марчука РАН,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-1138-7469, e-mail: kornev@mech.math.msu.su

В. С. Назаров
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-2546-2159, e-mail: v.nazarov@abc.math.msu.su

Аннотация: В работе рассматривается уравнение типа Бюргерса с полиномиальной нелинейностью и нулевыми краевыми условиями. Для интересующего диапазона параметров тождественно нулевое решение задачи является локально неустойчивым, и в его окрестности существует устойчивое многообразие, имеющее конечную коразмерность. Для приближенного построения указанного многообразия предложен комбинированный итерационный алгоритм, начальное условие для которого строится аналитическим методом и имеет квадратичную точность. Численно показано, насколько существенно данная модификация позволяет уменьшить для типичных значений параметров вычислительную сложность проецирования на искомое многообразие по сравнению со стандартным линейным приближением. Полученные результаты допускают обобщение на многомерные диссипативные уравнения широкого класса и могут применяться при решении задач асимптотической стабилизации по начальным данным, краевым условиям и правой части.

Ключевые слова: уравнение типа Бюргерса, устойчивое многообразие, численные методы.

Для цитирования: Калинина А.Б., Корнев А.А., Назаров В.С. О гибридном методе проектирования на устойчивое многообразие одномерного уравнения типа Бюргерса // Вычислительные методы и программирование. 2023. **24**, № 2. 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213.

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

On the hybrid projection method to a stable manifold of a one-dimensional Burgers-type equation

Anastasia B. Kalinina
School No. 2007, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-0047-230X, e-mail: ya-nast@ya.ru

Andrey A. Kornev
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia
Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-1138-7469, e-mail: kornev@mech.math.msu.su

Vladimir S. Nazarov
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-2546-2159, e-mail: v.nazarov@abc.math.msu.su

Abstract: The paper considers a Burgers type equation with polynomial nonlinearity and zero boundary conditions. For the range of parameters of interest, the identically zero solution of the problem is locally unstable, and in its neighborhood there exists a stable manifold having finite codimension. For the approximate construction of this manifold a combined iterative algorithm the initial data for which is constructed by an analytical method and has quadratic accuracy is proposed. It is numerically shown how significant this modification is allows to reduce the computational complexity of projection on the desired manifold for typical parameter values compared to the standard linear approximation. The results obtained allow generalization to multidimensional dissipative equations of a wide class and can be used to solve problems of asymptotic stabilization based on initial data, boundary conditions and a right-hand side.

Keywords: Burgers type equation, a stable manifold, numerical methods.

For citation: A. B. Kalinina, A. A. Kornev, V. S. Nazarov, “On the hybrid projection method to a stable manifold of a one-dimensional Burgers-type equation,” Numerical Methods and Programming. **24** (2), 170–181 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r213.

1. Введение. Основным объектом исследования в данной работе является начально-краевая задача типа Бюргерса с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) + \alpha u(t,x) + \beta u^2(t,x) + \gamma u(t,x)\,\partial_x u(t,x), \\ \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}, \\ \quad u(0,x) = z_0(x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{1}$$

Данная математическая модель является формальным обобщением уравнений Бюргерса и Чафе–Инфанта и охватывает все типы стандартных квадратичных нелинейностей. В том числе это позволяет сравнить степень влияния слагаемых полиномиального и конвективного типов на устойчивое многообразие.

Уравнение относится к классу blow-up, поэтому для задачи (1) стандартным образом [1] может быть доказана только локальная теорема существования решения при z_0 из пространства $H = \{u(x) \in L_2[0,\,\pi]\,|\,u(0) = u(\pi) = 0\}$. Это позволяет [2] в некоторой ненулевой окрестности $\mathcal{O} = \{z_0 :\ \|z_0\|_H \leqslant r\}$ формально определить гладкий разрешающий оператор $S(t,\cdot)$ задачи (1) в виде $u(t,\,x) = S(t,\,z_0(x))$. Укажем его свойства, необходимые нам далее. Собственными значениями оператора $A = \partial_{xx} + \alpha$ являются числа $\Lambda = \{\lambda_k = (-k^2+\alpha),\, k = 1,\, 2,\, \ldots\}$, а соответствующие им собственные функции $e_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(k\,x)$ образуют ортонормированный базис в пространстве H. Будем считать, что для целого $N > 1$ выполняется

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

оценка $N^2 < \alpha < (N+1)^2$. В этом случае множество собственных чисел Λ распадается на два непересекающихся подмножества $\Lambda_+ = \{\lambda_k > 0,\ k = 1, \dots, N\}$ и $\Lambda_- = \{\lambda_k < 0,\ k = N+1,\ N+2, \dots\}$. При этом исходное пространство H можно представить в виде прямой суммы $H = H_+ \oplus H_-$, где $H_+ = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$, $H_- = \operatorname{span}\{e_{N+1}, \dots, e_k, \dots\}$ и $H_+ \perp H_-$. Обозначим $S_\pm = P_\pm S$, где $P_\pm$ — ортопроекторы на подпространства $H_\pm$ соответственно. Отметим, что для $z_0(x) \equiv 0$ имеем $u(t,x) \equiv 0$ при $t \geqslant 0$. Таким образом, нулевая функция $z_0(x) \equiv 0$ является неподвижной точкой разрешающего оператора S, т.е. $S(t,0) = 0$. Если $\beta = \gamma = 0$, а начальное условие имеет вид $z_0(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\,x)$, то решение задачи (1) можно выписать в явном виде методом Фурье: $u(t,\,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e^{(\alpha - k^2)\,t} \sin(k\,x)$. Отсюда следует, что для $\alpha > 1$ функция $z_0(x) \equiv 0$ условно устойчива по Ляпунову [3], т.е. для почти всех $z_0(x) \in \mathcal{O}$ соответствующее решение $u(t,\,x) = S(t,\,z_0(x))$ исходной нелинейной задачи (1) в некоторый момент времени $t > 0$ покинет окрестность $\mathcal{O}$. И только для начальных условий $z_0 \in H_-$ решения стремятся к нулевому стационару. Таким образом, для задачи (1) при $\beta = \gamma = 0$, т.е. в линейном случае, подмножество $P_-\mathcal{O}$ однозначно определяется условием:

$$P_-\mathcal{O} = \left\{z_0 \in \mathcal{O} : \|S(t,z_0)\| \leqslant e^{\lambda_{N+1}t}\|z_0\|,\ t \geqslant 0\right\}.$$

Его аналогом для нелинейного оператора S является так называемое устойчивое многообразие:

$$\mathcal{W}_-(\mathcal{O}) = \left\{z_0 \in \mathcal{O} : \|S(t,z_0)\| \leqslant C\mu^t,\ t \geqslant 0\right\},\ \mu < 1.$$

Многообразие $\mathcal{W}_-(\mathcal{O})$ содержит все функции окрестности $\mathcal{O}$, сходящиеся к нулю под действием оператора S с экспоненциальной скоростью. Известно, что в достаточно малой окрестности $\mathcal{O}$ неподвижной точки гиперболического типа многообразие $\mathcal{W}_-(\mathcal{O})$ существует, касается подпространства P_-H и может быть задано некоторым отображением F. Соответствующее утверждение, независимо доказанное различными авторами для всевозможных задач (например, [2, 4, 5]), принято называть теоремой Адамара–Перрона.

2. Аналитический подход. Для заданного начального условия $z_0(x)$ рассмотрим задачу аналитического построения устойчивого многообразия для уравнения (1) в окрестности нуля. Решение данной задачи для $\gamma = 0$ получено в работе [6]. Исходя из предположения об аналитичности искомого устойчивого многообразия, проведем аналогичные рассуждения для $\gamma \neq 0$. Устойчивое многообразие будем искать в виде $\mathcal{W}_-(\mathcal{O}) = \{z_- + F(z_-),\ z_- \in P_-\mathcal{O}\}$. Запишем для устойчивого многообразия условие инвариантности: $S_+(t,\,z_0(x)) = F(S_-(t,\,z_0(x)))$. Продифференцировав его по t, получим:

$$\frac{d}{dt}\,S_+(t,z_0) = \Big\langle F'(S_-(t,z_0)),\ \frac{d}{dt}\,S_-(t,\,z_0)\Big\rangle, \tag{2}$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают результат применения линейного оператора $F'(S_-(t,\,z_0))$ к функции $\dfrac{d}{dt}S_-(t,\,z_0)$. Заменим $u(t)$ в уравнении (1) на $S(t,\,z_0)$ и применим к нему P_+ и P_-. Учитывая, что операторы $P_\pm$ коммутируют с оператором $A = \partial_{xx} + \alpha$, т.к. H_+ и H_- — собственные подпространства A, будем иметь:

$$\partial_t S_\pm(t,\,z_0) = AS_\pm(t,\,z_0) + \beta P_\pm(S(t,\,z_0))^2 + \gamma P_\pm(S(t,\,z_0)\partial_x S(t,\,z_0))\,.$$

Подставив полученное равенство в (2), находим:

$$\begin{aligned} &AS_+(t,\,z_0) + \beta P_+(S(t,\,z_0))^2 + \gamma P_+(S(t,\,z_0)\partial_x S(t,\,z_0)) = \\ &\qquad = \Big\langle F'(S_-(t,\,z_0)), AS_-(t,\,z_0) + \beta P_-(S(t,\,z_0))^2 + \gamma P_-(S(t,\,z_0)\partial_x S(t,\,z_0))\Big\rangle\,. \end{aligned}$$

Перейдем в данном соотношении к пределу при $t \to 0$. Учитывая, что в силу непрерывности выполняется $S(t,\,z_0) \to z_0$, $S_+(t,\,z_0) \to P_+z_0 = F(z_-)$, $S_-(t,\,z_0) \to P_-z_0 = z_-$, будем иметь:

$$\begin{aligned} &AFz_- + \beta P_+(z_- + F(z_-))^2 + \gamma P_+((z_- + F(z_-))\frac{d}{dx}(z_- + F(z_-))) = \\ &\qquad = \Big\langle F'(z_-), Az_- + \beta P_-(z_- + F(z_-))^2 + \gamma P_-((z_- + F(z_-))\frac{d}{dx}(z_- + F(z_-)))\Big\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

Подставим формальные разложения $z_- = \sum\limits_{\xi=N+1}^{\infty} z^\xi e_\xi$, $F(z_-) = \sum\limits_{j=1}^{N} F^j e_j$ по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в слагаемые равенства (3):

$$(z_- + F(z_-))^2 = \sum_{\eta_1,\eta_2=N+1}^{\infty} z^{\eta_1} z^{\eta_2} e_{\eta_1} e_{\eta_2} + \sum_{j_1,j_2=1}^{N} F^{j_1} F^{j_2} e_{j_1} e_{j_2} + 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} F_j z^\eta e_j e_\eta;$$

$$\frac{d}{dx}(z_- + F(z_-)) = \sum_{\xi=N+1}^{\infty} z^\xi \frac{d}{dx} e_\xi + \sum_{j=1}^{N} F^j \frac{d}{dx} e_j; \quad \frac{d}{dx} e_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \cos kx;$$

$$(z_- + F(z_-))\frac{d}{dx}(z_- + F(z_-)) = \frac{2}{\pi}\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta \sin \xi x \cos \eta x +$$
$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^\xi F^j \xi \sin jx \cos \xi x + \frac{2}{\pi}\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^\xi F^j j \sin \xi x \cos jx + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} F^j F^p p \sin jx \cos px.$$

С учетом тождества $e_k = -e_{-k}$ для $k > 0$ запишем соотношение $\dfrac{2}{\pi}\sin qx \cos rx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(e_{(q+r)} + e_{(q-r)})$ и подставим его в найденное выше равенство:

$$\sqrt{2\pi}(z_- + F(z_-))\frac{d}{dx}(z_- + F(z_-)) = \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta (e_{(\xi+\eta)} + e_{(\xi-\eta)}) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} F^j F^p p (e_{(j+p)} + e_{(j-p)}) +$$
$$+ \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^\xi F^j \xi (e_{(j+\xi)} + e_{(j-\xi)}) + \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^\xi F^j j (e_{(\xi+j)} + e_{(\xi-j)}) =$$
$$= \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta (e_{(\xi+\eta)} + e_{(\xi-\eta)}) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} F^j F^p p (e_{(j+p)} + e_{(j-p)}) +$$
$$+ \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^\xi F^j ((\xi+j) e_{(j+\xi)} - (\xi - j) e_{(j-\xi)}).$$

Приведем полученные выражения к виду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g^k e_k$. В результате будем иметь:

$$\sqrt{2\pi}\big(z_- + F(z_-)\big)\frac{d}{dx}\big(z_- + F(z_-)\big) = \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta e_{(\xi+\eta)} + \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta e_{(\xi-\eta)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} F^j F^p p e_{(j+p)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} F^j F^p p e_{(j-p)} + \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^\xi F^j (\xi + j) e_{(j+\xi)} - \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^\xi F^j (\xi - j) e_{(j-\xi)}.$$

Рассмотрим подробнее каждое слагаемое из правой части. Получим:

$$\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta e_{(\xi+\eta)} = \sum_{\theta=2(N+1)}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\theta-N-1} z^{\theta-\eta} z^\eta \eta e_\theta \qquad (\in H_-),$$

$$\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta e_{(\xi-\eta)} = \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\xi-1} z^\xi z^\eta \eta e_{(\xi-\eta)} - \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{\eta=\xi+1}^{\infty} z^\xi z^\eta \eta e_{(\eta-\xi)} =$$
$$= \sum_{\theta=1}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^{\theta+\eta} z^\eta \eta e_\theta - \sum_{\theta=1}^{\infty}\sum_{\xi=N+1}^{\infty} z^\xi z^{\theta+\xi}(\theta+\xi) e_\theta = -\sum_{\theta=1}^{\infty}\sum_{\xi=N+1}^{\infty} z^\xi z^{\theta+\xi} \theta e_\theta =$$
$$= \underbrace{\Big(-\sum_{\theta=1}^{N}\sum_{\xi=N+1}^{\infty} z^\xi z^{\theta+\xi}\theta e_\theta\Big)}_{(\in H_+)} + \underbrace{\Big(-\sum_{\theta=N+1}^{\infty}\sum_{\xi=N+1}^{\infty} z^\xi z^{\theta+\xi}\theta e_\theta\Big)}_{(\in H_-)},$$

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} F^j F^p p e_{(j+p)} = \sum_{q=2}^{2N} \sum_{p=\max\{1,\,q-N\}}^{\min\{N,\,q-1\}} F^{q-p} F^p p e_q =$$

$$= \underbrace{\sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{p=\max\{1,\,q-N\}}^{\min\{N,\,q-1\}} F^{q-p} F^p p e_q}_{(\in H_+)} + \underbrace{\sum_{q=2}^{N} \sum_{p=\max\{1,\,q-N\}}^{\min\{N,\,q-1\}} F^{q-p} F^p p e_q}_{(\in H_-)},$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} F^j F^p p e_{(j-p)} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{j-1} F^j F^p p e_{(j-p)} - \sum_{j=1}^{N}\sum_{p=j+1}^{N} F^j F^p p e_{(p-j)} =$$

$$= \sum_{q=1}^{N-1}\sum_{p=1}^{N-q} F^{q+p} F^p p e_q - \sum_{q=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-q} F^j F^{q+j} (q+j) e_q = -\sum_{q=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-q} F^j F^{q+j} q e_q \ \ (\in H_+),$$

$$\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^{\xi} F^j (\xi+j) e_{(j+\xi)} = \sum_{\theta=N+2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\min\{N,\theta-N-1\}} z^{\theta-j} F^j \theta e_\theta \quad (\in H_-),$$

$$-\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^{\xi} f^j (\xi-j) e_{(\xi-j)} = -\sum_{\theta=1}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,\,N+1-\theta\}}^{N} z^{\theta+j} F^\theta e_\theta =$$

$$= \underbrace{\Big(-\sum_{\theta=1}^{N} \sum_{j=N+1-\theta}^{N} z^{\theta+j} F^\theta e_\theta\Big)}_{(\in H_+)} + \underbrace{\Big(-\sum_{\theta=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} z^{\theta+j} F^\theta e_\theta\Big)}_{(\in H_-)}.$$

Таким образом, имеем:

$$P_+\Big(\sqrt{2\pi}(z_- + F(z_-))\frac{d}{dx}(z_- + F(z_-))\Big) = \Big(-\sum_{\theta=1}^{N}\sum_{\xi=N+1}^{\infty} z^{\theta+\xi} z^{\xi} \theta e_\theta\Big) +$$

$$+\sum_{q=2}^{N} \sum_{p=\max\{1,\,q-N\}}^{\min\{N,\,q-1\}} F^{q-p} F^p p e_q + \Big(-\sum_{q=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-q} F^j F^{q+j} q e_q\Big) + \Big(-\sum_{\theta=1}^{N}\sum_{j=N+1-\theta}^{N} z^{\theta+j} F^j \theta e_\theta\Big),$$

т.е.

$$P_-\Big(\sqrt{2\pi}(z_- + F(z_-))\frac{d}{dx}(z_- + F(z_-))\Big) = \sum_{\theta=2(N+1)}^{\infty}\sum_{\eta=N+1}^{\theta-N-1} z^{\theta-\eta} z^{\eta} \eta e_\theta + \Big(-\sum_{\theta=N+1}^{\infty}\sum_{\xi=N+1}^{\infty} z^{\theta+\xi} z^{\xi} \theta e_\theta\Big) +$$

$$+\sum_{q=N+1}^{2N} \sum_{p=\max\{1,\,q-N\}}^{\min\{N,\,q-1\}} F^{q-p} F^p p e_q + \sum_{\theta=N+2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\min\{N,\,\theta-N-1\}} z^{\theta-j} F^j \theta e_\theta + \Big(-\sum_{\theta=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z^{\theta+j} F^j \theta e_\theta\Big).$$

Подставим полученные формулы в условие инвариантности (3) и, учитывая, что e_k — собственные функции оператора A, разложим обе части равенства по базису $\{e_j\}_{j=1}^{N}$. Проекцию произведения $e_{j_1} e_{j_2}$ на e_j

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

обозначим $G(j,\,j_1,\,j_2)=\int\limits_0^\pi e_{j_1}(x)e_{j_2}(x)e_j(x)dx$. Тогда уравнение (3) запишется в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{N}F^j\lambda_j e_j+\beta\sum_{j=1}^{N}\sum_{\eta_1,\eta_2=N+1}G(j,\,\eta_1,\,\eta_2)z^{\eta_1}z^{\eta_2}+\beta\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{\eta=N+1}^{\infty}2G(j,\,j_1,\,\eta)F^{j_1}z^{\eta}+$$

$$+\beta\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{j_1,j_2=1}^{N}G(j,\,j_1,\,j_2)F^{j_1}F^{j_2}+\Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{\infty}jz^{j+\xi}z^{\xi}\Big)+\Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{k=N+1-j}^{N}jz^{j+k}F^k\Big)+$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=2}^{N}e_j\sum_{p=1}^{j-1}pF^{j-p}F^p+\Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N-1}e_j\sum_{p=1}^{N-j}jF^pF^{j+p}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\lambda_\xi z^\xi+\beta\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\Big(\sum_{\eta_1=N+1}^{\infty}\sum_{\eta_2=N+1}^{\infty}G(\xi,\,\eta_1,\,\eta_2)z^{\eta_1}z^{\eta_2}\Big)+$$

$$+\beta\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\Big(2\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{\eta=N+1}^{\infty}G(\xi,\,j_1,\,\eta)F^{j_1}z^{\eta}\Big)+$$

$$+\beta\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\Big(2\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}G(\xi,\,j_1,\,j_2)F^{j_1}F^{j_2}\Big)+$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=2(N+1)}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{\eta=N+1}^{\xi-N-1}z^{\xi-\eta}z^{\eta}\eta+\Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{\eta=N+1}^{\infty}z^{\xi+\eta}z^{\eta}\xi\Big)+$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+2}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{j=1}^{\min\{N,\,\xi-N-1\}}z^{\xi-j}F^j\xi+\Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{j=1}^{N}z^{\xi+j}F^j\xi\Big)+$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{N}e_j\sum_{\xi=N+1}^{2N}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{p=\xi-N}^{N}F^{\xi-p}F^pp.$$

В силу независимости базисных функций $\{e_j\}_{j=1}^N$ приравниваем коэффициенты при одинаковых e_j. Это позволит выписать систему из N уравнений вида $L(j)=R(j)$. Пусть

$$C_1(j)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ j=1\,;\\1,\ \text{при}\ j=2,\dots,N\,;\end{cases}\qquad C_2(j)=\begin{cases}1,\ \text{при}\ j=1,\dots,N-1\,;\\0,\ \text{при}\ j=N\,.\end{cases}$$

Тогда

$$L(j)=F^j\lambda_j+\beta\sum_{\eta_1,\eta_2=N+1}^{\infty}G(j,\,\eta_1,\,\eta_2)z^{\eta_1}z^{\eta_2}+\beta\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{\eta=N+1}^{\infty}2G(j,\,j_1,\,\eta)F^{j_1}z^{\eta}+$$

$$+\beta\sum_{j_1,j_2=1}^{N}G(j,\,j_1,\,j_2)F^{j_1}F^{j_2}+\Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\xi=N+1}^{\infty}jz^{j+\xi}z^{\xi}\Big)+\Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=N+1-j}^{N}jz^{j+k}F^k\Big)+$$

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{p=1}^{j-1} pC_1(j)F^{j-p}F^p + \Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{p=1}^{N-j} jC_2(j)F^pF^{j+p}\Big),$$

$$R(j) = \sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\lambda_\xi z^\xi + \beta\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\Big(\sum_{\eta_1=N+1}^{\infty}\sum_{\eta_2=N+1}^{\infty} G(\xi,\,\eta_1,\,\eta_2)z^{\eta_1}z^{\eta_2}\Big)+$$

$$+\beta\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\Big(2\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} G(\xi,\,j_1,\,\eta)F^{j_1}z^\eta\Big) + \beta\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\Big(\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N} G(\xi,\,j_1,\,j_2)F^{j_1}F^{j_2}\Big)+$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\xi=2(N+1)}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{\eta=N+1}^{\xi-N-1} z^{\xi-\eta}z^\eta\eta + \Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{\eta=N+1}^{\infty} z^{\xi+\eta}z^\eta\xi\Big)+$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\xi=N+2}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{j=1}^{\min\{N,\xi-N-1\}} z^{\xi-j}F^j\eta + \Big(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{j=1}^{N} z^{\xi+j}F^j\xi\Big)+$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\xi=N+1}^{2N}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\sum_{p=\xi-N}^{N} F^{\xi-p}F^p p.$$

Введем обозначения $\bar\eta^k = (\eta_1,\dots,\eta_k)$, $\sum\limits_{\bar\eta^k} = \sum\limits_{\eta_1=N+1}^{\infty}\cdots\sum\limits_{\eta_k=N+1}^{\infty}$, $z^{\bar\eta^k} = z^{\eta_1}\dots z^{\eta_k}$ и будем искать $F^j(z_-)$ в виде $F^j(z_-) = \sum\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{\bar\eta^k} F^j_k(\bar\eta^k)z^{\bar\eta^k}$. Подставим выражение для $F^j(z_-)$ в систему уравнений $L(j) = R(j)$ и приравняем коэффициенты при одинаковых членах. Для построения квадратичного приближения к устойчивому многообразию достаточно рассмотреть следующие члены выражений $L(j)$ и $R(j)$:

$$F^j\lambda_j = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\bar\eta^m}\lambda_j F^j_m(\bar\eta^m)z^{\bar\eta^m}, \quad \beta\sum_{\eta_1,\eta_2=N+1}^{\infty} G(j,\,\eta_1,\,\eta_2)z^{\eta_1}z^{\eta_2} = \beta\sum_{\bar\eta^2} G(j,\,\eta_1,\,\eta_2)z^{\bar\eta^2}.$$

Слагаемое $\Big(-\dfrac{\gamma j}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{\xi=N+1}^{\infty} z^{j+\xi}z^\xi\Big)$ встречается только при $m = 2$ и для некоторых $z^{\bar\eta^2}$:

$$\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\bar\eta^{k-1}}\sum_{l=1}^{k} F^j_k(\xi,\,\eta_1,\,\dots,\eta_{k-1})z^{\bar\eta^{k-1}} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\bar\eta^{k-1}} kF^j_k(\xi,\,\eta_1,\,\dots,\eta_{k-1})z^{\bar\eta^{k-1}},$$

$$\sum_{\xi=N+1}^{\infty}\frac{\partial F^j(z_-)}{\partial z^\xi}\lambda_\xi z^\xi = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\bar\eta^m}\lambda_{\bar\eta^m}F^j_m(\bar\eta^m)z^{\bar\eta^m},$$

где $\lambda_{\bar\eta^k} = \sum\limits_{l=1}^{k}\lambda_{\eta_l}$. Введем обозначение $C_3(j,\,\eta_1,\,\eta_2)$ и вычислим определенную ранее величину $G(j,\,j_1,\,j_2)$:

$$C_3(j,\,\eta_1,\,\eta_2) = \begin{cases} \dfrac{j}{2\sqrt{2\pi}}, \ \text{при } \eta_2 = \eta_1 + j;\\ \dfrac{j}{2\sqrt{2\pi}}, \ \text{при } \eta_1 = \eta_2 + j;\\ 0, \ \text{иначе}; \end{cases} \qquad G(j,\,j_1,\,j_2) = \frac{4\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^3 jj_1j_2\big((j+j_1+j_2)\bmod 2\big)}{(j+j_1+j_2)(j-j_1+j_2)(j+j_1-j_2)(j_1+j_2-j)}.$$

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

Тогда $F_2^j(\eta_1,\,\eta_2)$ определяется из уравнения

$$\lambda_j F_2^j(\eta_1,\,\eta_2) + G(j,\,\eta_1,\,\eta_2) + C_3(j,\,\eta_1,\,\eta_2) = (\lambda_{\eta_1} + \lambda_{\eta_2}) F_2^j(\eta_1,\,\eta_2),$$

т.е.

$$F_2^j(\eta_1,\,\eta_2) = \frac{\beta\, G(j,\,\eta_1,\,\eta_2) - \gamma C_3(j,\,\eta_1,\,\eta_2)}{\lambda_{\eta_1} + \lambda_{\eta_2} - \lambda_j}. \tag{4}$$

Для построения проекции заданной функции $z_0(x)$ на квадратичное приближение к устойчивому многообразию необходимо найти ее проекцию $z_- = P_- z_0$ на устойчивое подпространство H_-. А затем по найденному z_- вычислить $F[2](z_-)$ по следующей формуле:

$$F[2](z_-) = \sum_{j=1}^{N} e_j \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \sum_{\eta_2=N+1}^{\infty} F_2^j(\eta_1,\,\eta_2) z^{\eta_1} z^{\eta_2}, \tag{5}$$

где коэффициенты $F_2^j(\eta_1,\,\eta_2)$ определяются формулой (4).

3. Итерационный подход и численные результаты. Как следует из приведенных выкладок, построение аналитического приближения выше второй степени к устойчивому многообразию сопряжено с большими вычислительными сложностями. Поэтому для повышения точности аппроксимации многообразия $\mathcal{W}_-(\mathcal{O})$ будем использовать следующий подход [5, 7]. Выберем некоторое $\Theta > 0$ и определим дискретный разрешающий оператор задачи (1) в виде $S(z_0(x)) = S(\Theta, z_0(x))$, т.е. $u(n\,\Theta, x) = S^n(z_0)$. Отметим, что величина Θ, по сути, отвечает за частоту отслеживания протекающих в системе процессов. Как следствие, слишком малые и излишне большие значения Θ затруднят численное решение возникающих далее промежуточных задач.

В результате на пространстве состояний H будет определена полудинамическая система (ПДС) с оператором эволюции S и дискретным временем $i = 0, 1, 2, \ldots$, имеющая неподвижную точку $S(0) = 0$ гиперболического типа [4]. В данном случае термин ПДС означает, что оператор эволюции образует только полугруппу (нет обратимости по времени), что является принципиальным для нестационарных уравнений математической физики с диссипацией.

Отметим, устойчивое многообразие дискретного разрешающего оператора совпадает с устойчивым многообразием исходной задачи. Представим оператор $S(u)$ в виде суммы линейной L и нелинейной R частей так, что выполнены следующие условия (a):

$$\begin{aligned}
&a_1)\ \ S(z) = L(z) + R(z)\,;\\
&a_2)\ \ L(P_+H) = P_+H, \quad L(P_-H) \subset P_-H\,;\\
&a_3)\ \ \|Lz_+\| \geqslant \mu_+\|z_+\|, \quad \forall z_+ \in P_+H, \quad \|Lz_-\| \leqslant \mu_-\|z_-\|, \quad \forall z_- \in P_-H, \quad \mu_- < 1 < \mu_+\,;\\
&a_4)\ \ \|R(z_1) - R(z_2)\| < \theta\Big(\max\{\|z_1\|, \|z_2\|\}\Big)\|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_i \in \mathcal{O}\,.
\end{aligned}$$

Здесь $\theta(\cdot)\,:\,\theta(0) = 0$ — непрерывная положительная неубывающая функция, а операторы $P_\pm$ и окрестность $\mathcal{O}$ определены ранее. Отметим, что $L(z)$ по определению является решением $u(\Theta, x)$ задачи (1) при $u(0, x) = z(x)$ и $\beta = \gamma = 0$. Выпишем условие инвариантности $\mathcal{W}_-(\mathcal{O})$ относительно оператора S:

$$P_+\left[S\left(F(z_-) + z_-\right)\right] = F\left(P_-[S(F(z_-) + z_-)]\right),$$

т.е.

$$\begin{aligned}
&L_+(F(z_-) + z_-) + R_+(F(z_-) + z_-) = F\left(L_-(F(z_-) + z_-) + R_-(F(z_-) + z_-)\right),\\
&L_\pm z = P_\pm[Lz], \quad R_\pm(z) = P_\pm[R(z)]\,.
\end{aligned}$$

Данное равенство, с учетом (a), можно переписать в эквивалентном виде:

$$L_+F(z_-) + R_+(F(z_-) + z_-) = F\left(L_-z_- + R_-(F(z_-) + z_-)\right). \tag{6}$$

Полученное функциональное уравнение относительно отображения F является основой для построения искомого многообразия. Для решения уравнения (6) рассмотрим метод обратной итерации [7] (типа преобразования графика [4, 5])

$$L_+F_k(z_-) + R_+(F_k(z_-) + z_-) = F_{k-1}\left(L_-z_- + R_-(F_k(z_-) + z_-)\right), \quad k = 1, \ldots, K, \tag{7}$$

с некоторой известной функцией $F_0(z_-)$. Алгоритмы данного типа успешно применялись при проектировании на устойчивое многообразие различных задач [8–11]. Для преодоления экспоненциальной сложности алгоритма по глубине итераций в работе [12] был предложен алгоритм склейки, а в работе [13] при переходе к дискретной ПДС брался максимально допустимый шаг Θ. Отметим, что при решении некоторых задач асимптотической стабилизации [8, 9] достаточно реализовать метод нулевого приближения [7, 14–16], т.е. выполнить только первый шаг алгоритма.

Согласно теореме Адамара–Перрона, общепринятый выбор $F_0(z_-) \equiv 0$ имеет линейную точность. Оценим качество найденного квадратичного приближения $F_0(z_-) = F[2](z_-)$ следующим образом. Для численного решения задачи (1) выпишем двухслойную полностью неявную конечно–разностную схему на равномерной несмещенной сетке с трехточечной аппроксимацией второй производной и аппроксимацией первой производной по пространству центральной разностью. Отметим, что для рассматриваемых далее значений α, β, γ такой выбор является допустимым. Схема является абсолютно устойчивой и имеет на гладких решениях порядок сходимости $O(\tau + h^2)$. По заданной начальной функции $u(0,x) = z(x)$ численно найдем соответствующее сеточное решение $u_m^n \sim u(t_n, x_m)$, $h = \pi/M$, $\tau = T/N$, и вычислим время $T_e(u(0,x)) = N_e\,\tau$, в течение которого норма $\|u^n\|_h$ монотонно убывает, а также значение $D_e(u(0,x)) = \|u^{N_e}\|_h$. Здесь $N_e = \min\{n : \|u^{n+1}\|_h > \|u^n\|_h, n = 0, 1, \ldots\}$, $\|u^n\|_h = \|u^n\|_{L_2^h}$. Если начальная функция u_m^0 принадлежит устойчивому многообразию $\mathcal{W}_h(\mathcal{O})$ сеточной задачи, то при отсутствии ошибок округлений формально имеем $N_e = \infty$, $D_e = 0$. Следовательно, чем меньше величина D_e, тем ближе к многообразию $\mathcal{W}_h(\mathcal{O})$ выбрана функция $u_m^0 = z(x_m)$.

Рассмотрим следующие четыре варианта начальных условий. В первом случае положим $z^{(1)} = z_-$, что соответствует линейному (нулевому) приближению к устойчивому многообразию; во втором случае возьмем $z^{(2)} = z_- + F[2](z_-)$, что означает квадратичное приближение; два следующих варианта $z^{(3)}$ и $z^{(4)}$ вычислим как результат применения итерационного процесса (7) для случаев $F_0(z_-) \equiv 0$ и $F_0(z_-) \equiv F[2](z_-)$ соответственно. Тестовые расчеты проводились при $\tau = 0.001$, $h = 0.005$ для всевозможных комбинаций следующих значений параметров уравнения: $\alpha \in \{3, 12, 48\}$; $\beta, \gamma \in \{0, \pm 5, \pm 25\}$. Начальная функция бралась в виде $z(x) = \sum\limits_{n=1}^{1000} \dfrac{1}{n^2} \sin(\pi\, n\, x)$. В табл. 1, 2 для нескольких показательных тестов приведены коэффициенты α, β, γ уравнения (1) и коразмерность N соответствующего им устойчивого многообразия; численно найденные (и затем округленные) величины $T_e^{(i)}$, $D_e^{(i)}$ для $i = 1, \ldots, 4$;

Таблица 1. Результаты численных экспериментов при $\alpha = 3$, $N = 1$

Table 1. Results of numerical experiments at $\alpha = 3$, $N = 1$

β	γ	$T_e^{(1)}$	$D_e^{(1)}$	$T_e^{(2)}$	$D_e^{(2)}$	Θ	K	$T_e^{(3)}$	$D_e^{(3)}$	$T_e^{(4)}$	$D_e^{(4)}$	C
1	0	0,911	0,158	1,418	0,095	350	4	2,802	0,024	3,335	0,014	-0.01389
25	0	0	0,360	0,192	0,271	40	5	0,207	0,262	0,576	0,133	-0.31838
0	1	1,564	0,080	2,084	0,048	500	1	3,097	0,017	3,607	0,010	0.00221
0	25	0,968	0,087	1,534	0,042	300	1	2,046	0,024	2,269	0,019	0.05233
25	25	0	0,360	1,428	0,039	20	1	0	0,360	1,385	0,034	-0.24138
25	-35	0	0,360	11,817	0,098	20	5	0,144	0,279	1,916	0,017	-0.28270

Таблица 2. Результаты численных экспериментов при $\alpha = 48$, $N = 6$

Table 2. Results of numerical experiments at $\alpha = 48$, $N = 6$

β	γ	$T_e^{(1)}$	$D_e^{(1)}$	$T_e^{(2)}$	$D_e^{(2)}$	Θ	K	$T_e^{(3)}$	$D_e^{(3)}$	$T_e^{(4)}$	$D_e^{(4)}$	C
1	25	0,066	0,025	0,097	0,024	20	7	0,258	0,019	0,323	0,019	0.00016
25	1	0,063	0,026	0,091	0,025	20	7	0,184	0,022	0,190	0,022	-0.00018
25	25	0,089	0,024	0,117	0,023	12	8	0,161	0,022	0,190	0,022	-0.00005
25	-35	0,047	0,028	0,075	0,026	10	8	0,140	0,023	0,171	0,022	-0.0004

2023, **24** (2), 170–181. doi 10.26089/NumMet.v24r213

значения Θ и K, используемые в итерационном методе (7); округленная величина C, равная коэффициенту с наибольшим модулем при базисной функции e_j в формуле (5).

Из табл. 1, 2 следует, что вклад коэффициента β в устойчивое многообразие на порядок больше, чем вклад коэффициента γ. Также отметим, что в последнем тесте начальное условие $z_0^{(2)} = z_- + F[2](z_-)$ оказалось в малой окрестности устойчивого многообразия некоторой ненулевой неподвижной точки $\tilde{z} = S(\tilde{z})$, также расположенной в $\mathcal{O}$. Это обеспечило исключительно высокое время стабилизации, а также позволило с высокой точностью численно найти функцию $\tilde{z}(x)$. Отметим, что подобный эффект наблюдался при стабилизации течений вязкой несжимаемой жидкости [8, 9]. Таким образом, в данном тестовом расчете метод проецирования на устойчивое многообразие по сути является методом типа дефляции (итераций на подпространстве) для поиска стационарных решений.

Заключение. Методы типа обратной итерации (7), основанные на условии локальной инвариантности (6), относятся к универсальным алгоритмам построения устойчивого многообразия для нестационарных нелинейных уравнений в частных производных. Однако итерационные процессы такого типа имеют экспоненциальную сложность по глубине рекурсии. Известные модификации позволяют ослабить указанное ограничение при условии аккуратного выбора итерационных параметров. В данной работе ускорение удается получить в результате аналитического построения квадратичного приближения к искомому многообразию дифференциальной задачи. Для рассмотренного уравнения типа Бюргерса это позволяет уменьшить глубину рекурсивных вызовов для достижения аналогичной точности по сравнению с общепринятым линейным приближением, либо ограничиться только квадратичной аппроксимацией. Изложенный в работе подход охватывает большинство типов физических нелинейностей и допускает формальное обобщение на многие диссипативные уравнения математической физики, в том числе на гидро- и газодинамические задачи.

Список литературы

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Фурсиков А.В.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Математический сборник. 2001. **192**, № 4. 115–160. doi 10.4213/sm560.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
4. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1967. Т. 90. 3–210.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т. 38. Л.: Наука, 1973. 46–93. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=znsl&paperid=2644&option_lang=rus. Cited April 5, 2023.
6. *Калинина А.Б.* Численная реализация метода функционально-аналитических рядов проецирования на устойчивое многообразие // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 1. 61–68.
7. *Корнев А.А.* Классификация методов приближенного проектирования на устойчивое многообразие // Доклады Академии наук. 2005. **400**, № 6. 736–738.
8. *Корнев А.А.* The structure and stabilization by boundary conditions of an annular flow of Kolmogorov type // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. **32**, N 4. 245–251. doi 10.1515/rnam-2017-0023.
9. *Корнев А.А.* Численное моделирование процесса асимптотической стабилизации по краевым условиям квазидвумерного течения четырехвихревой структуры // Математическое моделирование. 2017. **29**, № 11. 99–110.
10. *Иванчиков А.А., Корнев А.А., Озерицкий А.В.* О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. **49**, № 12. 2167–2181.
11. *Fursikov A.V., Kornev A.A.* Feedback stabilization for Navier–Stokes equations: theory and calculations // Mathematical aspects of fluid mechanics. Lecture notes series. Vol. 402. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 130–172.
12. *Ozeritsky A.V.* Efficient algorithms for stable manifolds // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2005. **20**, N 2. 209–224. doi 10.1515/1569398054308667.
13. *Kornev A.A.* A problem of asymptotic stabilization by the right-hand side // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2008. **23**, N 4. 407–422. doi 10.1515/RJNAMM.2008.024.

14. *Chizhonkov E.V.* Numerical aspects of one stabilization method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2003. **18**, N 5. 363–376. doi 10.1515/rnam.2003.18.5.363.
15. *Chizhonkov E.V., Ivanchikov A.A.* On numerical stabilization of solutions of Stokes and Navier–Stokes equations by the boundary conditions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2004. **19**, N 6, 477–494. doi 10.1515/1569398042568716.
16. *Ivanchikov A.A.* On numerical stabilization of unstable Couette flow by the boundary conditions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2006. **21**, N 6. 519–537. doi 10.1515/rnam.2006.21.6.519.

Поступила в редакцию
7 февраля 2023 г.

Принята к публикации
14 марта 2023 г.

Информация об авторах

Анастасия Борисовна Калинина — к.ф.-м.н., методист; ГБОУ Школа № 2007 (ФМШ), ул. Горчакова, 9, корп. 1, 117042, Москва, Российская Федерация.

Андрей Алексеевич Корнев — д.ф.-м.н., профессор, заместитель заведующего кафедрой вычислительной математики, ведущий научный сотрудник; 1) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация; 2) Институт вычислительной математики имени Г. И. Марчука РАН, ул. Губкина, д. 8, 119333, Москва, Российская Федерация.

Владимир Сергеевич Назаров — аспирант; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; Amer. Math. Soc., Providence, 1968).
2. A. V. Fursikov, "Stabilizability of a Quasi-Linear Parabolic Equation by Means of a Boundary Control with Feedback," Mat. Sb. **192** (4), 115–160 (2001) [Sb. Math. **192** (4), 593–639 (2001)]. doi 10.1070/SM2001v192n04ABEH000560.
3. A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion* (Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1954; Taylor and Francis, London, 1992).
4. D. V. Anosov, "Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature," Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Akad. Nauk SSSR **90**, 3–210 (1967) [Proc. Steklov Inst. Math. **90**, 1–235 (1967)].
5. O. A. Ladyzhenskaya and V. A. Solonnikov, "On a Principle of Linearization and Invariant Manifolds for Problems of Magnetic Hydromechanics," Zap. Nauch. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. im. V.A. Steklova **38**, 46–93, 1973. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=znsl&paperid=2644&option_lang=eng. Cited April 5, 2023.
6. A. B. Kalinina, "Numerical Realization of the Method of Functional-Analytic Series for Projecting on a Stable Manifold," Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie) **7** (1), 61–68 (2006).
7. A. A. Kornev, "Classification of Methods of Approximate Projection onto a Stable Manifolds," Dokl. Akad. Nauk **400** (6), 736–738 (2005) [Dokl. Math. **71** (1), 124–126 (2005)].
8. A. A. Kornev, "The Structure and Stabilization by Boundary Conditions of an Annular Flow of Kolmogorov Type," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. **32** (4), 245–251 (2017). doi 10.1515/rnam-2017-0023.
9. A. A. Kornev, "Simulating the Stabilization Process by Boundary Conditions of a Quasi-Two-Dimensional Flow with a Four-Vortex Structure," Mat. Model. **29** (11), 99–110 (2017) [Math. Models Comput. Simul. **10** (3), 363–372 (2018)]. doi 10.1134/S2070048218030079.
10. A. A. Ivanchikov, A. A. Kornev, and A. V. Ozeritskii, "On a New Approach to Asymptotic Stabilization Problems," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **49** (12), 2167–2181 (2009) [Comput. Math. Math. Phys. **49** (12), 2070–2084 (2009)]. doi 10.1134/S0965542509120070.

11. A. V. Fursikov and A. A. Kornev, "Feedback Stabilization for Navier–Stokes equations: Theory and Calculations," in *Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. Lecture Notes Series* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012), Vol. 402, pp. 130–172.

12. A. V. Ozeritsky, "Efficient Algorithms for Stable Manifolds," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. **20** (2), 209–224 (2005). doi 10.1515/1569398054308667.

13. A. A. Kornev, "A Problem of Asymptotic Stabilization by the Right-Hand Side," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. **23** (4), 407–422 (2008). doi 10.1515/RJNAMM.2008.024.

14. E. V. Chizhonkov, "Numerical Aspects of One Stabilization Method," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. **18** (5), 363–376 (2003). doi 10.1515/rnam.2003.18.5.363.

15. E. V. Chizhonkov and A. A. Ivanchikov, "On Numerical Stabilization of Solutions of Stokes and Navier–Stokes Equations by the Boundary Conditions," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. **19** (6), 477–494 (2004). doi 10.1515/1569398042568716.

16. A. A. Ivanchikov, "On Numerical Stabilization of Unstable Couette Flow by the Boundary Conditions," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. **21** (6), 519–537 (2006). doi 10.1515/rnam.2006.21.6.519.

Received
February 7, 2023

Accepted for publication
March 14, 2023

Information about the authors

Anastasia B. Kalinina — Ph.D., Methodologist; School No. 2007, Gorchakova ulitsa, 9, building 1, 117042, Moscow, Russia.

Andrey A. Kornev — Dr. Sci., Professor, Deputy Head of the Department of Computational Mathematics, Leading Scientific Researcher; 1) Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia; 2) Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Gubkina ulitsa, 8, 119333, Moscow, Russia.

Vladimir S. Nazarov — Ph.D. student; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.