

УДК 519.633:517.977.1

ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Е. В. Чижонков¹

При численной стабилизации решений дифференциальных уравнений с частными производными с помощью граничных условий важную роль играют операторы проектирования на подходящие линейные многообразия. В работе рассмотрены два способа проектирования, отличающиеся гладкостью образов исходной гладкой функции: в одном случае в качестве результата получается разрывная, а в другом — непрерывная функция. Анализируются и сравниваются спектральные характеристики обусловленности дискретных операторов проектирования, обсуждаются вопросы их оптимизации. Приводятся численные эксперименты по стабилизации решений уравнений Чафе–Инфанта с начальными функциями, полученными с помощью обоих подходов.

Ключевые слова: стабилизация, граничные условия, уравнения в частных производных, проектирование на многообразие, обусловленность матриц

1. Введение. При численном решении сложных нестационарных задач математической физики, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, часто возникает проблема стабилизации искомого стационарного решения. Под этим, как правило, понимается подавление возмущений в окрестности этого решения, причем подавление, если это возможно, — с наперед заданной скоростью. Отметим, что такая постановка нетривиальна даже для устойчивых решений, не говоря о ее безусловной актуальности в неустойчивом случае. Особый интерес представляет возможность проведения стабилизации только за счет использования граничных условий, поскольку воздействие на изучаемый процесс изнутри (в данном случае — на некоторой подобласти определения решения) часто технически не представляется возможным.

В последнее время появились оригинальные идеи построения алгоритмов стабилизации. В первую очередь, отметим работы А. В. Фурсикова по стабилизации квазилинейных параболических уравнений и близких к ним уравнений Стокса и Навье–Стокса (см. [1, 5] и цитированную там литературу). Центральной идеей здесь является построение граничных условий, обеспечивающих стремление к нулю (или к некоторому фиксированному стационарному решению) заданного начального условия с заданной скоростью. Изложим кратко суть подхода. Пусть на $(-\pi/2, \pi/2)$ для уравнения $y_t = y_{xx}$ задано начальное условие $y_0(x) = \sin x$. Тогда в случае использования граничных условий

$$y(\pm\pi/2, t) = \pm \exp(-t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

решение начально-краевой задачи $y(x, t) = \exp(-t) \sin x$ будет стремиться к нулю в метрике $L_2[-\pi/2, \pi/2]$ со скоростью $\delta_1 = 1$:

$$\|y(x, t)\|_{L_2[-\pi/2, \pi/2]} \leq C_1 \exp(-t) \equiv C_1 \exp(-\delta_1 t). \quad (2)$$

Предположим, что оценка (2) нас не устраивает, т.е. мы хотим иметь более быстрое стремление к нулю решения исходного уравнения при том же начальном условии $y_0(x)$, например,

$$\|y(x, t)\|_{L_2[-\pi/2, \pi/2]} \leq C_2 \exp(-4t) \equiv C_2 \exp(-\delta_2 t).$$

Можно ли построить отличные от (1) граничные условия, обеспечивающие, например, скорость $\delta_2 = 4$? Ответ носит положительный характер. Соответствующая процедура называется стабилизацией с заданной скоростью δ и состоит из трех этапов: продолжение–проектирование начального условия на более широкую область, интегрирование исходного уравнения в широкой области, порождающее искомого граничные условия, и, собственно, стабилизация, т.е. интегрирование уравнения в исходной области с полученными граничными условиями. Первый этап, связанный с проектированием на подходящее устойчивое инвариантное многообразие, представляет самостоятельный интерес и определяет главное направление

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

настоящей работы. Отметим, что в линейном случае базис этого многообразия совпадает с набором собственных и присоединенных функций оператора стационарной задачи.

Вернемся к примеру. Возьмем рабочий промежуток $\Omega_0 = (-\pi/2, \pi/2)$ и погрузим его в более широкий, например, $\Omega = [-\pi, \pi]$. Поскольку нас интересуют оценки в пространстве L_2 , то продолжение начального условия $y_0(x)$ с Ω_0 на всю Ω можно выбрать в простейшей (возможно, разрывной) форме:

$$\bar{y}_0(x) = \begin{cases} y_0(x), & x \in \Omega_0, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Далее следует проектирование. Возьмем из рассматриваемого уравнения $y_t = y_{xx}$ эллиптический оператор (правую часть) и рассмотрим: следующую спектральную задачу

$$\varphi_{xx} = -\lambda \varphi, \quad \varphi(x) = \varphi(x + 2\pi) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad (3)$$

Ее решение для удобства запишем в вещественном виде:

$$\begin{array}{ll} \varphi_k(x), & k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots : 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \\ \lambda_k, & k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots : 0, 1, 1, 4, 4, \dots \end{array} \quad (4)$$

Чтобы в области Ω решение уравнения $z_t = z_{xx}$ с периодическими граничными условиями удовлетворяло оценке

$$\|z(x, t)\|_{L_2[-\pi, \pi]} \leq C_3 \exp(-4t) \equiv C_3 \exp(-\delta_2 t),$$

в разложении начального условия $z_0(x)$ по собственным функциям не должно быть $\varphi_k(x)$ с номерами $k = 0, 1, 2$ (по крайней мере). При этом $z_0(x)$ в исходной области Ω_0 должно совпадать с $y_0(x)$. Это приведет к выполнению неравенства

$$\|y(x, t)\|_{L_2[-\pi/2, \pi/2]} \leq \|z(x, t)\|_{L_2[-\pi, \pi]} \leq C_3 \exp(-\delta_2 t).$$

Отсюда следует, что начальное условие $z_0(x)$ можно искать в виде

$$z_0(x) = \bar{z}_0(x) + \bar{y}_0(x), \quad \bar{z}_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ \sum_{k=0}^K c_k \varphi_k(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases}$$

где коэффициенты c_k определяются из условий ортогональности

$$\int_{\Omega} z_0(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K. \quad (5)$$

Отметим, что величина K определяется по заданной скорости δ стремления решения к нулю через значения λ_k (в нашем примере $K \geq 2$). Соотношения (5) можно записать, введя понятие *матрицы проектирования* A :

$$A \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad b_i = - \int_{\Omega_0} y_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad 0 \leq i, j \leq K.$$

Вычисления для нашего примера при $K = 2$ дают $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = -1$, т.е.

$$z_0(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \Omega_0, \\ -\sin x, & x \in \Omega \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Легко заметить, что $z_0(x)$ является разрывной функцией.

На следующем этапе необходимо проинтегрировать уравнение $z_t = z_{xx}$ с полученным начальным условием $z_0(x)$ и периодическими граничными (при $x = \pm\pi$) по пространственной переменной условиями. Из этого решения возьмем его значения в двух точках при $t \geq 0$: $z_{\pm}(t) = z(\pm\pi/2, t)$. Это и будут искоемые граничные условия, обеспечивающие стремление решение задачи $y_t = y_{xx}$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ с начальным условием $y_0(x)$ к нулю с заданной скоростью δ .

При внимательном рассмотрении приведенного примера возникает ряд вопросов, связанных с большим количеством возможностей при построении искомым граничных условий. Например, как должны соотноситься размеры исходной Ω_0 и расширенной Ω областей? От чего зависит выбор краевых условий в спектральной задаче для построения системы $\varphi_k(x)$? Что изменится, если дополнительно потребовать непрерывности начального условия $z_0(x)$ в расширенной области? В конечном счете, для фиксированного уравнения ответы на эти и другие возможные вопросы следуют только из зависимости числа обусловленности матрицы проектирования от анализируемых факторов.

Отметим, что при описанном подходе к стабилизации матрица A всегда является матрицей Грама некоторых базисных функций в подходящем скалярном произведении, следовательно, $A = A^T > 0$. Поэтому представляется удобным исследовать зависимости спектрального числа обусловленности, т.е. величины $\text{cond}_2(A) = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$.

2. Результаты для периодического случая. В настоящем пункте кратко излагаются результаты [4], полученные при использовании периодических краевых условий для решения вспомогательной спектральной задачи.

Одним из первых вопросов, возникающих при численной реализации рассматриваемого метода стабилизации, является размер области Ω , в которую мы погружаем исходную Ω_0 . Ответ на него (вместе с размерностью) определяет обусловленность матрицы проектирования, т.е. фактически возможность самой стабилизации с заданной скоростью δ .

Пусть исходный промежуток есть $\Omega_0 = (-\pi/2, \pi/2)$. Погрузим его в область $\Omega_\alpha : \Omega_\alpha = [-\alpha\pi, \alpha\pi]$, $\alpha > 1/2$, в которой будем рассматривать ортонормированную в скалярном произведении $(f, g) = \int_{\Omega_\alpha} f \bar{g} dx$

систему функций $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(\frac{ikx}{\alpha}\right)$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\psi_{xx} = -\lambda_k \psi, \quad \lambda_k = k^2/\alpha^2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

и являются комплекснозначным аналогом (4). Выбор такого представления собственных функций является более предпочтительным по сравнению с вещественнозначным в силу простоты аналитических выкладок. В частности, при таком подходе элементы матрицы проектирования A_K определяются формулой

$$a_{km} = \int_{\Omega_\alpha \setminus \Omega_0} \psi_k \bar{\psi}_m dx = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\alpha}, & k = m, \\ -\frac{1}{\pi(k-m)} \sin \frac{\pi(k-m)}{2\alpha}, & k \neq m, \end{cases} \quad \text{при } 1 \leq k, m \leq K. \quad (7)$$

В [4] доказано

Утверждение. Число обусловленности $\text{cond}_2(A_K)$ матрицы проектирования растет экспоненциально по K при фиксированном $\alpha > 1/2$.

Приведем результаты численных экспериментов для иллюстрации этого свойства, при этом собственные значения находились с помощью подпрограмм библиотеки EISPACK [7]. В табл. 1 первая колонка содержит размерность матрицы проектирования A_K , вторая — ее посчитанное число обусловленности $\text{cond}_2(A_K)$ при $\alpha = 1$, а в третьей колонке таблицы содержится величина $\mathfrak{a}_K$, определяемая соотношением $\text{cond}_2(A_K) = \exp(\mathfrak{a}_K \cdot K)$, которая очень удобна для характеристики роста числа обусловленности в зависимости от размерности матрицы A_K .

Величины K брались нечетными для одновременного учета в A_K собственных функций $\psi_k(x)$ при одинаковых по модулю k . Из результатов вычислений следует, что матрица проектирования при $\alpha = 1$ имеет экспоненциальную по K асимптотику числа обусловленности с показателем $\mathfrak{a}_K \approx 1.6$. Это означает, что численная стабилизация решения с заданной скоростью δ (главная цель исследований) возможна только в ограниченных пределах, зависящих от $\text{cond}_2(A_K)$. Например, в случае, соответствующем табл. 1, при вычислениях с двойной точностью скорость стабилизации не может превышать величины $\delta_{\max} \approx 100$ ($K = 19$).

При определенной содержательности выводов для матрицы проектирования, полученной для модельного (комплекснозначного и непрерывного) случая, реальные вычисления проводятся, как правило, в вещественнозначной и дискретной ситуации. Рассмотрим, насколько при этом изменятся количественные характеристики.

Для рассмотренного выше случая $\alpha = 1$ введем на $[-\pi, \pi]$ равномерную сетку $x_l = hl$, $h = 2\pi/M$, $l = 0, \pm 1, \dots, \pm M/2$ (M без ограничения общности можно считать четным). Рассмотрим проекции функ-

Таблица 1

K	$\text{cond}_2(A_K)$	$\varkappa_K$
3	0.1906E+02	0.9826E+00
5	0.4279E+03	0.1212E+01
7	0.1156E+05	0.1336E+01
9	0.3360E+06	0.1414E+01
11	0.1014E+08	0.1467E+01
13	0.3132E+09	0.1505E+01
15	0.9820E+10	0.1534E+01
17	0.3113E+12	0.1557E+01
19	0.9958E+13	0.1575E+01
21	0.2966E+15	0.1586E+01

Таблица 2

K	$\text{cond}_2(A_K)$	$\varkappa_K$
3	0.1872E+02	0.9764E+00
5	0.4122E+03	0.1204E+01
7	0.1094E+05	0.1329E+01
9	0.3131E+06	0.1406E+01
11	0.9310E+07	0.1459E+01
13	0.2835E+09	0.1497E+01
15	0.8778E+10	0.1526E+01
17	0.2752E+12	0.1550E+01
19	0.8719E+13	0.1568E+01
21	0.2442E+15	0.1578E+01

ций (3) на сетку в виде [3]

$$\begin{aligned}\mu_k(l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{2k\pi l}{M}, & k = 0, M/2, \\ \mu_k(l) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{2k\pi l}{M}, & 1 \leq k \leq M/2 - 1, \\ \mu_k(l) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{2(M-k)\pi l}{M}, & M/2 + 1 \leq k \leq M - 1.\end{aligned}$$

Они удовлетворяют дискретной задаче на собственные значения

$$\mu_k(l+1) - 2\mu_k(l) + \mu_k(l-1) = -\nu_k h^2 \mu_k(l), \quad \mu_k(l+M) = \mu_k(l), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

с соответствующими $\nu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$ и ортонормированы относительно скалярного произведения

$$(\mu_k, \mu_r) = h \sum_{l=-M/2}^{M/2-1} \mu_k(l) \mu_r(l).$$

Заметим, что для соответствия с табл. 1 дискретные собственные функции необходимо брать в следующем порядке: $\mu_0(l)$, $\mu_1(l)$, $\mu_{M-1}(l)$, $\mu_2(l)$, $\mu_{M-2}(l)$, $\dots$.

В табл. 2 приведены расчеты для матрицы проектирования, построенной по функциям $\mu_k(l)$ при $M = 512$.

Сравнение численных характеристик из табл. 1 и 2 показывает хорошее совпадение асимптотик чисел обусловленности при фиксированном α для комплексного и вещественного случаев: в зависимости от размерности оно растет как $\approx 5^K$ ($\exp(1.6) \approx 4.953$). Это означает, что исследование оптимизации числа обусловленности относительно параметра α вполне корректно проводить для технически более простого комплекснозначного случая.

Отметим также, что из явного вида элементов матрицы a_{km} (7) следует, что при фиксированной размерности K матрица A_K стремится к единичной при $\alpha \rightarrow \infty$, т.е. $\text{cond}_2(A_K) \rightarrow 1$. Таким образом, мы имеем два различных по своему действию фактора: рост числа обусловленности при увеличении размерности и его убывание относительно параметра α . Поэтому разумно рассмотреть оптимизационную задачу: *при заданной скорости δ стремления решения к нулю найти размерность K матрицы проектирования A_K и величину α , определяющую размер области погружения ($\Omega_\alpha = [-\alpha\pi, \alpha\pi]$), такие, что $\text{cond}_2(A_K(\alpha))$ будет минимальным.* Решение этой задачи аналитически получить пока не удалось, но достигнуто некоторое понимание о свойствах ее решения.

Итак, пусть задана величина δ . Тогда в силу формулы (6) и экспоненциального роста $\text{cond}_2(A_K)$ при увеличении K достаточно рассмотреть зависимость $\text{cond}_2(A_K(\alpha))$ относительно α для соотношения $K = 2[\alpha\sqrt{\delta}] - 1$, $\alpha > 1/2$, где выражение $[x]$ означает целую часть числа x . Эта зависимость носит явно выраженный нелинейный характер.

Пока увеличение α не приводит к изменению K имеет место монотонное убывание $\text{cond}_2(A_K(\alpha))$ относительно α . Как только функция $K(\alpha)$ принимает новое значение, наблюдается скачок вверх и опять плавное монотонное убывание по α и т.д. Это означает, что для поиска глобального минимума $\text{cond}_2(A_K(\alpha))$

достаточно анализировать только последовательность локальных минимумов, каждый из которых соответствует фиксированному значению K . Соответствующее значение α_{loc} можно определить по формуле $\alpha_{\text{loc}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left[\frac{K-1}{2} + 1 \right] - \varepsilon$ с некоторым достаточно малым ε (например, $\varepsilon = 10^{-5}$). Если при фиксированных δ и K выполнено неравенство $\alpha_{\text{loc}} > 1/2$, то такая размерность K считается допустимой, в противном случае требуется ее увеличение. Рассмотрим табл. 3, представляющую поведение $\text{cond}_2(A_K(\alpha))$ при различных δ в зависимости от K .

Таблица 3

	$\delta = 6$		$\delta = 10$		$\delta = 20$	
K	α_{loc}	$\text{cond}_2(A)$	α_{loc}	$\text{cond}_2(A)$	α_{loc}	$\text{cond}_2(A)$
3	0.82	0.63040E+2	0.63	0.95405E+3	—	—
5	1.22	0.82138E+2	0.95	0.73369E+3	0.67	0.22377E+6
7	1.63	0.94396E+2	1.26	0.73028E+3	0.89	0.68273E+5
9	2.04	0.10471E+3	1.58	0.77577E+3	1.11	0.50208E+5
11	2.44	0.11312E+3	1.89	0.82626E+3	1.34	0.45789E+5
13	2.85	0.12002E+3	2.21	0.87337E+3	1.56	0.44787E+5
15	3.26	0.12575E+3	2.52	0.91550E+3	1.78	0.44990E+5
17	3.67	0.13057E+3	2.84	0.95275E+3	2.01	0.45679E+5
19	4.08	0.13467E+3	3.16	0.98563E+3	2.23	0.46564E+5
21	4.49	0.13821E+3	3.47	0.10147E+4	2.45	0.47516E+5
23	4.89	0.14127E+3	3.79	0.10406E+4	2.68	0.48472E+5
25	5.30	0.14396E+3	4.11	0.10637E+4	2.90	0.49401E+5
27	5.71	0.14634E+3	4.42	0.10844E+4	3.13	0.50289E+5
29	6.12	0.14845E+3	4.74	0.11031E+4	3.35	0.51131E+5
31	6.53	0.15035E+3	5.05	0.11200E+4	3.57	0.51924E+5

Из ее анализа следует:

- 1) поставленная задача оптимизации имеет единственное решение;
- 2) с увеличением δ возрастает оптимальное значение α и, соответственно, размерность матрицы A_K ;
- 3) оптимальное значение $\text{cond}_2(A_K(\alpha))$ не сильно (в пределах порядка) отличается от числа обусловленности при минимально допустимом значении K ;
- 4) оптимизация по α сильно уменьшает обусловленность при фиксированном K . Например, сравнение характеристик из табл. 2 и 3 для $K = 21$ свидетельствует об уменьшении $\text{cond}_2(A_K)$ не менее, чем в 10^9 раз ($0.2966E + 15$ по отношению к диапазону $[1.3E + 03, 4.7E + 05]$).

Из сказанного вытекает практический рецепт: для заданного δ наиболее дешевым (требующим знания минимального количества собственных функций) и не сильно отличающимся от глобального минимума $\text{cond}_2(A_K)$ (т.е. достаточно вычислительно устойчивым) будет проектирование при минимально допустимом K , гарантирующем справедливость неравенства $\alpha_{\text{loc}} > 1/2$.

3. Случай краевых условий первого рода. В этом разделе мы рассмотрим два способа проектирования, основанные на спектральных задачах с краевыми условиями первого рода. Введем, как и в предыдущем разделе, на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерную сетку $x_l = hl$, $h = 2\pi/M$, $l = 0, \pm 1, \dots, \pm M/2$ (M по-прежнему будем считать четным). Рассмотрим проекции функций (для случая $\alpha = 1$)

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \sin \frac{k}{2\alpha} (x + \alpha\pi), \quad k = 1, 2, \dots, M-1, \quad (8)$$

на сетку в виде векторов $\mu_k(l) = \psi_k(x_l)$. Они удовлетворяют дискретной задаче на собственные значения

$$\mu_k(l+1) - 2\mu_k(l) + \mu_k(l-1) = -\nu_k h^2 \mu_k(l), \quad \mu_k(-M/2) = \mu_k(M/2) = 0, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M/2 - 1,$$

с соответствующими $\nu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{4}$ и ортонормированы относительно скалярного произведения

$$(\mu_k, \mu_r) = h \sum_{l=-M/2}^{M/2} \mu_k(l) \mu_r(l).$$

Элементы матрицы проектирования a_{km} вычислялись по формуле $a_{km} = \delta_k^m - h \sum_{l=-M/4}^{M/4} \mu_k(l) \mu_m(l)$, где δ_k^m — символ Кронеккера, а величина M для удобства сопоставления с предыдущими расчетами бралась равной 512. Результаты численных экспериментов для этого случая приведены в табл. 4

Таблица 4

K	$\text{cond}_2(A_K)$	κ_K
2	0.2744E+01	0.5047E+00
4	0.7941E+02	0.1094E+01
6	0.2086E+04	0.1274E+01
8	0.5816E+05	0.1371E+01
10	0.1701E+07	0.1435E+01
12	0.5125E+08	0.1479E+01
14	0.1575E+10	0.1513E+01
16	0.4908E+11	0.1539E+01
18	0.1547E+13	0.1559E+01
20	0.4922E+14	0.1576E+01
22	0.1645E+16	0.1593E+01

Таблица 5

K	$\text{cond}_2(A_K)$	κ_K
2	0.3059E+01	0.5591E+00
4	0.5579E+03	0.1581E+01
6	0.3750E+05	0.1755E+01
8	0.1913E+07	0.1808E+01
10	0.9024E+08	0.1832E+01
12	0.4003E+10	0.1843E+01
14	0.1712E+12	0.1848E+01
16	0.7108E+13	0.1850E+01
18	0.2763E+15	0.1851E+01

Сравнение численных характеристик из табл. 4 и 2 показывает хорошее совпадение асимптотик чисел обусловленности при фиксированном α для краевых условий различного вида (первого рода и периодических): в зависимости от размерности они растут как $\approx 5^K$. Более того, качественная зависимость числа обусловленности относительно параметра α также совпадает с периодическим случаем. Для краевых условий первого рода эксперименты, связанные с зависимостью от параметра α , проводились с аналитической формулой следующего вида:

$$a_{km} = \int_{\Omega_\alpha \setminus \Omega_0} \psi_k(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\alpha} + \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2\alpha}, & k = m, \\ -\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k-m} \cos \frac{(k-m)\pi}{2} \sin \frac{(k-m)\pi}{4\alpha} - \right. \\ \left. - \frac{1}{k+m} \cos \frac{(k+m)\pi}{2} \sin \frac{(k+m)\pi}{4\alpha} \right], & k \neq m. \end{cases} \quad (9)$$

Все вышеизложенное можно кратко резюмировать так: выбор краевых условий практически не влияет на обусловленность матрицы проектирования и поэтому может быть определен из соображений удобства (например, знания аналитического вида), простоты технической реализации или просто привычки.

Ситуация качественно меняется, когда на начальную функцию $z_0(x)$, конструируемую в расширенной области, накладываются дополнительные условия гладкости, например непрерывность. Требования такого рода автоматически возникают при стабилизации решений уравнений типа Стокса и Навье–Стокса и обусловлены наличием уравнения неразрывности. Конечно, эти эффекты существенно многомерны и поэтому более сложны, но нас интересуют возникающие при этом изменения свойств матрицы проектирования, для чего вполне достаточно ограничиться одномерным случаем.

Приведем алгоритм продолжения–проектирования для получения непрерывного начального условия $z_0(x)$ в дифференциальной форме. Он состоит из нескольких этапов.

1. Доопределение начальной функции y_0 с Ω_0 на Ω_α , т.е. нахождение функции $\bar{y}_0$ в области $\Omega_\alpha \setminus \Omega_0$. Для этого требуется решить две краевых задачи:

$$v_{xx} = 0, \quad v|_{\partial\Omega_\alpha} = 0; \quad v|_{\partial\Omega_0} = y_0|_{\partial\Omega_0}$$

и положить

$$\bar{y}_0(x) = \begin{cases} y_0(x), & x \in \Omega_0, \\ v(x), & x \in \Omega_\alpha \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

В данном случае эта процедура эквивалентна линейному продолжению начальной функции y_0 для достижения нулевых значений на $\partial\Omega_\alpha$.

2. Нахождение требуемого количества K собственных функций для оператора второй производной в расширенной области Ω_α :

$$\psi_{xx} = -\lambda\psi, \quad \psi|_{\partial\Omega_\alpha} = 0.$$

Здесь удобно воспользоваться аналитической формулой (8).

3. Определение вспомогательных функций φ_k в области $\Omega_\alpha \setminus \Omega_0$ как решений краевых задач с правыми частями — следами собственных функций ψ_k , $k = 1, \dots, K$:

$$-(\varphi_k)_{xx} = \psi_k, \quad \varphi_k|_{\partial\Omega_\alpha} = \varphi_k|_{\partial\Omega_0} = 0.$$

4. Построение в области Ω_α функции z_0 следующего вида на основе результатов предыдущих шагов:

$$z_0 = \begin{cases} y_0(x) & \text{в } \Omega_0, \\ v(x) + \sum_{k=1}^K c_k \varphi_k(x) & \text{в } \Omega_\alpha \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Коэффициенты c_k определяются из требуемых условий ортогональности:

$$\int_{\Omega_\alpha} z_0(x) \psi_m(x) dx = 0, \quad m = 1, \dots, K.$$

Эти соотношения можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{c} = -\mathbf{b}$, где элементы матрицы системы и компоненты вектора правой части определяются по формулам

$$a_{km} = \int_{\Omega_\alpha \setminus \Omega_0} (\varphi_k(x))_x (\varphi_m(x))_x dx, \quad b_k = \int_{\Omega_0} y_0(x) \psi_k(x) dx + \int_{\Omega_\alpha \setminus \Omega_0} v(x) \psi_k(x) dx. \quad (10)$$

Эта система однозначно разрешима, поскольку матрица A симметрична и положительно определена (она фактически является матрицей Грама в энергетическом скалярном произведении для вспомогательных функций φ_k).

Приведенные в табл. 5 результаты численных экспериментов для $\alpha = 1$ и $M = 512$ также свидетельствуют об экспоненциальной зависимости числа обусловленности матрицы проектирования при увеличении ее размерности, т.е. фактически — скорости стабилизации. Однако здесь ситуация хуже, так как показатель роста κ увеличился по сравнению с предыдущими вариантами расчетов с величины ≈ 1.6 до ≈ 1.85 . Это означает, что требование непрерывности начального условия в расширенной области снижает максимально достижимую скорость стабилизации. Кроме того, резко усложняется задача минимизации числа обусловленности за счет изменения параметра α (размера расширенной области). Дело в том, что в обоих предыдущих случаях матрица проектирования при фиксированной размерности и $\alpha \rightarrow \infty$ стремилась к единичной. В нашей ситуации из первой формулы (10) и определения вспомогательных функций φ_k следует, что матрица проектирования стремится к вырожденной:

$$a_{km} = \frac{1}{\lambda_k \lambda_m} = \frac{16}{k^2 m^2}.$$

Здесь $\lambda_k = (k/2)^2$ — собственные значения, получаемые при решении задачи на втором этапе проектирования. Заметим, что при вычислении предельных значений удобно зафиксировать α (например, положить равной единице) и устремить размер области Ω_0 к нулю. Другими словами, при таком способе проектирования оба фактора (внешний — заданная скорость стабилизации и внутренний — размер расширенной области) глобально действуют в направлении увеличения числа обусловленности. Если сюда добавить отсутствие аналитических формул для элементов матрицы, то трудности, возникающие при практической стабилизации, становятся значительными.

4. Применение проектирования. В этом разделе мы обсудим второй этап стабилизации: численное интегрирование нестационарного уравнения с учетом проектирования. Для этого воспользуемся уравнением Чафе–Инфанта (Chafee–Infante)

$$y_t = y_{xx} + a y - b y^3, \quad a, b \geq 0, \quad x \in \Omega_0 = (-\pi/2, \pi/2),$$

с некоторым начальным условием $y_0(x)$. Это уравнение часто встречается в теории аттракторов дифференциальных уравнений и хорошо изучено [6]. Для нас оно представляет интерес, поскольку оно очень

близко к модельному примеру и его при необходимости легко превратить как в неустойчивое, так и в нелинейное уравнение.

Так как дальнейшие иллюстративные расчеты проводились для небольших δ (4 или 6.25), что соответствовало размеру матрицы $K = 3$ (или $K = 4$), то необходимость оптимизации по α отсутствовала и в качестве области Ω выбирался отрезок с $\alpha = 1$: $\Omega = [-\pi, \pi]$. Граничные условия на этом отрезке брались первого рода, чтобы иметь возможность удобного сравнения двух различных способов проектирования.

Для численных экспериментов использовалась полностью неявная разностная схема на равномерной сетке с шагом $h = 2\pi/M$:

$$\frac{z_m^{q+1} - z_m^q}{\tau} = \frac{z_{m+1}^{q+1} - 2z_m^{q+1} + z_{m-1}^{q+1}}{h^2} + a z_m^{q+1} - b (z_m^{q+1})^3, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M/2, \quad M = 512,$$

расчеты по времени велись с шагом $\tau = 10^{-3}$. Реализация схемы осуществлялась методом Ньютона (в нелинейном случае) в сочетании с правой прогонкой [3].

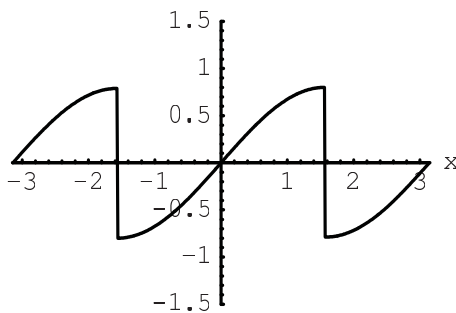


Рис. 1

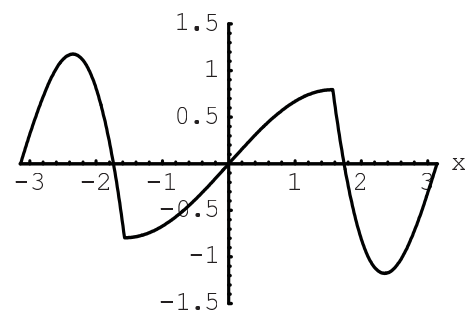


Рис. 2

На рис. 1 и 2 представлены начальные условия $z_0(x)$, полученные из $y_0(x) = \sin x$ для заданной скорости $\delta = 4$ при разрывном и непрерывном способах проектирования.

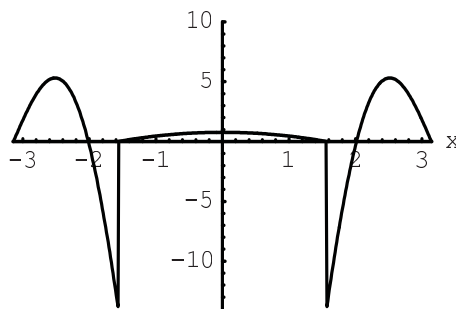


Рис. 3

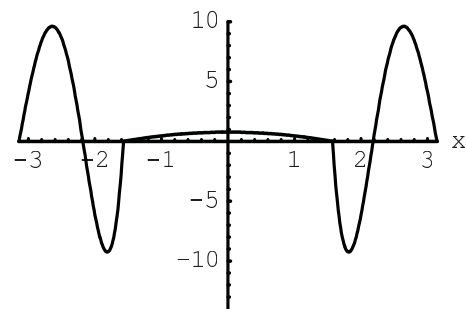


Рис. 4

На рис. 3 и 4 изображены начальные условия $z_0(x)$, следующие из $y_0(x) = 4x^2/\pi^2 - 1$ для заданного $\delta = 6.25$. Обратим внимание на два характерных свойства операции проектирования: рост равномерной нормы начального условия $z_0(x)$ с увеличением задаваемой скорости стабилизации δ и сохранение четности/нечетности в $z_0(x)$, если $y_0(x)$ этим свойством обладает.

Далее следует обратить внимание на различное поведение искомых стабилизирующих краевых условиях при описываемых подходах к проектированию. Это хорошо заметно на рис. 5 и 6: при разрывном проектировании имеется просто экспоненциальное по времени убывание граничной функции, а при непрерывном — сначала скачок на нескольких первых шагах по времени, а уже затем полностью соответствующее дифференциальной теории убывание по экспоненте. В данном случае для большей наглядности эксперименты проводились с начальными функциями, изображенными на рис. 3 и 4 соответственно. Сами же краевые условия брались в силу четности только при $x = \pi/2$.

Заметим также, что способ проектирования практически не меняет времени стабилизации: так, до

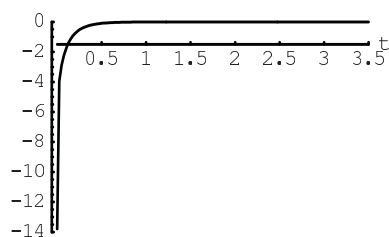


Рис. 5

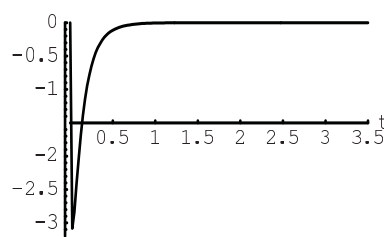


Рис. 6

выполнения неравенства

$$\|z^q\|_{L_{2,h}[-\pi/2,\pi/2]} \equiv \left[h \sum_{m=-M/4}^{M/4} (z_m^q)^2 \right]^{1/2} \leq 10^{-9}$$

с начальными условиями на рис. 1 и 2 требовалось интегрирование по времени до $T_{\text{stop}} = 5.15$ и $T_{\text{stop}} = 5.22$ соответственно. В случае начальных условий, изображенных на рис. 3 и 4, эти величины составляли $T_{\text{stop}} = 3.54$ и $T_{\text{stop}} = 3.57$.

Таким образом, сравнение двух подходов к проектированию можно резюмировать так: требование непрерывности начальной функции $z_0(x)$ и, соответственно, получаемых стабилизирующих краевых условий приводит к усложнению и удорожанию (с вычислительной точки зрения) процесса проектирования. На само время стабилизации, т.е. время подавления возмущений с заданной точностью в окрестности искомого решения, выбор способа проектирования (разрывного или непрерывного) влияния практически не оказывает.

Рассмотренный выше алгоритм непрерывного проектирования был применен (в соавторстве с Иванчиковым А. А.) к стабилизации уравнений типа Стокса и Навье–Стокса и дал положительные результаты. При этом существенно использовались данные из [2].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики” (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00490).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсиков А.В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сборник. 2001. **192**, № 4. 115–160.
2. Иванчиков А.А. Численное решение некоторых спектральных задач для уравнений Стокса // Вычисл. методы и программ. 2003. **4**, № 2. 58–74.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Chizhonkov E.V. Numerical aspects of one stabilization method // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2003. **18**, N 5. 363–376.
5. Fursikov A. V. Real process corresponding to the 3D Navier–Stokes system and its feedback stabilization from boundary. The M. I. Vishik Seminar. AMS Translations, Series 2. 2002. **206**. 95–123.
6. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathem. Volume 840. New York: Springer–Verlag, 1981.
7. Smith B.T., Boyle J.M., Dongarra J.J., Garbow B.S., Ikebe Y., Klema V.C., and Moler C.B. Matrix eigensystem routines — EISPACK Guide. Lecture Notes in Computer Science. Volume 6, 2nd Ed. New York: Springer–Verlag, 1976.

Поступила в редакцию
11.06.2004