



doi 10.26089/NumMet.v24r106

УДК 550.34.01

Численное решение уравнений Био анизотропной пороупругой флюидонасыщенной среды в квазистатической постановке для численного решения задачи апскейлинга

С. А. Соловьев

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-9984-8367, e-mail: solovev@ipgg.sbras.ru

М. А. Новиков

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-6373-3370, e-mail: solovev@ipgg.sbras.ru

В. В. Лисица

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru

Аннотация: Представлен алгоритм численного моделирования квазистатической нагрузки пористого флюидонасыщенного образца для решения задачи апскейлинга трещиновато-пористой флюидонасыщенной среды. В результате апскейлинга восстанавливается анизотропная однородная вязкоупругая эквивалентная среда, определяемая комплекснозначным частотно-зависимым тензором жесткости. Компоненты восстановленного тензора жесткости эквивалентной среды используются для оценки частотно-зависимого сейсмического затухания и фазовой скорости сейсмических волн. Численный апскейлинг включает в себя численное решение краевой задачи для системы уравнений Био анизотропной пороупругой флюидонасыщенной среды в частотной области для набора частот и различных граничных условий. Численное решение системы уравнений Био основано на конечно-разностной аппроксимации уравнений в квазистатической постановке и проводится с использованием прямого решателя результирующей СЛАУ. Используемый прямой решатель позволяет эффективно решать СЛАУ для набора правых частей, что необходимо при численном апскейлинге. Представленная реализация алгоритма позволяет численно решать двумерную задачу апскейлинга на расчетной сетке с размерами до 2000×2000 узлов на персональном компьютере, что обеспечивает возможность восстанавливать эквивалентную вязкоупругую модель для детализированных репрезентативных образцов трещиновато-пористой среды. Для демонстрации применимости алгоритма выполнено несколько наборов численных экспериментов, направленных на выявление влияния связности трещин и микромасштабной анизотропии пороупругого материала внутри трещин на затухание, вызванное индуцированными волной потоками флюидов, и дисперсию сейсмической волны в сложной трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде.

Ключевые слова: пороупругость, теория Био, индуцированные волной потоки флюидов, затухание, квазистатическое нагружение, апскейлинг, конечные разности.

Благодарности: Соловьев С.А. разработал алгоритм решения системы уравнений Био в квазистатической постановке в рамках работ по государственному заданию 0266–2022–0022. Новиков М.А. провел численные эксперименты, Лисица В.В. выполнил анализ результатов при поддержке РФФ грант № 22–11–00004.

Для цитирования: Соловьев С.А., Новиков М.А., Лисица В.В. Численное решение уравнений Био анизотропной пороупругой флюидонасыщенной среды в квазистатической постановке для численного решения задачи апскейлинга // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 1. 67–88. doi 10.26089/NumMet.v24r106.

Numerical solution of anisotropic Biot equations of poroelastic fluid-saturated media in quasi-static state for numerical upscaling

Sergey A. Solovyev

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0001-9984-8367, e-mail: solovev@ipgg.sbras.ru

Mikhail A. Novikov

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0002-6373-3370, e-mail: solovev@ipgg.sbras.ru

Vadim V. Lisitsa

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru

Abstract: In this paper we present the numerical algorithm for quasi-static loading of porous fluid-saturated sample used to solve the numerical upscaling problem for fractured porous fluid-saturated media. Numerical upscaling is aimed to recover homogeneous anisotropic viscoelastic media, which is equivalent to the initial poroelastic media and defined by complex-valued frequency-dependent stiffness tensor. We apply recovered stiffness tensor components to estimate both frequency-dependent attenuation and phase velocity of seismic wave. Numerical upscaling procedure includes numerical solution of boundary-value problem for Biot poroelasticity equations for anisotropic fluid-saturated media in the frequency domain for a set of frequencies and different boundary conditions. Numerical solution of Biot system of equations is based on finite-difference approximation of equations in quasi-static form, and for resulting SLAE we apply direct solver. Applied direct solver support effective solution of SLAE for several right-hand vectors essential for numerical upscaling. Presented algorithm realization allows us solve 2D problem on computational grid of 2000×2000 nodes using a single machine, what makes it capable to perform the upscaling for detailed representative fractured porous samples. To demonstrate the applicability of the algorithm we perform several sets of numerical experiments aimed at the investigation of fracture connectivity and microscale anisotropy effects on wave-induced fluid flow attenuation and phase velocity of seismic wave propagating in fractured porous fluid-saturated media.

Keywords: poroelasticity, Biot theory, wave-induced fluid flow, attenuation, quasi-static loading, upscaling, finite differences.

Acknowledgements: S. Solovyev developed the numerical algorithm under support of State budget No. 0266–2022–0022. M. Novikov performed numerical experiments and V. Lisitsa performed the analysis of the results under the support of RSCF grant No. 22–11–00004.

For citation: S. A. Solovyev, M. A. Novikov, and V. V. Lisitsa, “Numerical solution of anisotropic Biot equations of poroelastic fluid-saturated media in quasi-static state for numerical upscaling,” *Numerical Methods and Programming*. 24 (1), 67–88 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r106.



1. Введение. Актуальные в последнее время исследования в областях добычи геотермальной энергии [1, 2], захоронения сжиженного углекислого газа [3, 4], повышения эффективности разработки нефтяных и газовых месторождений [5] постоянно требуют разработки и применения новых подходов в сейсмическом мониторинге. К примеру, закачка парниковых газов в трещиноватые карбонатные коллекторы вызывает ряд физико-химических эффектов: частичное растворение породы, вторичную минерализацию, изменение мобильности нефти и др. [6]. Все эти эффекты приводят к существенным изменениям транспортных свойств породы и мобильности флюида в ней и, тем самым, значительно влияют на выработку резервуара. При этом до сих пор не выявлены прямые зависимости между проницаемостью в резервуаре и сейсмическими характеристиками, в том числе кинематическими параметрами, получаемыми по результатам сейсмического мониторинга. Эти зависимости могут быть установлены и достоверно оценены только при помощи моделирования мультифизичных процессов, приводящих к появлению частотно-зависимых динамических эффектов при распространении сейсмических волн.

Сейсмическая волна, проходя в неоднородной пористой флюидонасыщенной среде, приводит к возникновению перепадов давления как на границах раздела сред, так и на границах раздела неоднородностей и вмещающей породы. Резкий перепад давления влечет за собой процесс диффузии давления в среде, который обеспечивается потоками флюида, возникающими в трещиновато-пористой среде на различных масштабах. В современных исследованиях рассматриваются соответствующие капиллярные флюидопотоки в поровом пространстве на микромасштабе (squirt flow в англоязычной литературе) [7–9] и флюидопотоки между неоднородностями и вмещающей средой на мезомасштабе [10–14]. Причем микромасштабные флюидопотоки интенсивно проявляются лишь на очень высоких частотах (порядка МГц), а мезомасштабные флюидопотоки проявляются в более широком диапазоне частот (от Гц до кГц) и потому наиболее актуальны для исследований, направленных на повышение качества интерпретации данных сейсмического мониторинга. Последние в литературе принято называть индуцированными волной потоками флюида (от английского wave-induced fluid flow, WIFF) и разделять на два типа [10]. Мезомасштабные флюидопотоки первого типа возникают между вмещающей средой и трещинами вследствие различия фильтрационно-емкостных и упругих свойств формирующих их пород. Второй тип мезомасштабных флюидопотоков, индуцированных сейсмической волной, возникает между связанными трещинами, а его интенсивность определяется в основном связностью и свойствами породы-наполнителя трещин [15]. Таким образом, различие характерных частот мезомасштабных флюидопотоков двух типов и наиболее значимых факторов, влияющих на их интенсивность, дает возможность рассматривать частотно-зависимое затухание сейсмической волны в трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде как индикатор флюидонасыщения и мобильности флюида.

Теоретические исследования влияния свойств трещиноватой среды на дисперсию и частотно-зависимое затухание сейсмической волны в ней вследствие возникающих флюидопотоков (FB-WIFF, FF-WIFF) [13, 15–17] демонстрируют значительное влияние многих факторов (характерного размера трещин, проницаемости породы, угла наклона трещин и др.) на интенсивность флюидопотоков как между вмещающей породой и трещинами, так и между связанными трещинами, однако связность трещин в моделях среды ограничивается попарными пересечениями трещин двух разных ориентаций, что не обеспечивает глобальной связности трещин во всей модели. Большинство численных исследований также использует относительно простые трещиноватые модели среды лишь с попарными пересечениями трещин [10–12], а имеющиеся работы с использованием сложных моделей трещиноватой среды с глобальной связностью [18, 19] либо не предоставляют возможности определения четкой количественной зависимости между связностью трещин и затуханием, либо такая зависимость определяется в ограниченном диапазоне частот, обусловленном требованиями к размеру расчетной области. Одно из направлений для расширения рассматриваемого частотного диапазона — разработка эффективного алгоритма численного апскейлинга неоднородной пороупругой флюидонасыщенной среды, т.е. построения эквивалентной модели анизотропной вязкоупругой среды [20]. Причем апскейлинг должен применяться к репрезентативным моделям среды с размерами много большими характерного размера неоднородностей в этой среде [21, 22]. Для моделей с перколирующими системами трещин с глобальной связностью репрезентативный размер расчетной области может на два порядка превышать характерный размер отдельной трещины. Таким образом, соответствующие расчетные сетки могут содержать по несколько тысяч узлов в направлении каждой координатной оси.

В работе представлен численный алгоритм апскейлинга анизотропной неоднородной пороупругой флюидонасыщенной среды, основанный на системе уравнений Био в квазистатической постановке с использованием конечно-разностной аппроксимации на разнесенных сетках. Апскейлинг производится по

результатам набора численных экспериментов по нагружению образца пороупругой флюидонасыщенной среды. Для решения результирующих СЛАУ с одинаковой матрицей и несколькими правыми частями используется эффективный прямой решатель. По результатам расчетов полей напряженно-деформированного состояния образца восстанавливается эффективный тензор жесткости эквивалентной вязкоупругой среды, а также частотно-зависимые затухание и скорость Р- и S-волн. Кроме того, с использованием разработанного алгоритма проведен ряд численных экспериментов по численному апскейлингу трещиноватых сред для оценки влияния глобальной связности трещин и микромасштабной анизотропии на сейсмическое затухание.

2. Постановка задачи апскейлинга. В работе решается задача численного апскейлинга модели неоднородной пористой флюидонасыщенной среды. Пусть исходная среда описывается системой уравнений Био [23, 24]. Необходимо построить такую эквивалентную модель однородной вязкоупругой среды, что фазовая скорость и затухание плоских волн (кроме медленной продольной волны Био), распространяющихся в рассматриваемых моделях сред, совпадают для исходной пороупругой и эквивалентной вязкоупругой моделей. Кроме того, совпадение скорости и затухания требуется в низкочастотном диапазоне, а именно на таких частотах, для которых длина волны много больше, чем характерный размер неоднородности в пороупругой среде, и которые меньше частоты Био. Такое ограничение позволяет рассматривать систему уравнений Био для пороупругой флюидонасыщенной среды и систему уравнений вязкоупругости в квазистатической постановке.

Сформулируем постановку задачи следующим образом. Пусть в ограниченной области Ω определены два оператора $B(M(x))[\mathbf{u}(x, \omega)] = F(x, \omega)$ и $V(\tilde{M})[\mathbf{u}(x, \omega)] = G(x, \omega)$, определяющие систему уравнений Био и систему уравнений вязкоупругости соответственно. Здесь \mathbf{u} — вектор смещения, \mathbf{x} — радиус-вектор точки области, ω — частота. Пусть модель пороупругой флюидонасыщенной среды $M(\mathbf{x})$ неоднородна и статистически стационарна. Необходимо найти такую модель однородной вязкоупругой среды \tilde{M} , что результаты действия операторов на плоскую волну $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{xk})}$ будут близки друг к другу, т.е.

$$\left\| B(M(x)) \left[\mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{xk})} \right] - V(\tilde{M}) \left[\mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{xk})} \right] \right\| \leq \varepsilon(\omega), \quad \omega \in [-\omega_{\max}, \omega_{\max}].$$

Отметим, что классическая постановка формулируется при условии $\omega = 0$, что соответствует стационарным решениям задачи. В случае уравнений упругости задача решается аналитически для слоистых моделей $M(\mathbf{x})$ [25, 26], а для неоднородных моделей со сложной структурой неоднородности решается численно [27–29].

2.1. Система уравнений Био в квазистатической постановке. Рассмотрим квазистатическое приближение уравнений Био в двумерном случае. Квазистатическое приближение имеет смысл при описании процесса диффузии давления в пороупругой флюидонасыщенной анизотропной среде, когда рассматриваемая частота достаточно низкая [23, 24, 30]. В декартовых координатах система уравнений Био в квазистатической постановке имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \alpha_1 M \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[C_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \alpha_3 M \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[M \left(\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + M \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) \right] = i\omega \frac{\eta}{\kappa_1} w_1, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[M \left(\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + M \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) \right] = i\omega \frac{\eta}{\kappa_3} w_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_3)^T$ — вектор смещения твердых частиц упругого скелета, $\mathbf{w} = (w_1, w_3)^T$ — вектор смещения флюида относительно скелета, C — тензор жесткости флюидонасыщенного скелета, α_1, α_3, M — упругие модули Био, определяемые объемными модулями сжатия скелета и флюида, η — динамическая вязкость, κ_1, κ_3 — параметры проницаемости скелета в направлениях координатных осей, ω — частота. Система уравнений описывает пороупругую флюидонасыщенную среду в замкнутой области Ω (рис. 1 а).

Для доопределения задачи необходимо задать граничные условия на границе области $\partial\Omega$. На границе задаются следующие условия:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2)$$



Здесь \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе, ϕ — функция, достаточно гладкая в направлении, перпендикулярном нормали, а σ — тензор напряжений упругого скелета, связанный с тензором деформаций ε через тензор жесткости C законом Гука:

$$\sigma = C\varepsilon.$$

Поскольку рассматривается ортотропная среда, покомпонентная запись соотношений между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= C_{13}\varepsilon_{11} + C_{33}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{13} &= 2C_{55}\varepsilon_{13}. \end{aligned} \quad (3)$$

С использованием определения тензора деформаций уравнения (3) переписываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \sigma_{33} &= C_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \sigma_{13} &= C_{55} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

2.2. Эффективная вязкоупругая среда. Система уравнений однородной анизотропной вязкоупругой среды в квазистатической постановке имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\hat{C}_{11}(\omega) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \hat{C}_{13}(\omega) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\hat{C}_{55}(\omega) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\hat{C}_{55}(\omega) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\hat{C}_{13}(\omega) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \hat{C}_{33}(\omega) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где описывается поле вектора смещения $\mathbf{v} = (v_1, v_3)^T$ с использованием частотно-зависимого эффективного тензора жесткости \hat{C} . Система уравнений (4) описывает вязкоупругую среду в области Ω и дополняется условием на границе

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \psi \quad (5)$$

на тензор напряжений $\hat{\sigma}$ вязкоупругого материала, где функция ψ обладает достаточной гладкостью в направлении касательной к границе (рис. 1 б). Поскольку на тензор жесткости не накладывается условие симметрии, закон Гука записывается в общем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11} &= \hat{C}_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \hat{C}_{13} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \hat{C}_{15} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \hat{C}_{11} \hat{\varepsilon}_{11} + \hat{C}_{13} \hat{\varepsilon}_{33} + 2\hat{C}_{15} \hat{\varepsilon}_{13}, \\ \hat{\sigma}_{33} &= \hat{C}_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \hat{C}_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \hat{C}_{35} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \hat{C}_{13} \hat{\varepsilon}_{11} + \hat{C}_{33} \hat{\varepsilon}_{33} + 2\hat{C}_{35} \hat{\varepsilon}_{13}, \\ \hat{\sigma}_{13} &= \hat{C}_{15} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \hat{C}_{35} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \hat{C}_{55} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \hat{C}_{15} \hat{\varepsilon}_{11} + \hat{C}_{35} \hat{\varepsilon}_{33} + 2\hat{C}_{55} \hat{\varepsilon}_{13}. \end{aligned} \quad (6)$$

Исходя из описанных систем уравнений, постановку задачи апскейлинга можно сформулировать следующим образом. Пусть пороупругая среда в области Ω удовлетворяет системе уравнений пороупругости в квазистатической постановке (1), а на границе $\partial\Omega$ выполняются граничные условия (2). Необходимо построить такую модель вязкоупругой среды, что тензор деформаций $\hat{\varepsilon}$ вязкоупругой среды, удовлетворяющей уравнениям (4) в области Ω вместе с граничным условием (5) на $\partial\Omega$, будет совпадать с тензором ε пороупругой среды, соответствующей уравнениям (1) для любых соответствующих граничных условий (2) и (5).

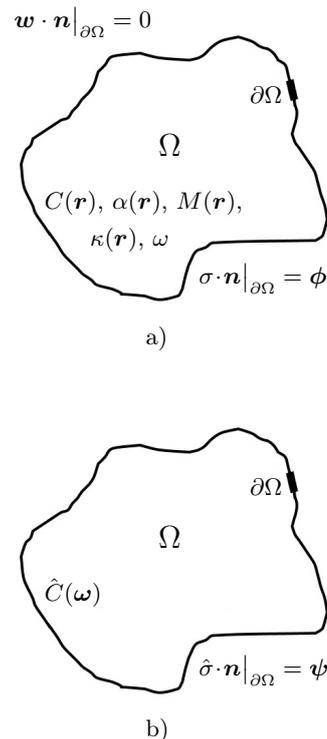


Рис. 1. Схема вычислительной области: а) анизотропная пороупругая среда; б) эффективная вязкоупругая среда

Fig. 1. Computational domain sketch: a) anisotropic poroelastic media, b) effective viscoelastic media

3. Оценка эффективного тензора жесткости. Пусть $\mathbf{u}(\omega, \mathbf{x})$ — решение краевой задачи (1), (2), $\varepsilon(\omega, \mathbf{x})$, $\sigma(\omega, \mathbf{x})$ — соответственно тензоры деформации и напряжений. Определим осредненные компоненты тензоров деформации и напряжений по формулам

$$E_{ij}(\omega) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} C_{ijkl}(\mathbf{x}) \sigma_{kl}(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где $V = \int_{\Omega} d\mathbf{x}$ — площадь области Ω . Аналогично, осредненные деформации и напряжения краевой задачи (4), (5) выражаются по формулам

$$\hat{E}_{ij}(\omega) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$\hat{S}_{ij}(\omega) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \hat{C}_{ijkl}(\omega) \hat{\sigma}_{kl}(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Из условия однородности вязкоупругой среды, т.е. независимости \hat{C}_{ijkl} от пространственных координат следует, что

$$\hat{S}_{ij}(\omega) = \hat{C}_{ijkl}(\omega) \frac{1}{V} \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{kl}(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{C}_{ijkl}(\omega) \hat{E}_{kl}(\omega).$$

Из требования совпадения средних напряжений и деформаций

$$\hat{E}_{ij} = E_{ij}, \quad \hat{S}_{ij} = S_{ij},$$

следует соотношение

$$S_{ij} = \hat{C}_{ijkl}(\omega) E_{kl}, \tag{7}$$

которое представляет собой СЛАУ относительно восстанавливаемых компонент эффективного тензора жесткости \hat{C}_{ijkl} .

Поскольку тензор \hat{C} произволен, необходимо восстановить все его девять компонент. Однако по результатам решения одной краевой задачи (1) с заданным граничным условием (2) система уравнений (7) состоит из трех соотношений для трех компонент тензоров напряжений и деформаций и является недоопределенной системой трех уравнений относительно девяти неизвестных компонент \hat{C}_{ijkl} . Таким образом, для доопределения СЛАУ необходимо решить три задачи с линейно независимыми граничными условиями. В итоге доопределенная СЛАУ для нахождения \hat{C}_{ijkl} по результатам решения трех линейно независимых краевых задач имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{11}^m &= \hat{C}_{11} E_{11}^m + \hat{C}_{13} E_{33}^m + \hat{C}_{15} E_{13}^m, \\ S_{33}^m &= \hat{C}_{31} E_{11}^m + \hat{C}_{33} E_{33}^m + \hat{C}_{35} E_{13}^m, \\ S_{13}^m &= \hat{C}_{51} E_{11}^m + \hat{C}_{53} E_{33}^m + \hat{C}_{55} E_{13}^m, \end{aligned} \tag{8}$$

где $m = 1, 2, 3$.

С использованием полученных решением системы уравнений (8) компонент тензора \hat{C} выражаются частотно-зависимые фазовые скорости сейсмической волны в направлении координатных осей и величина, обратная добротности, показывающая относительное падение амплитуды волны за период [20, 31]:

$$\begin{aligned} V_{p1} &= \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\hat{C}_{11}}{\rho}}, & V_{p3} &= \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\hat{C}_{33}}{\rho}}, & V_s &= \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\hat{C}_{55}}{\rho}}, \\ \frac{1}{Q_{p1}} &= \frac{\operatorname{Im} \hat{C}_{11}}{\operatorname{Re} \hat{C}_{11}}, & \frac{1}{Q_{p3}} &= \frac{\operatorname{Im} \hat{C}_{33}}{\operatorname{Re} \hat{C}_{33}}, & \frac{1}{Q_s} &= \frac{\operatorname{Im} \hat{C}_{55}}{\operatorname{Re} \hat{C}_{55}}, \end{aligned}$$

где ρ — плотность.



3.1. Постановка краевых задач для восстановления эффективного тензора жесткости.

Для формирования системы (8) система уравнений Био в квазистатической постановке рассматривается в прямоугольной области $\Omega = [L_1^1, L_2^1] \times [L_1^3, L_2^3]$. Следовательно, граничное условие (2) в покомпонентной форме имеет вид:

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi_{11} \\ -\phi_{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = 0, \quad x_1 = L_1^1,$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = 0, \quad x_1 = L_2^1,$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi_{13} \\ -\phi_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = 0, \quad x_3 = L_1^3,$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = 0, \quad x_3 = L_2^3.$$

Для получения трех линейно независимых решений граничные условия для трех краевых задач (1), (2) задаются следующим образом:

- Задача 1 (одноосная нагрузка вдоль оси Ox_1): $\phi_{11} = 1, \phi_{33} = 0, \phi_{13} = 0$;
- Задача 2 (одноосная нагрузка вдоль оси Ox_3): $\phi_{11} = 0, \phi_{33} = 1, \phi_{13} = 0$;
- Задача 3 (сдвиговое нагружение): $\phi_{11} = 0, \phi_{33} = 0, \phi_{13} = 1$.

4. Алгоритм численного решения задачи апскейлинга.

4.1. Конечно-разностная аппроксимация уравнений Био. Для численного решения краевых задач система уравнений (1) с граничными условиями (2) аппроксимируется конечно-разностной схемой на разнесенных сетках, широко используемых при сейсмическом моделировании [32–34], с равномерными шагами h_1 и h_3 в направлении осей Ox_1 и Ox_3 соответственно. Расчетная сетка состоит из групп узлов $(x_1)_{j_1} = h_1 j_1$ и $(x_3)_{j_3} = h_3 j_3$ с целыми индексами, а также узлов $(x_1)_{j_1+1/2} = h_1(j_1 + 1/2)$ и $(x_3)_{j_3+1/2} = h_3(j_3 + 1/2)$, где j_1, j_3 — целые. В этих группах узлов определены компоненты решения системы (1) $(u_1)_{j_1+1/2, j_3}, (w_1)_{j_1+1/2, j_3}, (u_3)_{j_1, j_3+1/2}, (w_3)_{j_1, j_3+1/2}$, т.е. компоненты векторов смещения твердых частиц и флюида вдоль оси Ox_1 определяются в узлах с дробным индексом по оси Ox_1 , а компоненты смещения вдоль оси Ox_3 — в узлах с дробным индексом по оси Ox_3 . В узлах с двумя целыми индексами определяются нормальные напряжения и деформации, а касательные напряжения и деформации определяются в узлах с двумя дробными индексами. Кроме того, параметры среды заданы в узлах с целыми индексами, и необходимые для аппроксимации уравнений осреднения этих параметров вычисляются в соответствующих узлах с дробными индексами. Частные производные аппроксимируются со вторым порядком центральными разностями:

$$D_1[f]_{J_1, J_3} = \frac{f_{J_1+1/2, J_3} - f_{J_1-1/2, J_3}}{h_1},$$

$$D_3[f]_{J_1, J_3} = \frac{f_{J_1, J_3+1/2} - f_{J_1, J_3-1/2}}{h_3},$$

где f — компонента вектора решения, J_1 и J_3 принимают как целые, так и дробные значения в соответствии с узлом, в котором аппроксимируется производная.

С использованием аппроксимации производных конечно-разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений (1), принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(C_{11})_{j_1+1,j_3} D_1[u_1]_{j_1+1,j_3} - (C_{11})_{j_1,j_3} D_1[u_1]_{j_1,j_3}}{h_1} + \frac{(C_{13})_{j_1+1,j_3} D_3[u_3]_{j_1+1,j_3} - (C_{13})_{j_1,j_3} D_3[u_3]_{j_1,j_3}}{h_1} + \\
 & + \frac{(\alpha_1 M)_{j_1+1,j_3} D_1[w_1]_{j_1+1,j_3} - (\alpha_1 M)_{j_1,j_3} D_1[w_1]_{j_1,j_3}}{h_1} + \frac{(\alpha_1 M)_{j_1+1,j_3} D_3[w_3]_{j_1+1,j_3} - (\alpha_1 M)_{j_1,j_3} D_3[w_3]_{j_1,j_3}}{h_1} + \\
 & + \frac{(C_{55})_{j_1+1/2,j_3+1/2} D_1[u_3]_{j_1+1/2,j_3+1/2} - (C_{55})_{j_1+1/2,j_3-1/2} D_1[u_3]_{j_1+1/2,j_3-1/2}}{h_3} + \\
 & + \frac{(C_{55})_{j_1+1/2,j_3+1/2} D_3[u_1]_{j_1+1/2,j_3+1/2} - (C_{55})_{j_1+1/2,j_3-1/2} D_3[u_1]_{j_1+1/2,j_3-1/2}}{h_3} = 0, \\
 \\
 & \frac{(C_{13})_{j_1,j_3+1} D_1[u_1]_{j_1,j_3+1} - (C_{13})_{j_1,j_3} D_1[u_1]_{j_1,j_3}}{h_3} + \frac{(C_{33})_{j_1,j_3+1} D_3[u_3]_{j_1,j_3+1} - (C_{33})_{j_1,j_3} D_3[u_3]_{j_1,j_3}}{h_3} + \\
 & + \frac{(\alpha_3 M)_{j_1,j_3+1} D_1[w_1]_{j_1,j_3+1} - (\alpha_3 M)_{j_1,j_3} D_1[w_1]_{j_1,j_3}}{h_3} + \frac{(\alpha_3 M)_{j_1,j_3+1} D_3[w_3]_{j_1,j_3+1} - (\alpha_3 M)_{j_1,j_3} D_3[w_3]_{j_1,j_3}}{h_3} + \\
 & + \frac{(C_{55})_{j_1+1/2,j_3+1/2} D_1[u_3]_{j_1+1/2,j_3+1/2} - (C_{55})_{j_1-1/2,j_3+1/2} D_1[u_3]_{j_1-1/2,j_3+1/2}}{h_1} + \\
 & + \frac{(C_{55})_{j_1+1/2,j_3+1/2} D_3[u_1]_{j_1+1/2,j_3+1/2} - (C_{55})_{j_1-1/2,j_3+1/2} D_3[u_1]_{j_1-1/2,j_3+1/2}}{h_1} = 0, \\
 \\
 & \frac{(\alpha_1 M)_{j_1+1,j_3} D_1[u_1]_{j_1+1,j_3} - (\alpha_1 M)_{j_1,j_3} D_1[u_1]_{j_1,j_3}}{h_1} + \frac{(\alpha_3 M)_{j_1+1,j_3} D_3[u_3]_{j_1+1,j_3} - (\alpha_3 M)_{j_1,j_3} D_3[u_3]_{j_1,j_3}}{h_1} + \\
 & + \frac{M_{j_1+1,j_3} D_1[w_1]_{j_1+1,j_3} - M_{j_1,j_3} D_1[w_1]_{j_1,j_3}}{h_1} + \frac{M_{j_1+1,j_3} D_3[w_3]_{j_1+1,j_3} - M_{j_1,j_3} D_3[w_3]_{j_1,j_3}}{h_1} = \\
 & = i\omega (\eta/\kappa_1)_{j_1+1/2,j_3} (w_1)_{j_1+1/2,j_3}, \\
 \\
 & \frac{(\alpha_1 M)_{j_1,j_3+1} D_1[u_1]_{j_1,j_3+1} - (\alpha_1 M)_{j_1,j_3} D_1[u_1]_{j_1,j_3}}{h_3} + \frac{(\alpha_3 M)_{j_1,j_3+1} D_3[u_3]_{j_1,j_3+1} - (\alpha_3 M)_{j_1,j_3} D_3[u_3]_{j_1,j_3}}{h_3} + \\
 & + \frac{M_{j_1,j_3+1} D_1[w_1]_{j_1,j_3+1} - M_{j_1,j_3} D_1[w_1]_{j_1,j_3}}{h_3} + \frac{M_{j_1,j_3+1} D_3[w_3]_{j_1,j_3+1} - M_{j_1,j_3} D_3[w_3]_{j_1,j_3}}{h_3} = \\
 & = i\omega (\eta/\kappa_3)_{j_1,j_3+1/2} (w_3)_{j_1,j_3+1/2}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

В результате рассматриваемая схема аппроксимирует систему (1) со вторым порядком при постоянных коэффициентах уравнений. В случае наличия разрывных коэффициентов они модифицируются с использованием метода баланса [35–39]. В частности, предполагается, что коэффициенты постоянны внутри ячеек сетки с центрами в узлах с целыми индексами. Тогда параметры $(C_{kl})_{j_1,j_3}$, M_{j_1,j_3} и другие присутствуют в схеме в неизменном виде. Однако, поскольку параметры $(C_{55})_{j_1+1/2,j_3+1/2}$, $(\eta/\kappa_1)_{j_1+1/2,j_3}$, $(\eta/\kappa_3)_{j_1,j_3+1/2}$ возникают в схеме, но не определены в узлах с дробными индексами, необходимо определить соответствующие модификации коэффициентов:

$$(\eta/\kappa_1)_{j_1+1/2,j_3} = 0.5((\eta/\kappa_1)_{j_1+1,j_3} + (\eta/\kappa_1)_{j_1,j_3}),$$

$$(\eta/\kappa_3)_{j_1,j_3+1/2} = 0.5((\eta/\kappa_3)_{j_1,j_3+1} + (\eta/\kappa_3)_{j_1,j_3}),$$

$$(C_{55})_{j_1+1/2,j_3+1/2} = 4 \left[\frac{1}{(C_{55})_{j_1+1,j_3+1}} + \frac{1}{(C_{55})_{j_1+1,j_3}} + \frac{1}{(C_{55})_{j_1,j_3+1}} + \frac{1}{(C_{55})_{j_1,j_3}} \right]^{-1},$$

представляющие среднее арифметическое и среднее гармоническое значений параметра в соседних узлах, где они определены. Важно отметить, что описанные выше формулы верны для внутренних узлов расчетной сетки, в то время как аппроксимация уравнений в граничных узлах вовлекает аппроксимацию граничных условий. Ниже рассматривается аппроксимация граничных условий на участке границы при $x_1 = L_2^1$. Аппроксимация граничных условий на остальной части граничных узлов расчетной области выполняется аналогично. Пусть на части границы $x_1 = L_2^1$ лежат узлы $(x_1)_{j_1^N}$ с целыми индексами.



Необходимо рассмотреть три граничных условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \alpha_1 M \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) = \phi_{11}, \\ \sigma_{13} &= C_{55} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \phi_{13}, \\ w_1 &= 0.\end{aligned}$$

Для аппроксимации граничных условий применяется метод погруженной границы [40, 41]. Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию первого и третьего уравнений системы (1) в узлах $(x_1)_{j_1^N} = L_1^2$ и разрешим их относительно компонент смещения $(w_1)_{j_1^N+1/2}$ и $(u_1)_{j_1^N+1/2}$:

$$(w_1)_{j_1^N+1/2, j_3} = -(w_1)_{j_1^N-1/2, j_3},$$

$$\begin{aligned}(u_1)_{j_1^N+1/2, j_3} &= (u_1)_{j_1^N-1/2, j_3} + \frac{h_1}{(C_{11})_{j_1^N, j_3}} \left[\phi_{11} - (C_{13})_{j_1^N, j_3} D_3[u_3]_{j_1^N, j_3} \right] - \\ &\quad \frac{h_1(\alpha_1 M)_{j_1^N, j_3}}{(C_{11})_{j_1^N, j_3}} \left[D_1[w_1]_{j_1^N, j_3} + D_3[w_3]_{j_1^N, j_3} \right].\end{aligned}$$

Полученные значения используются в формулах (9). Для второго граничного условия метод погруженной границы применяется непосредственно к компоненте тензора напряжений σ_{13} :

$$(\sigma_{13})_{j_1^N+1/2, j_3+1/2} = 2\phi_{13} - (\sigma_{13})_{j_1^N-1/2, j_3+1/2}.$$

Полученное значение затем используется во втором уравнении системы (9):

$$\begin{aligned}&\frac{(C_{13})_{j_1, j_3+1} D_1[u_1]_{j_1, j_3+1} - (C_{13})_{j_1, j_3} D_1[u_1]_{j_1, j_3}}{h_3} + \frac{(C_{33})_{j_1, j_3+1} D_3[u_3]_{j_1, j_3+1} - (C_{33})_{j_1, j_3} D_3[u_3]_{j_1, j_3}}{h_3} + \\ &+ \frac{(\alpha_3 M)_{j_1, j_3+1} D_1[w_1]_{j_1, j_3+1} - (\alpha_3 M)_{j_1, j_3} D_1[w_1]_{j_1, j_3}}{h_3} + \frac{(\alpha_3 M)_{j_1, j_3+1} D_3[w_3]_{j_1, j_3+1} - (\alpha_3 M)_{j_1, j_3} D_3[w_3]_{j_1, j_3}}{h_3} + \\ &+ \frac{(C_{55})_{j_1+1/2, j_3+1/2} D_1[u_3]_{j_1+1/2, j_3+1/2} + (C_{55})_{j_1+1/2, j_3+1/2} D_3[u_1]_{j_1+1/2, j_3+1/2} - \phi_{13}}{h_1/2} = 0\end{aligned}$$

Результатирующая СЛАУ замкнута и может быть решена с использованием любого решателя СЛАУ.

4.2. Численное решение СЛАУ. СЛАУ по результатам аппроксимации (9) системы уравнений (1) имеет комплекснозначную плохо обусловленную матрицу. В частности, граничные условия Неймана приводят к вырождению матрицы. Поэтому предлагается использовать прямой решатель на основе метода Гаусса для решения СЛАУ. В частности, используется решатель Intel MKL PARDISO, оптимальный для решения задач в двумерной постановке. Проверка производительности решателя при решении системы уравнений, аппроксимирующей уравнения Био, выполнялась с использованием серверного процессора Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 v2 3.00 GHz с 10 ядрами и 256 ГБ оперативной памяти решением задач для набора частот. В частности, рассматривается набор 48 частот в диапазоне от 0 до $6.4 \cdot 10^9$ Гц. Для каждой частоты необходимо решить задачу с тремя наборами граничных условий, как описано выше. Поэтому с каждой матрицей СЛАУ, соответствующей фиксированной частоте, необходимо использовать три вектора правой части. Изменение значения частоты влияет лишь на диагональные элементы матрицы СЛАУ, остальные ее элементы не меняются. В свою очередь, изменение граничных условий влияет лишь на вектор правой части СЛАУ. Эти свойства СЛАУ для решения задачи алскейлинга используются при реализации алгоритма, позволяя оптимизировать процесс вычислений.

Рассмотрим задачу, соответствующую одному тесту на нагружение образца среды, т.е. одному вектору правой части СЛАУ и одному значению частоты. Решение задачи разделяется на следующие этапы:

1. Построение матрицы $A(\omega)$ СЛАУ и вектора правой части b с использованием уравнений (9). Время выполнения — 13 с.

2. Переупорядочивание матрицы $A(\omega)$ с применением PARDISO — подготовительный этап для сокращения затрат памяти и времени расчета на следующем этапе факторизации. Время выполнения — 20 с.
3. Факторизация матрицы с применением PARDISO. В частности, выполняется LU -разложение A [42]. Время выполнения — 57 с.
4. Нахождение решения СЛАУ x с применением PARDISO. Время выполнения — 7 с.
5. Восстановление эффективного тензора жесткости эквивалентной вязкоупругой среды \hat{C} решением системы уравнений (8). Время выполнения — 3 с.

Суммарное время выполнения всех этапов для одной частоты составляет около 100 с. При наивной реализации алгоритма требуется выполнить 144 запуска алгоритма, так как для каждого значения из набора 48 частот необходимо решить СЛАУ для трех разных правых частей. Поэтому при таком подходе итоговое вычислительное время составляет 14400 с или приблизительно 4 ч. Однако, поскольку изменение граничных условий не меняет матрицы СЛАУ, этапы ее построения, переупорядочивания и факторизации выполняются один раз для фиксированной частоты и трех векторов правых частей. Более того, применение параллелизации вычислений с использованием OpenMP позволяет одновременно решать три СЛАУ с тремя разными правыми частями. В этом случае затраты времени на решение одной и трех СЛАУ одинаковые. В итоге, вышеперечисленные особенности реализации позволяют сократить время расчета по сравнению с временем в случае наивной реализации втрое до 4800 секунд или менее полутора часов.

Кроме того, так как при изменении частоты в системе (1) в соответствующей матрице СЛАУ меняются только диагональные элементы, полное построение матрицы потребует лишь один раз. Дополнительно этап переупорядочивания использует информацию о положении ненулевых элементов в матрице. Поэтому этот этап независим от изменения ненулевого значения диагонального элемента, а следовательно и от смены частоты, что позволяет выполнять его один раз для всего набора частот.

Все вышеперечисленное позволяет существенно сократить время вычислений:

1. Построение матрицы СЛАУ: ≈ 13 с для всего набора частот.
2. Переупорядочивание PARDISO: ≈ 20 с для всего набора частот.
3. Факторизация PARDISO: $48 \times (\approx 57$ с).
4. Решение СЛАУ PARDISO: $48 \times (\approx 7$ с) (параллельно для трех правых частей).
5. Постпроцессинг: $48 \times (\approx 3$ с) для трех правых частей.

Итоговое время расчета составляет около 3250 с или меньше часа. Выполнение алгоритма для задачи с размерами области 1000^2 узлов требует около 18 ГБ оперативной памяти, что позволяет проводить расчет на персональном компьютере.

Отметим, что оценка времени вычислений выполняется для конкретной конфигурации используемого оборудования и конкретной задачи, однако относительное ускорение за счет сокращения числа выполнений этапов полного построения матрицы и ее переупорядочивания не изменится. Более того, относительное ускорение приближается к 1.5 при увеличении числа используемых частот.

5. Численные эксперименты. В работе выполняются два набора численных экспериментов. В экспериментах первого набора рассматриваются относительно простые модели слоистой среды, и эти эксперименты проводятся для верификации представленного алгоритма оценки затухания на основе решения задачи апскейлинга. Второй набор численных экспериментов проводится с вовлечением более сложных трещиноватых моделей среды для исследования влияния структуры трещиноватости и микромасштабной анизотропии физических свойств на индуцированные волной флюидопотоки в трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде [12, 43].

5.1. Верификация алгоритма. Для верификации алгоритма численной оценки затухания рассматриваются две модели изотропной периодической слоистой среды, построенной с использованием двух моделей пороупругого флюидонасыщенного материала [43]. Значения параметров для обоих материалов указаны в табл. 1.

Численные эксперименты первого набора проводятся с целью оценки порядка сходимости алгоритма в зависимости от измельчения вычислительной сетки. Расчетная область — участок слоистой среды, который состоит из восьми попеременных слоев первого и второго материалов (табл. 1), как схематично показано на рис. 2. Толщины всех слоев одинаковы, кроме верхнего и нижнего граничных слоев, представленных одним и тем же материалом и имеющих половинную толщину относительно остальных слоев.



Таблица 1. Параметры моделей материалов слоистой среды
 Table 1. Layered media materials properties

Параметры Parameters	Материал 1 Material 1	Материал 2 Material 2
Объемный модуль сжатия твердой фазы, K_s (Па) Bulk modulus of solid phase, K_s (Pa)	$37 \cdot 10^9$	$37 \cdot 10^9$
Плотность твердой фазы, ρ_s (кг/м ³) Solid phase density, ρ_s (kg/m ³)	2650	2650
Пористость, ϕ Porosity, ϕ	0.1	0.37
Объемный модуль сжатия осушенного скелета, K_m (Па) Bulk modulus of drained skeleton, K_m (Pa)	$26 \cdot 10^9$	$2.68 \cdot 10^9$
Модуль сдвига осушенного скелета, μ_m (Па) Shear modulus of drained skeleton, μ_m (Pa)	$31 \cdot 10^9$	$0.857 \cdot 10^9$
Проницаемость, κ (м ²) Permeability, κ (m ²)	10^{-14}	10^{-11}
Объемный модуль сжатия флюида, K_f (Па) Bulk modulus of fluid, K_f (Pa)	$2.25 \cdot 10^9$	$2.25 \cdot 10^9$
Плотность флюида, ρ_f (кг/м ³) Fluid Density, ρ_f (kg/m ³)	1090	1090
Динамическая вязкость флюида, η (Па·с) Fluid dynamic viscosity, η (Pa·s)	0.001	0.001
Параметр Био-Уиллиса, α Biot-Willis parameter, α	0.297297297	0.927567567
M	$20.089678 \cdot 10^9$	$5.570601 \cdot 10^9$

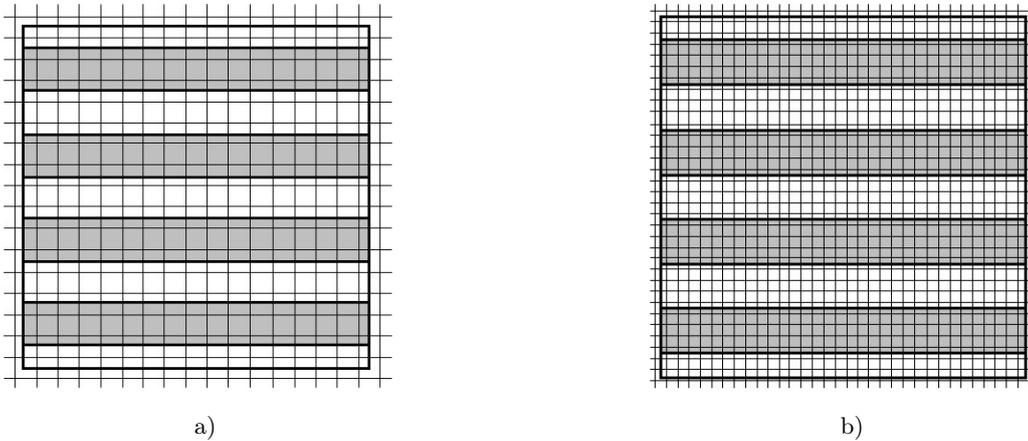


Рис. 2. Схематическое изображение модели слоистой среды и ее дискретизации: а) грубая сетка; б) мелкая сетка.
 Белые слои соответствуют первой модели материала, серые — второй (табл. 1)

Fig. 2. Schematic representation of layered media model and discretization: a) coarse mesh; b) fine mesh.
 White layers correspond to material 1, gray correspond to material 2 (table 1)

Объемная доля каждого материала в расчетной области составляет 0.5. Размер области — 0.8×0.8 м, толщина одного внутреннего слоя составляет 0.1 м. Для оценки скорости сходимости алгоритма используется последовательность вложенных сеток G_0, G_1, \dots, G_5 таких, что сетка G_{n+1} получена из сетки G_n разбиением шага сетки пополам. Шаг сетки $h_1^0 = h_3^0 = 0.05$ м для G_0 , $h_1^1 = h_3^1 = \frac{0.05}{2}$ м для G_1 , и т.д. В общем случае, для сетки G_n шаг $h_1^n = h_3^n = \frac{0.05}{2^n}$ м. Так, число узлов сетки на толщину слоя равно двум для сетки G_0 , четырем для G_1 и т.д. до 64 узлов на толщину слоя для сетки G_5 .

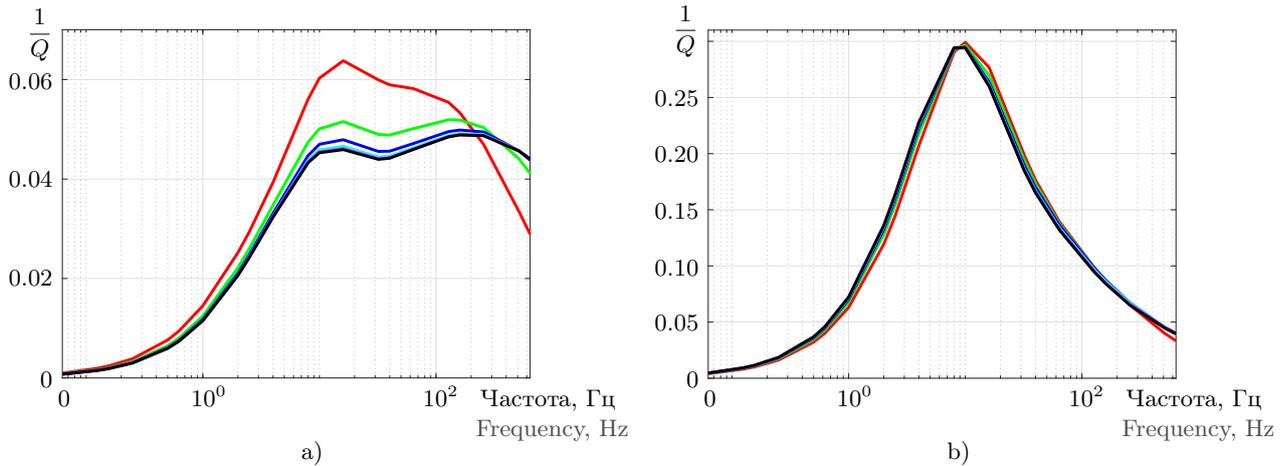


Рис. 3. Оценка частотно-зависимой величины, обратной добротности, для набора измельченных расчетных сеток: а) вдоль слоев; б) поперек слоев. Цвета соответствуют сеткам в следующем порядке: G_0 — красный, G_1 — зеленый, G_2 — синий, G_3 — голубой, G_4 — розовый, G_5 — черный

Fig. 3. Inverse quality factor estimation for refined meshes set: a) along layers; b) transverse to layers. Colors correspond to meshes in the following order: G_0 — red, G_1 — green, G_2 — blue, G_3 — cyan, G_4 — magenta, G_5 — black

Для оценки частотно-зависимого затухания в слоистой среде численно решается задача квазистатической нагрузки образца слоистой среды на наборе 21 частоты в диапазоне от 1/16 до 640 Гц. По результатам численного моделирования нагружения образцов выполняется оценка частотно-зависимого эффективного тензора жесткости эквивалентной вязкоупругой среды. Наконец, при помощи восстановленного тензора жесткости оценивается величина, обратная добротности, для продольных сейсмических волн, проходящих в направлении осей Ox_1 (вдоль слоев) и Ox_3 (поперек слоев). Оценки величины, обратной добротности, представлены на рис. 3. На рисунке видно, что оценка сходится с измельчением сетки. Оценку порядка сходимости можно сформулировать следующим образом [37]:

$$C(n) = -\log_2 \left(\frac{\|Q_{n+1}^{-1} - Q_n^{-1}\|}{\|Q_n^{-1} - Q_{n-1}^{-1}\|} \right),$$

где Q_n^{-1} — оценка величины, обратной добротности, с использованием сетки G_n . Оценка порядка сходимости $C(n)$ представлена на рис. 4. Из оценки видно, что порядок сходимости равен 1. Малый порядок сходимости объясняется неоднородностью модели и потерей точности при аппроксимации граничных условий.

Отметим, что сходимость решения на наборе измельченных сеток не гарантирует его сходимости к аналитическому решению. Для исследования сходимости к аналитической оценке затухания используется одномерная модель Уайта [44], для которой приводится аналитическая оценка частотно-зависимого затухания в слоистой пороупругой среде. Однако оценка справедлива для неограниченной слоистой среды, в то время как конечный размер расчетной области влияет на решение и, следовательно, на разницу между численной и аналитической оценками. Таким образом, при стремлении размера расчетной области вдоль слоев к бесконечности численная оценка затухания должна сходиться к аналитической. Более того, должен сохраняться первый порядок сходимости решения по отношению к размеру области.

Для исследования сходимости численной оценки затухания к аналитической рассматриваются три слоистые модели. Слоистые модели образованы 32 слоями аналогично предыдущим слоистым моделям с материалами из табл. 1. Толщина одного слоя — 0.1 м. Три модели различаются размером вдоль слоев,

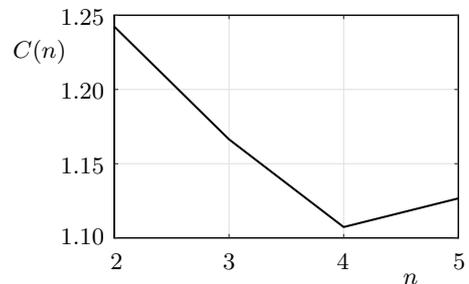


Рис. 4. Оценка порядка сходимости затухания для набора измельченных сеток
 Fig. 4. Convergence rate for attenuation estimation for refined meshes set

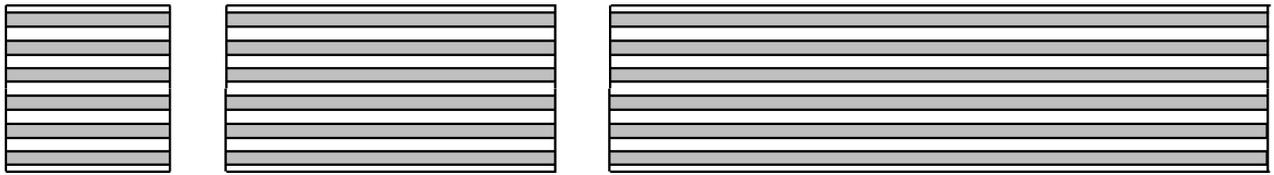


Рис. 5. Схематическое изображение моделей слоистой среды с увеличением размера расчетной области вдоль слоев

Fig. 5. Schematic representation of layered media models with increasing size of computational domain along the layers

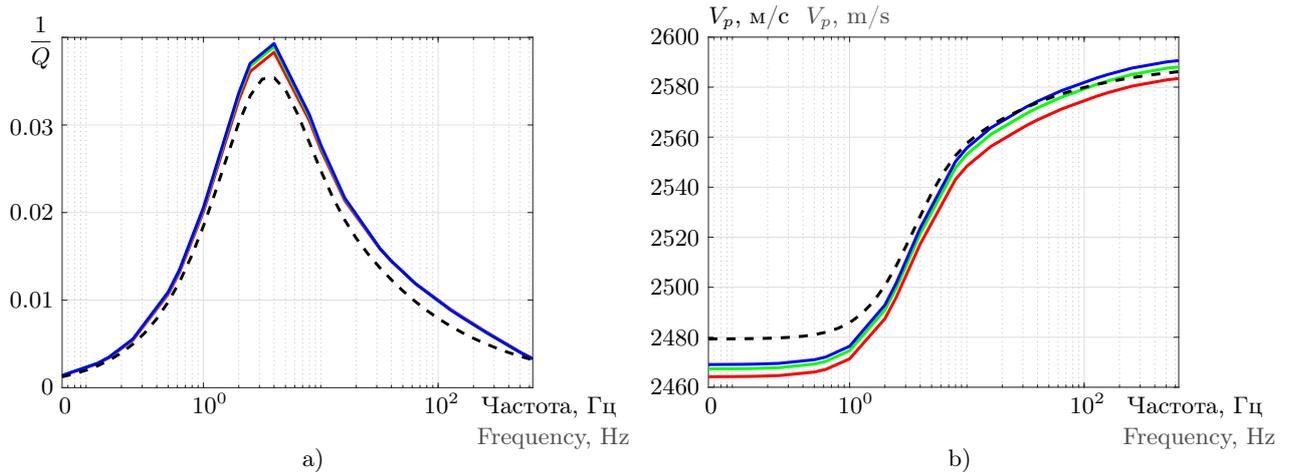


Рис. 6. К распространению Р-волн в слоистой среде перпендикулярно слоям: а) величина, обратная добротности; б) фазовая скорость. Черными пунктирными линиями представлены аналитические оценки. Цветные линии соответствуют численным оценкам, полученным на разных сетках — 512×512 (красный), 1024×512 (зеленый) и 2048×512 (синий) узлов

Fig. 6. P-waves propagation in layered media transverse to the layers: a) inverse quality factor; b) phase velocity. Black dashed lines represent analytical estimations. Colored lines correspond to numerical estimations obtained with different meshes — 512×512 (red), 1024×512 (green) and 2048×512 (blue) nodes

что схематично показано на рис. 5. Используемая расчетная сетка соответствует сетке G_3 из предыдущего набора численных экспериментов с шагом $h_1 = h_3 = 0.05/8$ м. Размеры расчетной сетки составляют 512×512 , 1024×512 и 2048×512 узлов для первой, второй и третьей моделей соответственно. По результатам численного моделирования квазистатического нагружения выполняется оценка частотно-зависимых фазовых скоростей Р- и S-волн и величины, обратной добротности, для набора 21 частоты в диапазоне от $1/16$ до 640 Гц.

На рис. 6 представлены оценки величины, обратной добротности, и фазовой скорости Р-волны, проходящей поперек слоев, в сравнении с аналитическими оценками [44]. Видно, что численная оценка фазовой скорости близка к аналитической, а относительная ошибка не превышает 2% в широком диапазоне частот. Величина, обратная добротности, проходящей вдоль слоев Р-волны тривиальна [44], и численная оценка сходится с первым порядком

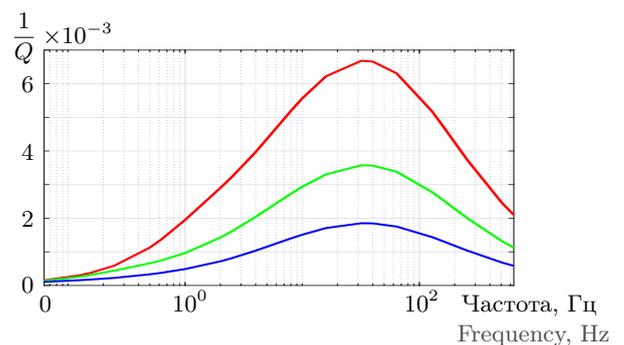


Рис. 7. Величина, обратная добротности для Р-волны, распространяющейся в слоистой среде вдоль слоев. Цветные линии соответствуют численным оценкам, полученным на разных сетках — 512×512 (красный), 1024×512 (зеленый) и 2048×512 (синий) узлов

Fig. 7. Inverse quality factor for P-wave propagating in layered media along the layers. Colored lines correspond to numerical estimations obtained with different meshes — 512×512 (red), 1024×512 (green) and 2048×512 (blue) nodes

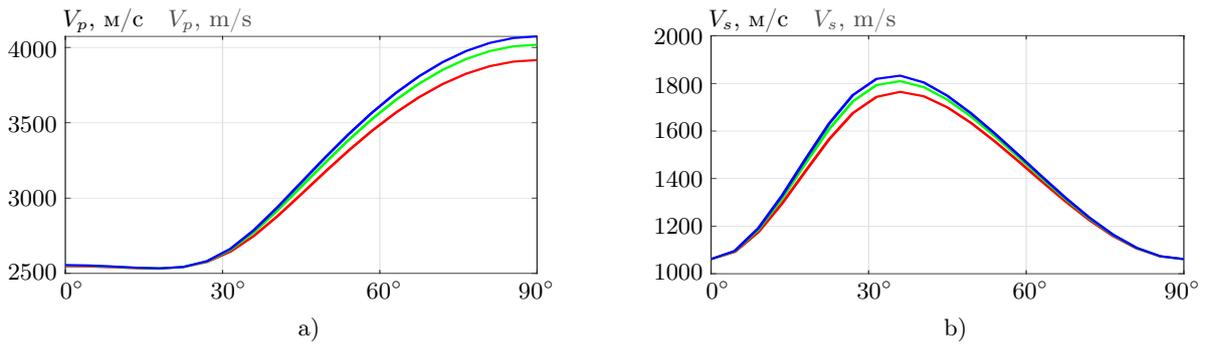


Рис. 8. Зависимости фазовых скоростей волн с центральной частотой 10 Гц, распространяющихся в слоистой среде, от угла падения: а) Р-волна; б) S-волна. Цветные линии соответствуют численным оценкам, полученным на разных сетках — 512×512 (красный), 1024×512 (зеленый) и 2048×512 (синий) узлов

Fig. 8. Phase velocity dependencies on angle of incidence for waves with central frequency of 10 kHz propagating in layered media: a) P-wave; b) S-wave. Colored lines correspond to numerical estimations obtained with different meshes — 512×512 (red), 1024×512 (green) и 2048×512 (blue) nodes

ком к нулю (рис. 7). Кроме того, первый порядок сходимости наблюдается для оценок фазовой скорости Р-волны и S-волны в зависимости от их угла падения для центральной частоты 10 Гц (рис. 8). Численные эксперименты повторяют эксперименты из работы [43], и результаты показывают хорошее соответствие оценок.

5.2. Частотно-зависимая анизотропия трещиновато-пористой среды. Численные эксперименты второго набора выполняются с целью оценки влияния связности трещин и микромасштабной анизотропии материала-наполнителя трещин на макроскопические свойства среды — затухание и дисперсию.

§ 5.2.1. Влияние связности трещин на затухание. Следующий ряд численных экспериментов направлен на исследование влияния глобальной связности трещин во всей расчетной области на затухание, вызванной индуцированными волной флюидопотоками как между вмещающей породой и трещинами (FB-WIFF), так и между связанными трещинами (FF-WIFF) [12, 43]. Связность в трещиноватой среде представлена средней длиной перколяции (непрерывного пути по трещинам) в направлении координатных осей. В частности, длина перколяции в рассматриваемых моделях обеспечивается протяженными цепочками пересекающихся микромасштабных трещин двух семейств (вертикальных и горизонтальных), распределенных в расчетной области равномерно. Особенности алгоритма построения используемых моделей трещиноватой среды, а также статистический анализ геометрии систем трещин представлены в работе [45]. Всего в экспериментах используется 48 образцов трещиноватой среды — 8 реализаций моделей по 6 различным степеням связности трещин (средних длин перколяции). Примеры моделей трещиноватой среды изображены на рис. 9. В рассматриваемых моделях связность трещин меняется от практического отсутствия пересечений микромасштабных трещин (рис. 9а) до формирования цепочек трещин, обеспечивающих большую среднюю длину перколяции (рис. 9с).

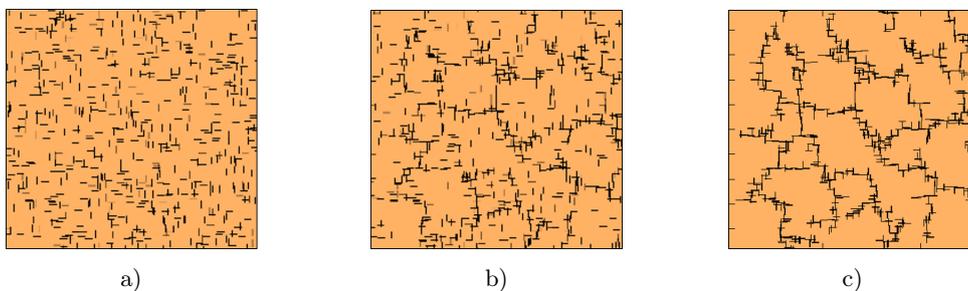


Рис. 9. Модели трещиноватой среды с разной степенью связности: а) непересекающиеся трещины; б) средняя степень связности; с) высокая степень связности. Оранжевым цветом показана вмещающая порода, черным — трещины

Fig. 9. Models of fractured media with different fracture connectivity degree: a) non-intersecting fractures; b) medium fracture connectivity; c) high fracture connectivity. Orange color represents background, black — fractures



Более того, рассматривается реалистичная анизотропная модель материала, заполняющего трещины. В частности, анизотропия определяется ориентацией трещин. Предполагается, что основной макромасштабный поток флюида в трещиноватой среде обеспечивается трещинами. Следовательно, в случае химически активного флюида, например раствора CO₂, основное направление коридоров порового пространства будет совпадать с направлением вдоль трещин, что подтверждается лабораторными [46] и численными экспериментами [41, 47].

В численных экспериментах рассматриваются три модели материала, заполняющего трещины. Первая модель материала соответствует наполнителю трещин, расположенных вдоль оси Ox_1 , вторая модель — материалу в трещинах, расположенных вдоль Ox_3 , третья модель — материалу в пересечениях трещин двух ориентаций. Физические свойства вмещающей породы и наполнителя трещин указаны в табл. 2 (второй, третий и четвертый столбцы). Свойства материала в пересечениях трещин не указаны в таблице отдельно, поскольку для него параметры C_{11} и C_{33} совпадают с C_{11} для трещин вдоль Ox_1 , $\alpha_1 M$ и $\alpha_3 M$ совпадают с $\alpha_1 M$ для трещин вдоль Ox_1 , $\frac{\eta}{\kappa_1}$ и $\frac{\eta}{\kappa_3}$ совпадают с $\frac{\eta}{\kappa_1}$ для трещин вдоль Ox_1 , а остальные свойства совпадают со свойствами для трещин вдоль Ox_1 и Ox_3 .

Результирующие оценки затухания $\frac{1}{Q_p}$ и $\frac{1}{Q_s}$ соответственно для Р-волны и S-волны для всех восьми реализаций модели с непересекающимися трещинами и осредненная оценка затухания представлены на рис. 10. Видно, что оценка для отдельной реализации достаточно близка к осредненной, что свидетель-

Таблица 2. Параметры моделей трещиноватой среды: изотропная вмещающая порода (первая строка), анизотропный наполнитель для трещин разных ориентаций (вторая и третья строки), изотропные наполнители трещин (четвертая и пятая строки)

Table 2. Fractured media model properties: isotropic background (second column), anisotropic fracture-filling material for different orientations (third and fourth columns), isotropic fracture-filling material (fifth and sixth columns)

Параметры Parameters	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{55}	M	$\alpha_1 M$	$\alpha_3 M$	$\frac{\eta}{\kappa_1}$	$\frac{\eta}{\kappa_3}$
Вмещающая порода Background	$6.910 \cdot 10^{10}$	$7.159 \cdot 10^{10}$	$6.910 \cdot 10^{10}$	$3.097 \cdot 10^{10}$	$2.010 \cdot 10^{10}$	$5.953 \cdot 10^9$	$5.953 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{12}$
Траектория вдоль Ox Trajectory along Ox	$3.896 \cdot 10^{10}$	$1.981 \cdot 10^{10}$	$4.643 \cdot 10^{10}$	$1.131 \cdot 10^{10}$	$9.429 \cdot 10^9$	$6.502 \cdot 10^9$	$6.051 \cdot 10^9$	$7.072 \cdot 10^6$	$1.887 \cdot 10^9$
Траектория вдоль Oz Trajectory along Oz	$4.643 \cdot 10^{10}$	$1.981 \cdot 10^{10}$	$3.896 \cdot 10^{10}$	$1.131 \cdot 10^{10}$	$9.429 \cdot 10^9$	$6.051 \cdot 10^9$	$6.502 \cdot 10^9$	$1.887 \cdot 10^9$	$7.072 \cdot 10^6$
“Жесткий” “Stiff”	$4.643 \cdot 10^{10}$	$2.381 \cdot 10^{10}$	$4.643 \cdot 10^{10}$	$1.131 \cdot 10^{10}$	$9.488 \cdot 10^9$	$5.767 \cdot 10^9$	$5.767 \cdot 10^9$	$1.887 \cdot 10^9$	$1.887 \cdot 10^9$
“Мягкий” “Soft”	$3.896 \cdot 10^{10}$	$1.634 \cdot 10^{10}$	$3.896 \cdot 10^{10}$	$1.131 \cdot 10^{10}$	$9.330 \cdot 10^9$	$6.854 \cdot 10^9$	$6.854 \cdot 10^9$	$7.072 \cdot 10^6$	$7.072 \cdot 10^6$

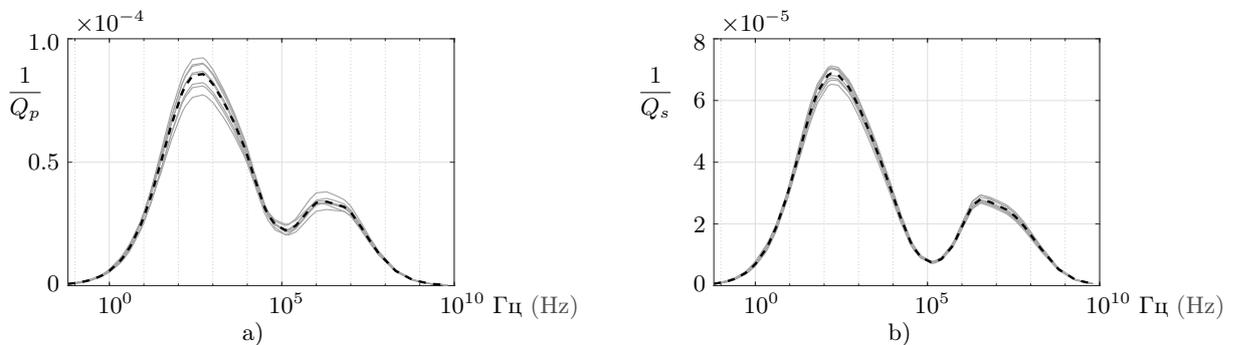


Рис. 10. Графики зависимостей величины, обратной добротности, от частоты волны в среде с непересекающимися трещинами: а) для Р-волны; б) для S-волны. Серыми линиями показаны оценки для отдельных реализаций модели, черной пунктирной линией показана осредненная по реализациям оценка

Fig. 10. Plots of inverse quality factor dependencies on wave frequency in the media with nonintersecting fractures: а) for P-wave; б) for S-wave. Gray lines represent estimations for single model realization, black dashed line represents realization-averaged estimations

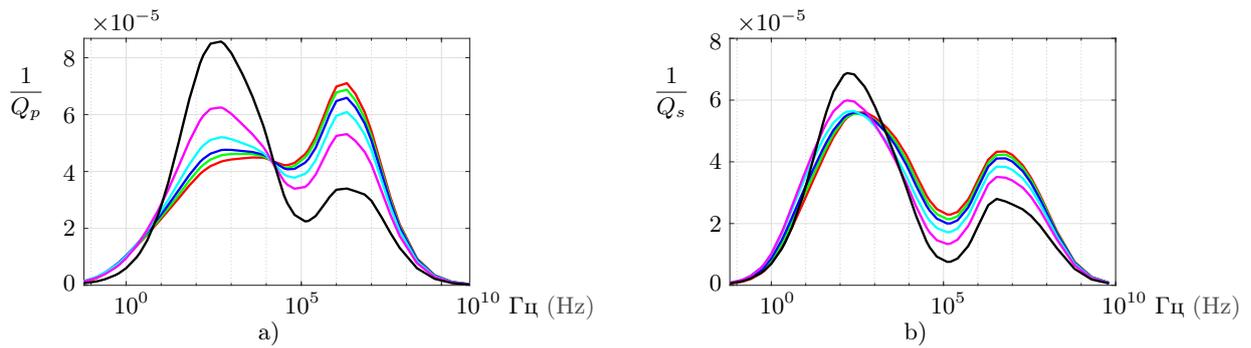


Рис. 11. Графики зависимостей величины, обратной добротности, от частоты волны в трещиноватой среде с глобальной связностью трещин: а) для Р-волны; б) для S-волны. Цвета линий обозначают различную степень связности трещин, росту связности соответствует порядок: черный, розовый, голубой, синий, зеленый, красный

Fig. 11. Plots of inverse quality factor dependencies on wave frequency in fractured media with global fracture connectivity: a) for P-wave; b) for S-wave. Line colors represent different connectivity degrees, connectivity increase corresponds to the following order: black, magenta, cyan, blue, green, red

ствуем о репрезентативности моделей для построения средней оценки затухания для отдельной степени связности трещин. В рассматриваемом диапазоне частот наблюдаются два пика затухания. Первый пик находится на относительно низкой частоте (500 Гц) и соответствует флюидопотокам типа FB-WIFF. Вторым пиком затухания, в свою очередь, возникает на высокой частоте (порядка МГц) и появляется вследствие флюидопотоков типа FF-WIFF. Ожидается большая интенсивность затухания в результате флюидопотоков между вмещающей средой и трещинами, вызванная разницей физических свойств двух материалов, на низкой частоте по сравнению с интенсивностью затухания, обеспечиваемого флюидопотоками между трещинами. Такое соотношение объясняется слабыми флюидопотоками в отдельных микромасштабных трещинах.

На рис. 11 представлены осредненные оценки величины, обратной добротности, для моделей шести рассматриваемых степеней связности трещин. Результаты показывают, что при росте глобальной связности трещин преобладающее затухание на относительно низкой частоте сменяется преобладающим затуханием на высоких частотах. В частности, наблюдается уменьшение интенсивности пика, соответствующего флюидопотокам типа FB-WIFF, с одновременным увеличением интенсивности пика, соответствующего флюидопотокам типа FF-WIFF. Такое изменение затухания объясняется формированием протяженных цепочек связанных трещин, с ростом длины которых растет и интенсивность соответствующих флюидопотоков в трещинах. Более того, наблюдается небольшой сдвиг характерной частоты пика затухания вследствие FB-WIFF, вызванный ростом характерного размера неоднородности (кластера трещин) в среде с ростом связности.

§ 5.2.2. Проявление микромасштабной анизотропии наполнителя трещин. Наконец, последний ряд численных экспериментов выполняется для оценки влияния микромасштабной анизотропии трещиноватой среды на флюидопотоки в ней и соответствующее затухание. Рассматриваются модели самой высокой степени связности из предыдущей серии экспериментов. Для сопоставления результатов и демонстрации проявления анизотропии наполнителя трещин наряду с анизотропной моделью материала (из предыдущей серии расчетов) рассматриваются две модели изотропного наполнителя трещин. Первая модель соответствует “жесткому” материалу (табл. 2, четвертая строка) и определяется меньшей проницаемостью и большими компонентами тензора жесткости вдоль трещин, чем в анизотропной модели. Напротив, вторая изотропная модель соответствует “мягкому” материалу (табл. 2, пятая строка) и определяется высокой проницаемостью в направлении обеих координатных осей и меньшими значениями упругих модулей.

Результирующие осредненные оценки затухания, вызванного флюидопотоками, представлены на рис. 12. Видно, что при одинаковой вмещающей породе для всех трех случаев (анизотропного, “жесткого” и “мягкого” наполнителей трещин) оценки затухания существенно различаются на всем рассматриваемом диапазоне частот для Р-волны и на высоких частотах для S-волны. Низкая проницаемость в “жестком” наполнителе трещин приводит к практическому отсутствию флюидопотоков между пересекающимися трещинами в случае Р-волны (рис. 12 а). Это наблюдение также подтверждается наличием лишь

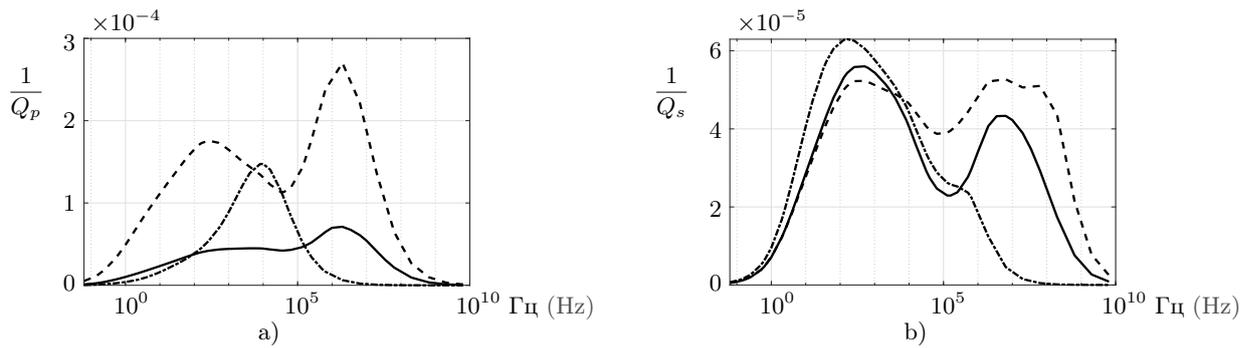


Рис. 12. Графики зависимостей величины, обратной добротности, от частоты волны в трещиноватой среде с различными наполнителями трещин: а) для Р-волны; б) для S-волны. Штрих-пунктирной линией показаны графики для “жесткого” изотропного, пунктирной линией — для “мягкого” изотропного, сплошной — для анизотропного материалов в трещинах

Fig. 12. Plots of inverse quality factor dependencies on wave frequency in fractured media with different fracture-filling materials: a) for P-wave; b) for S-wave. Dash-dotted line represents dependencies for “stiff” isotropic, dashed line — for “soft” isotropic, solid line — for anisotropic material in fractures

одного пика затухания, соответствующего флюидопотокам типа FB-WIFF. При “мягком” наполнителе трещин наблюдается интенсивное затухание, вызванное флюидопотоками обоих типов, выражающееся двумя соответствующими пиками большой амплитуды. Анизотропный же наполнитель трещин приводит к промежуточному по интенсивности (между двумя предельными случаями изотропных материалов) затуханию. Однако, в отличие от случая “жесткого” материала, наблюдаются два пика затухания вследствие флюидопотоков обоих типов, причем высокочастотный пик затухания выше низкочастотного, поскольку рассматривается модель с высокой степенью связности трещин. Затухание при анизотропном наполнителе трещин в рассматриваемом диапазоне частот ниже, чем при “мягком” наполнителе, и пик затухания, вызванного флюидопотоками типа FB-WIFF, ниже, чем аналогичный пик при “жестком” наполнителе. Результирующие оценки затухания S-волны (рис. 12 б) различаются существенно лишь на высокой частоте, где представлено затухание, вызванное флюидопотоками между трещинами. Причем пик затухания вследствие FF-WIFF наблюдается даже в случае “жесткого” наполнителя трещин, однако он сдвинут и частично сливается с низкочастотным пиком. Низкочастотные пики затухания вследствие FB-WIFF во всех трех рассматриваемых случаях близки.

6. Заключение. Представлен алгоритм численного моделирования квазистатического нагружения образца порупругой флюидонасыщенной среды для решения задачи численного апскейлинга трещиновато-пористой флюидонасыщенной среды. Результатом апскейлинга является однородная анизотропная вязкоупругая модель образца, определяемая комплекснозначным частотно-зависимым эффективным тензором жесткости, с помощью которого выполняется оценка частотно-зависимых фазовой скорости и затухания сейсмических волн. Для решения задачи апскейлинга решается система уравнений, аппроксимирующая систему уравнений Био ортотропной порупругой среды в частотной области для набора центральных частот и набора векторов правых частей, соответствующего ряду задач по нагружению образца.

Алгоритм основан на конечно-разностной аппроксимации уравнений Био в квазистатической постановке неоднородной анизотропной порупругой среды. Полученная СЛАУ решается с использованием прямого решателя Intel MKL PARDISO. Для сокращения времени расчета используется замечание о неизменности недиагональных элементов матрицы СЛАУ при изменении частоты. Данное свойство позволяет строить полную матрицу СЛАУ один раз и для других частот определять только диагональные элементы. Более того, для сокращения числа ненулевых элементов в LU-разложении матрицы системы выполняется переупорядочивание строк и столбцов матрицы СЛАУ, что сокращает время расчета на 30%. Кроме того, использование прямого метода решения СЛАУ позволяет параллельно решать СЛАУ для трех разных векторов правых частей, что дает дополнительное сокращение времени расчета. Таким образом, учет особенностей задачи в реализации алгоритма сокращает итоговое время расчета приблизительно в 4 раза по сравнению с наивной реализацией. Предложенная реализация позволяет решать задачу апскейлинга для расчетных областей размерами до 2000 × 2000 узлов на одной вычислительной машине и соответственно позволяет рассматривать репрезентативные модели трещиновато-пористых сред.

Разработанный алгоритм применяется для исследования влияния связности трещин и микромасштабной анизотропии материала в трещинах на частотно-зависимые фазовую скорость волн и затухание, вызванное флюидопотоками, индуцированными сейсмической волной. В частности, показано, что рост глобальной связности трещин уменьшает интенсивность потоков между вмещающей породой и трещинами, но увеличивает интенсивность флюидопотоков между связанными трещинами, что выражается в соответствующем частотно-зависимом затухании. Кроме того, оценки затухания для моделей с различными моделями материала-наполнителя трещин показывают проявление микромасштабной анизотропии материала в трещинах. Таким образом, предложенный способ оценки затухания в трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде может быть применен для выявления зависимостей между структурой трещиноватости и физическими свойствами пород и затуханием, представляющих ценность для задач мониторинга трещиноватых формаций.

Список литературы

1. Salaun N., Toubiana H., Mitschler J.-B., Gigou G., Carriere X., Maurer V., Richard A. High-resolution 3D seismic imaging and refined velocity model building improve the image of a deep geothermal reservoir in the Upper Rhine Graben // *The Leading Edge*. 2020. **39**, N 12. 857–863. doi [10.1190/tle39120857.1](https://doi.org/10.1190/tle39120857.1).
2. Marty N.C.M., Hamm V., Castillo C., Thiéry D., Kervévan C. Modelling water-rock interactions due to long-term cooled-brine reinjection in the Dogger carbonate aquifer (Paris basin) based on *in-situ* geothermal well data // *Geothermics*. 2020. **88**, Article Number 101899. doi [10.1016/j.geothermics.2020.101899](https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2020.101899).
3. Menke H.P., Reynolds C.A., Andrew M.G., Pereira Nunes J.P., Bijeljic B., Blunt M.J. 4D multi-scale imaging of reactive flow in carbonates: assessing the impact of heterogeneity on dissolution regimes using streamlines at multiple length scales // *Chemical Geology*. 2018. **481**. 27–37. doi [10.1016/j.chemgeo.2018.01.016](https://doi.org/10.1016/j.chemgeo.2018.01.016).
4. Huang F., Bergmann P., Juhlin C., Ivandic M., Lüth S., Ivanova A., Kempka T., Hennings J., Sopher D., Zhang F. The first post-injection seismic monitor survey at the Ketzin pilot CO₂ storage site: results from time-lapse analysis // *Geophysical Prospecting*. 2018. **66**, N 1. 62–84. doi [10.1111/1365-2478.12497](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12497).
5. Kaya E., Zarrouk S.J. Reinjection of greenhouse gases into geothermal reservoirs // *International Journal of Greenhouse Gas Control*. 2017. **67**. 111–129. doi [10.1016/j.ijggc.2017.10.015](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2017.10.015).
6. Prasad M., Glubokovskikh S., Daley T., Oduwole S., Harbert W. CO₂ messes with rock physics // *The Leading Edge*. 2021. **40**, N 6. 424–432. doi [10.1190/tle40060424.1](https://doi.org/10.1190/tle40060424.1).
7. Quintal B., Caspari E., Holliger K., Steeb H. Numerically quantifying energy loss caused by squirt flow // *Geophysical Prospecting*. 2019. **67**, N 8. 2196–2212. doi [10.1111/1365-2478.12832](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12832).
8. Alkhimenkov Y., Caspari E., Lissa S., Quintal B. Azimuth-, angle- and frequency-dependent seismic velocities of cracked rocks due to squirt flow // *Solid Earth*. 2020. **11**, N 3. 855–871. doi [10.5194/se-11-855-2020](https://doi.org/10.5194/se-11-855-2020).
9. Solazzi S.G., Lissa S., Rubino J.G., Holliger K. Squirt flow in partially saturated cracks: a simple analytical model // *Geophysical Journal International*. 2021. **227**, N 1. 680–692. doi [10.1093/gji/ggab249](https://doi.org/10.1093/gji/ggab249).
10. Rubino J.G., Müller T.M., Guarracino L., Milani M., Holliger K. Seismoacoustic signatures of fracture connectivity // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2014. **119**, N 3. 2252–2271. doi [10.1002/2013JB010567](https://doi.org/10.1002/2013JB010567).
11. Kong L., Gurevich B., Zhang Y., Wang Y. Effect of fracture fill on frequency-dependent anisotropy of fractured porous rocks // *Geophysical Prospecting*. 2017. **65**, N 6. 1649–1661. doi [10.1111/1365-2478.12505](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12505).
12. Caspari E., Novikov M., Lisitsa V., Barbosa N.D., Quintal B., Rubino J.G., Holliger K. Attenuation mechanisms in fractured fluid-saturated porous rocks: a numerical modelling study // *Geophysical Prospecting*. 2019. **67**, N 4. 935–955. doi [10.1111/1365-2478.12667](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12667).
13. Guo J., Gurevich B. Effects of coupling between wave-induced fluid flow and elastic scattering on *P*-wave dispersion and attenuation in rocks with aligned fractures // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2020. **125**, N 3. Article Number e2019JB018685. doi [10.1029/2019JB018685](https://doi.org/10.1029/2019JB018685).
14. Solazzi S.G., Hunziker J., Caspari E., Rubino J.G., Favino M., Holliger K. Seismic signatures of fractured porous rocks: the partially saturated case // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2020. **125**, N 8. Article Number e2020JB019960. doi [10.1029/2020JB019960](https://doi.org/10.1029/2020JB019960).
15. Guo J., Zhao L., Chen X., Yang Z., Li H., Chao L. Theoretical modelling of seismic dispersion, attenuation, and frequency-dependent anisotropy in a fluid saturated porous rock with intersecting fractures // *Geophysical Journal International*. 2022. **230**, N 1. 580–606. doi [10.1093/gji/ggac070](https://doi.org/10.1093/gji/ggac070).
16. Müller T.M., Gurevich B., Lebedev M. Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced flow in porous rocks — a review // *Geophysics*. 2010. **75**, N 5. 75A147–75A164. doi [10.1190/1.3463417](https://doi.org/10.1190/1.3463417).



17. Guo J., Rubino J.G., Glubokovskikh S., Gurevich B. Effects of fracture intersections on seismic dispersion: theoretical predictions versus numerical simulations // *Geophysical Prospecting*. 2017. **65**, N 5. 1264–1276. doi [10.1111/1365-2478.12474](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12474).
18. Hunziker J., Favino M., Caspari E., Quintal B., Rubino J. G., Krause R., Holliger K. Seismic attenuation and stiffness modulus dispersion in porous rocks containing stochastic fracture networks // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2018. **123**, N 1. 125–143. doi [10.1002/2017JB014566](https://doi.org/10.1002/2017JB014566).
19. Новиков М.А., Базайкин Я.В., Лисица В.В., Козяев А.А. Моделирование волновых процессов в трещиновато-пористых средах: влияние связности трещин на поглощение сейсмической энергии // *Вычислительные методы и программирование*. 2018. **19**, №3. 235–252. doi [10.26089/NumMet.v19r323](https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r323).
20. Carcione J.M., Cavallini F. A rheological model for anelastic anisotropic media with applications to seismic wave propagation // *Geophysical Journal International*. 1994. **119**, N 1. 338–348. doi [10.1111/j.1365-246X.1994.tb00931.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb00931.x).
21. Ovaisi S., Wheeler M.F., Balhoff M. Quantifying the representative size in porous media // *Transport in Porous Media*. 2014. **104**, N 2. 349–362. doi [10.1007/s11242-014-0338-z](https://doi.org/10.1007/s11242-014-0338-z).
22. Bazaikin Y., Gurevich B., Iglauer S., Khachkova T., Kolyukhin D., Lebedev M., Lisitsa V., Reshetova G. Effect of CT image size and resolution on the accuracy of rock property estimates // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2017. **122**, N 5. 3635–3647. doi [10.1002/2016JB013575](https://doi.org/10.1002/2016JB013575).
23. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // *Journal of Acoustical Society of America*. 1956. **28**, N 2. 168–178. doi [10.1121/1.1908239](https://doi.org/10.1121/1.1908239).
24. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // *Journal of Acoustical Society of America*. 1956. **28**, N 2. 179–191. doi <https://doi.org/10.1121/1.1908241>.
25. Backus G.E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering // *Journal of Geophysical Research*. 1962. **67**, N 11. 4427–4440. doi [10.1029/JZ067i011p04427](https://doi.org/10.1029/JZ067i011p04427).
26. Schoenberg M., Muir F. A calculus for finely layered anisotropic media // *Geophysics*. 1989. **54**, N 5. 581–589. doi [10.1190/1.1442685](https://doi.org/10.1190/1.1442685).
27. Khachkova T., Lisitsa V., Kolyukhin D., Reshetova G. Influence of interfaces roughness on elastic properties of layered media // *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2021. **66**, Article Number 103170. doi [10.1016/j.probengmech.2021.103170](https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2021.103170).
28. Zhang W., Dai G., Wang F., Sun S., Bassir H. Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures // *Acta Mechanica Sinica*. 2007. **23**, N 1. 77–89. doi [10.1007/s10409-006-0045-2](https://doi.org/10.1007/s10409-006-0045-2).
29. Andrä H., Combaret N., Dvorkin J., Glatt E., Han J., Kabel M., Keehm Y., Krzikalla F., Lee M., Madonna C., Marsh M., Mukerji T., Saenger E.H., Sain R., Saxena N., Ricker S., Wiegmann A., Zhan X. Digital rock physics benchmarks - part II: computing effective properties // *Computers and Geosciences*. 2013. **50**. 33–43. doi [10.1016/j.cageo.2012.09.008](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.09.008).
30. Rubino J.G., Guarracino L., Müller T.M., Holliger K. Do seismic waves sense fracture connectivity? // *Geophysical Research Letters*. 2013. **40**, N 4. 692–696. doi [10.1002/grl.50127](https://doi.org/10.1002/grl.50127).
31. Vavryčuk V. Velocity, attenuation, and quality factor in anisotropic viscoelastic media: a perturbation approach // *Geophysics*. 2008. **73**, N 5. D63–D73. doi [10.1190/1.2921778](https://doi.org/10.1190/1.2921778).
32. Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // *Geophysics*. 1986. **51**, N 4. 889–901. doi [10.1190/1.1442147](https://doi.org/10.1190/1.1442147).
33. Levander A.R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // *Geophysics*. 1988. **53**, N 11. 1425–1436. doi [10.1190/1.1442422](https://doi.org/10.1190/1.1442422).
34. Lisitsa V., Vishnevskiy D. Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity // *Geophysical Prospecting*. 2010. **58**, N 4. 619–635. doi [10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x).
35. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
36. Lisitsa V., Podgornova O., Tcheverda V. On the interface error analysis for finite difference wave simulation // *Computational Geophysics*. 2010. **14**, N 4. 769–778. doi [10.1007/s10596-010-9187-1](https://doi.org/10.1007/s10596-010-9187-1).
37. Vishnevsky D., Lisitsa V., Tcheverda V., Reshetova G. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves // *Geophysics*. 2014. **79**, N 4. T219–T232. doi [10.1190/geo2013-0299.1](https://doi.org/10.1190/geo2013-0299.1).
38. Moczo P., Kristek J., Gális M. The finite-difference modelling of earthquake motions: waves and ruptures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014.

39. Moczko P., Kristek J., Vavryčuk V., Archuleta R.J., Halada L. 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities // Bulletin of the Seismological Society of America. 2002. **92**, N 8. 3042–3066. doi [10.1785/0120010167](https://doi.org/10.1785/0120010167).
40. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods // Annual Review of Fluid Mechanics. 2005. **37**, N 1. 239–261. doi [10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743).
41. Lisitsa V., Bazaikin Y., Khachkova T. Computational topology-based characterization of pore space changes due to chemical dissolution of rocks // Applied Mathematical Modelling. 2020. **88**. 21–37. doi [10.1016/j.apm.2020.06.037](https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.037).
42. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
43. Rubino J.G., Caspari E., Müller T.M., Milani M., Barbosa N.D., Holliger K. Numerical upscaling in 2-D heterogeneous poroelastic rocks: anisotropic attenuation and dispersion of seismic waves // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2016. **121**, N 9. 6698–6721. doi [10.1002/2016JB013165](https://doi.org/10.1002/2016JB013165).
44. Уайт Д.Е., Михайлова Н.Г., Ляховицкий Ф.М. Распространение сейсмических волн в слоистых средах, насыщенных жидкостью и газом // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1975. № 10. 44–52.
45. Novikov M.A., Lisitsa V.V., Bazaikin Y.V. Wave propagation in fractured-porous media with different percolation length of fracture systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. **41**, N 8. 1533–1544. doi [10.1134/S1995080220080144](https://doi.org/10.1134/S1995080220080144).
46. Al-Khulaifi Y., Lin Q., Blunt M.J., Bijeljic B. Pore-scale dissolution by CO₂ saturated brine in a multimineral carbonate at reservoir conditions: impact of physical and chemical heterogeneity // Water Resources Research. 2019. **55**, N 4. 3171–3193. doi [10.1029/2018WR024137](https://doi.org/10.1029/2018WR024137).
47. Prokhorov D., Lisitsa V., Khachkova T., Bazaikin Y., Yang Y. Topology-based characterization of chemically-induced pore space changes using reduction of 3D digital images // Journal of Computational Science. 2022. **58**, Article Number 101550. doi [10.1016/j.jocs.2021.101550](https://doi.org/10.1016/j.jocs.2021.101550).

Поступила в редакцию
5 ноября 2022 г.

Принята к публикации
25 декабря 2022 г.

Информация об авторах

Сергей Александрович Соловьев — к.ф.-м.н., с.н.с.; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр-кт Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Михаил Александрович Новиков — н.с.; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр-кт Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Вадим Викторович Лисица — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр-кт Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. N. Salaun, H. Toubiana, J.-B. Mitschler, et al., “High-Resolution 3D Seismic Imaging and Refined Velocity Model Building Improve the Image of a Deep Geothermal Reservoir in the Upper Rhine Graben,” *Lead. Edge* **39** (12), 857–863 (2020). doi [10.1190/tle39120857.1](https://doi.org/10.1190/tle39120857.1).
2. N. C. M. Marty, V. Hamm, C. Castillo, et al., “Modelling Water-Rock Interactions Due to Long-Term Cooled-Brine Reinjection in the Dogger Carbonate Aquifer (Paris Basin) Based on *in-situ* Geothermal Well Data,” *Geothermics* **88**, Article Number 101899 (2020). doi [10.1016/j.geothermics.2020.101899](https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2020.101899).
3. H. P. Menke, C. A. Reynolds, M. G. Andrew, et al., “4D Multi-Scale Imaging of Reactive Flow in Carbonates: Assessing the Impact of Heterogeneity on Dissolution Regimes Using Streamlines at Multiple Length Scales,” *Chem. Geol.* **481**, 27–37 (2018). doi [10.1016/j.chemgeo.2018.01.016](https://doi.org/10.1016/j.chemgeo.2018.01.016).
4. F. Huang, P. Bergmann, C. Juhlin, et al., “The First Post-Injection Seismic Monitor Survey at the Ketzin Pilot CO₂ Storage Site: Results from Time-Lapse Analysis,” *Geophys. Prospect.* **66** (1), 62–84 (2018). doi [10.1111/1365-2478.12497](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12497).
5. E. Kaya and S. J. Zarrouk, “Reinjection of Greenhouse Gases into Geothermal Reservoirs,” *Int. J. Greenh. Gas Control* **67**, 111–129 (2017). doi [10.1016/j.ijggc.2017.10.015](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2017.10.015).
6. M. Prasad, S. Glubokovskikh, T. Daley, et al., “CO₂ Messes with Rock Physics,” *Lead. Edge* **40** (6), 424–432 (2021). doi [10.1190/tle40060424.1](https://doi.org/10.1190/tle40060424.1).



7. B. Quintal, E. Caspari, K. Holliger, and H. Steeb, “Numerically Quantifying Energy Loss Caused by Squirt Flow,” *Geophys. Prospect.* **67** (8), 2196–2212 (2019). doi [10.1111/1365-2478.12832](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12832).
8. Y. Alkhimenkov, E. Caspari, S. Lissa, and B. Quintal, “Azimuth-, Angle- and Frequency-Dependent Seismic Velocities of Cracked Rocks Due to Squirt Flow,” *Solid Earth* **11** (3), 855–871 (2020). doi [10.5194/se-11-855-2020](https://doi.org/10.5194/se-11-855-2020).
9. S. G. Solazzi, S. Lissa, J. G. Rubino, and K. Holliger, “Squirt Flow in Partially Saturated Cracks: A Simple Analytical Model,” *Geophys. J. Int.* **227** (1), 680–692 (2021). doi [10.1093/gji/ggab249](https://doi.org/10.1093/gji/ggab249).
10. J. G. Rubino, T. M. Müller, L. Guarracino, et al., “Seismoacoustic Signatures of Fracture Connectivity,” *J. Geophys. Res. Solid Earth* **119** (3), 2252–2271 (2014). doi [10.1002/2013JB010567](https://doi.org/10.1002/2013JB010567).
11. L. Kong, B. Gurevich, Y. Zhang, and Y. Wang, “Effect of Fracture Fill on Frequency-Dependent Anisotropy of Fractured Porous Rocks,” *Geophys. Prospect.* **65** (6), 1649–1661 (2017). doi [10.1111/1365-2478.12505](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12505).
12. E. Caspari, M. Novikov, V. Lisitsa, et al., “Attenuation Mechanisms in Fractured Fluid-Saturated Porous Rocks: A Numerical Modelling Study,” *Geophys. Prospect.* **67** (4), 935–955 (2019). doi [10.1111/1365-2478.12667](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12667).
13. J. Guo and B. Gurevich, “Effects of Coupling between Wave-Induced Fluid Flow and Elastic Scattering on *P*-Wave Dispersion and Attenuation in Rocks with Aligned Fractures,” *J. Geophys. Res. Solid Earth* **125** (3), Article Number e2019JB018685 (2020). doi [10.1029/2019JB018685](https://doi.org/10.1029/2019JB018685).
14. S. G. Solazzi, J. Hunziker, E. Caspari, et al., “Seismic Signatures of Fractured Porous Rocks: The Partially Saturated Case,” *J. Geophys. Res. Solid Earth* **125** (8), Article Number e2020JB019960 (2020). doi [10.1029/2020JB019960](https://doi.org/10.1029/2020JB019960).
15. J. Guo, L. Zhao, X. Chen, et al., “Theoretical Modelling of Seismic Dispersion, Attenuation, and Frequency-Dependent Anisotropy in a Fluid Saturated Porous Rock with Intersecting Fractures,” *Geophys. J. Int.* **230** (1), 580–606 (2022). doi [10.1093/gji/ggac070](https://doi.org/10.1093/gji/ggac070).
16. T. M. Müller, B. Gurevich, and M. Lebedev, “Seismic Wave Attenuation and Dispersion Resulting from Wave-Induced Flow in Porous Rocks — A Review,” *Geophysics* **75** (5), 75A147–75A164 (2020). doi [10.1190/1.3463417](https://doi.org/10.1190/1.3463417).
17. J. Guo, J. G. Rubino, S. Glubokovskikh, and B. Gurevich, “Effects of Fracture Intersections on Seismic Dispersion: Theoretical Predictions Versus Numerical Simulations,” *Geophys. Prospect.* **65** (5), 1264–1276 (2017). doi [10.1111/1365-2478.12474](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12474).
18. J. Hunziker, M. Favino, E. Caspari, et al., “Seismic Attenuation and Stiffness Modulus Dispersion in Porous Rocks Containing Stochastic Fracture Networks,” *J. Geophys. Res. Solid Earth* **123** (1), 125–143 (2018). doi [10.1002/2017JB014566](https://doi.org/10.1002/2017JB014566).
19. M. A. Novikov, Ya. V. Bazaikin, V. V. Lisitsa, and A. A. Kozyaev, “Numerical Modeling of Wave Propagation in Fractured Porous Fluid-Saturated Media,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)*. **19** (3), 235–252 (2018). doi [10.26089/NumMet.v19r323](https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r323).
20. J. M. Carcione and F. Cavallini, “A Rheological Model for Anelastic Anisotropic Media with Applications to Seismic Wave Propagation,” *Geophys. J. Int.* **119** (1), 338–348 (1994). doi [10.1111/j.1365-246X.1994.tb00931.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb00931.x).
21. S. Ovaysi, M. F. Wheeler, and M. Balhoff, “Quantifying the Representative Size in Porous Media,” *Transp. Porous Med.* **104** (2), 349–362 (2014). doi [10.1007/s11242-014-0338-z](https://doi.org/10.1007/s11242-014-0338-z).
22. Y. Bazaikin, B. Gurevich, S. Iglauer, et al., “Effect of CT Image Size and Resolution on the Accuracy of Rock Property Estimates,” *J. Geophys. Res. Solid Earth* **122** (5), 3635–3647 (2017). doi [10.1002/2016JB013575](https://doi.org/10.1002/2016JB013575).
23. M. A. Biot, “Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range,” *J. Acoust. Soc. Am.* **28** (2), 168–178 (1956). doi [10.1121/1.1908239](https://doi.org/10.1121/1.1908239).
24. M. A. Biot, “Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range,” *J. Acoust. Soc. Am.* **28** (2), 179–191 (1956). doi [10.1121/1.1908241](https://doi.org/10.1121/1.1908241).
25. G. E. Backus, “Long-Wave Elastic Anisotropy Produced by Horizontal Layering,” *J. Geophys. Res.* **67** (11), 4427–4440 (1962). doi [10.1029/JZ067i011p04427](https://doi.org/10.1029/JZ067i011p04427).
26. M. Schoenberg and F. Muir, “A Calculus for Finely Layered Anisotropic Media,” *Geophysics* **54** (5), 581–589 (1989). doi [10.1190/1.1442685](https://doi.org/10.1190/1.1442685).
27. T. Khachkova, V. Lisitsa, D. Kolyukhin, and G. Reshetova, “Influence of Interfaces Roughness on Elastic Properties of Layered Media,” *Probabilistic Eng. Mech.* **66**, Article Number 103170 (2021). doi [10.1016/j.probengmech.2021.103170](https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2021.103170).
28. W. Zhang, G. Dai, F. Wang, et al., “Using Strain Energy-Based Prediction of Effective Elastic Properties in Topology Optimization of Material Microstructures,” *Acta Mech. Sin.* **23** (1), 77–89 (2007). doi [10.1007/s10409-006-0045-2](https://doi.org/10.1007/s10409-006-0045-2).
29. H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., “Digital Rock Physics Benchmarks - Part II: Computing Effective Properties,” *Comput. Geosci.* **50**, 33–43 (2013). doi [10.1016/j.cageo.2012.09.008](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.09.008).

30. J. G. Rubino, L. Guarracino, T. M. Müller, and K. Holliger, “Do Seismic Waves Sense Fracture Connectivity?,” *Geophys. Res. Lett.* **40** (4), 692–696 (2013). doi [10.1002/grl.50127](https://doi.org/10.1002/grl.50127).
31. V. Vavryčuk, “Velocity, Attenuation, and Quality Factor in Anisotropic Viscoelastic Media: A Perturbation Approach,” *Geophysics* **73** (5), D63–D73 (2008). doi [10.1190/1.2921778](https://doi.org/10.1190/1.2921778).
32. J. Virieux, “*P*-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-Stress Finite-Difference Method,” *Geophysics* **51** (4), 889–901 (1986). doi [10.1190/1.1442147](https://doi.org/10.1190/1.1442147).
33. A. R. Levander, “Fourth-Order Finite-Difference *P*-SV Seismograms,” *Geophysics*. **53** (11), 1425–1436 (1988). doi [10.1190/1.1442422](https://doi.org/10.1190/1.1442422).
34. V. Lisitsa and D. Vishnevskiy, “Lebedev Scheme for the Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Anisotropic Elasticity,” *Geophys. Prospect.* **58** (4), 619–635 (2010). doi [10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x).
35. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1989; CRC Press, Boca Raton, 2001). doi [10.1201/9780203908518](https://doi.org/10.1201/9780203908518).
36. V. Lisitsa, O. Podgornova, and V. Tcheverda, “On the Interface Error Analysis for Finite Difference Wave Simulation,” *Comput. Geosci.* **14** (4), 769–778 (2010). doi [10.1007/s10596-010-9187-1](https://doi.org/10.1007/s10596-010-9187-1).
37. D. Vishnevsky, V. Lisitsa, V. Tcheverda, and G. Reshetova, “Numerical Study of the Interface Errors of Finite-Difference Simulations of Seismic Waves,” *Geophysics* **79** (4), T219–T232 (2014). doi [10.1190/geo2013-0299.1](https://doi.org/10.1190/geo2013-0299.1).
38. P. Moczo, J. Kristek, and M. Gális, *The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions: Waves and Ruptures* (Cambridge University Press, Cambridge, 2014). doi [10.1017/CB09781139236911](https://doi.org/10.1017/CB09781139236911).
39. P. Moczo, J. Kristek, V. Vavryčuk, et al., “3D Heterogeneous Staggered-Grid Finite-Difference Modeling of Seismic Motion with Volume Harmonic and Arithmetic Averaging of Elastic Moduli and Densities,” *Bull. Seismol. Soc. Am.* **92** (8), 3042–3066 (2002). doi [10.1785/0120010167](https://doi.org/10.1785/0120010167).
40. R. Mittal and G. Iaccarino, “Immersed Boundary Methods,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37** (1), 239–261 (2005). doi [10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743).
41. V. Lisitsa, Y. Bazaikin, and T. Khachkova, “Computational Topology-Based Characterization of Pore Space Changes Due to Chemical Dissolution of Rocks,” *Appl. Math. Model.* **88**, 21–37 (2020). doi [10.1016/j.apm.2020.06.037](https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.037).
42. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 2003; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013). doi [10.1137/1.9780898718003](https://doi.org/10.1137/1.9780898718003).
43. J. G. Rubino, E. Caspari, T. M. Müller, et al., “Numerical Upscaling in 2-D Heterogeneous Poroelastic Rocks: Anisotropic Attenuation and Dispersion of Seismic Waves,” *J. Geophys. Res. Solid Earth* **121** (9), 6698–6721 (2016). doi [10.1002/2016JB013165](https://doi.org/10.1002/2016JB013165).
44. D. E. White, N. G. Mikhailova, and F. M. Lyakhovitskii, “Propagation of Seismic Waves in Layered Media Saturated with Fluid and Gas,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. Zemli*, No. 10, 44–52 (1975).
45. M. A. Novikov, V. V. Lisitsa, and Y. V. Bazaikin, “Wave Propagation in Fractured-Porous Media with Different Percolation Length of Fracture Systems,” *Lobachevskii J. Math.* **41** (8), 1533–1544 (2020). doi [10.1134/S1995080220080144](https://doi.org/10.1134/S1995080220080144).
46. Y. Al-Khulaifi, Q. Lin, M. J. Blunt, and B. Bijeljic, “Pore-Scale Dissolution by CO₂ Saturated Brine in a Multimineral Carbonate at Reservoir Conditions: Impact of Physical and Chemical Heterogeneity,” *Water Resour. Res.* **55** (4), 3171–3193 (2019). doi [10.1029/2018WR024137](https://doi.org/10.1029/2018WR024137).
47. D. Prokhorov, V. Lisitsa, T. Khachkova, et al., “Topology-Based Characterization of Chemically-Induced Pore Space Changes Using Reduction of 3D Digital Images,” *J. Comput. Sci.* **58**, Article Number 101550 (2022). doi [10.1016/j.jocs.2021.101550](https://doi.org/10.1016/j.jocs.2021.101550).

Received
November 5, 2022

Accepted for publication
December 25, 2022

Information about the authors

Sergey A. Solovyev — Ph.D., Senior Researcher; Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

Mikhail A. Novikov — Researcher; Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

Vadim V. Lisitsa — Dr. Sci., Head of Laboratory; Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.