

Явно- неявная схема САВАРЕТИ–NH для уравнений динамики слабосжимаемой жидкости

В. М. Головизнин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-4354-9290, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Петр А. Майоров

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-1723-6779, e-mail: maiorov.peter@gmail.com

Н. А. Афанасьев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-4414-6645, e-mail: vmnaf@cs.msu.ru

Павел А. Майоров

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-3836-3320, e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

А. В. Соловьев

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-9781-9527, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

Аннотация: В статье рассматривается явно-неявная балансно-характеристическая схема САВАРЕТИ–NH (CABARET Implicit Non-Hydrostatic), основанная на схеме КАБАРЕ, для решения гиперболизированной системы уравнений Навье–Стокса. Неявность вдоль одного пространственного направления позволяет значительно увеличить шаг по времени на вычислительных сетках с большим аспектным отношением ячеек. Для разрешения введенной неявности используется метод гиперболической прогонки. Это позволяет сохранить вычислительную эффективность алгоритма на уровне явных схем. Приводятся результаты валидации модели на лабораторном эксперименте трехмерного гравитационного течения стратифицированной жидкости.

Ключевые слова: негидростатическое приближение, смешанные эйлерово-лагранжевы переменные, слабосжимаемая жидкость, уравнения гиперболического типа, свободная поверхность, балансно-характеристическая схема.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 18–11–00163) в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Для цитирования: Головизнин В.М., Майоров Петр А., Афанасьев Н.А., Майоров Павел А., Соловьев А.В. Явно-неявная схема САВАРЕТИ–NH для уравнений динамики слабосжимаемой жидкости // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 2. 152–169. doi 10.26089/NumMet.v24r212.



Explicit-implicit scheme CABARETI–NH for the equations of a weakly compressible fluid dynamics

Vasily M. Goloviznin

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-4354-9290, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Petr A. Maiorov

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-1723-6779, e-mail: maiorov.peter@gmail.com

Nikita A. Afanasiev

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-4414-6645, e-mail: vmnaf@cs.msu.ru

Pavel A. Maiorov

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-3836-3320, e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

Andrey V. Solovjev

Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-9781-9527, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

Abstract: In this paper, an explicit-implicit conservative-characteristic scheme CABARETI–NH (CABARET Implicit Non-Hydrostatic), based on the CABARET scheme, for a hyperbolised system of Navier–Stokes equations is considered. Implicitness along one spatial direction allows the time step on computational grids with a large aspect ratio of cells to be significantly increased. A hyperbolic sweep method is used to resolve the introduced implicit part of the scheme. This keeps the same level of computational efficiency as explicit schemes. The results of model validation on the laboratory experiment of three-dimensional gravitational flow of a stratified fluid are presented.

Keywords: non-hydrostatic model, Eulerian-Lagrangian coordinates, weakly compressible fluid, hyperbolic type equations, free-surface, conservative-characteristic schemes.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 18–11–00163) and performed in Lomonosov Moscow State University.

For citation: V. M. Goloviznin, Petr A. Maiorov, N. A. Afanasiev, Pavel A. Maiorov, and A. V. Solovjev, “Explicit-implicit scheme CABARETI–NH for the equations of a weakly compressible fluid dynamics,” *Numerical Methods and Programming*, 24 (2), 152–169 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r212.

1. Введение. Морские и океанические течения определяются сложными физическими процессами [1–4]. Развитие вычислительных систем привело к возможности численного моделирования динамики жидкости. Первые численные модели динамики жидкости создавались на основе гидростатического приближения, которое предполагает отсутствие вертикального ускорения в уравнении движения. На основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ была создана многослойная гидростатическая модель CABARET–MFSH [5, 6] расчета стратифицированных течений со свободной поверхностью в поле сил тяжести. Однако гидростатические модели имеют ограничения применимости и не позволяют в полной мере моделировать все виды течений. В частности, они неприменимы для моделирования трансформации крупномасштабных длинноволновых движений на выраженных элементах рельефа.

В последние два десятилетия получили большое развитие негидростатические модели, основанные на системе уравнений Навье–Стокса [7–11]. Такие модели позволяют изучать широкий спектр океанологиче-

ских явлений: глубоководную конвекцию [12], мезомасштабную циркуляцию [13], баротропно-бароклинное взаимодействие [14] и многие другие. Основной вычислительной проблемой данных моделей является стационарное уравнение неразрывности, приводящее к разностному аналогу уравнения Пуассона, разрешение которого на каждом шаге по времени является ресурсоемкой задачей.

Альтернативным подходом является использование гиперболических систем уравнений, приближающих систему уравнений Навье–Стокса [15, 16]. Так, на основе приближения слабой сжимаемости и схемы КАБАРЕ была создана явная численная модель негидростатической динамики жидкости CABARET–NH [17].

Расчетная область в задачах вычислительной океанологии зачастую обладает неравносильными горизонтальным и вертикальным размерами, поэтому применяемые в этих задачах вычислительные ячейки имеют высокое аспектное отношение. Для явных схем главным ограничением на шаг по времени из условия Куранта является вертикальный размер используемых ячеек. В то же время использование полностью неявных схем приводит к необходимости разрешения больших систем линейных уравнений и уменьшает эффективность распараллеливания полученных алгоритмов. В данной работе предлагается явно-неявная модель CABARET–NH (CABARET Implicit Non-Hydrostatic) динамики слабосжимаемой жидкости, явная вдоль горизонтальных направлений и неявная по вертикали. Описанный в данной работе метод гиперболической прогонки для разрешения неявности позволяет получить вычислительную сложность алгоритма, сравнимую с явной моделью CABARET–NH. В статье приводятся результаты валидации построенной схемы на лабораторных экспериментах по динамике стратифицированной жидкости [18].

Текст организован следующим образом. В разделе 2 приводится дифференциальная система уравнений динамики слабосжимаемой жидкости. Раздел 3 посвящен описанию явно-неявной схемы и алгоритму решения по ней. Валидация модели на лабораторных экспериментах приводится в разделе 4. Статья завершается разделом 5 с заключительными замечаниями.

2. Негидростатическая модель динамики слабосжимаемой жидкости. Рассмотрим систему трехмерных уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска с учетом слабосжимаемости жидкости в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных [17]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J} \frac{\partial J \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u}{\partial x} + \frac{\partial \theta v}{\partial y} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z})}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{1}{J} \frac{\partial J \theta u}{\partial t} + \frac{\partial \theta u^2}{\partial x} + \frac{\partial \theta uv}{\partial y} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z}) u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{1}{J} \frac{\partial J \theta v}{\partial t} + \frac{\partial \theta uv}{\partial x} + \frac{\partial \theta v^2}{\partial y} + \frac{\partial \theta (w - \dot{z}) v}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{1}{J} \frac{\partial J \theta w}{\partial t} + \frac{\partial \theta uw}{\partial x} + \frac{\partial \theta vw}{\partial y} + \frac{\partial \theta w (w - \dot{z})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial z} = - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g, \\
 & \frac{1}{J} \frac{\partial J \rho \theta}{\partial t} + \frac{\partial \rho \theta u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \theta v}{\partial y} + \frac{\partial \rho \theta (w - \dot{z})}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}, \quad \delta P = c^2 (\theta - \theta_0), \quad \theta_0 = 1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где (x, y, z) — эйлерова декартова система координат, которая связана с лагранжевой системой координат (x', y', z') якобианом перехода $J = \partial(x, y, z) / \partial(x', y', z') = \partial z / \partial z'$, ρ — плотность жидкости, ρ_0 — средняя начальная плотность жидкости, θ — безразмерный параметр, показывающий отклонение объема лагранжевой частицы от первоначального, δP — приращение давления относительно гидростатического: $P(x, y, z, t) = \rho_0 g (H_0 - z) + \delta P(x, y, z, t)$, H_0 — средняя начальная высота жидкости, (u, v, w) — компоненты вектора скорости в системе координат (x, y, z) , c — искусственная скорость звука, g — ускорение свободного падения. Параметр c подбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $|\delta \theta| = |\theta - 1| < 0.01$.

Будем предполагать, что система уравнений (1) описывает динамику жидкости в области $(x, y, z) \in \Omega$, $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [B(x, y), z_{\max}(x, y, t)]$, ограниченной жесткими стенками при $x = x_{\min}$, $x = x_{\max}$, $y = y_{\min}$, $y = y_{\max}$, некоторым неровным дном при $z = B(x, y)$, а при $z = z_{\max}(x, y, t)$ — свободной поверхностью. Таким образом, система (1) дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 u(x_{\min}, y, z, t) = 0, \quad u(x_{\max}, y, z, t) = 0, \\
 v(x, y_{\min}, z, t) = 0, \quad v(x, y_{\max}, z, t) = 0,
 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} u(x, y, B(x, y), t) + \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} v(x, y, B(x, y), t) - w(x, y, B(x, y), t) = 0, \quad (2)$$

$$\delta P(x, y, z_{\max}(x, y, t), t) = -\rho_0 g(H_0 - z_{\max}(x, y, t)), \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} - w \right) \Big|_{z=z_{\max}(x, y, t)} = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (1) является гиперболической. По каждому из направлений x, y, z можно выписать ее характеристическую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{I}^\bullet}{\partial t} + \Lambda^\bullet \frac{\partial \mathbf{I}^\bullet}{\partial \bullet} &= \mathbf{G}^\bullet, \quad \bullet = \{x, y, z\}, \\ \mathbf{I}^x &= (I_m^x)^T = \left(u + \frac{1}{\sqrt{\rho_0} [\theta]_{\text{loc}}} \delta\theta, u - \frac{1}{\sqrt{\rho_0} [\theta]_{\text{loc}}} \delta\theta, v, w, \rho \right)^T, \\ \Lambda^x &= \text{diag}(\lambda_m^x), \quad \lambda_1^x = u + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_2^x = u - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_3^x = \lambda_4^x = \lambda_5^x = u, \\ \mathbf{I}^y &= (I_m^y)^T = \left(v + \frac{1}{\sqrt{\rho_0} [\theta]_{\text{loc}}} \delta\theta, v - \frac{1}{\sqrt{\rho_0} [\theta]_{\text{loc}}} \delta\theta, u, w, \rho \right)^T, \\ \Lambda^y &= \text{diag}(\lambda_m^y), \quad \lambda_1^y = v + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_2^y = v - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_3^y = \lambda_4^y = \lambda_5^y = v, \\ \mathbf{I}^z &= (I_m^z)^T = \left(w + \frac{1}{\sqrt{\rho_0} [\theta]_{\text{loc}}} \delta\theta, w - \frac{1}{\sqrt{\rho_0} [\theta]_{\text{loc}}} \delta\theta, u, v, \rho \right)^T, \\ \Lambda^z &= \text{diag}(\lambda_m^z), \quad \lambda_1^z = w - \dot{z} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_2^z = w - \dot{z} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \lambda_3^z = \lambda_4^z = \lambda_5^z = w - \dot{z}, \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{I}^\bullet — векторы локальных инвариантов Римана [19], λ_m^\bullet — собственные значения по соответствующим направлениям, \mathbf{G}^\bullet — векторы правых частей, выражения для которых нам не важны. Величины с индексами loc в (5) считаются постоянными в пределах каждой пространственно-временной ячейки.

3. Явно-неявная численная модель САВАРЕТИ–НН. Опишем методику построения и алгоритм решения явно-неявной схемы КАБАРЕ для системы уравнений (1), явной вдоль направлений x и y и неявной вдоль z . Введение неявности только по одному вертикальному направлению позволяет сохранить вычислительную эффективность алгоритма и снять ограничения на шаг по времени, вызванные размерами ячеек сетки по вертикальному направлению.

Пусть имеется некоторая структурированная шестигранная сетка с прямыми ребрами по оси z и косыми по осям x и y , узлы которой могут передвигаться по оси z : $\omega_h = \{(x_i, y_j, z_{i,j,k}) \mid i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}, k = \overline{0, N_z}\}$, $x_{i+1} - x_i = h_{i+1/2}^x$, $y_{j+1} - y_j = h_{j+1/2}^y$, $z_{i,j,0} = z_{\max}(x_i, y_j)$, $z_{i,j,N_z} = B(x_i, y_j)$. Пусть также имеется неравномерная сетка по времени $\omega_\tau = \{t_n \mid t_{n+1} - t_n = \tau_n, n = \overline{0, K-1}\}$. Зададим в центрах ячеек сетки $\omega_h \times \omega_\tau$ так называемые консервативные переменные: $\varphi_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n$ — на целых слоях по времени, $\varphi_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}$ — на полуцелых слоях по времени. В центрах граней сетки зададим так называемые потоковые переменные на целых слоях по времени: $\psi_{i+1/2, j+1/2, k}^n$, $\psi_{i+1/2, j, k+1/2}^n$ и $\psi_{i, j+1/2, k+1/2}^n$. В качестве консервативных и потоковых переменных зададим полный набор неизвестных рассматриваемой системы: $\{\varphi, \psi\} = \{\rho, \theta, u, v, w, \delta P\}$.

Как и явная схема [17], явно-неявный алгоритм САВАРЕТИ–НН состоит из трех фаз: двух балансных фаз и одной характеристической.

3.1. Балансные фазы явно-неявной схемы КАБАРЕ. Первая балансная фаза схемы САВАРЕТИ–НН представляет собой консервативную аппроксимацию законов сохранения (1) по методу конечного объема для каждой ячейки сетки (см. обозначения на рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{(V\mathbf{s})_c^{n+1/2} - (V\mathbf{s})_c^n}{\tau_n/2} + \mathbf{a}_R^n (z_{56}^n - z_{12}^n) h_c^y - \mathbf{a}_L^n (z_{78}^n - z_{34}^n) h_c^y + \mathbf{a}_D^n (z_{12}^n - z_{34}^n) h_c^y - \mathbf{a}_T^n (z_{56}^n - z_{78}^n) h_c^y + \\ + \mathbf{b}_F^n (z_{67}^n - z_{23}^n) h_c^x - \mathbf{b}_B^n (z_{58}^n - z_{14}^n) h_c^x + \mathbf{b}_D^n (z_{23}^n - z_{14}^n) h_c^x - \mathbf{b}_T^n (z_{67}^n - z_{58}^n) h_c^x + \\ + \mathbf{d}_T^{n+1} h_c^x h_c^y - \mathbf{d}_D^{n+1} h_c^x h_c^y = \mathbf{f}(\rho_c^n) V_c^n, \end{aligned} \quad (6)$$

где V_c^n — объем ячейки на слое по времени n , h_c^x и h_c^y — размеры ячейки по направлениям x и y соответственно, z_{pm} — z -координата центра ребра сетки, соединяющего узлы с z -координатами z_p и z_m . Данные разностные уравнения записаны в векторной форме и используют следующие векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (\theta, \theta u, \theta v, \theta w, \theta \rho)^T, \\ \mathbf{a} &= (\theta u, \theta u^2 + \delta P / \rho_0, \theta uv, \theta uw, \theta \rho u)^T, \\ \mathbf{b} &= (\theta v, \theta uv, \theta v^2 + \delta P / \rho_0, \theta vw, \theta \rho v)^T, \\ \mathbf{d} &= (\theta(w - \dot{z}), \theta u(w - \dot{z}), \theta v(w - \dot{z}), \theta w(w - \dot{z}) + \delta P / \rho_0, \theta \rho(w - \dot{z}))^T, \\ \mathbf{f}(\rho) &= (0, 0, 0, -[\rho / \rho_0 - 1]g, 0)^T. \end{aligned}$$

Основным отличием балансной фазы (6) от первой фазы явного алгоритма [17] является неявная аппроксимация потоков z -компоненты импульса. По формулам (6) необходимо вычислить значения консервативных переменных на промежуточном слое $\varphi_c^{n+1/2}$, что нельзя сделать явно, пока неизвестны потоковые переменные на горизонтальных гранях ячеек $\psi_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}$. Вычисление этих потоковых переменных происходит на характеристической фазе алгоритма, которая будет описана в следующем разделе. Балансная фаза (6) и характеристическая фаза вместе образуют этап “предиктор” алгоритма.

После нахождения потоковых переменных на горизонтальных гранях и консервативных переменных на промежуточном слое по формулам (6) осуществляется явное вычисление оставшихся потоковых переменных $\psi_{i, j+1/2, k+1/2}^{n+1}$ и $\psi_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1}$ по стандартным для схем семейства КАБАРЕ процедурам линейной экстраполяции инвариантов Римана, описанным в [17]. Затем проводится вычисление консервативных переменных на следующем слое по времени φ_c^{n+1} с помощью следующей консервативной аппроксимации законов сохранения (1) по методу конечного объема для каждой ячейки сетки:

$$\begin{aligned} & \frac{(V\mathbf{s})_c^{n+1} - (V\mathbf{s})_c^n}{\tau_n} + 0.5 [\mathbf{a}_R^n (z_{56}^n - z_{12}^n) h_c^y - \mathbf{a}_L^n (z_{78}^n - z_{34}^n) h_c^y + \mathbf{a}_D^n (z_{12}^n - z_{34}^n) h_c^y - \mathbf{a}_T^n (z_{56}^n - z_{78}^n) h_c^y + \\ & + \mathbf{b}_F^n (z_{67}^n - z_{23}^n) h_c^x - \mathbf{b}_B^n (z_{58}^n - z_{14}^n) h_c^x + \mathbf{b}_D^n (z_{23}^n - z_{14}^n) h_c^x - \mathbf{b}_T^n (z_{67}^n - z_{58}^n) h_c^x + \mathbf{d}_T^n h_c^x h_c^y - \mathbf{d}_D^n h_c^x h_c^y] + \\ & + 0.5 [\mathbf{a}_R^{n+1} (z_{56}^{n+1} - z_{12}^{n+1}) h_c^y - \mathbf{a}_L^{n+1} (z_{78}^{n+1} - z_{34}^{n+1}) h_c^y + \mathbf{a}_D^{n+1} (z_{12}^{n+1} - z_{34}^{n+1}) h_c^y - \mathbf{a}_T^{n+1} (z_{56}^{n+1} - z_{78}^{n+1}) h_c^y + \\ & + \mathbf{b}_F^{n+1} (z_{67}^{n+1} - z_{23}^{n+1}) h_c^x - \mathbf{b}_B^{n+1} (z_{58}^{n+1} - z_{14}^{n+1}) h_c^x + \mathbf{b}_D^{n+1} (z_{23}^{n+1} - z_{14}^{n+1}) h_c^x - \mathbf{b}_T^{n+1} (z_{67}^{n+1} - z_{58}^{n+1}) h_c^x + \\ & + \mathbf{d}_T^{n+1} h_c^x h_c^y - \mathbf{d}_D^{n+1} h_c^x h_c^y] = 0.5 [\mathbf{f}(\rho_c^n) V_c^n + \mathbf{f}(\rho_c^{n+1}) V_c^{n+1}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Балансная фаза (7) аппроксимирует исходные уравнения со вторым порядком по времени и пространству и называется этапом “корректор”.

3.2. Характеристическая фаза явно-неявной схемы КАБАРЕ. Характеристическая фаза явно-неявной схемы КАБАРЕ, как и в явной схеме [17], представляет собой линейную экстраполяцию локальных инвариантов Римана (5) по направлениям, определяемым собственными значениями системы на полуцелом слое. Так, для инвариантов по направлению z справедливы следующие формулы:

$$(I_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} = \begin{cases} 2(I_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - (I_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k+1}^n, & \text{если } \tilde{\lambda}_m > 0, \\ 2(I_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} - (I_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k-1}^n, & \text{если } \tilde{\lambda}_m < 0, \quad m = \overline{1, 5}, \\ 0.5 \left[(I_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} + (I_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \right], & \text{иначе} \end{cases} \quad (8)$$

$$\tilde{\lambda}_m = 0.5 \left[(\lambda_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} + (\lambda_m^z)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \right].$$

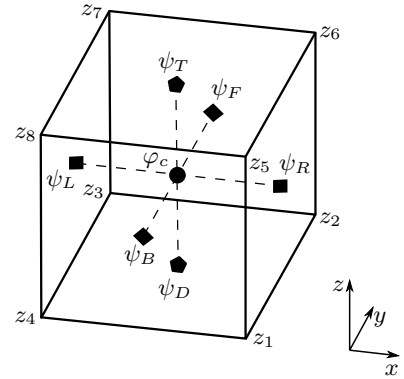


Рис. 1. Шаблон консервативных фаз (6) и (7)

Fig. 1. Template of the conservative phases (6) and (7)



Приближение слабой сжимаемости позволяет рассматривать лишь дозвуковые течения жидкости, при которых направление переноса инвариантов I_1^z и I_2^z всегда фиксировано, что упрощает формулы (8):

$$\begin{aligned} (I_1^z)^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k} &= 2(I_1^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - (I_1^z)^n_{i+1/2,j+1/2,k+1}, \\ (I_2^z)^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k} &= 2(I_2^z)^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} - (I_2^z)^n_{i+1/2,j+1/2,k-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что по направлению z мы будем использовать упрощенные (линеаризованные) выражения для первого и второго локальных инвариантов Римана:

$$\lambda_{1,2}^z = (w - z) \pm c/\sqrt{\rho_0}, \quad I_1^z = w + \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}\delta\theta, \quad I_2^z = w - \frac{c}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}\delta\theta.$$

Упрощение заключается в замене коэффициента $c/\sqrt{\rho_0[\theta]_{loc}}$ на $c/\sqrt{\rho_0\theta_0}$. Такая линеаризация допустима в рамках приближения слабой сжимаемости.

В первую очередь на характеристической фазе решается система из первого (закон сохранения объема) и четвертого (закон сохранения импульса по направлению z) уравнений из (6) и уравнений переноса инвариантов (9), из которой находят значения потоковых переменных $\theta^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k}$, $w^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k}$, $\delta P^{n+1}_{i+1/2,j+1/2,k}$. Приведем эту систему к виду, похожему на разностный аналог характеристических уравнений (5), для чего рассмотрим отдельно разностные законы сохранения объема и z -компоненты импульса из (6):

$$\frac{(V\theta)_c^{n+1/2} - (V\theta)_c^n}{\tau_n/2} + [(\theta(w - z))_T^{n+1} - (\theta(w - z))_D^{n+1}] h_c^x h_c^y = G_\theta^n, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{(V\theta w)_c^{n+1/2} - (V\theta w)_c^n}{\tau_n/2} + \left[(\theta w(w - z))_T^{n+1} + \frac{c^2}{\rho_0}(\theta_T^{n+1} - \theta_0) - \right. \\ \left. - (\theta w(w - z))_D^{n+1} - \frac{c^2}{\rho_0}(\theta_D^{n+1} - \theta_0) \right] h_c^x h_c^y = G_{\theta w}^n, \end{aligned} \quad (11)$$

где было учтено уравнение состояния $\delta P = c^2(\theta - \theta_0)$. Здесь G_θ^n и $G_{\theta w}^n$ — правые части, которые зависят лишь от значений переменных и координат элементов сетки на слое по времени n . Далее G_\bullet^n также будет обозначать некоторую правую часть, значение которой известно на текущем этапе алгоритма. Точные формулы для правых частей важны для программной реализации алгоритма, но здесь не приводятся в силу ограниченного объема публикации.

Приведем простое алгебраическое соотношение, которое поможет нам привести уравнения (10), (11) к характеристическому виду:

$$a^*b^* - ab = \frac{a^* + a}{2}(b^* - b) + \frac{b^* + b}{2}(a^* - a). \quad (12)$$

Используя соотношение (12) для $a = w^n$, $a^* = w^{n+1}$, $b = (V\theta)^n$, $b^* = (V\theta)^{n+1}$ и уравнение (10), приведем уравнение (11) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{(V\theta)_c^{n+1/2} + (V\theta)_c^n}{2} \frac{w_c^{n+1/2} - w_c^n}{\tau_n/2} + \frac{(\theta(w - z))_T^{n+1} + (\theta(w - z))_D^{n+1}}{2} (w_T^{n+1} - w_D^{n+1}) h_c^x h_c^y + \\ + \frac{c^2}{\rho_0} (\theta_T^{n+1} - \theta_D^{n+1}) h_c^x h_c^y = G_\theta^n. \end{aligned} \quad (13)$$

Считая изменение объема за половину шага по времени малым ($V_c^n = V_c^{n+1} = V_c$) и используя $\theta/\theta_0 \approx 1$, преобразуем уравнения (10) и (13):

$$\begin{aligned} \frac{\theta_c^{n+1/2} - \theta_c^n}{\tau_n/2} + [(\theta(w - z))_T^{n+1} - (\theta(w - z))_D^{n+1}] \frac{h_c^x h_c^y}{V_c} = \frac{G_\theta^n}{V_c}, \\ \frac{w_c^{n+1/2} - w_c^n}{\tau_n/2} + \frac{(w - z)_T^{n+1} + (w - z)_D^{n+1}}{2} (w_T^{n+1} - w_D^{n+1}) \frac{h_c^x h_c^y}{V_c} + \\ + \frac{c^2}{\theta_0 \rho_0} (\theta_T^{n+1} - \theta_D^{n+1}) \frac{h_c^x h_c^y}{V_c} = \frac{G_w^n}{\theta_0 V_c}. \end{aligned} \quad (14)$$

Пользуясь в первом уравнении из (14) соотношением (12) для $a^* = \theta_T^{n+1}$, $a = \theta_D^{n+1}$, $b^* = (w - \dot{z})_T^{n+1}$, $b = (w - \dot{z})_D^{n+1}$, опуская в некоторых местах $\dot{z} \approx 0$ и учитывая, что разность θ можно заменить разностью $\delta\theta$ и $h_c^x h_c^y / V_c = \Delta z_c$, получим следующие эволюционные уравнения для $\delta\theta$ и w :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\theta_c^{n+1/2} - \delta\theta_c^n}{\tau_n/2} + \frac{\theta_T^{n+1} + \theta_D^{n+1}}{2} \frac{w_T^{n+1} - w_D^{n+1}}{\Delta z_c} + \frac{(w - \dot{z})_T^{n+1} - (w - \dot{z})_D^{n+1}}{2} \frac{\delta\theta_T^{n+1} - \delta\theta_D^{n+1}}{\Delta z_c} &= \frac{G_\theta^n}{V_c}, \\ \frac{w_c^{n+1/2} - w_c^n}{\tau_n/2} + \frac{(w - \dot{z})_T^{n+1} + (w - \dot{z})_D^{n+1}}{2} \frac{w_T^{n+1} - w_D^{n+1}}{\Delta z_c} + \frac{c^2}{\theta_0 \rho_0} \frac{\delta\theta_T^{n+1} - \delta\theta_D^{n+1}}{\Delta z_c} &= \frac{G_w^n}{\theta_0 V_c}. \end{aligned} \quad (15)$$

Домножая первое уравнение (15) на $c/\sqrt{\rho_0}\theta_0$, складывая со вторым уравнением и пользуясь тем, что в приближении слабой сжимаемости $(\theta_T^{n+1} + \theta_D^{n+1})/\theta_0 \approx 1$, получим разностный аналог характеристического уравнения (5) для инварианта $R = I_1^z$:

$$\begin{aligned} \frac{R_c^{n+1/2} - R_c^n}{\tau_n/2} + \left(\tilde{\lambda}_1^z\right)_c^{n+1} \frac{R_T^{n+1} - R_D^{n+1}}{\Delta z_c} &= G_R^n, \\ \left(\tilde{\lambda}_1^z\right)_c^{n+1} &= \frac{(w - \dot{z})_T^{n+1} + (w - \dot{z})_D^{n+1}}{2} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично, домножая первое уравнение (15) на $-c/\sqrt{\rho_0}\theta_0$ и складывая со вторым уравнением, получим разностный аналог характеристического уравнения (5) для инварианта $Q = I_2^z$:

$$\begin{aligned} \frac{Q_c^{n+1/2} - Q_c^n}{\tau_n/2} + \left(\tilde{\lambda}_2^z\right)_c^{n+1} \frac{Q_T^{n+1} - Q_D^{n+1}}{\Delta z_c} &= G_Q^n, \\ \left(\tilde{\lambda}_2^z\right)_c^{n+1} &= \frac{(w - \dot{z})_T^{n+1} + (w - \dot{z})_D^{n+1}}{2} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Пользуясь экстраполяционными соотношениями (9), перепишем уравнения (16) и (17) в виде системы уравнений для потоковых значений инвариантов на новом слое $n + 1$:

$$\begin{aligned} (1 + r_c^R) R_T^{n+1} - r_c^R R_B^{n+1} &= \tau_n G_R^n + 2R_c^n - R_B^n, \\ (1 - r_c^Q) Q_B^{n+1} + r_c^Q Q_T^{n+1} &= \tau_n G_Q^n + 2Q_c^n - Q_T^n, \end{aligned} \quad (18)$$

где r_c^R и r_c^Q — локальные числа Куранта в ячейках сетки:

$$r_c^R = \frac{1}{\Delta z_c} \tau_n \left(\tilde{\lambda}_1^z\right)_c^{n+1}, \quad r_c^Q = \frac{1}{\Delta z_c} \tau_n \left(\tilde{\lambda}_2^z\right)_c^{n+1}. \quad (19)$$

Решение системы (18) осложняется тем, что числа Куранта (19) зависят от еще неизвестных потоковых значений переменных на новом слое $n + 1$. Данную систему можно решать итерационно по числам Куранта, начиная с их значений на предыдущем временном слое:

$$\begin{aligned} \left(1 + [r_c^R]^{(p)}\right) R_T^{n+1} - [r_c^R]^{(p)} R_B^{n+1} &= \tau_n G_R^n + 2R_c^n - R_B^n, \\ \left(1 - [r_c^Q]^{(p)}\right) Q_B^{n+1} + [r_c^Q]^{(p)} Q_T^{n+1} &= \tau_n G_Q^n + 2Q_c^n - Q_T^n, \quad p = 0, 1, \dots \\ [r_c^R]^{(0)} &= \frac{1}{\Delta z_c} \tau_n \left(\tilde{\lambda}_1^z\right)_c^n, \quad [r_c^Q]^{(0)} = \frac{1}{\Delta z_c} \tau_n \left(\tilde{\lambda}_2^z\right)_c^n, \end{aligned} \quad (20)$$

Система (20) является системой линейных уравнений относительно инвариантов с нового слоя по времени с блочной трехдиагональной матрицей с блоками размера 2×2 при рассмотрении уравнений с фиксированными индексами i и j , т.е. для ячеек сетки внутри одного вертикального столбца жидкости. Таким образом, системы (20) можно решать параллельно для каждого отдельного столбца ячеек. Данные уравнения аппроксимируют характеристическую форму (5) для инвариантов I_1^z и I_2^z со вторым порядком при условии, что итерационный процесс продолжается бесконечно долго. На практике, для достижения точности, характерной для методов второго порядка аппроксимации, достаточно сделать лишь одну-две итерации.



Формулы (20) в дальнейшем будем называть формулами “бегущего счета”, так как по известным значениям инвариантов на одной границе данные формулы позволяют вычислить остальные инварианты внутри области и на противоположной границе.

Процедуры переноса инвариантов и нахождения потоковых переменных, соответствующих направлениям x и y , происходят по стандартным явным формулам схемы КАБАРЕ и описаны в работе [17].

3.3. Гиперболическая прогонка для формул “бегущего счета”. Данный раздел посвящен алгоритму разрешения системы (20) в форме “бегущего счета”. Вернемся к индексной записи уравнений и опустим индексы, соответствующие направлениям x и y , так как для каждого столбца ячеек система будет разрешаться отдельно ($T = k$, $D = k + 1$, $c = k + 1/2$). Также опустим индексы итераций (p) у локальных чисел Куранта, тогда уравнения (20) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_k^{n+1} &= \alpha_{k+1} R_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}, \\ Q_{k+1}^{n+1} &= \gamma_k Q_k^{n+1} + \delta_k, \end{aligned} \quad k = \overline{0, N_z - 1}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{r_{k+1/2}^R}{(1 + r_{k+1/2}^R)}, & \beta_{k+1} &= \frac{\tau_n G_R^n + 2R_{k+1/2}^n - R_{k+1}^n}{(1 + r_{k+1/2}^R)}, \\ \gamma_k &= -\frac{r_{k+1/2}^Q}{(1 - r_{k+1/2}^Q)}, & \delta_k &= \frac{\tau_n G_Q^n + 2Q_{k+1/2}^n - Q_k^n}{(1 - r_{k+1/2}^Q)}. \end{aligned}$$

Формулы (21) позволяют выразить R_0^{n+1} на верхней грани столбца ячеек через $R_{N_z}^{n+1}$ на нижней грани:

$$R_0^{n+1} = a_{N_z} R_{N_z}^{n+1} + b_{N_z}, \quad (22)$$

где a_{N_z} и b_{N_z} вычисляются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1, & b_1 &= \beta_1, \\ a_{k+1} &= a_k \alpha_{k+1}, & b_{k+1} &= b_k + a_k \beta_{k+1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}. \end{aligned}$$

Аналогично, $Q_{N_z}^{n+1}$ на нижней грани столбца ячеек можно выразить через Q_0^{n+1} на верхней грани:

$$Q_{N_z}^{n+1} = d_0 Q_0^{n+1} + g_0, \quad (23)$$

где величины d_0 и g_0 вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} d_{N_z-1} &= \gamma_{N_z-1}, & g_{N_z-1} &= \delta_{N_z-1}, \\ d_{N_z-k} &= d_{N_z-k+1} \gamma_{N_z-k}, & g_{N_z-k} &= g_{N_z-k+1} + d_{N_z-k+1} \delta_{N_z-k}, \quad k = \overline{2, N_z}. \end{aligned}$$

Полученные соотношения (22) и (23) для разрешения дополняются граничными условиями на дне (2) и свободной поверхности (3), (4). Условие непротекания на дне на момент времени $t = t_{n+1}$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial B}{\partial x} u_{N_z}^{n+1} + \frac{\partial B}{\partial y} v_{N_z}^{n+1} - w_{N_z}^{n+1} = 0.$$

На текущем этапе алгоритма компоненты скоростей на нижней грани столбца $u_{N_z}^{n+1}$, $v_{N_z}^{n+1}$ еще не вычислены, так что аппроксимируем их уже известными значениями с предыдущего временного слоя:

$$\frac{\partial B}{\partial x} u_{N_z}^n + \frac{\partial B}{\partial y} v_{N_z}^n - w_{N_z}^{n+1} = 0. \quad (24)$$

Пользуясь тем, что $w_k^{n+1} = 0.5(R_k^{n+1} + Q_k^{n+1})$, выразим из (24) $R_{N_z}^{n+1}$:

$$R_{N_z}^{n+1} = -Q_{N_z}^{n+1} + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cdot u_{N_z}^n + \frac{\partial B}{\partial y} \cdot v_{N_z}^n \right). \quad (25)$$

Тогда с помощью (22), (23) и (25) можно получить уравнение, связывающее значения инвариантов на верхней грани столбца ячеек (т.е. на свободной поверхности):

$$\begin{aligned} R_0^{n+1} &= a_{N_z} R_{N_z}^{n+1} + b_{N_z} = a_{N_z} \left(-Q_{N_z}^{n+1} + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cdot u_{N_z}^n + \frac{\partial B}{\partial y} \cdot v_{N_z}^n \right) \cdot u_{N_z}^n \right) + b_{N_z} = \\ &= a_{N_z} \left(-d_0 Q_0^{n+1} - g_0 + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cdot u_{N_z}^n + \frac{\partial B}{\partial y} \cdot v_{N_z}^n \right) \cdot u_{N_z}^n \right) + b_{N_z}. \end{aligned} \quad (26)$$

Дополняя соотношение (26) граничными условиями на свободной поверхности [17], получим:

$$\begin{aligned} R_0^{n+1} &= a_{N_z} \left(-d_0 Q_0^{n+1} - g_0 + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cdot u_{N_z}^n + \frac{\partial B}{\partial y} \cdot v_{N_z}^n \right) \cdot u_{N_z}^n \right) + b_{N_z}, \\ R_0^{n+1} &= w_0^{n+1} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0 \theta_0}} \delta \theta_0^{n+1}, \\ Q_0^{n+1} &= w_0^{n+1} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0 \theta_0}} \delta \theta_0^{n+1}, \\ c^2 \delta \theta_0^{n+1} &= -\rho_0 g (H_0 - z_0^{n+1}), \\ \frac{z_0^{n+1} - z_0^{n+1/2}}{\tau/2} + u_0^{n+1} \cdot \frac{(z_{R,0}^{n+1} - z_{L,0}^{n+1})}{\Delta x} + v_0^{n+1} \cdot \frac{(z_{F,0}^{n+1} - z_{B,0}^{n+1})}{\Delta x} &= w_0^{n+1}. \end{aligned}$$

В последнем уравнении данной системы участвуют величины $u_0^{n+1}, v_0^{n+1}, z_{R,0}^{n+1}, z_{L,0}^{n+1}, z_{T,0}^{n+1}, z_{B,0}^{n+1}$, которые к этому этапу алгоритма неизвестны. Будем использовать эти величины с момента времени t_n в качестве приближения:

$$\begin{aligned} R_0^{n+1} &= a_{N_z} \left(-d_0 Q_0^{n+1} - g_0 + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cdot u_{N_z}^n + \frac{\partial B}{\partial y} \cdot v_{N_z}^n \right) \cdot u_{N_z}^n \right) + b_{N_z}, \\ R_0^{n+1} &= w_0^{n+1} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0 \theta_0}} \delta \theta_0^{n+1}, \\ Q_0^{n+1} &= w_0^{n+1} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0 \theta_0}} \delta \theta_0^{n+1}, \\ c^2 \delta \theta_0^{n+1} &= -\rho_0 g (H_0 - z_0^{n+1}), \\ \frac{z_0^{n+1} - z_0^{n+1/2}}{\tau/2} + u_0^n \cdot \frac{(z_{R,0}^n - z_{L,0}^n)}{\Delta x} + v_0^n \cdot \frac{(z_{F,0}^n - z_{B,0}^n)}{\Delta x} &= w_0^{n+1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Полученная система из 5 уравнений (27) линейна относительно неизвестных $R_0^{n+1}, Q_0^{n+1}, w_0^{n+1}, \delta \theta_0^{n+1}, z_0^{n+1}$. Решая данную систему, получим выражения для этих неизвестных. По ранее выписанным соотношениям (22) и (23) находим значения инвариантов в следующем порядке:

$$Q_0^{n+1} \rightarrow Q_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N_z}, \quad R_{N_z}^{n+1} \rightarrow R_k^{n+1}, \quad k = \overline{N_z - 1, 1},$$

где $R_{N_z}^{n+1}$ находится из R_0^{n+1} с помощью (26). Описанный алгоритм вычисления инвариантов Римана R и Q назовем гиперболической прогонкой.

Имея все значения инвариантов R и Q (I_1^z и I_2^z), находим потоковые значения вертикальной скорости $w_{i+1/2,k}^{n+1}$ и параметра сжимаемости $\theta_{i+1/2,k}^{n+1}$ на горизонтальных гранях.

Повторяя аналогичные рассуждения для инвариантов $I_3^z = u$ и $I_4^z = \rho$, находим их значения на новом слое по времени $n + 1$ на горизонтальных гранях. Отметим, что характеристические скорости этих инвариантов $\lambda_3^z = \lambda_4^z = w$, т.е. к данному моменту они уже известны для слоя $n + 1$, и процедура экстраполяции инвариантов осуществляется по характеристическим скоростям w_k^{n+1} .

3.4. Алгоритм решения явно-неявной схемы CABARETI–NH. Приведем описание алгоритма решения разностных уравнений явно-неявной схемы. В начальный момент времени $t = t_0$ заданы значения консервативных и потоковых переменных на всей сетке. Вычисления начальных скоростей смещения положения свободной поверхности по вертикали повторяет явный алгоритм [17] согласно формулам:

$$\dot{z}_T^0 = w_T^0 - u_T^0 \frac{(z_R^0 - z_L^0)}{h_x} - v_T^0 \frac{(z_F^0 - z_B^0)}{\Delta y}.$$



Далее, начиная с $n = 0$ производится расчет консервативных и потоковых переменных на момент времени t_{n+1} . Для этого производятся вычисления согласно следующему алгоритму:

1. Находится положение сетки на полуцелом шаге по времени:

$$z_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} = z_{i+1/2,j+1/2,k}^n + \frac{\tau_n}{2} \dot{z}_{i+1/2,j+1/2,k}^n.$$

2. Выполняется неявная характеристическая фаза схемы для направления z . Вычисляются инварианты $(I_p^z)_{i+1/2,k}^{n+1}$, $p = \overline{1,5}$, и потоковые переменные $\{\theta, w, u, v, \rho\}$ на новом временном слое на горизонтальных гранях согласно алгоритму, описанному в разделе 3.3. Также вычисляется новое положение свободной поверхности $z_{*,0}^{n+1}$.
3. Выполняется первая балансная фаза схемы согласно уравнениям (6), находятся консервативные величины $\{\theta, u, v, w, \rho\}^{n+1/2}$ на полуцелом шаге по времени.
4. Выполняется явная характеристическая фаза схемы для направлений x и y . Из найденных инвариантов вычисляются потоковые величины на вертикальных гранях $\{\theta, u, v, w, \rho\}^{n+1}$.
5. Находятся координаты z центров горизонтальных ребер сетки на новом временном слое.
6. Выполняется вторая балансная фаза схемы (этап “корректор”) согласно формулам (7), находятся консервативные величины $\{\theta, u, v, w, \rho\}^{n+1}$ на новом шаге по времени.

Пункты 4 и 5 алгоритма совпадают с вычислениями по явной схеме CABARET–NH и подробно описаны в [17].

Величина шага по времени должна быть выбрана из условия Куранта:

$$\tau_n = CFL \cdot \min_{c,m} \left(\frac{h_c^x}{|(\lambda_m^x)_c^n|}, \frac{h_c^y}{|(\lambda_m^y)_c^n|} \right),$$

где $CFL \in (0, 0.5]$ — заданное число Куранта–Фридрихса–Леви, выбор минимума ведется по всем ячейкам сетки c и по всем собственным значениям $m = \overline{1,5}$. Неявная схема по вертикальному направлению позволяет снять ограничения на шаг по времени по этому направлению.

Представленный алгоритм назовем схемой CABARET–NH (CABARET Implicit Non-Hydrostatic).

4. Валидация модели на лабораторных экспериментах.

В природе наблюдаются многие виды гравитационных течений, возникающих из-за разницы плотностей различных жидкостей. Океаны и атмосфера часто характеризуются областями с резкими градиентами плотности в вертикальном направлении (термоклин). Разница в плотности обычно возникает из-за колебаний температуры и солености. В таких областях океанические течения промежуточной плотности распространяются в неоднородной окружающей среде. Исследование гравитационных течений в природе обычно очень затруднено из-за их сложной и неожиданной особенности возникновения. С другой стороны, масштабные лабораторные эксперименты широко используются для выяснения динамики гравитационных течений. Экспериментальные исследования динамики плотностных течений в основном включают в себя лабораторный анализ. Важным достижением в области плотностных течений по праву считается эксперимент “отпирание перегородки” [20]. На протяжении всего времени исследований гравитационных потоков экспериментальная установка, описанная в этом эксперименте, широко использовалась и в стандартном виде [21, 22], и с некоторыми изменениями [23, 24].

Для валидации численного алгоритма в существенно трехмерной постановке был выбран эксперимент, описанный в статье [18]. Лабораторная установка (рис. 2) состоит из прямоугольного бассейна,

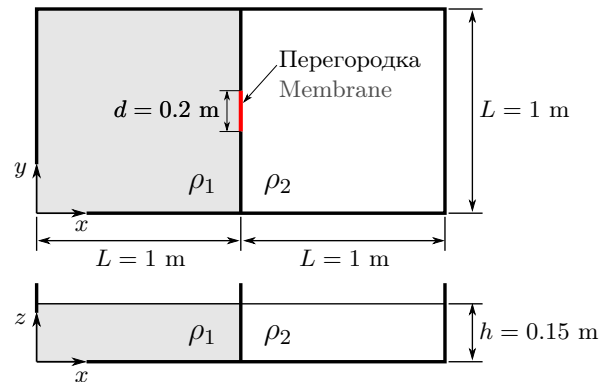


Рис. 2. Схема экспериментальной установки, вид сверху и сбоку

Fig. 2. Scheme of the experimental setup, top and side views

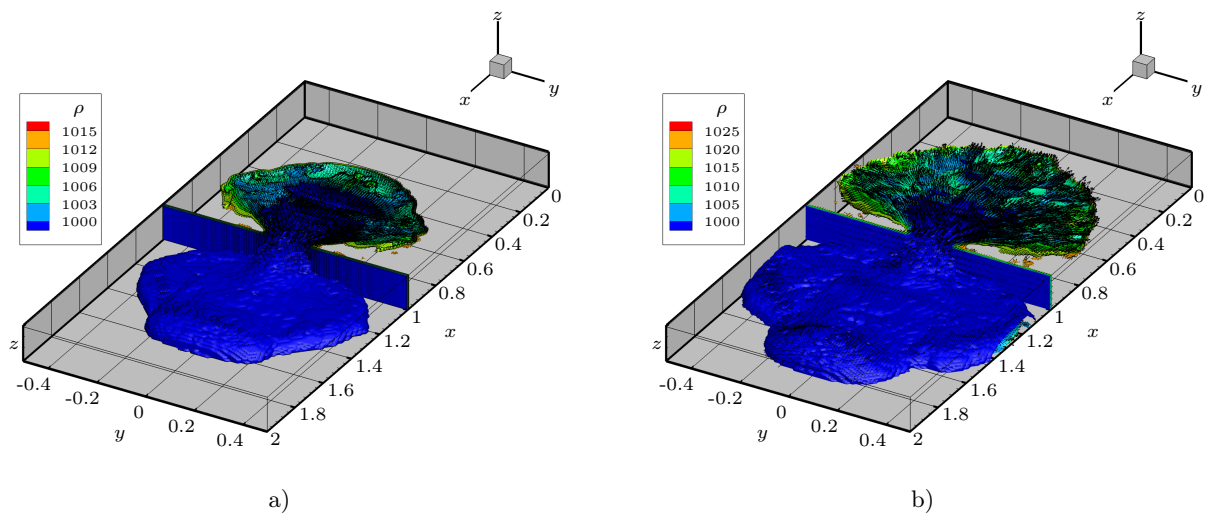


Рис. 3. Изоповерхности плотности при $t = 8$ с в расчетах по модели CABARETI-NH:
а) $\rho_1 = 1015$ кг/м³; б) $\rho_1 = 1025$ кг/м³

Fig. 3. Density isosurfaces at $t = 8$ s in calculations using the CABARETI-NH model:
а) $\rho_1 = 1015$ kg/m³; б) $\rho_1 = 1025$ kg/m³

разделенного жесткой стенкой на две части квадратного сечения со стороной $L = 1$ м, заполненных прозрачной водопроводной водой плотности $\rho_2 = 1000$ кг/м³ и окрашенной соленой водой плотности $\rho_1 > \rho_2$. Оба резервуара заполняются на одинаковую высоту $h = 0.15$ м. В центре стены есть откатная перегородка шириной $d = 0.2$ м.

Рассматривались два эксперимента с ровной поверхностью дна, отличающиеся плотностью соленой жидкости. В первом эксперименте плотность $\rho_1 = 1015$ кг/м³, во втором — $\rho_1 = 1025$ кг/м³.

После того как перегородка убрана, возникает ненулевой градиент давления между жидкостями резервуаров, создавая тем самым гравитационное течение. Более плотная жидкость из левого резервуара распространяется в придонном слое в правый резервуар. Пресная жидкость из правой части установки перетекает влево в приповерхностном слое. На рис. 3 приведены изоповерхности плотности в расчетах по модели CABARETI-NH на момент $t = 8$ с для двух экспериментов. Динамика стратифицированной жидкости качественно совпадает с экспериментальными данными.

Расчеты лабораторных тестов проводились по численным моделям CABARET-NH и CABARETI-NH на сетке 200×100 ячеек на 30 слоях по вертикали с числом Куранта $CFL = 0.3$ и искусственной скоростью звука $c = \sqrt{gh}$, $g = 9.8$ м/с². Результаты расчетов приводятся только по модели CABARETI-NH, так как результаты по явной и явно- неявной схеме неотличимы на приведенных графиках. Аспектное отношение в используемых вычислительных ячейках:

$$\frac{h}{h^z} = 2,$$

где $h = h^x = h^y$ — шаг сетки по осям x и y , h^z — шаг сетки по оси z .

Стоит отдельно отметить, что расчетное время до достижения $t = 10$ с по численным моделям CABARET-NH и CABARETI-NH отличалось в 1.94 раза за счет большего расчетного шага по времени в явно- неявной схеме, что подтверждает на практике высокую эффективность алгоритма решения разностных уравнений построенной явно- неявной схемы.

Рис. 4 отражает положение фронта распространения гравитационного потока на разные моменты времени. Положение фронта определялось аналогично описанному в статье [18]: построенная изоповерхность для плотности $\rho = 1000.18$ кг/м³ проецировалась на плоскость $z = 0$, полученный контур определялся как положение фронта.

Для количественного сравнения полученных положений фронта с экспериментальными данными построены графики максимального распространения фронта по каждому из горизонтальных направлений (x и y), показывающие ширину фронта распространения более плотной жидкости в правом резервуаре (рис. 5). Экспериментальные данные по двум постановкам, представленные в статье [18], ограничены

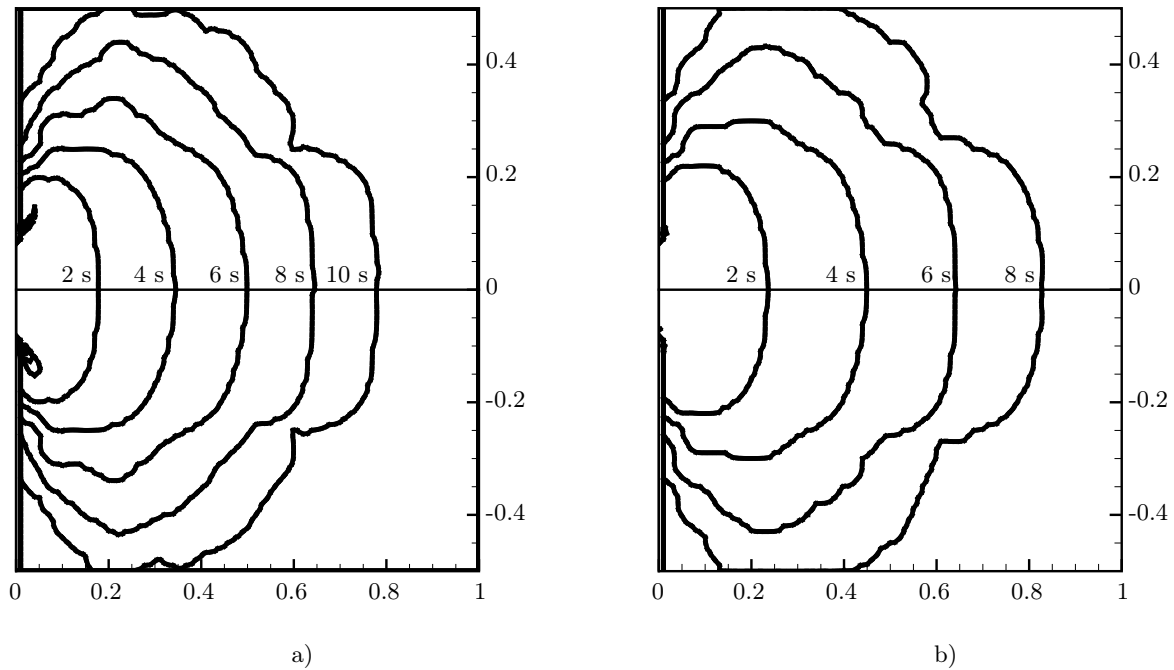


Рис. 4. Положение фронта гравитационного потока в разные моменты времени (2 с, 4 с, 6 с, 8 с, 10 с) из расчетов по модели CABARETI-NH при разных плотностях: а) $\rho_1 = 1015 \text{ кг/м}^3$; б) $\rho_1 = 1025 \text{ кг/м}^3$

Fig. 4. The position of gravitational flow front at different times (2 s, 4 s, 6 s, 8 s, 10 s) in calculations using the CABARETI-NH model at different densities: $\rho_1 = 1015 \text{ kg/m}^3$; б) $\rho_1 = 1025 \text{ kg/m}^3$

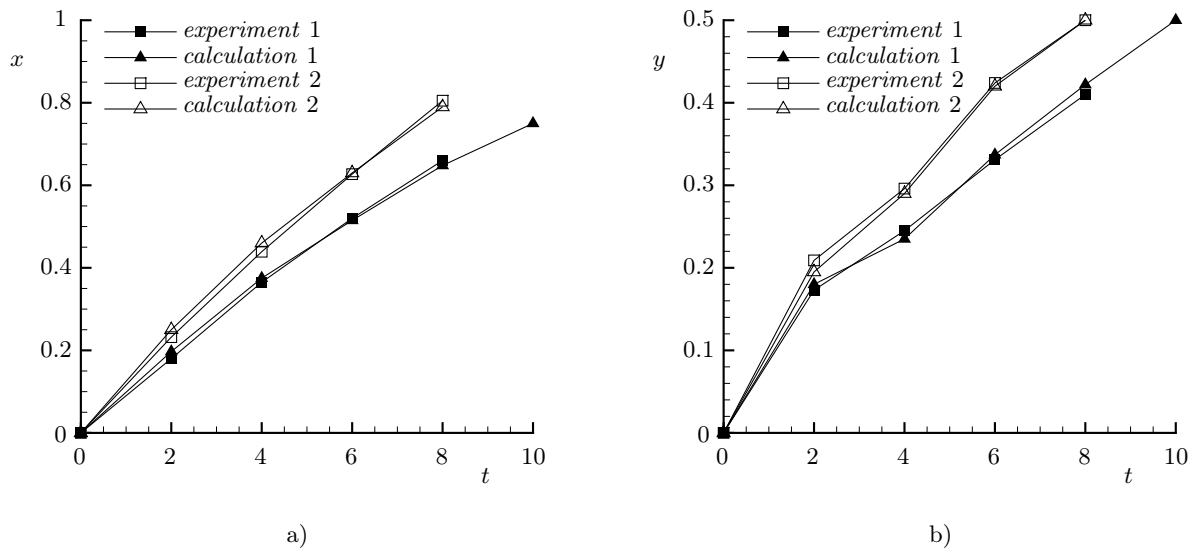


Рис. 5. Расчетное (по модели CABARETI-NH) и экспериментальное максимальное положение фронта в зависимости от времени в эксперименте 1 ($\rho_1 = 1015 \text{ кг/м}^3$) и в эксперименте 2 ($\rho_1 = 1025 \text{ кг/м}^3$): а) вдоль оси x ; б) вдоль оси y

Fig. 5. Calculated (according to the CABARETI-NH model) and experimental maximum front position as a function of time in experiments 1 ($\rho_1 = 1015 \text{ kg/m}^3$) and 2 ($\rho_1 = 1025 \text{ kg/m}^3$) along the horizontal axes: а) x axis; б) y axis

первыми 8 с. Приведенные данные и качественное сравнение показывают хорошее совпадение результатов расчетов с экспериментальными данными. Наличие отклонений от экспериментальных данных может быть объяснено отсутствием модели учета выкатывания перегородки [25] и погрешностью измерений самого эксперимента.

Для подтверждения робастности алгоритма и согласованности результатов расчета при разных аспектных отношениях была проведена серия расчетов на сгущающихся по вертикальному направлению сетках. В расчетах использовались сетки 100×50 ячеек с $N_\kappa = 15 \cdot \kappa/2$ слоями по вертикали, где $\kappa \in \{2, 4, 8, 16\}$ — аспектное отношение. Число Куранта на всех сетках выбиралось равным 0.3 и искусственная скорость звука $c = \sqrt{gh} = 1.21$ м/с.

На рис. 6 приведены положения фронта гравитационного потока на разные моменты времени, черной линии соответствует $\kappa = 2$, красной — $\kappa = 4$, зеленой — $\kappa = 8$ и синей — $\kappa = 16$. Фронт гравитацион-

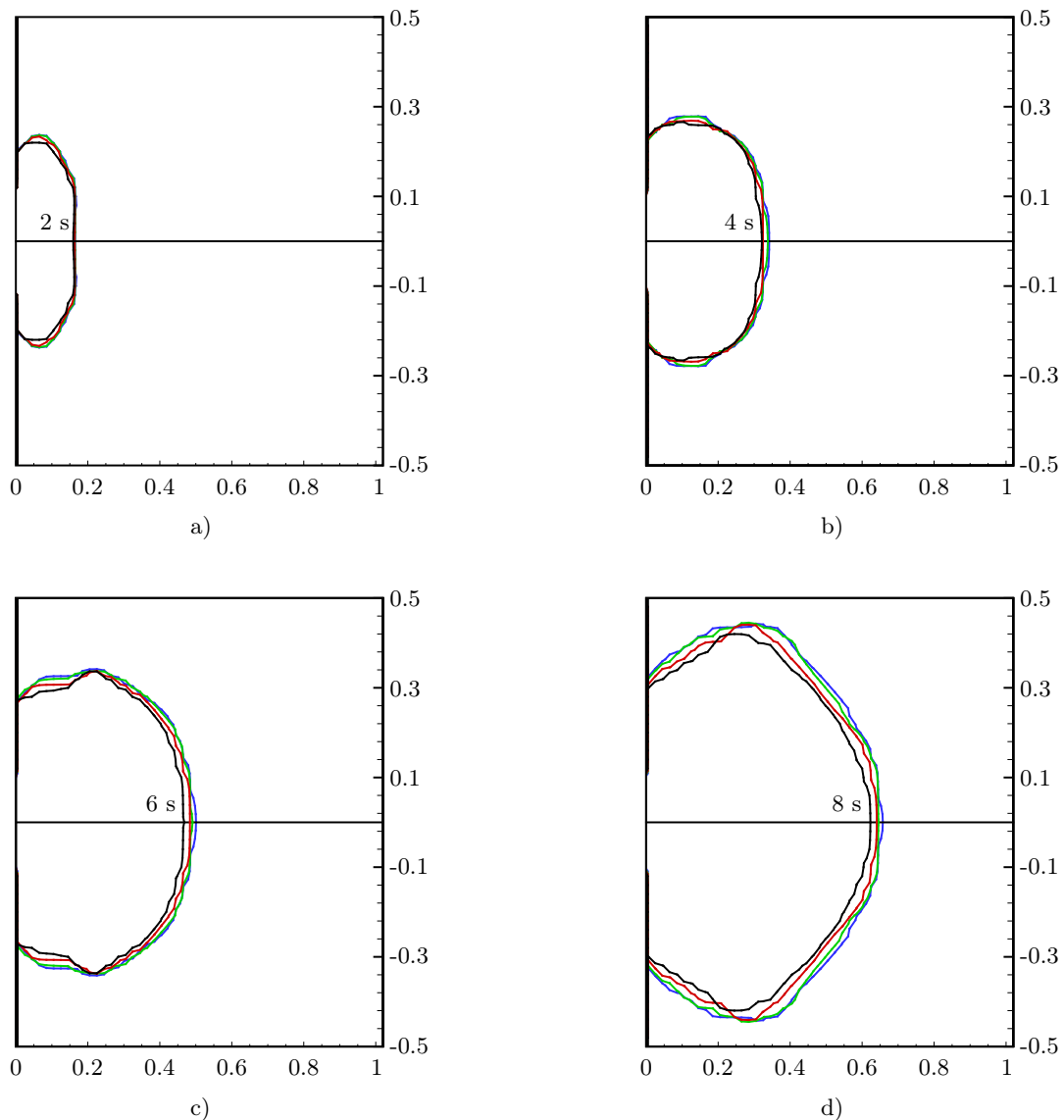


Рис. 6. Положение фронта в расчетах по модели CABARETI–NH эксперимента 1 ($\rho_1 = 1015$ кг/м³) на сетках с разным аспектным отношением κ : а) $t = 2$ с; б) $t = 4$ с; в) $t = 6$ с; д) $t = 8$ с. Черный — $\kappa = 2$, красный — $\kappa = 4$, зеленый — $\kappa = 8$, синий — $\kappa = 16$

Fig. 6. The position of the front in the calculations of experiment 1 ($\rho_1 = 1015$ kg/m³) using the CABARETI–NH model on grids with different aspect ratio κ : а) $t = 2$ s; б) $t = 4$ s; в) $t = 6$ s; д) $t = 8$ s. Black — $\kappa = 2$, red — $\kappa = 4$, green — $\kappa = 8$, blue — $\kappa = 16$



ного потока определялся аналогично рис. 4. Положения фронтов в расчетах отличаются на величину, сравнимую с длиной одной ячейки по горизонтали, что может быть объяснено погрешностью алгоритма вычисления изоповерхности и малым разрешением по вертикали для сетки при $\kappa = 2$.

Дополнительно были построены линии постоянной высоты поверхности гравитационного потока (изоповерхность $\rho = 1000.18 \text{ кг/м}^3$) на момент времени $t = 8 \text{ с}$ (рис. 7), что позволяет сравнить расчеты по вертикальному направлению. При всех аспектных отношениях наблюдается ядро потока, движущееся от границы раздела двух резервуаров в положительном направлении оси x высотой от 5 до 7.5 см при $t = 8 \text{ с}$. Так же в стороны от основного потока отходят возмущения, высоты которых составляют от 2.5 до 5 см при $t = 8 \text{ с}$.

Проведенные расчеты подтверждают робастность построенной явно-неявной схемы при разных аспектных соотношениях и показывают согласованность получаемых результатов.

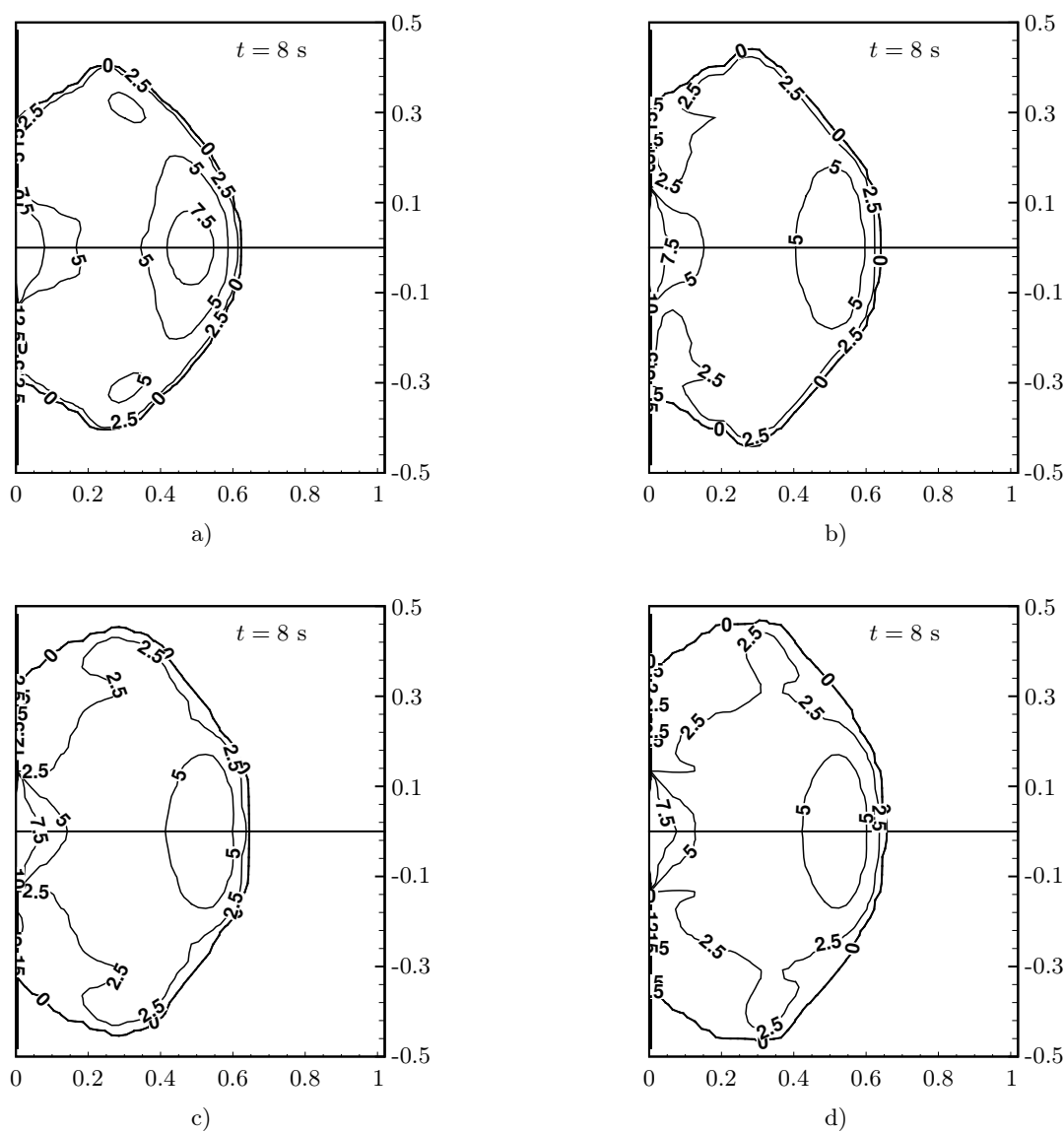


Рис. 7. Высота в см гравитационного потока на момент времени $t = 8 \text{ с}$ на сетках с разным аспектным отношением κ : а) $\kappa = 2$; б) $\kappa = 4$; в) $\kappa = 8$; д) $\kappa = 16$

Fig. 7. The height in cm of the gravitational flow at the time $t = 8 \text{ s}$ on grids with different aspect ratio κ : а) $\kappa = 2$; б) $\kappa = 4$; в) $\kappa = 8$; д) $\kappa = 16$

5. Заключение. В данной работе представлена явно-неявная модель CABARET–NH негидростатической динамики слабосжимаемой жидкости со свободной поверхностью, явная вдоль горизонтальных направлений и неявная по вертикали. Введенная неявность снимает ограничения на шаг по времени, определяемые вертикальным направлением. Описанный в статье метод гиперболической прогонки позволяет сохранить вычислительную эффективность явной схемы CABARET–NH [17].

В статье приводятся результаты валидации модели на лабораторных экспериментах динамики стратифицированной жидкости. Результаты расчетов показывают хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными данными. Проведенные расчеты подтверждают сохранение эффективности алгоритма на уровне явной схемы CABARET–NH.

В качестве дальнейшей работы авторы планируют полномасштабное моделирование течений в бассейне Черного моря.

Список литературы

1. Марчук Г.И., Дымнижов В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987.
2. Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. New York: Springer, 1987. doi 10.1007/978-1-4612-4650-3.
3. Müller P. The equations of oceanic motions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
4. Vallis G.K. Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
5. Головизнин В.М., Майоров Павел А., Майоров Петр А., Соловьев А.В. Новый численный алгоритм для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ // Морской гидрофизический журнал. 2019. 35, № 6. 600–620. doi 10.22449/0233-7584-2019-6-600-620.
6. Goloviznin V.M., Maiorov Pavel A., Maiorov Petr A., Solovjev A.V. Validation of the low dissipation computational algorithm CABARET–MFSH for multilayer hydrostatic flows with a free surface on the lock-release experiments // Journal of Computational Physics. 2022. 463, Article Id. 111239. doi 10.1016/j.jcp.2022.111239.
7. Casulli V. A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1999. 30, N 4. 425–440. doi 10.1002/(SICI)1097-0363(19990630)30:4<3C425::AID-FLD847%3E3.0.CO;2-D.
8. Yuan H., Wu C.H. An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. 46, N 7. 709–733. doi 10.1002/flid.778.
9. Matsumura Y., Hasumi H. Brine-driven eddies under sea ice leads and their impact on the arctic ocean mixed layer // Journal of Physical Oceanography. 2008. 38, N 1. 146–163. doi 10.1175/2007JP03620.1.
10. Skillingstad E.D., Smyth W.D., Crawford G.B. Resonant wind-driven mixing in the ocean boundary layer // Journal of Physical Oceanography. 2000. 30, N 8. 1866–1890. doi 10.1175/1520-0485(2000)030<3C1866:RWDMIT%3E2.0.CO;2.
11. Marshall J., Adcroft A., Hill C., et. al. A finite-volume, incompressible Navier Stokes model for studies of the ocean on parallel computers // Journal of Geophysical Research: Oceans. 1997. 102, N C3. 5753–5766. doi 10.1029/96JC02775.
12. Jones H., Marshall J. Convection with rotation in a neutral ocean: a study of open-ocean deep convection // Journal of Physical Oceanography. 1993. 23, N 6. 1009–1039. doi 10.1175/1520-0485(1993)023<3C1009:CWRIAN%3E2.0.CO;2.
13. Mahadevan A., Olinger J., Street R. A nonhydrostatic mesoscale ocean model. Part 1: well-posedness and scaling // Journal of Physical Oceanography. 1996. 26, N 9. 1868–1880. doi 10.1175/1520-0485(1996)026<3C1868:ANMOMP%3E2.0.CO;2.
14. Вольцингер Н.Е., Андросов А.А. Негидростатическое баротропно-бароклинное взаимодействие в проливе с горным рельефом // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. 6, № 3. 63–77. <http://hydrophysics.info/wp-content/uploads/2014/11/%D0%92%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%86%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B5%D1%80.pdf>.
15. Escalante C., de Luna T.M. A general non-hydrostatic hyperbolic formulation for Boussinesq dispersive shallow flows and its numerical approximation // Journal of Scientific Computing. 2020. 83, N 3. Article Number 62. doi 10.1007/s10915-020-01244-7.
16. Nakashima Y., Watanabe N., Nishikawa H. Hyperbolic Navier–Stokes solver for three-dimensional flows // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 4–8, 2016, San Diego, USA. <https://doi.org/10.2514/6.2016-1101>. Cited March 25, 2023.



17. Головизнин В.М., Майоров Петр А., Майоров Павел А., Соловьев А.В., Афанасьев Н.А. Явный численный алгоритм для уравнений негидростатической динамики жидкости на основе схемы КАБАРЕ // Математическое моделирование. 2023. **35** [принято к печати].
18. La Rocca M., Adduce C., Sciortino G., Pinzon A.B. Experimental and numerical simulation of three-dimensional gravity currents on smooth and rough bottom // *Physics of Fluids*. 2008. **20**, N 10. Article Id. 106603. doi [10.1063/1.3002381](https://doi.org/10.1063/1.3002381).
19. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Из-во Моск. ун-та, 2013. <http://lim.cs.msu.ru/index.php?id=87>. Cited March 25, 2023.
20. Martin J.C., Moyce W.J., Penney W.G., Price A.T., Thornhill C.K. Part IV. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A: Mathematical and Physical Sciences*. 1952. **244**, N 882. 312–324. doi [10.1098/rsta.1952.0006](https://doi.org/10.1098/rsta.1952.0006).
21. Hallworth M.A., Phillips J.C., Huppert H.E., Sparks R.S.J. Entrainment in turbulent gravity currents // *Nature*. 1993. **362**, N 6423. 829–831. doi [10.1038/362829a0](https://doi.org/10.1038/362829a0).
22. Gladstone C., Phillips J.C., Sparks R.S.J. Experiments on bidisperse, constant-volume gravity currents: propagation and sediment deposition // *Sedimentology*. 1998. **45**, N 5. 833–843. doi [10.1046/j.1365-3091.1998.00189.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-3091.1998.00189.x).
23. Longo S., Ungarish M., Di Federico V., Chiapponi L., Addona F. Gravity currents produced by constant and time varying inflow in a circular cross-section channel: experiments and theory // *Advances in Water Resources*. 2016. **90**. 10–23. doi [10.1016/j.advwatres.2016.01.011](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2016.01.011).
24. Amy L.A., Peakall J., Talling P.J. Density- and viscosity-stratified gravity currents: insight from laboratory experiments and implications for submarine flow deposits // *Sedimentary Geology*. 2005. **179**, N 1–2. 5–29. doi [10.1016/j.sedgeo.2005.04.009](https://doi.org/10.1016/j.sedgeo.2005.04.009).
25. Serchi F.G., Peakall J., Ingham D.B., Burns A.D. A numerical study of the triggering mechanism of a lock-release density current // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2012. **33**. 25–39. doi [10.1016/j.euromechflu.2011.12.004](https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2011.12.004).

Поступила в редакцию
 25 ноября 2022 г.

Принята к публикации
 10 марта 2023 г.

Информация об авторах

Василий Михайлович Головизнин — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация.

Петр Александрович Майоров — математик; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация.

Никита Александрович Афанасьев — ассистент; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация.

Павел Александрович Майоров — математик; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация.

Андрей Валерьевич Соловьев — к.ф.-м.н., вед. научн. сотр.; Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская, 52, 115191, Москва, Российская Федерация.

References

1. G. I. Marchuk, V. P. Dymnikov, and V. B. Zalesnyi, *Mathematical Models in Geophysical Hydrodynamics and Numerical Methods for Their Implementation* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1987) [in Russian].
2. J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics* (Springer, New York, 1987). doi [10.1007/978-1-4612-4650-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4650-3).

3. P. Müller, *The Equations of Oceanic Motions* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
4. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation* (Cambridge University Press, Cambridge, 2017).
5. V. M. Goloviznin, Pavel A. Maiorov, Petr A. Maiorov, and A. V. Solovjev, “New Numerical Algorithm for the Multi-Layer Shallow Water Equations Based on the Hyperbolic Decomposition and the CABARET Scheme,” *Morsk. Gidrofiz. Zh.* **35** (6), 600–620 (2019) [*J. Phys. Oceanogr.* **26** (6), 528–546 (2019)]. doi [10.22449/1573-160x-2019-6-528-546](https://doi.org/10.22449/1573-160x-2019-6-528-546).
6. V. M. Goloviznin, Pavel A. Maiorov, Petr A. Maiorov, and A. V. Solovjev, “Validation of the Low Dissipation Computational Algorithm CABARET–MFSH for Multilayer Hydrostatic Flows with a Free Surface on the Lock-Release Experiments,” *J. Comput. Phys.* **463**, Article Id. 111239 (2022). doi [10.1016/j.jcp.2022.111239](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111239).
7. V. Casulli, “A Semi-Implicit Finite Difference Method for Non-Hydrostatic, Free-Surface Flows,” *Int. J. Numer. Methods Fluids.* **30** (4), 425–440 (1999). doi [10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19990630\)30:4%3C425::AID-FLD847%3E3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19990630)30:4%3C425::AID-FLD847%3E3.0.CO;2-D).
8. H. Yuan and C. H. Wu, “An Implicit Three-Dimensional Fully Non-Hydrostatic Model for Free-Surface Flows,” *Int. J. Numer. Methods Fluids.* **46** (7), 709–733 (2004). doi [10.1002/flid.778](https://doi.org/10.1002/flid.778).
9. Y. Matsumura and H. Hasumi, “Brine-Driven Eddies under Sea Ice Leads and Their Impact on the Arctic Ocean Mixed Layer,” *J. Phys. Oceanogr.* **38** (1), 146–163 (2008). doi [10.1175/2007JP03620.1](https://doi.org/10.1175/2007JP03620.1).
10. E. D. Skillingstad, W. D. Smyth, and G. B. Crawford, “Resonant Wind-Driven Mixing in the Ocean Boundary Layer,” *J. Phys. Oceanogr.* **30** (8), 1866–1890 (2000). doi [10.1175/1520-0485\(2000\)030%3C1866:RWDMIT%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2000)030%3C1866:RWDMIT%3E2.0.CO;2).
11. J. Marshall, A. Adcroft, C. Hill, et. al., “A Finite-Volume, Incompressible Navier Stokes Model for Studies of the Ocean on Parallel Computers,” *J. Geophys. Res.: Oceans.* **102** (C3), 5753–5766 (1997). doi [10.1029/96JC02775](https://doi.org/10.1029/96JC02775).
12. H. Jones and J. Marshall, “Convection with Rotation in a Neutral Ocean: A Study of Open-Ocean Deep Convection,” *J. Phys. Oceanogr.* **23** (6), 1009–1039 (1993). doi [10.1175/1520-0485\(1993\)023%3C1009:CWRIAN%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1993)023%3C1009:CWRIAN%3E2.0.CO;2).
13. A. Mahadevan, J. Oliger, and R. Street, “A Nonhydrostatic Mesoscale Ocean Model. Part 1: Well-Posedness and Scaling,” *J. Phys. Oceanogr.* **26** (9), 1868–1880 (1996). doi [10.1175/1520-0485\(1996\)026%3C1868:ANMOMP%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1996)026%3C1868:ANMOMP%3E2.0.CO;2).
14. N. E. Vol’tsinger and A. A. Androsov, “Nonhydrostatic Barotropic-Baroclinic Interaction in Strait with Mountain Relief,” *Fundam. Prikl. Gidrofiz.* **6** (3), 63–77 (2013).
15. C. Escalante and T. M. de Luna, “A General Non-hydrostatic Hyperbolic Formulation for Boussinesq Dispersive Shallow Flows and Its Numerical Approximation,” *J. Sci. Comput.* **83** (3), Article Number 62 (2020). doi [10.1007/s10915-020-01244-7](https://doi.org/10.1007/s10915-020-01244-7).
16. Y. Nakashima, N. Watanabe, and H. Nishikawa, “Hyperbolic Navier–Stokes Solver for Three-Dimensional Flows,” in *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, San Diego, USA, January 4–8, 2016*. <https://doi.org/10.2514/6.2016-1101>. Cited March 25, 2023.
17. V. M. Goloviznin, Petr A. Maiorov, Pavel A. Maiorov, et. al., “Explicit Numerical Algorithm for Non-Hydrostatic Fluid Dynamics Equations Based on the CABARET Scheme,” *Mat. Model.* **35** (2023) [in press].
18. M. La Rocca, C. Adduce, G. Sciortino, and A. B. Pinzon, “Experimental and Numerical Simulation of Three-Dimensional Gravity Currents on Smooth and Rough Bottom,” *Phys. Fluids* **20** (10), Article Id. 106603 (2008). doi [10.1063/1.3002381](https://doi.org/10.1063/1.3002381).
19. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *Novel Algorithms of Computational Hydrodynamics for Multicore Computing* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
20. J. C. Martin, W. J. Moyce, W. G. Penney, et. al., “Part IV. An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane,” *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A.* **244** (882), 312–324 (1952). doi [10.1098/rsta.1952.0006](https://doi.org/10.1098/rsta.1952.0006).
21. M. A. Hallworth, J. C. Phillips, H. E. Huppert, and R. S. J. Sparks, “Entrainment in Turbulent Gravity Currents,” *Nature* **362** (6423), 829–831 (1993). doi [10.1038/362829a0](https://doi.org/10.1038/362829a0).
22. C. Gladstone, J. C. Phillips, and R. S. J. Sparks, “Experiments on Bidisperse, Constant-Volume Gravity Currents: Propagation and Sediment Deposition,” *Sedimentology* **45** (5), 833–843 (1998). doi [10.1046/j.1365-3091.1998.00189.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-3091.1998.00189.x).
23. S. Longo, M. Ungarish, V. Di Federico, et. al., “Gravity Currents Produced by Constant and Time Varying Inflow in a Circular Cross-Section Channel: Experiments and Theory,” *Adv. Water Resour.* **90**, 10–23 (2016). doi [10.1016/j.advwatres.2016.01.011](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2016.01.011).



24. L. A. Amy, J. Peakall, and P. J. Talling, “Density-and Viscosity-Stratified Gravity Currents: Insight from Laboratory Experiments and Implications for Submarine Flow Deposits,” *Sediment. Geol.* **179** (1–2), 5–29 (2005). doi [10.1016/j.sedgeo.2005.04.009](https://doi.org/10.1016/j.sedgeo.2005.04.009).
25. F. G. Serchi, J. Peakall, D. B. Ingham, and A. D. Burns, “A Numerical Study of the Triggering Mechanism of a Lock-Release Density Current,” *Eur. J. Mech. – B/Fluids* **33**, 25–39 (2012). doi [10.1016/j.euromechflu.2011.12.004](https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2011.12.004).

Received
November 25, 2022

Accepted for publication
March 10, 2023

Information about the authors

Vasily M. Goloviznin — Dr. Sci., Head of Laboratory; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.

Petr A. Maiorov — Mathematician; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.

Nikita A. Afanasiev — Assistant; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.

Pavel A. Maiorov — Mathematician; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia.

Andrey V. Solovjev — Ph.D., Leading Scientist; Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, Bolshaya Tulsкая ulitsa, 52, 115191, Moscow, Russia.