

УДК 519.6

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КОНВЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ В УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ–СТОКСА НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

К. Н. Волков¹

Рассматриваются свойства конечно-разностных схем высокой разрешающей способности, предназначенных для дискретизации конвективных потоков в уравнениях Навье–Стокса, а также особенности их численной реализации. Разностные схемы формулируются на неравномерной сетке, а для исследования их свойств привлекается диаграмма нормализованных переменных. Проводится сравнение результатов моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в каверне с подвижной верхней стенкой, полученных при помощи различных разностных схем.

Ключевые слова: конечно-разностные схемы, конвективный перенос, уравнения Навье–Стокса, динамика вязкой жидкости.

1. Введение. При численном моделировании задач механики жидкости и газа эффективность вычислительной процедуры и качество получаемого решения в существенной степени зависят от того, какие конечно-разностные схемы используются для дискретизации слагаемых, описывающих конвективный перенос в уравнениях Навье–Стокса. Ошибки дискретизации, проявляющиеся в виде схемной вязкости и численной дисперсии, приводят не только к количественному, но и к качественному искажению численного решения. Основная проблема при построении разностных схем заключается в желании повысить точность аппроксимации и одновременно обеспечить получение монотонного численного решения.

Схемы с разностями против потока дают схемную вязкость, соизмеримую по порядку величины с физической вязкостью (численная диффузия, фазовые ошибки), что усиливает вязкий характер решения и приводит к размазыванию градиентов искомых функций.

Центрированные разностные схемы подвержены нелинейной неустойчивости, которая проявляется в областях с большими градиентами потока (например, вблизи точки торможения) и приводит к появлению нефизических осцилляций решения (численная дисперсия, амплитудные ошибки). Амплитуда осцилляций обычно не снижается при измельчении сетки, а их частота даже возрастает. Для уменьшения дисперсионных ошибок, вызывающих осцилляции решения, в разностные уравнения добавляются слагаемые, связанные с искусственной вязкостью. Однако сглаживание проявляется при этом не только на осцилляциях решения, но и в зонах градиентного течения.

Для стабилизации решения применяется взвешенно-среднее разностей против потока и центрированных разностей (гибридная схема). Однако при этом получается неточное решение, особенно если локальное направление потока не совпадает с направлением координатных линий сетки и велики локальные градиенты скорости. Более точное решение получается, если для дискретизации конвективных потоков использовать противопоточные разности высокого порядка точности. Помимо высокой точности, они позволяют избавиться от ограничений, связанных с сеточным числом Рейнольдса [1].

Перечисленные обстоятельства не позволяют надеяться на точный расчет характеристик потока при использовании схем с разностями против потока и центрированными разностями низкого порядка, которые применяются довольно редко [2].

Один из путей прогресса в направлении улучшения диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем, используемых для дискретизации конвективных потоков, связан с разработкой и реализацией разностных схем высокой разрешающей способности (High Resolution Scheme, HRS). Такие схемы имеют комбинированную природу и объединяют достоинства схем с разностями против потока (безусловная устойчивость) и центрированными разностями (отсутствие численной диффузии), позволяя получать одновременно точные, монотонные (ограниченные) и сходящиеся решения задачи. Способ дискретизации диффузионных потоков влияет, скорее, на техническую сторону реализации численного метода, и соответствующие численные схемы необязательно должны иметь повышенный порядок. Более низкий порядок

¹ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; e-mail: kvolkov@kv7340.spb.edu

дискретизации вязких членов может интерпретироваться как небольшая неточность в представлении сил вязкости, что вполне допустимо при моделировании турбулентных течений, когда эффективная турбулентная вязкость рассчитывается при помощи некоторой приближенной модели.

Схемы высокого порядка отличаются друг от друга степенью полинома, используемого для интерполяции искомой функции между соседними узлами сетки и определяющего порядок точности разностной схемы. Обычно используются полиномы не выше третьей степени. Применение полиномов более высокого порядка приводит к нефизическим осцилляциям решения и проблемам с устойчивостью вычислительной процедуры. Такие схемы могут быть подвержены численной неустойчивости в случае, когда узлы сетки располагаются таким образом, а свойства решения таковы, что происходит частый переход с одной разностной схемы на другую. Для обеспечения устойчивости численного решения вводится нижняя релаксация, что замедляет сходимость [3, 4].

В данной работе рассматриваются свойства и особенности численной реализации конечно-разностных схем высокой разрешающей способности, построенных на основе не более четырех узлов сетки, что обеспечивает третий порядок точности на равномерной сетке. В отличие от работ [3–17], схемы формулируются на неравномерной сетке, что существенно увеличивает круг практических задач, для решения которых они могут использоваться. Для исследования свойств разностных схем, сформулированных на неравномерной сетке, привлекается диаграмма нормализованных переменных [6], применение которой позволяет записать разностные схемы в более компактной форме и упростить их программную реализацию. Проводится сравнение результатов моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в каверне с подвижной верхней стенкой, полученных при помощи различных разностных схем.

2. Общая структура разностных схем. Рассмотрим контрольный объем с центром в точке P и вычислим потоки через его грани — в точках w и e (рис. 1).

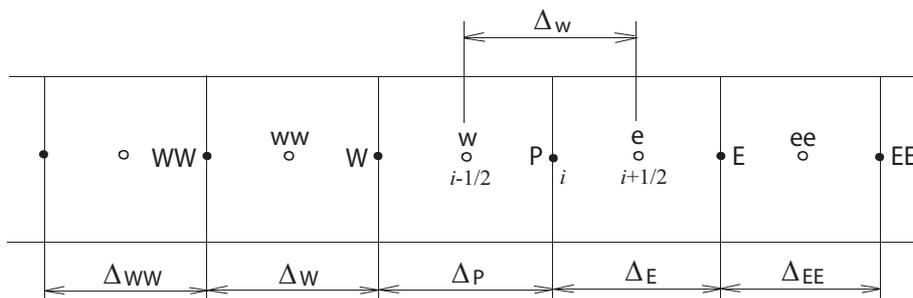


Рис. 1. Разностный шаблон для дискретизации конвективных потоков

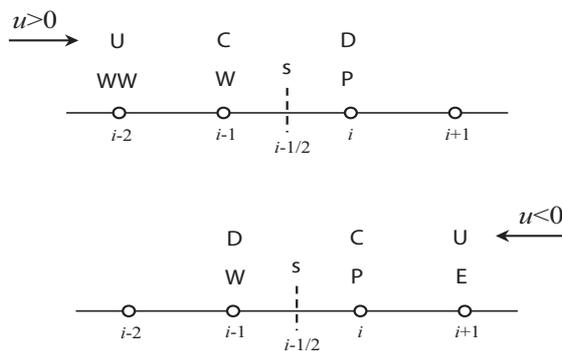


Рис. 2. Разностный шаблон, зависящий от локального направления потока

2.1. Разностный шаблон. Для построения разностных схем обычно применяется шаблон, показанный на рис. 1. Шаги разностной сетки вычисляются как разности координат соответствующих узлов: $\Delta_W = x_W - x_{WW}$, $\Delta_P = x_P - x_W$, $\Delta_E = x_E - x_P$, $\Delta_w = x_e - x_w = (\Delta_P + \Delta_E)/2$. Использование такого шаблона приводит к достаточно громоздкому представлению разностных схем, структура которых зависит от локального направления потока.

На практике удобно пользоваться шаблоном, наименование узлов которого зависит от направления потока на грани контрольного объема (рис. 2). Индексы U и D соответствуют узлам, взятым против и по

направлению потока относительно узла С. Узел С представляет собой узел против потока относительно грани контрольного объема s, через которую вычисляется поток. Шаги сетки находятся из следующих соотношений: $\Delta_{UC} = |x_C - x_U|$, $\Delta_{CD} = |x_D - x_C|$.

Предполагая, что $u_s \neq 0$, введем величины (индикаторы), определяющие локальное направление потока на грани контрольного объема:

$$U_s^+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|u_s|}{u_s} \right), \quad U_s^- = 1 - U_s^+. \quad (1)$$

С использованием индикаторов (1) значение искомой функции в узле С вычисляется по формуле

$$f_C = f_W U_w^+ + f_P U_w^-.$$

2.2. Исходные переменные. В исходных переменных разностная схема для расчета потока через левую грань контрольного объема записывается в виде

$$\begin{aligned} f_w &= G(f_U, f_C, f_D, x_U, x_C, x_D, x_s) = \\ &= F_1(f_{WW}, f_W, f_P, x_{WW}, x_W, x_P, x_w) U_w^+ + F_2(f_W, f_P, f_E, x_E, x_P, x_W, x_w) U_w^-. \end{aligned} \quad (2)$$

На равномерной сетке соотношение (2) можно представить в форме

$$f_w = f_C + \frac{\varphi(r_w)}{2} (f_C - f_U) = \left[f_W + \frac{\varphi(r_w)}{2} (f_W - f_{WW}) \right] U_w^+ + \left[f_P + \frac{\varphi(r_w)}{2} (f_P - f_E) \right] U_w^-.$$

Параметр r равен отношению прилежащих градиентов, которые вычисляются по значениям искомой функции, лежащим против потока:

$$r_w = \frac{f_D - f_C}{f_C - f_U} = \frac{f_P - f_W}{f_W - f_{WW}} U_w^+ + \frac{f_W - f_P}{f_P - f_E} U_w^-.$$

Ограничитель $\varphi(r)$ определяет свойства и порядок точности разностной схемы.

В зависимости от структуры ограничителя $\varphi(r)$ разностные схемы можно условно разделить на линейные и нелинейные [4, 5]. К линейным разностным схемам относятся, в частности, схема с разностями против потока и схема с центрированными разностями, а также их комбинация — гибридная схема. Нелинейные разностные схемы для интерполяции искомой функции между соседними узлами сетки используют параболу или кубический полином.

2.3. Нормализованные переменные. Введем нормализованные переменные

$$\hat{f} = \frac{f - f_U}{f_D - f_U}, \quad \hat{x} = \frac{x - x_U}{x_D - x_U}.$$

Нетрудно заметить, что $\hat{f}_U = 0$, $\hat{f}_D = 1$.

В нормализованных переменных разностная схема записывается в виде

$$\hat{f}_w = G(\hat{f}_C, x_C, x_w) = F_1(\hat{f}_W, \hat{x}_W, \hat{x}_w) U_w^+ + F_2(\hat{f}_P, \hat{x}_P, \hat{x}_w) U_w^-. \quad (3)$$

Используя индикаторы (1), определим нормализованное значение искомой функции на левой грани контрольного объема:

$$\hat{f}_w = \frac{f_W - f_U}{f_D - f_U} = \frac{f_W - f_{WW}}{f_P - f_{WW}} U_w^+ + \frac{f_W - f_E}{f_W - f_E} U_w^-. \quad (4)$$

Нормализованное значение искомой функции в узле С вычисляется по формуле

$$\hat{f}_C = \hat{f}_W U_w^+ + \hat{f}_P U_w^-.$$

2.4. Выбор формы записи. Запись разностной схемы в исходных переменных оказывается удобной при программной реализации численного метода, а представление разностной схемы в нормализованных переменных — для исследования ее свойств с использованием диаграммы нормализованных переменных на равномерной (Normalized Variable Diagram, NVD) и неравномерной (Normalized Variable and Space Formulation, NVSF) сетке [6, 7]. Использование нормализованных переменных позволяет записать разностную схему в более компактной форме на неравномерной сетке.

Для перехода от нормализованных к исходным переменным можно воспользоваться методом коррекции [8]. Сначала рассчитывается предварительное значение потока на основе противопоточной схемы первого порядка

$$\widehat{f}_w = \widehat{f}_w U_w^+ + \widehat{f}_p U_w^-.$$

Затем вычисляется величина поправки

$$\Delta f^* = \frac{f_w - f_C}{f_D - f_C} = \frac{\widehat{f}_w - \widehat{f}_C}{1 - \widehat{f}_C}.$$

К величине Δf^* применяется тот или иной ограничитель потока для получения монотонного решения (полученная величина обозначается через Δf). Наконец, вычисляется значение потока по формуле

$$\widehat{f}_w = f_U \Delta f + f_C (1 - \Delta f).$$

Значение поправочного фактора Δf нетрудно связать с представлением ограничителя потока $\varphi(r)$ (для схем TVD они отличаются лишь постоянным множителем).

3. Критерии качества разностных схем. Критерии, которым должны удовлетворять разностные схемы, чтобы обеспечить получение качественного численного решения, схематично показаны на рис. 3 (они располагаются в порядке возрастания их мягкости).

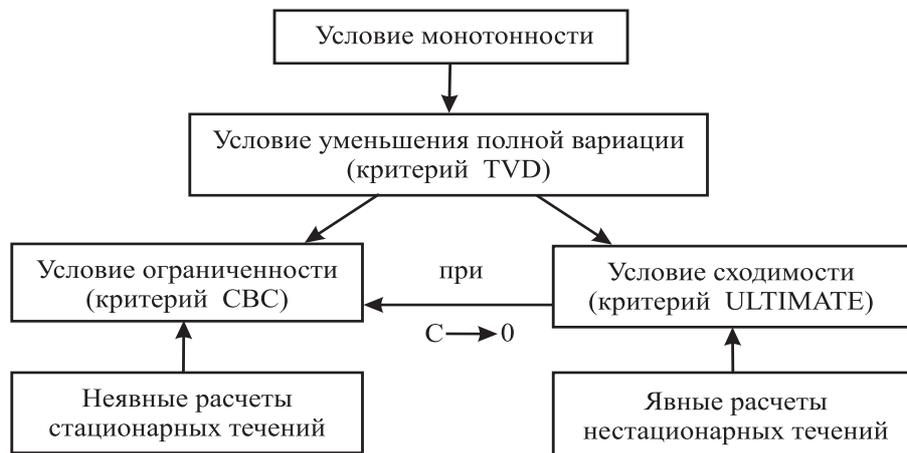


Рис. 3. Критерии качества разностных схем

3.1. Условие монотонности и условие TVD. Численные схемы, используемые для дискретизации конвективных потоков, должны сохранять монотонность и сходиться к физически корректному решению. Условие сохранения монотонности решения связано с идеей невозможности появления ложных максимумов или минимумов (нефизических осцилляций, развивающихся со временем). Иными словами, если в момент времени t_0 начальные данные u_i^0 являются монотонной функцией x_i , то решение u_i^n в моменты времени t_n также должно оставаться монотонной функцией x_i .

Условие монотонности можно записать в исходных и нормализованных переменных в виде

$$f_U < f_C < f_D \quad \text{или} \quad 0 < \widehat{f}_C < 1.$$

В силу теоремы Годунова не существует монотонных линейных разностных схем с порядком аппроксимации по пространству выше первого. Такие схемы обладают большой диффузией, а точное решение может быть получено лишь на достаточно мелких сетках [1].

Повышение точности конечно-разностных схем без потери их строгого теоретического обоснования достигается путем замены условия сохранения монотонности на условие уменьшения полной вариации (Total Variation Diminishing, TVD). Полная вариация численного решения определяется следующим образом [1]:

$$\text{TV}(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n|.$$

Разностная схема является схемой TVD, если выполняется условие $\text{TV}(u^{n+1}) \leq \text{TV}(u^n)$.

Используя нормализованные переменные, условие TVD можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{f}_W \leq \hat{f}_w \leq 2\hat{f}_W, \quad \hat{f}_w \leq 1 \quad &\text{при } \hat{f}_W \in [0, 1]; \\ \hat{f}_w = \hat{f}_W \quad &\text{при } \hat{f}_W \notin [0, 1]. \end{aligned}$$

Для получения разностных схем, удовлетворяющих условию TVD, вводится ограничитель потока $\varphi(r)$, зависящий от градиентов искомой функции. Конкретный вид ограничителя является свободным параметром разностной схемы (в конечном счете, ограничитель определяет порядок ее точности). Для обеспечения монотонности решения необходимо выполнение условия [1]

$$0 \leq \varphi(r) \leq \text{minmod}(2, 2r), \quad \text{где } \text{minmod}(x, y) = \frac{1}{2} [\text{sign}(x) + \text{sign}(y)] \min(|x|, |y|).$$

3.2. Критерий конвективной ограниченности. Для обеспечения ограниченности численного решения разностные схемы должны удовлетворять критерию конвективной ограниченности (Convection Boundedness Criterion, CBC).

При $u_w > 0$ разностная схема в нормализованных переменных записывается в виде

$$\hat{f}_w = F(\hat{f}_W, \hat{x}_W, \hat{x}_w). \tag{5}$$

Разностная схема называется конвективно ограниченной, если существует непрерывная или кусочно-непрерывная возрастающая на промежутке $[0, 1]$ функция $F(\hat{f}_W) = \hat{f}_w$, такая, что [4, 5]

$$\hat{f}_w = F(\hat{f}_W) = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{f}_W = 0, \\ 1 & \text{при } \hat{f}_W = 1, \\ \hat{f}_W & \text{при } \hat{f}_W < 0 \quad \hat{f}_W > 1, \\ > \hat{f}_W, \hat{f}_W < 1 & \text{при } 0 < \hat{f}_W < 1. \end{cases}$$

Иными словами, в монотонной области $\hat{f}_W \in [0, 1]$ функция $F(\hat{f}_W)$ ограничена снизу значением \hat{f}_w , а сверху 1. В немонотонной области $\hat{f}_W \notin [0, 1]$ имеет место равенство $\hat{f}_w = \hat{f}_W$ (разностная схема переходит в схему UDS).

Критерий конвективной ограниченности удобно пояснить, используя диаграмму нормализованных переменных, показанную на рис. 4.

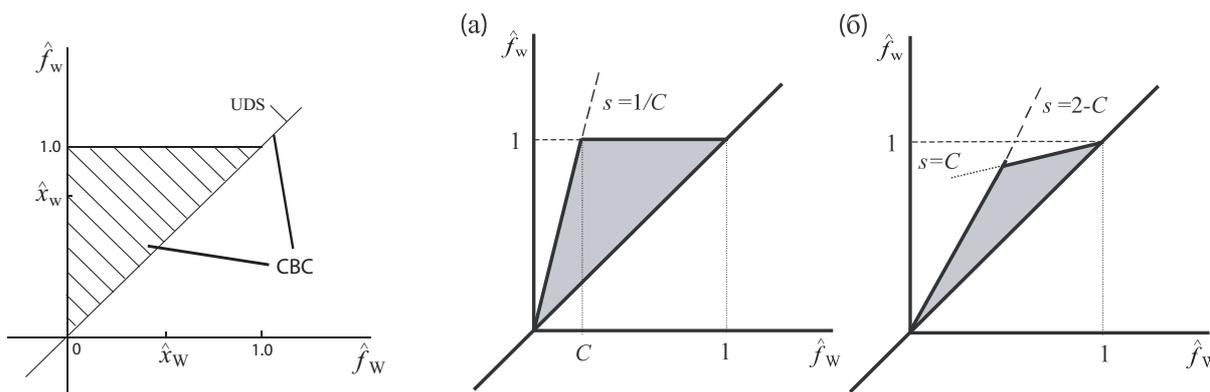


Рис. 4. Критерий конвективной ограниченности

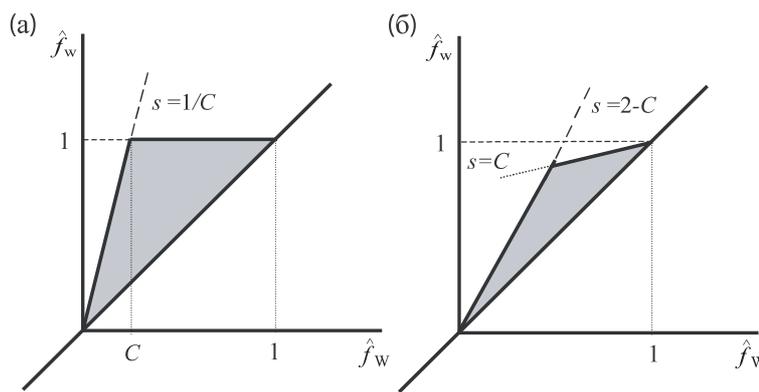


Рис. 5. Универсальный ограничитель (фрагмент а) и условие TVD (фрагмент б)

Критерий конвективной ограниченности представляет собой необходимое и достаточное условие для обеспечения ограниченности численного решения в том случае, когда для дискретизации конвективных потоков на грани контрольного объема используется не более трех узлов против потока [5]. Для обеспечения третьего порядка точности на равномерной сетке необходимо и достаточно, чтобы $F(0.5) = 0.75$, а второго порядка точности на неравномерной сетке необходимо и достаточно, чтобы $F(x_Q) = y_Q$ [6]. Третий порядок точности на неоднородной сетке достигается тогда и только тогда, когда $F'(x_Q) = s_Q$ [4].

Координаты точки Q и тангенс угла наклона касательной к функции $F(\hat{f}_W)$ в точке Q вычисляются по формулам

$$\hat{x}_W = x_Q = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_w^+ + \frac{1 - C_2}{1 - C_2 + C_3} U_w^-; \quad \hat{x}_w = y_Q = \frac{C_2(1 + C_1)}{C_1 + C_2} U_w^+ + \frac{(1 - C_2)(1 + C_3)}{1 - C_2 + C_3} U_w^-;$$

$$\hat{s}_W = s_Q = (1 + C_1)(1 - C_2)U_w^+ + C_2(1 + C_3)U_w^-.$$

Здесь

$$C_1 = \frac{\Delta_P}{\Delta_P + \Delta_W}, \quad C_2 = \frac{\Delta_P}{\Delta_P + \Delta_w}, \quad C_3 = \frac{\Delta_w}{\Delta_w + \Delta_E}.$$

Для равномерной сетки $x_Q = 0.5$, $y_Q = 0.75$, $s_Q = 0.75$.

Численные эксперименты показывают, что резкое изменение наклона функции $F(\hat{f}_W)$ в области $0.4 \leq \hat{f}_W \leq 0.6$ приводит к проблемам со сходимостью итерационного процесса [7, 8].

Имеется семейство разностных схем, удовлетворяющих критерию конвективной ограниченности [5, 6], который находит подтверждение для неявных расчетов стационарных течений, но не гарантирует получение сходящегося решения [7].

3.3. Универсальный ограничитель потока. Для того чтобы гарантировать получение сходящегося решения, в разностных схемах используется универсальный ограничитель потока (Universal Limiter, ULTIMATE). Критерий ULTIMATE находит подтверждение для явных расчетов нестационарных течений и сводится к критерию СВС при числах Куранта $C \rightarrow 0$. При малых числах Куранта критерий ULTIMATE отличается от СВС в области малых положительных значений \hat{f}_W , а именно

$$\hat{f}_W \leq \hat{f}_w \leq \frac{1}{C} \hat{f}_W \quad \text{при} \quad 0 \leq \hat{f}_W \leq C.$$

С другой стороны, явные схемы TVD требуют выполнения более жестких условий, чем критерии СВС и ULTIMATE [7]:

$$\hat{f}_W \leq \hat{f}_w \leq (2 - C)\hat{f}_W \quad \text{при} \quad \hat{f}_W \leq \frac{1}{2}; \quad \hat{f}_W \leq \hat{f}_w \leq 1 - C(1 - \hat{f}_W) \quad \text{при} \quad \hat{f}_W > \frac{1}{2}.$$

Критерии ULTIMATE и TVD поясняет рис. 5.

Для нестационарных расчетов параметр C представляет собой число Куранта, а при расчете стационарных течений при помощи метода установления его значение подбирается опытным путем [7]. Условия, выражаемые критериями СВС и ULTIMATE, оказываются более мягкими, чем условие TVD, но, как показывают многочисленные расчеты, позволяют получить монотонное и сходящееся решение.

Таблица 1

Порядок точности линейных конечно-разностных схем

Название схемы	Сокращенное название	Значение \varkappa	Порядок точности
Схема с разностями против потока Upwind Difference Scheme	UDS	—	1
Схема с центральными разностями Central Difference Scheme	CDS	1	2
Гибридная схема Hybrid Scheme	HYBRID	—	1 или 2
Схема с линейной интерполяцией против потока Linear Upwind Difference Scheme	LUDS	-1	2
Схема Фромма Fromm's Upwind Scheme	Fromm	0	2
Схема с квадратичной интерполяцией против потока Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics	QUICK	1/2	3
Схема с кубической интерполяцией против потока Cubic Upwind Difference Scheme	CUDS	1/3	4

4. Линейные разностные схемы. Используя диаграмму нормализованных переменных, рассмотрим структуру и свойства линейных разностных схем.

4.1. Общая структура. Ограничитель потока для линейных разностных схем удобно представить в следующем виде (так называемые схемы \varkappa -класса):

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} [(1 + \varkappa)r + (1 - \varkappa)].$$

Возможные значения коэффициента \varkappa , зависящие от типа разностной схемы, приведены в табл. 1.

Исходные переменные	Нормализованные переменные
$f_w = f_C + \frac{1}{4} [(1 + \varkappa)(f_D - f_C) + (1 - \varkappa)(f_C - f_U)]$	$\hat{f}_w = \hat{f}_C + \frac{1}{4} [(1 + \varkappa)(1 - \hat{f}_C) + (1 - \varkappa)\hat{f}_C]$

Диаграмма нормализованных переменных, приведенная на рис. 6, показывает, что из всех линейных разностных схем критерию конвективной ограниченности удовлетворяет только схема UDS. Для повышения порядка точности необходимо использовать нелинейные разностные схемы.

4.2. Схема с разностями против потока. В схеме UDS (иногда используется название UDS-1, подчеркивающее порядок точности разностной схемы) узел, необходимый для вычисления потока через грань контрольного объема с индексом s , берется против направления течения жидкости. Схема имеет одинаковый вид как на равномерной, так и на неравномерной сетках.

Исходные переменные	Нормализованные переменные
$f_w = f_C$	$\hat{f}_w = \hat{f}_C$

Схема UDS не накладывает ограничений на величину сеточного числа Рейнольдса $Re_c = |u_c| \Delta / \nu$. Однако возникающая при использовании разностей против потока погрешность дискретизации приводит к появлению схемной вязкости, которая усиливает вязкий характер решения и уменьшает точность получаемых результатов.

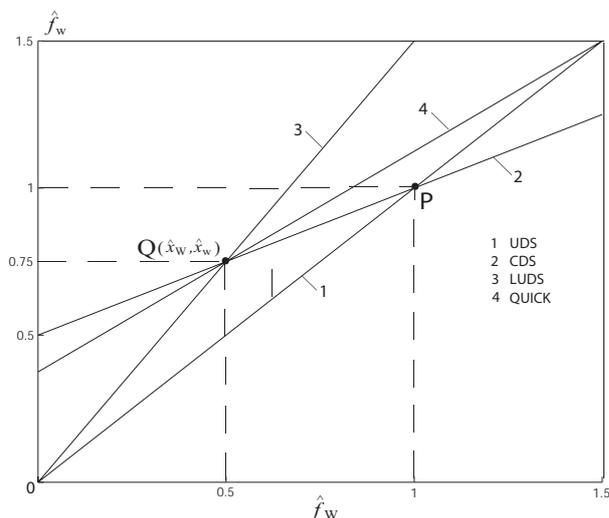


Рис. 6. Представление линейных разностных схем на диаграмме нормализованных переменных (равномерная сетка)

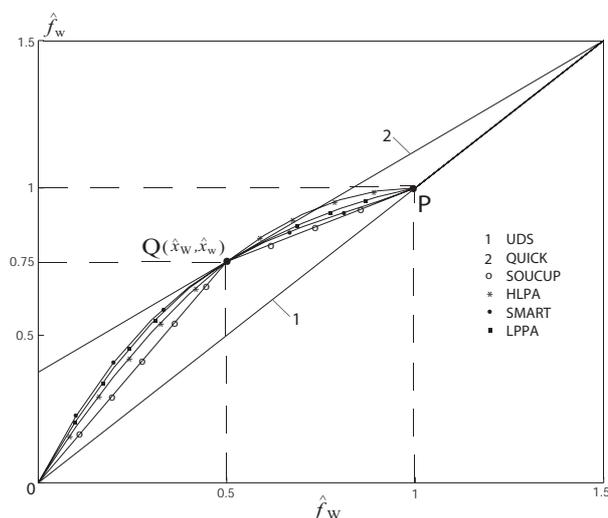


Рис. 7. Представление нелинейных разностных схем на диаграмме нормализованных переменных

4.3. Схема с центральными разностями. Схема CDS является симметричной и не зависит от направления потока. В центрально-разностной схеме второго порядка (CDS-2) берется по одному узлу вверх и вниз по потоку.

Центральные разности накладывают ограничение на величину сеточного числа Рейнольдса $Re_c \leq 2$, а их применение может приводить к осцилляциям искомого решения.

Исходные переменные	Нормализованные переменные	
	равномерная сетка	неравномерная сетка
$f_w = \frac{1}{2}(f_W + f_P)$	$\hat{f}_w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{f}_C$	$\hat{f}_w = [(1 - C_2)\hat{f}_W + C_2]U_w^+ + [C_2\hat{f}_P + (1 - C_2)]U_w^-$

4.4. Гибридная схема. Гибридная схема представляет собой взвешенное среднее центральных разностей при малых сеточных числах Рейнольдса и разностей вверх по потоку при умеренных и больших сеточных числах Рейнольдса [1]. Здесь $\alpha \rightarrow 0$ при $Re_c < 2$ и $\alpha \rightarrow 1$ при $Re_c > 2$.

Исходные переменные	Нормализованные переменные
$f_w = \alpha UDS + (1 - \alpha) CDS$	$\hat{f}_w = \alpha \widehat{UDS} + (1 - \alpha) \widehat{CDS}$

4.5. Схема LUDS. В схеме LUDS (UDS-2) используется линейная интерполяция искомой функция против потока.

Исходные переменные	Нормализованные переменные	
	равномерная сетка	неравномерная сетка
$f_w = \frac{3}{2}f_w - \frac{1}{2}f_{ww}$	$\hat{f}_w = \frac{3}{2}\hat{f}_C$	$\hat{f}_w = (1 + C_1)\hat{f}_W U_w^+ + (1 + C_3)\hat{f}_P U_w^-$

Схема LUDS обладает меньшей численной диффузией, чем схема UDS, но в ряде случаев может вносить чрезмерную численную дисперсию.

4.6. Схема Фромма. Схема Фромма (Fromm's scheme) представляет собой композитную разностную схему, объединяющую схемы LUDS и CDS (берется их среднее арифметическое).

Исходные переменные	Нормализованные переменные	
	равномерная сетка	неравномерная сетка
$f_w = \frac{1}{4}f_P + f_w - \frac{1}{4}f_{ww}$	$\hat{f}_w = \frac{1}{4} + \hat{f}_C$	$\hat{f}_w = \frac{1}{2}(\widehat{LUDS} + \widehat{CDS})$

В вычислительной практике схема Фромма используется сравнительно редко и, в основном, в качестве базовой линейной схемы для конструирования нелинейных конечно-разностных схем.

4.7. Схема QUICK. В схеме QUICK (UDS-3) используется квадратичная интерполяция против потока: один узел берется по направлению потока и два узла против потока.

Исходные переменные	Нормализованные переменные	
	равномерная сетка	неравномерная сетка
$f_w = \frac{3}{8}f_P + \frac{3}{4}f_w - \frac{1}{8}f_{ww}$	$\hat{f}_w = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\hat{f}_C$	$\hat{f}_w = \left\{ (1 + C_1)(1 - C_2)\hat{f}_W + C_2 \left[1 - \frac{C_1(1 - C_2)}{C_1 + C_2} \right] \right\} U_w^+ + \left\{ C_2(1 + C_3)\hat{f}_P + (1 - C_2) \left[1 - \frac{C_2 C_3}{1 - C_2 + C_3} \right] \right\} U_w^-$

Схема QUICK дает более точное решение, чем схемы UDS, CDS и LUDS, и представляется наиболее подходящей базовой линейной схемой для построения композитных конечно-разностных схем [9, 10]. Однако схема QUICK является неограниченной, что может приводить к осцилляциям решения и численной неустойчивости в области высоких градиентов искомых функций [4, 11]. Кроме того, она имеет ограничение на значение предельно допустимого сеточного числа Рейнольдса $Re_c = 8/3$.

4.8. Схема CUDS. В схеме CUDS (UDS-4) для интерполяции искомой функции используются три узла против потока и один узел по направлению потока. Представление схемы CUDS на неравномерной

Исходные переменные	Нормализованные переменные (равномерная сетка)
$f_w = \frac{1}{3} f_P + \frac{5}{6} f_W - \frac{1}{6} f_{WW}$	$\hat{f}_w = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \hat{f}_W$

сетке не приводится в связи с громоздкостью соответствующих соотношений.

Таблица 2

Порядок точности различных нелинейных разностных схем

Название схемы	Сокращенное название	Порядок точности	Ссылка
Монотонная противопоточная схема для законов сохранения Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws	MUSCL	2	[12]
Монотонная противопоточная схема для скалярного переноса Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport	UMIST	2	[4]
Схема с разностями против потока и центральными разностями Second-Order Upwind Central difference-first order UPwind	SOUCUP	2	[3]
Гибридная схема с линейно-параболической аппроксимацией Hybrid Linear/Parabolic Approximation	HLPА	2	[13, 14]
Быстрый и монотонный алгоритм для реалистичного переноса Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport	SMART	3	[5, 15]
Модифицированная схема SMART SMART Efficiently Revised	SMARTER	3	[4]
Схема с линейной и кусочно-параболической интерполяцией Linear and Piecewise/Parabolic Approximation	LPPA	3	[4]
Простая схема высокого разрешения Simple High-Accuracy Resolution Program	SHARP	3	[6]
Кубически-параболическая схема высокого порядка Cubic/parabolic High-Accuracy Resolution Method	CHARM	3	[12]
Неосциллирующая схема переменного порядка Variable-Order Non-Oscillatory Scheme	VONOS	3	[16]

5. Нелинейные разностные схемы. Нелинейные разностные схемы имеют композитную (комбинированную) природу. Их принято разделять на несколько категорий в зависимости от того, на основе какой линейной разностной схемы они построены.

5.1. Общая структура. В качестве базовой линейной схемы чаще всего используется схема Фромма или схема QUICK.

Различные нелинейные конечно-разностные схемы приведены в табл. 2. Несмотря на то, что некоторые из них имеют порядок точности ниже, чем, например, схема QUICK, они удовлетворяют критерию конвективной ограниченности, а некоторые схемы — условию TVD. Следует заметить, что для некоторых разностных схем используются названия, отличающиеся от тех, которые приведены в табл. 2, в частности, схему SOUCUP часто называют схемой MinMod (Minimum Modulus), а схему HLPА — схемой CLAM (Curved Line Advection Method).

На диаграмме нормализованных переменных схемы SOUCUP, HLPА, SMART и LPPA располагаются достаточно близко друг к другу (рис. 7), что приводит к схожести их свойств. На неравномерной сетке некоторые разностные схемы приведены на рис. 8.

Монотонизация нелинейных разностных схем обеспечивается за счет использования ограничителей потока, понижающих порядок аппроксимации разностных схем в области немонотонности решения. Различные ограничители потока приведены в табл. 3.

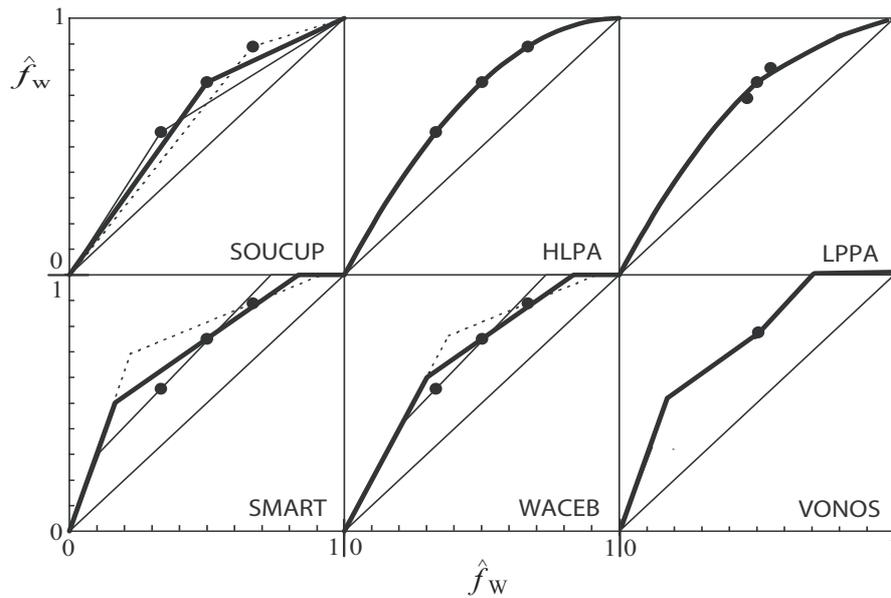


Рис. 8. Представление нелинейных разностных схем на диаграмме нормализованных переменных. Толстая линия соответствует равномерной сетке, сплошная линия — неравномерной сетке при $K = 2$, пунктирная линия — неравномерной сетке при $K = 1/2$, черные кружки — координатам точки Q). Под K понимается отношение шагов разностной сетки

Таблица 3

Ограничители потока для различных разностных схем

Разностная схема	Базовая схема	Ограничитель потока $\varphi(r)$	Свойства
MUSCL	Fromm	$\max[0, \min(2r, 0.5 + 0.5r, 2)]$	TVD
van Leer	Fromm	$(r + r)/(r + 1)$	TVD
van Albada	Fromm	$r(r + 1)/(r^2 + 1)$	TVD
OSPRE	Fromm	$3r(r + 1)/2(r^2 + r + 1)$	гладкая
HQUICK	QUICK	$2(r + r)/(r + 3)$	гладкая
UMIST	QUICK	$\max[0, \min(2r, 0.25 + 0.75r, 0.75 + 0.25r, 2)]$	TVD
SMART	QUICK	$\max[0, \min(2r, 0.25 + 0.75r, 4)]$	ограниченная
CHARM	QUICK	$3(3r + 1)/(r + 1)^2$ при $r > 0$; 0 при $r < 0$	ограниченная
Koren	CUDS	$\max[0, \min(2r, 2r/3 + 1/3, 2)]$	TVD
HCUDS	CUDS	$3(r + r)/2(r + 2)$	гладкая
SOUCUP		$\max[0, \min(r, 1)]$	TVD
SuperBee		$\max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$	TVD

5.2. Схема MUSCL. При построении схемы MUSCL в качестве базовой линейной схемы используется схема Фромма. Схема MUSCL удовлетворяет условию TVD.

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\hat{f}_w = \begin{cases} 2\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \hat{f}_C, & \frac{1}{4} \leq \hat{f}_C < \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{3}{4} \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\hat{f}_w = \begin{cases} 2\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < x_Q/2 \\ a_w + b_w\hat{f}_C, & x_Q/2 \leq \hat{f}_C < 3x_Q/2 \\ 1, & 3x_Q/2 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь $a_w = (3x_Q - 2)/2$, $b_w = (1 - x_Q)/x_Q$.

5.3. Схема SOUCUP. Схема SOUCUP, использующая кусочно-линейную интерполяцию искомой функции, объединяет схемы UDS, CDS-2 и LUDS. Переключение от одной схемы к другой контролируется критерием конвективной ограниченности [3]. Схема SOUCUP удовлетворяет условию TVD.

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\hat{f}_w = \begin{cases} \frac{3}{2}\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{f}_C, & \frac{1}{2} \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\hat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < x_Q \\ c_w + d_w\hat{f}_C, & x_Q \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь $a_w = 0$, $b_w = y_Q/x_Q$, $c_w = (y_Q - x_Q)/(1 - x_Q)$, $d_w = (1 - y_Q)/(1 - x_Q)$.

5.4. Схема HЛРА. В схеме HЛРА используется линейная и параболическая интерполяция искомой функции [13, 14], при этом она удовлетворяет условию TVD.

Исходные переменные $f_w = \begin{cases} f_w + (f_P - f_w)\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ f_w, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$.

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\hat{f}_w = \begin{cases} \hat{f}_C(2 - \hat{f}_C), & 0 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\hat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w\hat{f}_C + c_w\hat{f}_C^2, & 0 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь $a_w = 0$, $b_w = (y_Q - x_Q^2)/(x_Q - x_Q^2)$, $c_w = (x_Q - y_Q)/(x_Q - x_Q^2)$.

5.5. Схема SMART. При построении схемы SMART в качестве базовой линейной схемы используется схема QUICK [4].

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\hat{f}_w = \begin{cases} 3\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\hat{f}_C, & \frac{1}{6} \leq \hat{f}_C < \frac{5}{6} \\ 1, & \frac{5}{6} \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\hat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < x_1 \\ c_w + d_w\hat{f}_C, & x_1 \leq \hat{f}_C < x_2 \\ 1, & x_2 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь

$$\begin{aligned} a_w &= 0; & b_w &= (y_Q - 3x_Q y_Q + 2y_Q^2)/(x_Q - x_Q^2); \\ c_w &= (x_Q y_Q - y_Q^2)/(1 - x_Q); & d_w &= (y_Q - y_Q^2)/(x_Q - x_Q^2); \\ x_1 &= x_Q/3; & x_2 &= x_Q(1 - x_Q + x_Q)/y_Q. \end{aligned}$$

5.6. Схема WACEB. Схема WACEB представляет собой одну из модификаций схемы SMART и отличается от нее лишь в области малых положительных значений \hat{f}_C [17]. Схема WACEB удовлетворяет условию TVD.

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\hat{f}_w = \begin{cases} 2\hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < \frac{3}{10} \\ \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\hat{f}_C, & \frac{3}{10} \leq \hat{f}_C < \frac{5}{6} \\ 1, & \frac{5}{6} \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\hat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w \hat{f}_C, & 0 \leq \hat{f}_C < x_1 \\ c_w + d_w \hat{f}_C, & x_1 \leq \hat{f}_C < x_2 \\ 1, & x_2 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь

$$\begin{aligned} a_w &= 0; & b_w &= 2; \\ c_w &= (y_Q^2 - x_Q y_Q)/(1 - x_Q); & d_w &= (y_Q - y_Q^2)/(x_Q - x_Q^2); \\ x_1 &= x_Q y_Q (y_Q - x_Q) / [2x_Q(1 - x_Q) - y_Q(1 - y_Q)]; & x_2 &= x_Q(1 - x_Q + y_Q)/y_Q. \end{aligned}$$

5.7. Схема SMARTER. Модификация разностной схемы SMART, получившая в некоторых работах название SMARTER (SMART Efficiently Revised), имеет более хорошие показатели, чем базовая схема [3]. Касательная к кривой, воспроизводящей поведение искомой функции между соседними узлами, имеет в точке Q такой же угол наклона, что и в схеме QUICK [4].

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\hat{f}_w = \begin{cases} \frac{5}{2}\hat{f}_C - \frac{5}{2}\hat{f}_C^2 + \hat{f}_C^3, & 0 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\hat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w \hat{f}_C + c_w \hat{f}_C^2 + d_w \hat{f}_C^3, & 0 \leq \hat{f}_C \leq 1 \\ \hat{f}_C, & \hat{f}_C < 0, \hat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь

$$\begin{aligned} a_w &= 0; & b_w &= [x_Q^4 + s_Q(x_Q^3 - x_Q^2) + y_Q(2x_Q - 3x_Q^2)]/(x_Q - x_Q^2)^2; \\ c_w &= [-2x_Q^3 + s_Q(x_Q - x_Q^3) + y_Q(3x_Q^2 - 1)]/(x_Q - x_Q^2)^2; \\ d_w &= [x_Q^2 + s_Q(x_Q^2 - x_Q) + y_Q(1 - 2x_Q)]/(x_Q - x_Q^2)^2. \end{aligned}$$

5.8. Схема VONOS. Схема VONOS представляет собой одну из модификаций схемы SMART [16] (в качестве базовой схемы используется схема QUICK).

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\widehat{f}_w = \begin{cases} 3\widehat{f}_C, & 0 \leq \widehat{f}_C < \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\widehat{f}_C, & \frac{1}{6} \leq \widehat{f}_C < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\widehat{f}_C, & \frac{1}{2} \leq \widehat{f}_C < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leq \widehat{f}_C \leq 1 \\ \widehat{f}_C, & \widehat{f}_C < 0, \widehat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\widehat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w\widehat{f}_C, & 0 \leq \widehat{f}_C < x_1 \\ c_w + d_w\widehat{f}_C, & x_1 \leq \widehat{f}_C < x_Q \\ e_w + \widehat{f}_w\widehat{f}_C, & x_Q \leq \widehat{f}_C < x_2 \\ 1, & x_2 \leq \widehat{f}_C \leq 1 \\ \widehat{f}_C, & \widehat{f}_C < 0, \widehat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь

$$\begin{aligned} a_w &= 0; & b_w &= (y_Q - 3x_Q y_Q + 2y_Q^2) / (x_Q - x_Q^2); \\ c_w &= (y_Q^2 - x_Q y_Q) / (1 - x_Q); & d_w &= [y_Q - y_Q^2] / (x_Q - x_Q^2); \\ e_w &= 0; & \widehat{f}_w &= y_Q / x_Q; \\ x_1 &= x_Q / 3; & x_2 &= x_Q / y_Q. \end{aligned}$$

5.9. Схема LPPA. В схеме LPPA используется линейная и кусочно-параболическая интерполяция искомой функции в нормализованных переменных [4].

Нормализованные переменные	
равномерная сетка	неравномерная сетка
$\widehat{f}_w = \begin{cases} \frac{9}{4}\widehat{f}_C - \frac{3}{2}\widehat{f}_C^2, & 0 \leq \widehat{f}_C < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\widehat{f}_C - \frac{1}{2}\widehat{f}_C^2, & \frac{1}{2} \leq \widehat{f}_C \leq 1 \\ \widehat{f}_C, & \widehat{f}_C < 0, \widehat{f}_C > 1 \end{cases}$	$\widehat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w\widehat{f}_C + c_w\widehat{f}_C^2, & 0 \leq \widehat{f}_C < x_Q \\ d_w + e_w\widehat{f}_C + f_w\widehat{f}_C^2, & x_Q \leq \widehat{f}_C \leq 1 \\ \widehat{f}_C, & \widehat{f}_C < 0, \widehat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь

$$\begin{aligned} a_w &= 0; & b_w &= (-s_Q x_Q^2 + 2x_Q y_Q) / x_Q^2; \\ c_w &= (s_Q x_Q - y_Q) / x_Q^2; & d_w &= [x_Q^2 + s_Q(x_Q^2 - x_Q) + y_Q(1 - 2x_Q)] / (1 - x_Q)^2; \\ e_w &= [-2x_Q + s_Q(1 - x_Q^2) + 2x_Q y_Q] / (1 - x_Q)^2; & f_w &= [1 + s_Q(x_Q - 1) - y_Q] / (1 - x_Q)^2. \end{aligned}$$

5.10. Схема CHARМ. В схеме CHARМ используется кусочная кубически-параболическая интерполяция искомой функции [12].

Исходные переменные	Нормализованные переменные
$f_w = \widehat{f}_w + \gamma(\widehat{f}_w - f_{ww})(\widehat{f}_w^2 - 2.5\widehat{f}_w + 1.5)$	$\widehat{f}_w = \begin{cases} a_w + b_w\widehat{f}_C + c_w\widehat{f}_C^2 + d_w\widehat{f}_C^3, & 0 \leq \widehat{f}_C \leq 1 \\ \widehat{f}_C, & \widehat{f}_C < 0, \widehat{f}_C > 1 \end{cases}$

Здесь $a_w = 0, b_w = 2.5, c_w = -2.5, d_w = 1.0, \gamma = \begin{cases} 1, & |\widehat{f}_w - 1.5| \leq 0.5 \\ 0, & \widehat{f}_w < 0, \widehat{f}_w > 1 \end{cases}$.

Представление схемы CHARМ на неравномерной сетке не приводится в связи с громоздкостью соответствующих соотношений.

6. Сравнение различных разностных схем. К одной из задач, служащих для тестирования и сравнения различных методов дискретизации уравнений Навье–Стокса, относится задача о течении

вязкой несжимаемой жидкости в каверне с подвижной стенкой [18]. Основные структурные особенности течения в каверне присущи и другим отрывным течениям в более сложной геометрии.

6.1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в квадратной или кубической полости, которое индуцируется движением с постоянной скоростью одной из ее стенок. Расчетная область представляет собой квадратную или кубическую полость со стороной $L = 1$ м. При моделировании течения в квадратной каверне толщина области в направлении оси z полагается равной 0.1 м. Верхняя стенка перемещается вдоль оси x с постоянной скоростью U .

Течение принимается нестационарным, ламинарным, несжимаемым и изотермическим. Число Рейнольдса рассчитывается по длине стороны каверны и скорости верхней стенки: $Re = \rho UL/\mu$. Расчеты проводились для жидкости с плотностью $\rho = 1.2$ кг/м³ и молекулярной вязкостью μ , соответствующей заданному числу Рейнольдса. В начальный момент времени $t = 0$ используются однородные граничные условия ($\mathbf{v} = 0, p = 10^5$ Па). При высоких числах Рейнольдса для задания начального приближения поля скорости и давления используется точное решение задачи при $Re \rightarrow 0$ [19].

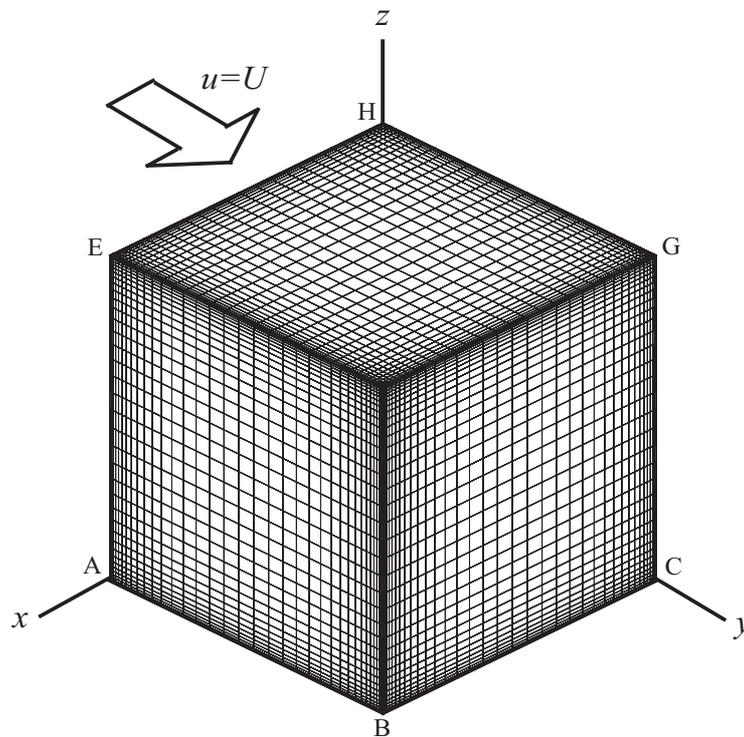


Рис. 9. Расчетная область и разностная сетка $41 \times 41 \times 41$ для моделирования течения в кубической каверне

Для сгущения узлов сетки вблизи стенок каверны используется следующее преобразование координат:

$$x_i = \frac{(\beta + 1) [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{2\bar{x}_i - 1} - (\beta - 1)}{2 [1 + (\beta + 1)/(\beta - 1)]^{2\bar{x}_i - 1}}.$$

Здесь $\bar{x}_i = i/n$, $\beta = (1 - \delta)^{-1/2}$ ($i = 0, \dots, n$). При $\delta \rightarrow 0$ узлы сгущаются у стенок каверны, а при $\delta \rightarrow 1$ — в ее центре. Геометрия расчетной области и разностная сетка показана на рис. 9.

На стенках каверны выставляются граничные условия прилипания и непротекания. Скорость верхней стенки полагается равной $U = 1$ м/с. При расчете течения в квадратной каверне в плоскости симметрии задаются условия симметрии течения, когда нормальная составляющая скорости и производные по нормали от всех других переменных равняются нулю. Для постановки граничных условий Неймана для давления на твердой поверхности используется дискретное представление уравнения переноса количества движения.

6.2. Численный метод. Для численного решения уравнений Навье–Стокса используется метод расщепления по физическим факторам на неравномерной сетке с шахматным расположением узлов [20, 21] — метод проекции. Давление определяется в центре ячейки, а составляющие скорости — на ее границах.

Точки, предназначенные для расчета составляющих скорости, располагаются на середине отрезка между соседними узлами, в которых находится давление.

Для дискретизации производных по времени используется схема Адамса–Бэшворта, имеющая второй порядок точности. Для дискретизации диффузионных потоков применяются центрированные конечно-разностные формулы второго порядка. Для дискретизации конвективных потоков используются конечно-разностные формулы различного порядка и свойств (линейные и нелинейные комбинированные). Для решения уравнения Пуассона для давления применяется метод верхней релаксации.

6.3. Течение в квадратной каверне. Моделирование ламинарного течения в квадратной каверне проводилось в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 0 \div 4 \cdot 10^4$. В расчетах использовались сетки с различным разрешением. Самая грубая сетка, на которой удалось получить удовлетворительные результаты при $Re = 5 \cdot 10^3$ имела 31×31 узлов с их сгущением к стенкам каверны. Независимость решения от количества и распределения узлов в расчетной области достигалась на сетке 51×51 .

В качестве оценок качества численного решения рассматривается расположение основного вихря M , расположение вторичных угловых вихрей L и R вблизи неподвижной нижней стенки, а также максимальное значение функции тока в центре этих вихрей ψ_{max} . Результаты численного моделирования на различных сетках в сравнении с расчетными данными [22] приведены в табл. 4 для $Re = 100$ (используется схема SMART). Применение схем низкого порядка, в частности схем UDS, CDS и гибридной схемы, приводит к существенным погрешностям.

Таблица 4
Результаты расчетов течения в квадратной каверне при $Re = 100$

Вихрь	Сетка	Центр вихря	ψ_{max}	Ссылка
M	81×81	(0.6125, 0.7375)	0.1032	расчет
M	101×101	(0.6143, 0.7361)	0.1034	расчет
M	129×129	(0.6172, 0.7344)	0.1034	[22]
L	81×81	(0.0324, 0.0365)	$-1.22 \cdot 10^{-6}$	расчет
L	101×101	(0.0321, 0.0375)	$-1.62 \cdot 10^{-6}$	расчет
L	129×129	(0.0313, 0.0391)	$-1.75 \cdot 10^{-6}$	[22]
R	81×81	(0.9375, 0.0641)	$-1.00 \cdot 10^{-5}$	расчет
R	101×101	(0.9410, 0.0620)	$-1.62 \cdot 10^{-5}$	расчет
R	129×129	(0.9453, 0.0625)	$-1.25 \cdot 10^{-5}$	[22]

Профили продольной и поперечной составляющих скорости в срединном сечении каверны, полученные на основе различных разностных схем для дискретизации конвективных потоков, показаны на рис. 10 для $Re = 10^3$. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными работы [22], обозначенными сплошной линией.

Зигзагообразная форма профиля продольной составляющей скорости при высоких числах Рейнольдса отражает процесс смешения двух различных по энергетическим характеристикам потоков: неравномерного пристеночного потока, увлекаемого движущейся стенкой, и потока, циркулирующего в крупномасштабном вихре.

6.4. Течение в кубической каверне. Расчеты ламинарного течения в кубической каверне проводились в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 0 \div 2000$ на сетке $51 \times 51 \times 51$.

Результаты расчетов, выполненные на основе схемы SMART и приведенные на рис. 11, показывают, что величина скорости в трехмерном случае оказывается ниже, чем в двумерном варианте. При увеличении числа Рейнольдса разница между распределениями скорости в срединном сечении квадратной и кубической каверны увеличивается. В частности, если при $Re \sim 100$ разница между распределениями скорости практически не заметна, то при $Re \sim 400$ максимальная разница составляет около 15%, а при $Re \sim 1000$ она достигает 22%. В данном случае схемы HPLA, SMART и VONOS дают практически совпадающие результаты.

7. Заключение. Метод дискретизации основных расчетных соотношений и используемые разностные схемы во многом определяют качество получаемого решения и показатели эффективности вычислительной процедуры.

Приведена общая структура линейных и нелинейных конечно-разностных схем (в исходных и норма-

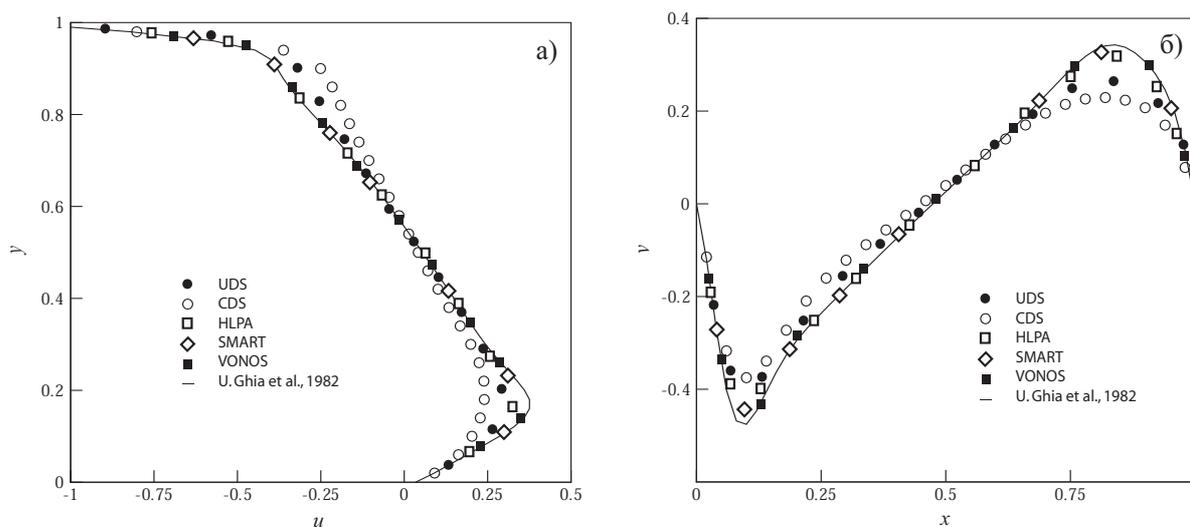


Рис. 10. Распределения продольной (фрагмент а) и поперечной (фрагмент б) составляющих скорости в квадратной камере при $Re = 10^3$. Сравнение результатов, полученных на основе различных разностных схем на сетке 51×51 , с данными физического эксперимента

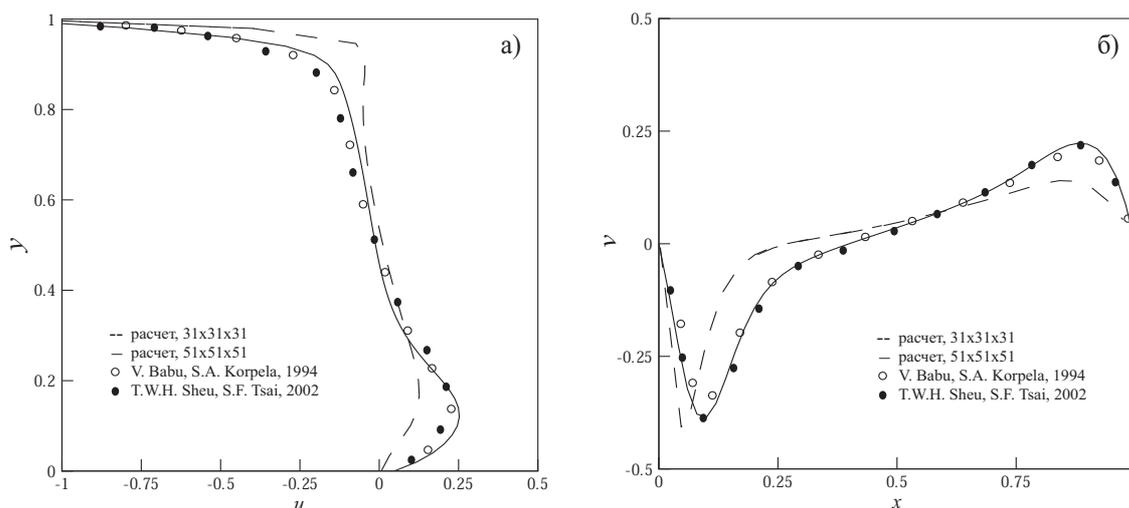


Рис. 11. Распределения продольной (фрагмент а) и поперечной (фрагмент б) составляющих скорости в срединном сечении кубической камеры при $Re = 400$. Пунктирная линия соответствует расчету на сетке $31 \times 31 \times 31$, сплошная — расчету на сетке $51 \times 51 \times 51$. Круги \circ и \bullet соответствуют расчетным данным работ [23] (расчет на сетке $63 \times 63 \times 63$) и [24] (расчет на сетке $51 \times 51 \times 51$)

лизованных переменных), использующих для интерполяции искомой функции между соседними узлами сетки не более четырех узлов сетки, что обеспечивает третий порядок точности на равномерной сетке. Обобщены данные по линейным и нелинейным разностным схемам высокой разрешающей способности, а также приведена структура ограничителя потока для ряда разностных схем на неравномерной сетке. Сформулированы основные критерии, предъявляемые к таким разностным схемам, и исследованы их свойства на основе диаграммы нормализованных переменных и разностного шаблона, зависящего от локального направления потока на грани контрольного объема. Выделены разностные схемы, удовлетворяющие условию TVD, а также критериям конвективной ограниченности и универсального ограничителя потока.

Проведено сравнение результатов моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной и кубической камере с подвижной верхней стенкой, полученных при помощи различных разностных схем для дискретизации конвективных потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
2. Бондаренко Ю.А., Башуров В.В., Янцкин Ю.В. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы. Препринт РФЯЦ ВНИИЭФ 88-2003. Москва, 2003.
3. Zhu J. On the higher-order bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1992. **98**. 345–360.
4. Choi S.K., Nam H.Y., Cho M. A comparison of higher-order bounded convection schemes // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1995. **121**. 281–301.
5. Gaskell P.H., Lau A.K.C. Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1988. **8**, N 6. 617–641.
6. Leonard B.P. Simple high-resolution program for convection modeling of discontinuities // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1988. **8**. 1291–1318.
7. Alves M.A., Cruz P., Mendes A., Magalhaes F.D., Pinho F.T., Oliveira P.J. Adaptive multiresolution approach for solution of hyperbolic PDEs // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2002. **191**. 3909–3928.
8. Alves M.A., Oliveira P.J., Pinho F.T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2003. **41**. 41–75.
9. Leonard B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic interpolation // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1979. **19**. 59–98.
10. Leonard B.P. Order of accuracy of QUICK and related convection-diffusion schemes // Applied Mathematical Modelling. 1995. **19**. 640–653.
11. Breuer M. Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1998. **28**. 1281–1302.
12. Zhou G., Davidson L., Olsson E. Transonic inviscid/turbulent airfoil flow simulations using a pressure-based method with high order schemes // Lecture Notes in Physics. 1995. N 453. 372–377.
13. Zhu J. Low-diffusive and oscillation-free convection scheme // Communications and Applied Numerical Methods. 1991. **7**, N 3. 225–232.
14. Zhu J., Rodi W. A low dispersion and bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows // Computational Methods for Applied Mechanics and Engineering. 1991. **92**. 225–232.
15. Gaskell P.H., Lau A.K.C. Curvature-compensated for problem involving fluid flow // Computational Methods in Applied Mechanical Engineering. 1979. **9**. 153–164.
16. Varonos A., Bergeles G. Development and assessment of a variable-order non-oscillatory scheme for convection term discretization // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1998. **26**, N 1. 1–16.
17. Song B., Liu G.B., Kam K.Y., Amano R.S. On a higher-order bounded discretization schemes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2000. **32**. 881–897.
18. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) / Под ред. А.В. Еримина и С.А. Исаева. М., СПб, 2001.
19. Gaskell P.H., Gurcan F., Savage M.D., Thompson H.M. Stokes flow in a double-lid-driven cavity with free surface side-walls // Proceedings of the Institute of Mechanics Engineering Science. Part C. 1998. **212**, N 5. 387–403.
20. Chorin A.J. Numerical solution of Navier-Stokes equations // Mathematical Computations. 1968. **22**. 745–762.
21. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994.
22. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // Journal of Computational Physics. 1982. **48**, N 2. 387–411.
23. Babu V., Korpela S.A. Numerical solution of the incompressible three-dimensional Navier-Stokes equations // Computers and Fluids. 1994. **23**, N 5. 675–691.
24. Sheu T.W.H., Tsai S.F. Flow topology in a steady three-dimensional lid-driven cavity // Computers and Fluids. 2002. **31**. 911–934.

Поступила в редакцию
08.06.2004