2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

doi 10.26089/NumMet.v23r313 УДК 517.9

Нелинейные параболические задачи с неизвестной функцией источника и их приложения при моделировании и управлении фильтрационными процессами

Н. Л. Гольдман
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский вычислительный центр,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-0523-4629, e-mail: nlgold40@yandex.ru

Аннотация: Работа связана с изучением нелинейных параболических систем, возникающих при моделировании и управлении нестационарными процессами фильтрации в подземной гидродинамике. Одна из постановок является системой, которая включает в себя краевую задачу второго рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной функцией источника в правой части, а также уравнение изменения по времени этой функции. В другой постановке рассматривается проблема управления этой системой с управляющим воздействием граничного режима. Данные постановки существенно отличаются от обычных краевых задач и задач управления для параболических уравнений, в которых предполагается, что все входные данные должны быть заданы. Полученные в работе результаты представляют не только теоретический интерес, они имеют практическое значение для исследования различных фильтрационных процессов. Приведены некоторые примеры таких приложений, связанных с движением жидкости в трещиновато-пористых средах.

Ключевые слова: параболические уравнения, краевые задачи, граничное управление с граничным наблюдением, сопряженная задача, фильтрационные процессы.

Для цитирования: Гольдман Н.Л. Нелинейные параболические задачи с неизвестной функцией источника и их приложения при моделировании и управлении фильтрационными процессами // Вычислительные методы и программирование. 2022. **23**, № 3. 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313.

Nonlinear parabolic problems with an unknown source function and their applications for modelling and control of filtration processes

Nataliya L. Gol'dman
Lomonosov Moscow State University,
Research Computing Center, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-0523-4629, e-mail: nlgold40@yandex.ru

Abstract: The work is connected with study of nonlinear parabolic systems arising in the modelling and control of nonstationary filtration processes in underground hydrodynamics. One of such statements is formulated as a system that involves the boundary value problem of the second kind for a quasilinear parabolic equation with an unknown source function in the right-hand side and, moreover, involves an additional equation for a time dependence of this function. In the other statement we consider control of this system controlled by the boundary regime. These statements essentially differ from usual boundary value problems and control problems for parabolic equations, where all the input data must be given. The obtained results have not only the theoretical interest but they are also important for investigation of various filtration processes. Some examples of such applications connected with fluid flow in the fractured porous media are discussed.

Keywords: parabolic equations, boundary value problems, boundary control with boundary observation, conjugate problem, filtration processes.

For citation: N. L. Gol'dman, "Nonlinear parabolic problems with an unknown source function and their applications for modelling and control of filtration processes," Numerical Methods and Programming. **23** (3), 207–229 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r313.

---

1. Введение. В работе исследованы математические постановки общего вида для моделей, которые возникают при изучении нестационарных процессов фильтрации в подземной гидродинамике. Как и в предыдущих исследованиях, проведенных в работах [1, 2], данные постановки представляют собой нелинейные системы для параболических уравнений с неизвестной функцией источника.

Одна из целей работы — обосновать постановку системы, которая состоит из краевой задачи второго рода для квазилинейного параболического уравнения, а также из уравнения зависимости по времени искомой функции источника. Эта постановка позволяет учитывать особенности математического моделирования процессов фильтрации слабосжимаемой жидкости, в том числе зависимость фильтрационных свойств трещиновато-пористых пластов от давления.

Еще одна из целей работы — изучить проблему управления этой нелинейной параболической системой, рассматривая в качестве управляющего воздействия граничный режим на одной из границ области. Особенность изучаемой задачи управления состоит в том, что наблюдаемое состояние тоже является граничным (как отмечено в [3], это наиболее важно для приложений).

Рассмотренные постановки существенно отличаются от обычных краевых задач и задач управления для параболических уравнений, теория которых развита в предположении, что все входные данные (начальные и граничные условия, коэффициенты уравнения, его правая часть) должны быть заданы [3–5].

Для исследованной в данной работе нелинейной параболической системы установлены условия однозначной разрешимости в классе гладких функций на основе изучения дифференциально-разностной системы, которая аппроксимирует исходную систему методом Ротэ. Важным моментом доказательства является получение для такой аппроксимирующей системы априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера.

Обоснование рассмотренной в работе проблемы граничного управления связано с изучением соответствующей вариационной задачи. Применяя к этой вариационной задаче определение оптимального управления, данное в [3], назовем оптимальным управлением граничный режим, который доставляет минимум функционалу невязки на множестве допустимых граничных управлений. Для обоснования этого подхода в работе проводится выбор компактного множества таких граничных управлений и доказана непрерывность минимизируемого функционала. Для этого использованы результаты, полученные для исходной нелинейной параболической системы. Значительное внимание в статье уделено условиям дифференцируемости функционала невязки и получению явного представления дифференциала через решение сопряженной задачи. Данная сопряженная задача является системой, которая включает в себя краевую задачу третьего рода для линейного параболического уравнения с неизвестной функцией в правой части, а также уравнение изменения по времени этой функции. Доказаны условия ее однозначной разрешимости в классе гладких функций на основе метода Ротэ и соответствующих априорных оценок.

Полученное явное представление дифференциала функционала невязки позволяет эффективно применять численные методы минимизации в самых разнообразных приложениях, связанных с фильтрационными процессами в подземной гидродинамике, в том числе с использованием современных способов разработки нефтегазовых месторождений. В статье приведен один из примеров таких приложений.

Используемые в данном исследовании функциональные пространства определяются стандартным образом, как и в [4], в частности, классы Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ $(0<\lambda<1)$ в замкнутой области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$. Как и в [4], класс $O^1[0,T]$ — пространство непрерывных при $t\in[0,T]$ функций, имеющих ограниченные производные первого порядка; класс $W_2^{3/2}[0,T]$ — гильбертово про-

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

странство функций, чьи обобщенные производные первого порядка удовлетворяют обобщенному условию Гельдера (в метрике $L_2[0,T]$) с показателем $1/2$.

Для удобства изложения будет также использовано обозначение:

$H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ — пространство функций, непрерывных при $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times[-M_0,M_0]$, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ производные по x и u и удовлетворяющих условию Гельдера по t с показателем $\lambda/2$.

Кроме того, в связи с применением метода Ротэ используются аналоги классов Гельдера для сеточных функций $\hat{u}=(u_0,\ldots,u_n,\ldots,u_N)$, заданных в узлах сетки $\overline{\omega}_\tau=\{t_n\}=\{n\tau, n=\overline{0,N}, \tau=TN^{-1}\}$, и для сеточно-непрерывных функций $\hat{u}(x)=(u_0(x),\ldots,u_n(x),\ldots,u_N(x))$, заданных в области $\overline{Q}_\tau=\{0\leqslant x\leqslant l, t_n\in\overline{\omega}_\tau\}$.

Как и в [6, 7], эти аналоги определяются следующим образом.

$H_\tau^{1+\lambda/2}(\overline{\omega}_\tau)$ — аналог пространства $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ (см. [4]) для функций $\hat{u}$, имеющих конечную норму

$$|\hat{u}|_{\overline{\omega}_\tau}^{1+\lambda/2}=\max_{0\leqslant n\leqslant N}|u_n|+\max_{1\leqslant n\leqslant N}|u_{n\bar{t}}|+\langle\hat{u}_{\bar{t}}\rangle_{\overline{\omega}_\tau}^{\lambda/2},$$

$$u_{n\bar{t}}=(u_n-u_{n-1})\tau^{-1},\ n=\overline{1,N},\ \langle\hat{u}_{\bar{t}}\rangle_{\overline{\omega}_\tau}^{\lambda/2}=\max_{1\leqslant n<n'\leqslant N}\{|u_{n\bar{t}}-u_{n'\bar{t}}||t_n-t_{n'}|^{-\lambda/2}\}.$$

$H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ (см. [4]) для функций $\hat{u}(x)$, непрерывных по x при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} &= \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|u_n(x)|+\langle\hat{u}(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}+\langle\hat{u}(x)\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{\lambda/2},\\
\langle\hat{u}(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda} &= \sup_{(x,t_n),(x',t_n)\in\overline{Q}_\tau}\{|u_n(x)-u_n(x')||x-x'|^{-\lambda}\},\\
\langle\hat{u}(x)\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{\lambda/2} &= \sup_{(x,t_n),(x,t_{n'})\in\overline{Q}_\tau}\{|u_n(x)-u_{n'}(x)||t_n-t_{n'}|^{-\lambda/2}\}.
\end{aligned}$$

$H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ (см. [4]) для функций $\hat{u}(x)$, непрерывных по x вместе со своими производными $\hat{u}_{xx}(x)$ и $\hat{u}_{\bar{t}}(x)$ при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$|\hat{u}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2}=\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|u_n(x)|+\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|u_{nx}(x)|+|\hat{u}_{xx}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}+|\hat{u}_{\bar{t}}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2},$$

где

$$\hat{u}_x(x)=\big(u_{0x}(x),\ldots,u_{nx}(x),\ldots,u_{Nx}(x)\big),\quad \hat{u}_{xx}(x)=\big(u_{0xx}(x),\ldots,u_{nxx}(x),\ldots,u_{Nxx}(x)\big),$$
$$\hat{u}_{\bar{t}}(x)=\big(u_{1\bar{t}}(x),\ldots,u_{n\bar{t}}(x),\ldots,u_{N\bar{t}}(x)\big),\quad u_{n\bar{t}}(x)=\big(u_n(x)-u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, n=\overline{1,N}.$$

Будет также использоваться сеточный аналог $O_\tau^1(\overline{\omega}_\tau)$ пространства $O^1[0,T]$ для функций $\hat{u}$, имеющих конечную норму

$$|\hat{u}|_{\overline{\omega}_\tau}^{1}=\max_{0\leqslant n\leqslant N}|u_n|+\max_{1\leqslant n\leqslant N}|u_{n\bar{t}}|.$$

2. Нелинейная параболическая задача с неизвестной функцией источника. Сформулируем постановку этой задачи как систему для определения функций $\{u(x,t),p(x,t)\}$ в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$, которые удовлетворяют краевой задаче с граничными условиями второго рода

$$c(x,t,u)u_t-Lu=f(x,t)p(x,t),\quad (x,t)\in Q=\{0<x<l, 0<t\leqslant T\},\tag{1}$$

$$a(u)u_x|_{x=0}=g(t),\quad 0<t\leqslant T,\tag{2}$$

$$a(u)u_x|_{x=l}=q(t),\quad 0<t\leqslant T,\tag{3}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{4}$$

и дополнительному соотношению

$$p_t(x,t)=\chi(t)p(x,t)+\gamma(x,t,u),\quad (x,t)\in Q,\quad p(x,t)|_{t=0}=p^0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{5}$$

где L — равномерно эллиптический оператор вида

$$Lu\equiv(a(u)u_x)_x-b(x,t,u)u_x-d(x,t,u)u.$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Все входные данные в уравнении (1), граничных условиях (2), (3), начальном условии (4) и в соотношении (5) — известные функции своих аргументов; $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $a_{\min}$, $c_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

Заметим, что постановка (1)–(5), включающая квазилинейное параболическое уравнение, важна в математическом моделировании многих процессов фильтрации в подземной гидродинамике, так как она позволяет учитывать зависимость фильтрационных коэффициентов от давления. Условия однозначной разрешимости в классе гладких функций для этой постановки устанавливает

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) *при $(x,t) \in \overline{Q}$ и любых u, $|u| < \infty$, все входные данные в соотношениях (1)–(5) равномерно ограничены в областях своего определения, причем коэффициент $a(u)$ ограничен вместе со своей производной $a_u(u)$; кроме того, функция $f(x,t)$ имеет ограниченную производную по x и непрерывна в смысле Гельдера по t с показателем $\lambda/2$, выполнены условия*

$$0 < a_{\min} \leqslant a(u) \leqslant a_{\max}, \quad 0 < c_{\min} \leqslant c(x,t,u) \leqslant c_{\max};$$

2) *при $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ (M_0 — постоянная из принципа максимума для краевой задачи (1)–(4): $M_0 \geqslant \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|$), производная $a_{uu}(u)$ ограничена, функции $b(x,t,u)$, $c(x,t,u)$ и $d(x,t,u)$ принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ $(0 < \lambda < 1)$;*

3) *функции $\varphi(x)$, $g(t)$ и $q(t)$ принадлежат соответственно $H^{2+\lambda}[0,l]$ и $O^1[0,T]$, выполнены условия согласования $a(\varphi)\varphi_x|_{x=0} = g(0)$, $a(\varphi)\varphi_x|_{x=l} = q(0)$;*

4) *функции $p^0(x)$ и $\chi(t)$ принадлежат соответственно $C^1[0,l]$ и $C[0,T]$, функция $\gamma(x,t,u)$ равномерно ограничена при $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, и непрерывна при $(x,t,u) \in \overline{D}$ вместе со своими производными по x и u, выполнены условия*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l} |p^0(x)| \leqslant p^0_{\max}, \ \max_{0\leqslant x\leqslant l} |p^0_x(x)| \leqslant p^0_{x\,\max}, \ \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\chi(t)| \leqslant \chi_{\max},$$

$$|\gamma(x,t,u)| \leqslant \gamma_{\max}, \quad \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} |\gamma_x(x,t,u)| \leqslant \gamma_{x\,\max}, \quad \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} |\gamma_u(x,t,u)| \leqslant \gamma_{u\,\max},$$

где $p^0_{\max}$, $p^0_{x\,\max}$, $\chi_{\max}$, $\gamma_{\max}$, $\gamma_{x\,\max}$, $\gamma_{u\,\max} = \mathrm{const} > 0$.

Тогда нелинейная параболическая задача (1)–(5) имеет единственное решение $\{u(x,t), p(x,t)\}$, обладающее свойствами

$$u(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad u_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q),$$

$$p(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad p_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad p_t(x,t) \in C(\overline{Q}),$$

$$|u(x,t)|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M, \quad |p(x,t)|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \mathcal{M}, \quad M, \mathcal{M} = \mathrm{const} > 0.$$

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся методом прямых Ротэ, разбивая область $\overline{Q}$ на слои прямыми t_n (t_n — узлы равномерной сетки $\overline{\omega}_\tau = \{t_n\} \in [0,T]$ с шагом $\tau = TN^{-1}$) и заменяя систему (1)–(5) дифференциально-разностной системой

$$c_n u_{n\bar{t}} - (a_n u_{nx})_x + b_n u_{nx} + d_n u_n = f_n p_n, \quad (x,t_n) \in Q_\tau = \{0 < x < l, 0 < t_n \leqslant T\}, \tag{6}$$

$$a_n u_{nx}|_{x=0} = g_n, \quad a_n u_{nx}|_{x=l} = q_n, \quad 0 < t_n \leqslant T, \tag{7}$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{8}$$

$$p_{n\bar{t}} = \chi_{n-1} p_{n-1} + \gamma_{n-1}, \ (x,t_n) \in Q_\tau, \quad p_n(x)|_{n=0} = p^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{9}$$

Эта аппроксимирующая система состоит в определении $\{u_n(x), p_n(x)\}$ (приближенных значений функций $u(x,t)$ и $p(x,t)$ при $t = t_n$) из условий (6)–(9), в которых $a_n = a(u_n)$, b_n, c_n и d_n — значения соответствующих коэффициентов в точке (x, t_n, u_n), $f_n = f(x,t_n)$, $g_n = g(t_n)$, $q_n = q(t_n)$, $\chi_{n-1} = \chi(t_{n-1})$, $\gamma_{n-1} = \gamma(x, t_{n-1}, u_{n-1})$. В (6)–(9) использованы также обозначения $u_{n\bar{t}} = (u_n(x) - u_{n-1}(x))\tau^{-1}$, $u_{nx} = du_n(x)/dx$, $p_{n\bar{t}} = (p_n(x) - p_{n-1}(x))\tau^{-1}$.

Доказательство разрешимости исходной системы (1)–(5) методом Ротэ включает в себя несколько основных этапов.

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Этап 1. Исследование дифференциально-разностной краевой задачи (6)–(8) в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$ в предположении, что $p_n(x)$ — известная функция. Цель этого этапа — доказать однозначную разрешимость такой задачи и получить соответствующие априорные оценки для ее решения $u_n(x)$, не зависящие от x, τ, n.

Этап 2. Доказательство существования и единственности решения $\{u_n(x), p_n(x)\}$ дифференциально-разностной системы (6)–(9) в соответствующих функциональных пространствах на основе результатов этапа 1.

Этап 3. Предельный переход при $n \to \infty$ в условиях (6)–(9) в силу компактности семейства $\{u_n(x), p_n(x)\}$ на основе априорных оценок, полученных на этапе 2. Доказательство разрешимости исходной нелинейной системы (1)–(5) в классе гладких функций.

Переходя к этим этапам, будем более подробно останавливаться лишь на тех моментах, которые связаны со спецификой данной задачи (1)–(5). При рассмотрении же моментов, которые являются общими для метода Ротэ при исследовании нелинейных параболических задач, ограничимся ссылками на известные результаты.

2.1. Дифференциально-разностная краевая задача (6)–(8). При доказательстве однозначной разрешимости в $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$ этой задачи мы предполагаем, что функция источника $p_n(x)$ в уравнении (6) задана и обладает свойствами:

$$p_n(x) \in H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau), \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} |p_n(x)| \leqslant p_{\max}, \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} |p_{nx}(x)| \leqslant p_{x\max},$$

$$|\hat{p}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \mathcal{M}, \quad p_{\max}, p_{x\max}, \mathcal{M} = \text{const} > 0.$$

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 1 *и* $p_n(x)$ *— функция источника с указанными выше свойствами.*

Тогда при любом достаточно малом шаге τ *сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *дифференциально-разностная краевая задача* (6)–(8) *имеет единственное решение* $u_n(x)$ *в классе* $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$ *и для него справедливы оценки*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} |u_n(x)| \leqslant M_0, \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} |u_{nx}(x)| \leqslant M_1,$$

$$|\hat{u}(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant M_2, \quad |\hat{u}_x(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant M_3, \quad |\hat{u}(x)|_{Q_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M, \tag{10}$$

в которых $M_i > 0$ $(i = \overline{0,3})$, $M > 0$ *— постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Утверждения леммы 1 основаны на результатах теоремы 2 из [8], которые мы применяем соответствующим образом к соотношениям (6)–(8). Доказательство этой теоремы об однозначной разрешимости дифференциально-разностной краевой задачи второго рода в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$ использует принцип Лере-Шаудера о существовании неподвижных точек вполне непрерывных преобразований. Для применения этого принципа необходимо получить априорные оценки $|\hat{u}(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$ и $|\hat{u}_x(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$.

Остановимся кратко на основных моментах доказательства леммы 1. А именно, постоянная M_0 из оценки принципа максимума для данной задачи имеет вид

$$M_0 = K_2 T \exp(K_1 T) + K_3 l \left(1 + \frac{l}{4}\right), \tag{11}$$

где K_1, K_2, K_3 — положительные постоянные,

$$\begin{aligned}
K_1 &\geqslant (1+\varepsilon) d_{\max} c_{\min}^{-1}, \quad \tau \leqslant \tau_0 = \varepsilon K_1^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \ \text{ произвольно}, \\
K_2 &\geqslant c_{\min}^{-1} \left\{ f_{\max} p_{\max} + 2K_3 a_{\max} + K_3 l \left(b_{\max} + \left(1 + \frac{l}{4}\right) d_{\max} \right) \right\}, \\
K_3 &\geqslant \max\left(l^{-1}\varphi_{\max},\, l^{-1} a_{\min}^{-1} g_{\max},\, l^{-1} a_{\min}^{-1} q_{\max} \right).
\end{aligned}$$

Для получения оценки (11) используются вспомогательные функции (подробнее см. лемму 1 в [8])

$$\eta_n^{\pm}(x) = (1 + K_1\tau)^{-n} \left\{ u_n(x) \pm K_3 \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \pm K_3 l \right\} \pm K_2 t_n.$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Следующий шаг состоит в получении оценки для производной $u_{nx}(x)$. Для этого используется дискретный аналог известного способа из [4], ограничимся его кратким изложением. С помощью нелинейной замены $u_n(x) = \Phi(v_n(x))$ вводится новая функция $v_n(x)$. При этом замена $\Phi(v)$ ставит в однозначное соответствие каждой функции $u_n \in [-M_0, M_0]$ функцию v_n из интервала $(-1, 1)$. Предполагается, что $\Phi(v)$ — ограниченная функция вместе со своими производными $\Phi_v(v)$, $\Phi_{vv}(v)$, $\Phi_{vvv}(v)$, удовлетворяющая условиям $\Phi_v(v) > 0$, $\Phi_{vv}(v) < 0$, $\Phi_{vvv}(v) < 0$. Затем уравнение (6) дифференцируется по x с последующей подстановкой выражений $u_{nx}(x)$, $u_{nxx}(x)$, $u_{nxxx}(x)$, $u_{nx\bar{t}}(x)$ через $v_{nx}(x)$, $v_{nxx}(x)$, $v_{nxxx}(x)$, $v_{nx\bar{t}}(x)$ с использованием указанной замены, в частности

$$u_{nx}(x) = \Phi_v v_{nx}(x), \quad u_{nxx}(x) = \Phi_v v_{nxx}(x) + \Phi_{vv} v_{nx}^2(x),$$

$$u_{nxxx}(x) = \Phi_v v_{nxxx}(x) + 3\Phi_{vv} v_{nx}(x) v_{nxx}(x) + \Phi_{vvv} v_{nx}^3(x).$$

Если ввести обозначение $w_n(x) = v_{nx}(x)$, то для этой функции после приведения подобных членов имеет место соотношение

$$\Phi_v w_{n\bar{t}} - (c_n)^{-1} a_n \Phi_v w_{nxx} + C_n^0 w_{nx} w_n + C_n^1 w_{nx} + C_n^2 w_n^3 + C_n^3 w_n^2 + C_n^4 w_n + C_n^5 = 0, \quad (x, t_n) \in Q_\tau. \tag{12}$$

Все коэффициенты в этом соотношении, в том числе C_n^i $(i = \overline{0,5})$, равномерно ограничены в области своего определения в силу условий леммы 1 и свойств $\Phi(v)$.

Завершающий этап доказательства оценки производной $u_{nx}(x)$ состоит в построении функции $\Phi(v)$ (подробности см. в [4]), которая кроме обладания указанными свойствами обеспечивает возможность применить принцип максимума к уравнению (12) с граничными условиями первого рода для $w_n(x)$:

$$w_n|_{x=0} = a_n^{-1}(u)|_{x=0} \Phi_v^{-1} g_n, \quad w_n|_{x=l} = a_n^{-1}(u)|_{x=l} \Phi_v^{-1} q_n, \quad 0 < t_n \leqslant T.$$

Соответствующая оценка имеет вид

$$\max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |w_n(x)| \leqslant \overline{M}_1,$$

$$\overline{M}_1 = \Big\{ C_{\max}^5 T + \max(a_{\min}^{-1} g_{\max},\, a_{\min}^{-1} q_{\max},\, \varphi_{x\,\max}) \Big\} \Phi_{v\,\min}^{-1} \exp(K_4 T),$$

где K_4 — положительная постоянная,

$$K_4 \geqslant (1 + \varepsilon) C_{\max}^4 \Phi_{v\,\min}^{-1}, \quad \tau \leqslant \tau_{00} = \varepsilon K_4^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \ \text{ произвольно.} \tag{13}$$

Полученная оценка для $w_n(x)$ позволяет установить и искомую оценку для производной $u_{nx}(x)$:

$$\max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |u_{nx}(x)| \leqslant \Phi_{v\,\max} \max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |v_{nx}(x)| = \Phi_{v\,\max} \max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |w_n(x)|,$$

$$\max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |u_{nx}(x)| \leqslant M_1, \quad M_1 = \Phi_{v\,\max} \overline{M}_1,$$

$$M_1 = \Big\{ C_{\max}^5 T + \max(a_{\min}^{-1} g_{\max},\, a_{\min}^{-1} q_{\max},\, \varphi_{x\,\max}) \Big\} \exp(K_4 T),$$

где K_4 — постоянная, определенная в (13).

Заметим, что коэффициент C_n^5 в уравнении (12) зависит от производных $\big(c_n^{-1}(x) f_n(x) p_n(x)\big)_x$ и от $\big(c_n^{-1}(x) d_n(x)\big)_x u_n(x)$ в силу дифференцирования уравнения (6) по x. Учитывая это, представим постоянную M_1 в следующем виде, выделяя ее зависимость от $\max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |p_{nx}(x)|$:

$$M_1 = \Big\{ c_{\min}^{-1} f_{\max} \max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |p_{nx}(x)| T + K_5 T + \max(a_{\min}^{-1} g_{\max},\, a_{\min}^{-1} q_{\max},\, \varphi_{x\,\max}) \Big\} \exp(K_4 T), \tag{14}$$

где K_5 — положительная постоянная, зависящая от $c_{\min}^{-1}$, $c_{x\,\max}$, $d_{\max}$, $d_{x\,\max}$, $f_{\max}$, $f_{x\,\max}$, M_0 и от $p_{\max}$.

Установленные оценки $\max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |u_n(x)| \leqslant M_0$, $\max_{(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau} |u_{nx}(x)| \leqslant M_1$ позволяют перейти к следующему шагу в доказательстве разрешимости дифференциально-разностной краевой задачи (6)–(8). Этот шаг состоит в получении оценок $|\hat{u}(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$ и $|\hat{u}_x(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$, основанных на принадлежности $u_n(x)$ и $u_{nx}(x)$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

некоторым специальным классам $\mathcal{B}_{2\tau}$ сеточно-непрерывных функций, вложимых в пространства Гельдера $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}$. Эти классы, введенные в [6, 7], являются дискретными аналогами известных классов $\mathcal{B}_2$ из [4].

Соответствующие утверждения лемм 4.3.1 и 4.3.2 из [6, 7] позволяют установить, что в области $Q_\tau = \{0 < x < l, 0 \leqslant t_n \leqslant T\}$ имеют место оценки

$$|\hat{u}(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant M_2, \quad |\hat{u}_x(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant M_3.$$

Постоянные $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$ зависят лишь от параметров соответствующих классов $\mathcal{B}_{2\tau}$ (в частности, от $M_0 > 0$ и $M_1 > 0$), а также от норм Гельдера $|\varphi(x)|_{[0,l]}^{\lambda}$ и $|\varphi_x(x)|_{[0,l]}^{\lambda}$.

Полученные оценки позволяют применить принцип Лере-Шаудера для доказательства разрешимости дифференциально-разностной краевой задачи (6)–(8) и установить оценку для $u_n(x)$ в классе $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$:

$$|\hat{u}(x)|_{Q_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M, \quad M = K_6\Big\{|\hat{f}(x)\hat{p}(x)|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2} + |\varphi(x)|_{[0,l]}^{2+\lambda} + |\hat{g}|_{\bar{\omega}_\tau}^{1} + |\hat{q}|_{\bar{\omega}_\tau}^{1}\Big\}.$$

Постоянная $K_6 > 0$ зависит от норм Гельдера в классе $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ коэффициентов уравнения (6).

Завершая доказательство леммы 1, отметим, что единственность решения $u_n(x)$ устанавливается аналогично соответствующему утверждению в теореме 2 [8].

Замечание 1. Для нелинейной дифференциально-разностной краевой задачи (6)–(8) нельзя применить способ оценки производной $u_{nx}(x)$, который был предложен в [1, 2] в случае граничных условий вида $a(x,t)u_x|_{x=0} = g(t)$, $a(x,t)u_x|_{x=l} = q(t)$, $0 < t \leqslant T$. Этот способ позволял избежать дифференцирования уравнения по переменной x и тем самым не требовал дополнительной гладкости входных данных. Он основан, в частности, на сведении граничных условий к однородным с помощью функций

$$\psi_n^0 = g_n\left(2la_n|_{x=0}\right)^{-1}, \quad \psi_n^l = q_n\left(2la_n|_{x=l}\right)^{-1}, \quad n = \overline{1,N}.$$

Однако получение оценки производной $u_{nx}(x)$ связано с оценками для $\psi_{n\bar{t}}^0$ и $\psi_{n\bar{t}}^l$, которые в случае $a = a(u)$ содержат неизвестные оценки для $u_{n\bar{t}}|_{x=0}$ и $u_{n\bar{t}}|_{x=l}$. Поэтому при доказательстве леммы 1 для оценки производной $u_{nx}(x)$ использован аналог известного способа [4], требующий дифференцирования уравнения по x и введения замены $u_n(x) = \Phi(v_n(x))$.

Отметим, что применение классического метода барьеров (см., например, [4]) к уравнению (12) для функции $w_n(x) = v_{nx}(x)$ позволяет установить, что производная $u_{nx}(x)$ непрерывна во всей замкнутой области $\overline{Q}_\tau$. Действительно, рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}_n w_n \equiv \Phi_v w_{n\bar{t}} - (c_n)^{-1} a_n \Phi_v w_{nxx} + C_n^0 w_{nx} w_n + C_n^1 w_{nx}, \quad (x, t_n) \in Q_\tau.$$

Для него в силу равномерной ограниченности коэффициентов C_n^i $(i = \overline{0,5})$ в уравнении (12), свойств функции $\Phi(v)$ и полученной оценки производной $u_{nx}(x)$ следует неравенство $\mathcal{L}_n w_n \leqslant K_7$ при $(x, t_n) \in Q_\tau$, где $K_7 > 0$ — постоянная, зависящая от M_1 и не зависящая от x, τ, n. Это позволяет использовать обычный прием построения барьерных функций и установить, что $\lim\limits_{x\to 0} w_n(x) = w_n(0)$, $\lim\limits_{x\to l} w_n(x) = w_n(l)$, $n = \overline{1,N}$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} u_{nx}(x) = u_{nx}(0)$, $\lim\limits_{x\to l} u_{nx}(x) = u_{nx}(l)$, $n = \overline{1,N}$.

2.2. Дифференциально-разностная система (6)–(9). На этапе 2 сеточно-непрерывная функция источника $p_n(x)$ заранее неизвестна и ищется одновременно с $u_n(x)$. Существование решения $\{u_n(x), p_n(x)\}$ этой системы устанавливает следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 1 *и пусть шаг сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \tau \leqslant \min(\tau_0, \tau_{00}), \quad 0 < \tau_0 = \varepsilon K_1^{-1}, \quad 0 < \tau_{00} = \varepsilon K_4^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое,}$$

где $K_1 > 0$ *и* $K_4 > 0$ *— постоянные, определенные в* (11) *и* (13).

Тогда в области $\overline{Q}_\tau$ *дифференциально-разностная система* (6)–(9) *имеет единственное решение* $\{u_n(x), p_n(x)\}$, *обладающее свойствами*

$$u_n(x) \in H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau), \quad p_n(x) \in H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau),$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|u_n(x)|\leqslant M_0,\quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|u_{nx}(x)|\leqslant M_1,\quad |\hat{u}(x)|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{Q_\tau}\leqslant M,$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|p_n(x)|\leqslant p_{\max},\quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|p_{nx}(x)|\leqslant p_{x\max},\quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|p_{n\bar{t}}(x)|\leqslant p_{t\max},\tag{15}$$

где M_0, M_1, M, $p_{\max}$, $p_{x\max}$, $p_{t\max}$ — положительные постоянные, не зависящие от x, τ и n.

Доказательство. Исходя из начального момента времени $t_0 = 0$, предположим, что вплоть до момента t_j $(j = \overline{1, n-1})$ решения $\{u_j(x), p_j(x)\}$ уже найдены и соответствующие оценки для них уже установлены. Требования теоремы 1 относительно функций $p^0(x)$, $\gamma(x,t,u)$ и $\chi(t)$ позволяют заключить из соотношения (9), что при $0 \leqslant x \leqslant l$, $t = t_n$

$$|p_n(x)|\leqslant(1+\tau\chi_{\max})|p_{n-1}(x)|+\tau\gamma_{\max}\leqslant(1+\tau\chi_{\max})^n p^0_{\max}+\sum_{j=0}^{n-1}(1+\tau\chi_{\max})^j\tau\gamma_{\max},$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|p_n(x)|\leqslant p_{\max},\quad p_{\max}=(p^0_{\max}+T\gamma_{\max})\exp(T\chi_{\max}).$$

Кроме того, из (9) следует, что

$$p_{nx}(x)=(1+\tau\chi_{n-1})p_{n-1x}(x)+\tau(\gamma_{n-1x}+\gamma_{n-1u}u_{n-1x}(x)),$$

$$|p_{nx}(x)|\leqslant(1+\tau\chi_{\max})|p_{n-1x}(x)|+\tau(\gamma_{x\max}+\gamma_{u\max}M_1).$$

Исходя из вида постоянной M_1 применительно к оценке $u_{n-1x}(x)$ (см. (14)), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}|p_{nx}(x)|\leqslant\ &(1+\tau\chi_{\max})|p_{n-1x}(x)|+\tau\gamma_{x\max}+\tau\gamma_{u\max}\Big\{c^{-1}_{\min}f_{\max}T\exp(K_4T)\Big\}|p_{n-1x}(x)|+\\&+\tau\gamma_{u\max}\Big\{K_5T+\max(a^{-1}_{\min}g_{\max},\ a^{-1}_{\min}q_{\max},\ \varphi_{x\max})\Big\}\exp(K_4T).\end{aligned}$$

Его можно представить в виде

$$|p_{nx}(x)|\leqslant(1+\tau K_8)^n p^0_{x\max}+\sum_{j=0}^{n-1}(1+\tau K_8)^j\tau K_9,$$

$$K_8=\chi_{\max}+\gamma_{u\max}c^{-1}_{\min}f_{\max}T\exp(K_4T),$$

$$K_9=\gamma_{x\max}+\gamma_{u\max}\Big\{K_5T+\max(a^{-1}_{\min}g_{\max},\ a^{-1}_{\min}q_{\max},\ \varphi_{x\max})\Big\}\exp(K_4T),$$

$K_4>0$ и $K_5>0$ — постоянные, определенные в (13) и (14). Отсюда следует, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|p_{nx}(x)|\leqslant p_{x\max},\quad p_{x\max}=\Big(p^0_{x\max}+TK_9\Big)\exp(K_8T).$$

Из (9) нетрудно также видеть, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|p_{n\bar{t}}(x)|\leqslant\chi_{\max}p_{\max}+\gamma_{\max}\leqslant p_{t\max},\quad p_{t\max}=\chi_{\max}(p^0_{\max}+T\gamma_{\max})\exp(T\chi_{\max})+\gamma_{\max}.$$

Таким образом, оценки (15) при $t = t_n$ получены, так как мы предположили, что соответствующие оценки в предыдущие моменты времени t_j $(j = \overline{1, n-1})$ уже известны. Это означает, что сеточно-непрерывная функция источника $p_n(x)$, найденная из соотношения (9) по известным $p_{n-1}(x)$ и $u_{n-1}(x)$, принадлежит классу $H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ с нормой $|\hat{p}(x)|^{\lambda,\lambda/2}_{Q_\tau}\leqslant\mathcal{M}$, $\mathcal{M}\leqslant p_{\max}+p_{x\max}+p_{t\max}$. Это утверждение следует из определения нормы в сеточно-непрерывном пространстве Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$.

В силу леммы 1 дифференциально-разностная краевая задача (6)–(8) с такой функцией источника $p_n(x)$ имеет единственное решение $u_n(x)$ в классе $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(Q_\tau)$ и для него справедливы оценки (10). Лемма 2 доказана.

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

2.3. Однозначная разрешимость нелинейной параболической задачи (1)–(5). Переходя к заключительному этапу 3, заметим, что равномерные априорные оценки (10) и (15) (не зависящие от x, τ, n) позволяют заключить, что семейство $\{u_n(x), p_n(x)\}$ компактно в соответствующих функциональных пространствах. Это дает возможность, проводя обычные рассуждения при совершении предельного перехода в соотношениях (6)–(9) при $\tau \to 0$ (т.е. при $n \to \infty$), установить, что исходная нелинейная система (1)–(5) имеет по крайней мере одно решение $\{u(x,t), p(x,t)\}$ такое, что $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q)$, $p(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$.

Для завершения доказательства теоремы 1 покажем, что это решение единственно в классе гладких функций таких, что

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |u, u_x, u_{xx}, u_t| < \infty, \qquad \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |p, p_x, p_t| < \infty.$$

Этот результат устанавливается последовательно для конечных отрезков времени, исчерпывая весь отрезок $[0,T]$. Предположим, что при $t \in [0,t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, единственность $\{u(x,t), p(x,t)\}$ уже доказана. Докажем, что тогда единственность имеет место и для $t \in [t^0, t^0+\Delta t]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина. Используя принцип от противного, допустим, что при $t \in [t^0, t^0+\Delta t]$ существуют два решения системы (1)–(5) $\{u(x,t), p(x,t)\}$ и $\{\overline{u}(x,t), \overline{p}(x,t)\}$.

Соответствующая линейная краевая задача для разностей

$$\eta(x,t) = u(x,t) - \overline{u}(x,t), \quad \zeta(x,t) = p(x,t) - \overline{p}(x,t)$$

имеет в области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0+\Delta t\}$ следующий вид:

$$c(x,t,u)\eta_t - (a(u)\eta_x)_x + \mathcal{A}_0\eta_x + \mathcal{A}_1\eta = f(x,t)\zeta(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t^0} = \{0 < x < l, t^0 < t \leqslant t^0+\Delta t\},$$

$$a(u)\eta_x - \mathcal{A}_2\eta|_{x=0} = 0, \quad t^0 < t \leqslant t^0+\Delta t,$$

$$a(u)\eta_x + \mathcal{A}_3\eta|_{x=l} = 0, \quad t^0 < t \leqslant t^0+\Delta t,$$

$$\eta(x,t^0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят соответствующим образом от производных a_u, a_{uu}, b_u, c_u и d_u в точке $(x, t, \sigma u + (1-\sigma)\overline{u})$ $(0 < \sigma < 1)$. Кроме того, $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят от $u(x,t)$ и производных $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_t(x,t)$. Коэффициенты $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ в граничных условиях зависят от производных a_u и u_x при $x=0$, $x=l$.

Все входные данные этой линейной краевой задачи равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t). Это позволяет применить принцип максимума и получить оценку [4]

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\eta(x,t)| \leqslant K_{10}\Delta t \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)|, \quad K_{10} = \mathrm{const} > 0, \tag{16}$$

используя, как и в [4], способ доказательства, не требующий неотрицательности коэффициентов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$.

Заметим, что из (5) следует соотношение

$$\zeta_t(x,t) = \chi(t)\zeta(x,t) + \gamma_u(x,t,\overline{u})\eta(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t^0}.$$

Так как по предположению $p(x,t^0) = \overline{p}(x,t^0)$, т.е. $\zeta(x,t^0) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, то из этого соотношения можно получить представление

$$\zeta(x,t) = \int\limits_{t^0}^{t} \chi(\tau)\zeta(x,\tau)\,d\tau + \int\limits_{t^0}^{t} \gamma_u(x,\tau,\overline{u}(x,\tau))\eta(x,\tau)\,d\tau.$$

Отсюда следует, что в области $\overline{Q}_{t^0}$ имеет место оценка

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)| \leqslant \Delta t\,\chi_{\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)| + \Delta t\gamma_{u\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\eta(x,t)|. \tag{17}$$

Учитывая оценку (16), мы заключаем из (17), что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)| \leqslant \Delta t\,(\chi_{\max} + TK_{10}\gamma_{u\max}) \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)|.$$

Выбирая затем величину $\Delta t > 0$ из условия

$$\Delta t\,(\chi_{\max} + TK_{10}\gamma_{u\,\max}) \leqslant 1-\mu, \quad 0<\mu<1,$$

приходим к соотношению

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)| \leqslant (1-\mu) \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)|,$$

т.е. $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\zeta(x,t)| = 0$. Но это означает в силу (16), что и $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\eta(x,t)| = 0$. Таким образом, предположение о неединственности решения нелинейной параболической задачи (1)–(5) при $t\in[t^0, t^0+\Delta t]$ приводит к противоречию.

Повторение подобных рассуждений для отрезков $t\in[t^1,t^2]$ $(t^1 = t^0+\Delta t,\ t^2 = t^1+\Delta t)$, $t\in[t^2,t^3]$, и т.д., вплоть до конечного момента времени T позволяет установить единственность решения $\{u(x,t), p(x,t)\}$ на всем отрезке $[0,T]$. Таким образом, теорема 1 об однозначной разрешимости исходной системы (1)–(5) в классе гладких функций доказана.

3. Задача управления нелинейной параболической системой с неизвестной функцией источника. Рассмотрим оптимальное управление решением системы (1)–(5) с управляющим воздействием граничного режима $q(t)$ при $x = l$. Теорема 1 позволяет задать множество допустимых граничных управлений:

$$\Theta_R = \left\{ q(t)\in W_2^{3/2}[0,T],\ q(0) = a(\varphi)\varphi_x|_{x=l},\ \|q\|_{W_2^{3/2}[0,T]} \leqslant R \right\},\ R = \mathrm{const} > 0. \tag{18}$$

При каждом фиксированном управлении $q(t)$ из этого множества однозначно определяется соответствующее решение $\{u(x,t;q), p(x,t;q)\}$ системы (1)–(5) в силу вложения пространства $W_2^{3/2}[0,T]$ в пространство $O^1[0,T]$ (см. [9]).

3.1. Граничное управление с граничным наблюдением. Сформулируем следующую вариационную задачу — требуется минимизировать на Θ_R функционал

$$\inf_{q\in\Theta_R} J(q), \quad J(q) = \int\limits_0^T \big(u(x,t;q)|_{x=0} - w(t)\big)^2\,dt, \tag{19}$$

где $u(x,t;q)|_{x=0}$ — след решения системы (1)–(5) при $x=0$, $w(t)$ — заданная функция такая, что $w(t)\in H^{1+\lambda/2}[0,T]$,

$$c(x,0,\varphi)w_t - L\varphi|_{x=0,t=0} = f(x,0)p^0(x)|_{x=0},$$

вид равномерно эллиптического оператора L см. в (1)–(5).

Следуя терминологии, принятой в [3], назовем вариационную задачу (19) задачей о граничном управлении, но ее особенность состоит в том, что “наблюдение” $u(x,t;q)|_{x=0}$ тоже является граничным. Следуя этой же терминологии [3], назовем оптимальным управлением множество

$$\Theta_R^* = \Big\{ q_R\in\Theta_R,\ \ J(q_R) = \inf_{q\in\Theta_R} J(q) \Big\}. \tag{20}$$

Обоснованием постановки (19) является следующая теорема.

Теорема 2. *В задаче минимизации функционала $J(q)$ на множестве допустимых граничных управлений Θ_R множество Θ_R^* не пусто и для любой минимизирующей последовательности $\{q^s\}\subset\Theta_R$ имеет место соотношение*

$$\inf_{q_R\in\Theta_R^*} \|q^s - q_R\|_{O^1[0,T]} \to 0 \ \textit{при}\ s\to\infty. \tag{21}$$

Доказательство теоремы 2 основано на теореме Вейерштрасса. Прежде всего заметим, что множество допустимых граничных управлений (18) является компактным в $O^1[0,T]$, так как оператор вложения из $W_2^{3/2}[0,T]$ в $O^1[0,T]$ вполне непрерывен [9]. Кроме того, возможность применения теоремы Вейерштрасса опирается на следующее свойство функционала $J(q)$.

Теорема 3. *При выполнении входными данными системы (1)–(5) требований теоремы 1 функционал $J(q)$ является непрерывным в $O^1[0,T]$ на множестве Θ_R.*

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Доказательство. Пусть $\{q^s(t)\} \subset \Theta_R$ — произвольная последовательность, сходящаяся в $O^1[0,T]$ к некоторой функции $q(t) \in \Theta_R$:

$$\|q^s(t) - q(t)\|_{O^1[0,T]} \to 0 \text{ при } s \to \infty. \tag{22}$$

Введем обозначение

$$\Delta q(t) = q^s(t) - q(t),\ \Delta u(x,t) = u^s(x,t) - u(x,t),\ \Delta p(x,t) = p^s(x,t) - p(x,t),$$

где $\{u^s(x,t), p^s(x,t)\}$ и $\{u(x,t), p(x,t)\}$ — решения нелинейной системы (1)–(5), соответствующие граничным функциям $q^s(t)$ и $q(t)$. Рассматривая минимизируемый функционал в виде $J(q) = \|u(0,t;q) - w(t)\|_{L_2[0,T]}$, можем заключить, что

$$|J(q^s) - J(q)| = \big|\|u^s(0,t) - w(t)\|_{L_2[0,T]} - \|u(0,t) - w(t)\|_{L_2[0,T]}\big| \leqslant \|\Delta u(0,t)\|_{L_2[0,T]}. \tag{23}$$

Покажем, что в области $\overline{Q}$ имеют место оценки

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}} |\Delta u(x,t)| \leqslant K_{11} \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\Delta q(t)|, \quad K_{11} = \text{const} > 0,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}} |\Delta p(x,t)| \leqslant K_{12} \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\Delta q(t)|, \quad K_{12} = \text{const} > 0. \tag{24}$$

Предположим, что при $t \in [0, t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, эти оценки уже установлены:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0} |\Delta u(x,t)| \leqslant K_{11} \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} |\Delta q(t)|, \qquad \max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0} |\Delta p(x,t)| \leqslant K_{12} \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} |\Delta q(t)|. \tag{25}$$

Докажем, что аналогичные оценки имеют место и при $t \in [t^0, t^0 + \Delta t]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина. В области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\}$ для $\Delta u(x,t)$ и $\Delta p(x,t)$ справедливы соотношения

$$c(x,t,u)\Delta u_t - (a(u)\Delta u_x)_x + \mathcal{A}_0 \Delta u_x + \mathcal{A}_1 \Delta u = f(x,t)\Delta p(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t^0} = \{0 < x < l, t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t\},$$

$$a(u)\Delta u_x - \mathcal{A}_2 \Delta u|_{x=0} = 0, \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t,$$

$$a(u)\Delta u_x + \mathcal{A}_3 \Delta u|_{x=l} = \Delta q, \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t, \tag{26}$$

$$\Delta p(x,t) = \int\limits_{t^0}^{t} \chi(\tau)\Delta p(x,\tau)\, d\tau + \int\limits_{t^0}^{t} \gamma_u(x,\tau,u)\Delta u(x,\tau)\, d\tau + \Delta p(x,t^0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{27}$$

в которых коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят соответствующим образом от производных a_u, a_{uu}, b_u, c_u и d_u в точке $(x,t,\sigma u + (1-\sigma)u^s)$ $(0 < \sigma < 1)$, а также от $u(x,t)$ и производных u_x, u_{xx} и u_t. Коэффициенты $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ в граничных условиях зависят от производных a_u и u_x при $x = 0$, $x = l$. Все входные данные линейной краевой задачи (26) равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t) в силу справедливости оценок теоремы 1 для $\{u^s(x,t), p^s(x,t)\}$ и $\{u(x,t), p(x,t)\}$. Это позволяет применить принцип максимума и получить оценку [4]

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta u(x,t)| \leqslant K_{13}\Big\{\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta p(x,t)| + \max_{t^0\leqslant t\leqslant t^0+\Delta t} |\Delta q(t)| + \max_{0\leqslant x\leqslant l} |\Delta u(x,t^0)|\Big\} \exp(K_{14}\Delta t), \tag{28}$$

в которой $K_{13}, K_{14} = \text{const} > 0$. Кроме того, из (27) следует, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta p(x,t)| \leqslant \Delta t\, \chi_{\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta p(x,t)| + \Delta t \gamma_{u\,\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta u(x,t)| + \max_{0\leqslant x\leqslant l} |\Delta p(x,t^0)|.$$

Подставляя сюда оценку (28) для $|\Delta u(x,t)|$, приходим к соотношению

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta p(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta p(x,t)| \Big\{\Delta t \chi_{\max} + \Delta t \gamma_{u\,\max} K_{13} \exp(K_{14}\Delta t)\Big\} +$$

$$+ \Delta t \gamma_{u\,\max} K_{13} \Big\{\max_{t^0\leqslant t\leqslant t^0+\Delta t} |\Delta q(t)| + \max_{0\leqslant x\leqslant l} |\Delta u(x,t^0)|\Big\} \exp(K_{14}\Delta t) + \max_{0\leqslant x\leqslant l} |\Delta p(x,t^0)|.$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Выбирая величину Δt из условия

$$\Delta t\Big\{\chi_{\max}+\gamma_{u\,\max}K_{13}\exp(K_{14}T)\Big\}<1$$

и учитывая предположение (25) для $|\Delta u(x,t^0)|$ и $|\Delta p(x,t^0)|$, устанавливаем справедливость неравенства

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta p(x,t)|\leqslant K_{12}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\Delta q(t)|.$$

Но тогда из оценки принципа максимума (28) следует справедливость оценки и для $\Delta u(x,t)$:

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta u(x,t)|\leqslant K_{11}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\Delta q(t)|.$$

Проводя подобные рассуждения последовательно для конечных отрезков времени, устанавливаем оценки (24) на всем отрезке $[0,T]$. Это позволяет заключить из (23), что

$$|J(q^s)-J(q)|\leqslant K_{15}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\Delta q(t)|,\quad K_{15}=\mathrm{const}>0,$$

т.е. в силу (22) имеет место равенство $\lim\limits_{s\to\infty}J(q^s)=J(q)$, которое доказывает утверждение теоремы 3.

Как было отмечено выше (см. теорему 2), установленная в теореме 3 непрерывность функционала $J(q)$ позволяет обосновать постановку вариационной задачи (19). Соотношение (21) имеет место в силу компактности минимизирующей последовательности $\{q^s\}\subset\Theta_R$.

3.2. Дифференцируемость функционала в вариационной задаче (19). Исследуем условия, при которых $J(q)$ дифференцируем на множестве допустимых граничных управлений Θ_R (см. (18)), и получим способ представления его дифференциала.

Теорема 4. *Пусть входные данные системы (1)–(5) удовлетворяют требованиям теоремы 1, и пусть, кроме того, выполнены следующие условия:*

1) *при $(x,t,u)\in\overline{D}$ производные коэффициентов уравнения (1) a_{uu}, b_x, b_u, c_t, c_u и d_u непрерывны в смысле Гельдера по x, t, u с показателями λ, $\lambda/2$, λ соответственно, кроме того, производная b_t ограничена;*

2) *при $(x,t,u)\in\overline{D}$ производная по u функции $\gamma(x,t,u)$ в условии (5) непрерывна в смысле Гельдера по x, t с показателями λ, $\lambda/2$ соответственно, производная $\gamma_{uu}(x,t,u)$ ограничена при $(x,t,u)\in\overline{D}$, $\max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}}|\gamma_{uu}(x,t,u)|\leqslant\gamma_{uu\,\max}$, $\gamma_{uu\,\max}=\mathrm{const}>0$;*

3) *функция граничного наблюдения $w(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ и удовлетворяет условию*

$$c(x,0,\varphi)w_t-L\varphi|_{x=0,t=0}=f(x,0)p^0(x)|_{x=0}.$$

Тогда функционал $J(q)$ дифференцируем в смысле Фреше в $W_2^{3/2}[0,T]$ в каждой точке q множества Θ_R и его дифференциал можно представить в виде

$$d\,J(q)=-\int\limits_0^T\psi(x,t)|_{x=l}\Delta q(t)\,dt,\quad \Delta q\in\Theta_R,\tag{29}$$

где $\{\psi(x,t),\vartheta(x,t)\}$ — решение сопряженной задачи, являющейся системой

$$\begin{aligned}\big(c(x,t,u)\psi\big)_t+(a(u)\psi_x)_x+\mathcal{B}_0(x,t,u)\psi_x+\big(\mathcal{B}_{0x}(x,t,u)-\mathcal{B}_1(x,t,u)\big)\psi=&\\ =-\gamma_u(x,t,u)\vartheta(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0\leqslant t<T,&\end{aligned}\tag{30}$$

$$a(u)\psi_x+b(x,t,u)\psi|_{x=0}=2\big(u(x,t)|_{x=0}-w(t)\big),\quad 0\leqslant t<T,\tag{31}$$

$$a(u)\psi_x+b(x,t,u)\psi|_{x=l}=0,\quad 0\leqslant t<T,\tag{32}$$

$$\psi(x,t)|_{t=T}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{33}$$

$$\vartheta_t(x,t)+\chi(t)\vartheta(x,t)=-f(x,t)\psi(x,t),\quad 0<x<l,0\leqslant t<T,\quad \vartheta(x,t)|_{t=T}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{34}$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

в которой

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(x,t,u) &= b(x,t,u) - a_u(u)u_x, \\ \mathcal{B}_1(x,t,u) &= c_u(x,t,u)u_t - a_u(u)u_{xx} - a_{uu}(u)u_x^2 + b_u(x,t,u)u_x + \\ &\quad + d(x,t,u) + d_u(x,t,u)u, \end{aligned} \tag{35}$$

и где $\{u(x,t), p(x,t)\}$ *— решение нелинейной системы* (1)–(5)*, соответствующее граничному управлению* $q(t) \in \Theta_R$.

Для доказательства теоремы 4 рассмотрим произвольные граничные функции q и $q + \Delta q$ из множества допустимых управлений Θ_R. Пусть $\{u, p\}$ и $\{u + \Delta u, p + \Delta p\}$ — решения системы (1)–(5), соответствующие этим граничным функциям. Приращение функционала $J(q)$ (см. (19)) относительно приращения Δq имеет вид

$$\Delta J(q) = J(q + \Delta q) - J(q) = 2\int\limits_0^T \big(u(0,t) - w(t)\big)\Delta u(0,t)\,dt + \int\limits_0^T \big(\Delta u(0,t)\big)^2\,dt. \tag{36}$$

Функционал $J(q)$ дифференцируем в смысле Фреше в каждой точке q множества Θ_R, если его приращение можно представить в виде (см. [10, 11])

$$\Delta J(q) = d\,J(q) + o(\Delta q, q), \tag{37}$$

где $d\,J(q)$ — линейный функционал относительно Δq, называемый дифференциалом функционала $J(q)$ в точке q множества Θ_R, причем $d\,J(q)$ является главной линейной частью приращения, в то время как $|o(\Delta q,q)|\Big(\|\Delta q\|_{W_2^{3/2}[0,T]}\Big)^{-1} \to 0$ при $\|\Delta q\|_{W_2^{3/2}[0,T]} \to 0$. Покажем, что приращение $\Delta J(q)$ вида (36) можно привести к виду (37) — это цель дальнейшего доказательства теоремы 4.

Заметим прежде всего, что при выполнении условий теоремы 4 имеют место оценки устойчивости в классах Гельдера для решений $\{u, p\}$ и $\{u + \Delta u, p + \Delta p\}$ системы (1)–(5):

$$|\Delta u(x,t)|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{16}\|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]}, \quad |\Delta p(x,t)|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant K_{17}\|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]}, \quad K_{16}, K_{17} = \text{const} > 0. \tag{38}$$

Вывод таких оценок (как и ранее вывод оценок (24) в теореме 3) проводится последовательно для конечных интервалов времени, начиная с момента $t \in [0, t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, и вплоть до момента $t = T$. Изложим кратко схему их получения в области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\}$. Оценки в классах Гельдера для $u(x,t)$, $p(x,t)$ (см. теорему 1), а также требования теоремы 4 к входным данным позволяют заключить, что все коэффициенты линейной краевой задачи вида (26) удовлетворяют условию Гельдера как функции (x,t) с показателями λ, $\lambda/2$. Следовательно, для $\Delta u(x,t)$ как для решения такой задачи в области $\overline{Q}_{t^0}$ справедлива оценка [4]

$$|\Delta u(x,t)|_{\overline{Q}_{t^0}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{18}\Big(|\Delta p(x,t)|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2} + \|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]} + |\Delta u(x,t^0)|_{[0,l]}^{2+\lambda}\Big), \quad K_{18} = \text{const} > 0. \tag{39}$$

Чтобы оценить $|\Delta p(x,t)|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2}$ в (39) заметим, что по определению нормы в классе Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_{t^0})$

$$|\Delta p(x,t)|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2} = \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta p(x,t)| + \langle\Delta p(x,t)\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} + \langle\Delta p(x,t)\rangle_{t,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda/2}.$$

Из соотношения (27) следует, что при достаточно малом Δt (а именно при $0 < \Delta t < \chi_{\max}^{-1}$) имеет место неравенство

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta p(x,t)| \leqslant K_{19}\Big\{\Delta t\gamma_{u\max}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} |\Delta u(x,t)| + \max_{0\leqslant x\leqslant l}|\Delta p(x,t^0)|\Big\}, \quad K_{19} = \text{const} > 0.$$

Кроме того, это соотношение позволяет заключить, что при таком Δt

$$\langle\Delta p(x,t)\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} \leqslant K_{19}\Delta t\Big\{\langle\gamma_u\rangle_{x,\overline{D}}^{\lambda}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta u(x,t)| + \gamma_{u\max}\langle\Delta u(x,t)\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} +$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

$$+\gamma_{uu\,\max}\langle u(x,t)\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_{t^0}}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta u(x,t)|\Big\}+K_{19}\langle\Delta p(x,t^0)\rangle^{\lambda}_{x,[0,l]}.$$

Наконец, из (27) следует, что

$$\langle\Delta p(x,t)\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_{t^0}}\leqslant\Delta t^{1-\lambda/2}\chi_{\max}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta p(x,t)|+\Delta t^{1-\lambda/2}\gamma_{u\,\max}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta u(x,t)|,$$

т.е. с учетом оценки для $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta p(x,t)|$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\langle\Delta p(x,t)\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_{t^0}}\quad&\leqslant\quad\Delta t^{1-\lambda/2}\chi_{\max}K_{19}\Big\{\Delta t\gamma_{u\,\max}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta u(x,t)|+\max_{0\leqslant x\leqslant l}|\Delta p(x,t^0)|\Big\}+\\&+\Delta t^{1-\lambda/2}\gamma_{u\,\max}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}|\Delta u(x,t)|.\end{aligned}$$

Как отмечено выше, полученные оценки позволяют оценить $|\Delta p(x,t)|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_{t^0}}$ в соотношении (39). Это означает, что при достаточно малом фиксированном Δt имеет место следующее неравенство (в силу определения нормы в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_{t^0})$ для $\Delta u(x,t)$):

$$|\Delta u(x,t)|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_{t^0}}\leqslant K_{20}\Big(\|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]}+|\Delta u(x,t^0)|^{2+\lambda}_{[0,l]}+|\Delta p(x,t)|^{\lambda,\lambda/2}_{0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant t^0}\Big),\quad K_{20}=\mathrm{const}>0.$$

По предположению, при $0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0$ оценки устойчивости уже установлены. Следовательно, полученное неравенство означает выполнение аналогичных оценок и в области $\overline{Q}_{t^0}$, в том числе и для $|\Delta p(x,t)|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_{t^0}}$. Повторение подобных рассуждений для последующих интервалов времени позволяет установить оценки (38) для $|\Delta u(x,t)|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}}$ и $|\Delta p(x,t)|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}}$ уже во всей области. С учетом вложения пространства $W_2^{3/2}[0,T]$ в $O^1[0,T]$ (см. [9]) эти оценки принимают вид

$$|\Delta u(x,t)|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}}\leqslant K_{21}\|\Delta q(t)\|_{W_2^{3/2}[0,T]},\qquad|\Delta p(x,t)|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}}\leqslant K_{22}\|\Delta q(t)\|_{W_2^{3/2}[0,T]},\tag{40}$$

$$K_{21},K_{22}=\mathrm{const}>0.$$

В силу (40) приращения $\Delta u(x,t)$ и $\Delta p(x,t)$ удовлетворяют следующим соотношениям с точностью до членов второго порядка относительно $\|\Delta q(t)\|_{W_2^{3/2}[0,T]}$:

$$c(x,t,u)\Delta u_t-\mathcal{L}\Delta u=f(x,t)\Delta p(x,t)+\mathcal{F}(x,t),\quad(x,t)\in Q=\{0<x<l,0<t\leqslant T\},\tag{41}$$

$$a(u)\Delta u_x-\mathcal{A}_2\Delta u|_{x=0}=\mathcal{F}_0(t),\quad 0<t\leqslant T,\tag{42}$$

$$a(u)\Delta u_x+\mathcal{A}_3\Delta u|_{x=l}=\Delta q+\mathcal{F}_1(t),\quad 0<t\leqslant T,\tag{43}$$

$$\Delta u|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{44}$$

$$\Delta p_t(x,t)=\chi(t)\Delta p(x,t)+\gamma_u(x,t,u)\Delta u(x,t),\ (x,t)\in Q,\quad\Delta p(x,t)|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{45}$$

в которых оператор $\mathcal{L}$ определен как

$$\mathcal{L}\Delta u\equiv(a(u)\Delta u_x)_x-\mathcal{B}_0(x,t,u)\Delta u_x-\mathcal{B}_1(x,t,u)\Delta u$$

с коэффициентами $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$ вида (35) и в которых коэффициенты в граничных условиях (42), (43) имеют вид

$$\mathcal{A}_2(t,u)=-a_u(u)u_x|_{x=0},\quad\mathcal{A}_3(t,u)=a_u(u)u_x|_{x=l}.$$

Для функций $\mathcal{F}(x,t)$, $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$ справедливо неравенство

$$\Big(\max_{(x,t)\in\overline{Q}}|\mathcal{F}(x,t)|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}|\mathcal{F}_0(t)|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}|\mathcal{F}_1(t)|\Big)\leqslant K_{23}\|\Delta q(t)\|^2_{W_2^{3/2}[0,T]},\quad K_{23}=\mathrm{const}>0.\tag{46}$$

Это утверждение основано на оценках устойчивости (40), так как функция $\mathcal{F}(x,t)$ зависит от $(\Delta u)^2$, $\Delta u\Delta u_x$, $\Delta u\Delta u_t$ и $\Delta u\Delta u_{xx}$, функции $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$ зависят от $\Delta u\Delta u_x|_{x=0}$ и $\Delta u\Delta u_x|_{x=l}$ соответственно.

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

3.3. Сопряженная задача. Дальнейшее доказательство теоремы 4 связано с исследованием сопряженной задачи (30)–(34), которая является системой относительно функций $\psi(x,t)$, $\vartheta(x,t)$. Она включает в себя линейную краевую задачу третьего рода для неоднородного параболического уравнения (30) с неизвестной функцией $\vartheta(x,t)$ в правой части, а также содержит условие (34), описывающее изменение по времени этой функции. Прежде чем перейти к доказательству разрешимости системы (30)–(34) в классе гладких функций, введем переменную $t' = T - t$ и представим эту систему в виде

$$(c\psi)_{t'} - (a\psi_x)_x - \mathcal{B}_0\psi_x + \big\{\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{0x}\big\}\psi = \gamma_u\vartheta(x,t'),\ 0<x<l, 0<t'\leqslant T, \tag{47}$$

$$a\psi_x(x,t') - (\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_0)\psi(x,t')|_{x=0} = 2\big(u(x,t')|_{x=0} - w(t')\big), \quad 0<t'\leqslant T, \tag{48}$$

$$a\psi_x(x,t') + (\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_0)\psi(x,t')|_{x=l} = 0, \quad 0<t'\leqslant T, \tag{49}$$

$$\psi(x,t')|_{t'=0} = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{50}$$

$$\vartheta_{t'}(x,t') - \chi(t')\vartheta(x,t') = f(x,t')\psi(x,t'), \quad 0<x<l, 0<t'\leqslant T, \quad \vartheta(x,t')|_{t'=0} = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{51}$$

Замечание 2. В уравнении (47) и в граничных условиях (48), (49) соответствующие коэффициенты при $\psi(x,t')$ имеют следующий вид (с учетом определений $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и (35)):

$$\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{0x} = d(x,t',u) + d_u(x,t',u)u - b_x(x,t',u) + c_u(x,t',u)u_{t'},$$

$$\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_0 = -b(x,t',u)|_{x=0}, \quad \mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_0 = b(x,t',u)|_{x=l}.$$

Для доказательства разрешимости сопряженной задачи (47)–(51) в классе гладких функций воспользуемся методом прямых Ротэ, заменяя ее дифференциально-разностной системой определения $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$ — приближенных значений функций $\psi(x,t')$ и $\vartheta(x,t')$ в области $\overline{Q}_\tau = \{0\leqslant x\leqslant l, t_n\in\overline{\omega}_\tau\}$ (t_n — узлы равномерной сетки $\overline{\omega}_\tau = \{t_n\}\in[0,T]$ с шагом $\tau = TN^{-1}$):

$$c_n\psi_{n\bar t} - (a_n\psi_{nx})_x - \mathcal{B}_{0n}\psi_{nx} + \big\{c_{n\bar t} + \mathcal{B}_{1n} - (\mathcal{B}_{0n})_x\big\}\psi_n = \gamma_{un}\vartheta_n, \tag{52}$$

$$(x,t_n)\in Q_\tau = \{0<x<l, 0<t_n\leqslant T\},$$

$$a_n\psi_{nx} - \big(\mathcal{A}_{2n} - \mathcal{B}_{0n}\big)\psi_n|_{x=0} = 2\big(u_n(x)|_{x=0} - w_n\big), \quad 0<t_n\leqslant T, \tag{53}$$

$$a_n\psi_{nx} + \big(\mathcal{A}_{3n} + \mathcal{B}_{0n}\big)\psi_n|_{x=l} = 0, \quad 0<t_n\leqslant T, \tag{54}$$

$$\psi_0(x) = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{55}$$

$$\vartheta_{n\bar t}(x) = \chi_n\vartheta_n(x) + f_n(x)\psi_{n-1}(x),\ (x,t_n)\in Q_\tau, \quad \vartheta_0(x) = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{56}$$

В этих соотношениях a_n, c_n, $\mathcal{B}_{0n}$, $\mathcal{B}_{1n}$, γ_{un} и т.д. — значения соответствующих функций в точке (x,t_n,u_n); кроме того, $u_n(x)$ и $p_n(x)$ — известные решения исходной системы (1)–(5), т.е. функции $u(x,t')$ и $p(x,t')$ на временном слое $t' = t_n$,

$$\psi_{n\bar t} = \big(\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad \psi_{nx} = d\psi_n(x)/dx, \quad \vartheta_{n\bar t} = \big(\vartheta_n(x) - \vartheta_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}.$$

Применение метода Ротэ включает в себя три основных этапа, которые аналогичны этапам, указанным в доказательстве теоремы 1, но с учетом того, что краевая задача третьего рода (47)–(50) линейна относительно $\psi(x,t')$ (ср. с краевой задачей (1)–(4) относительно $u(x,t)$).

На соответствующем этапе 1 имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы 4, и пусть $\vartheta_n(x)$ — известная функция, равномерно ограниченная в $\overline{Q}_\tau$ и принадлежащая $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$:*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_n(x)| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0, \quad |\hat\vartheta(x)|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant \overline{\mathcal{M}}_1, \quad \overline{\mathcal{M}}_0, \overline{\mathcal{M}}_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда линейная дифференциально-разностная краевая задача (52)–(55) однозначно разрешима в $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$ при любом достаточно малом шаге τ сетки $\overline{\omega}_\tau$ и для ее решения $\psi_n(x)$ справедливы оценки

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\psi_n(x)| \leqslant \overline{M}_0, \quad |\hat\psi(x)|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{Q_\tau} \leqslant \overline{M}, \quad \overline{M}_0, \overline{M} = \mathrm{const} > 0.$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Доказательство. Утверждение леммы 3 основано на результатах теоремы 4.2.9 из [6, 7] об однозначной разрешимости в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$ краевой задачи третьего рода для линейного дифференциально-разностного уравнения. Эти результаты являются аналогами известных результатов [4] для линейных параболических уравнений. Возможность применения теоремы 4.2.9 обеспечивается принадлежностью коэффициентов уравнения (52) классу $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ в силу требований теоремы 4 к входным данным, а также в силу оценок теоремы 1 для решения $\{u(x,t),\, p(x,t)\}$ исходной задачи (1)–(5) (см. вид коэффициентов $\mathcal{B}_{0x}$ и $\mathcal{B}_1$ в (35)). Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что соответствующие коэффициенты в граничных условиях (53), (54) принадлежат классу $O_\tau^1(\overline{\omega}_\tau)$ как сеточные функции, определенные на сетке $\overline{\omega}_\tau$ (см. замечание 2).

Применительно к задаче (52)–(55) постоянная $\overline{M}_0$ из оценки принципа максимума для $\psi_n(x)$ имеет вид

$$\begin{gathered}
\overline{M}_0 = \Big\{c_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}T \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_n(x)| + 2a_{\min}^{-1}\big(M_0 + \max_{0\leqslant t\leqslant T}|w(t)|\big)\Big\}\exp(K_{24}T),\\
K_{24} \geqslant (1+\varepsilon)c_{\min}^{-1}\Big\{c_{t\max} + \max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_1| + \max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_{0x}|\Big\}, \\
\varepsilon > 0 \text{ любое},\quad \tau\leqslant\tau_0 = \varepsilon K_{24}^{-1}.
\end{gathered}\tag{57}$$

Оценка для $|\hat{\psi}(x)|_{Q_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2}$ следует из соответствующей оценки теоремы 4.2.9 из [6, 7], которая применительно к задаче (52)–(55) принимает вид

$$|\hat{\psi}(x)|_{Q_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{25}|\hat{\vartheta}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2},\tag{58}$$

где $K_{25}>0$ — постоянная, зависящая от норм в $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ коэффициентов уравнения (52), а следовательно, и от норм в соответствующих сеточно-непрерывных классах Гельдера функции $u(x,t)$ (см. вид коэффициентов $\mathcal{B}_{0x}$ и $\mathcal{B}_1$ в (35)).

На этапе 2 сеточно-непрерывная функция $\vartheta_n(x)$ ищется одновременно с $\psi_n(x)$ из системы (52)–(56). Существование решения $\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\}$ этой системы устанавливает

Лемма 4. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы 4. Тогда при любом достаточно малом шаге τ сетки $\overline{\omega}_\tau$ дифференциально-разностная система (52)–(56) имеет единственное решение $\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\}$, обладающее свойствами*

$$\begin{gathered}
\psi_n(x)\in H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau),\quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\psi_n(x)|\leqslant\overline{M}_0,\quad |\hat{\psi}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}\leqslant\overline{M}_1,\quad |\hat{\psi}(x)|_{Q_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2}\leqslant\overline{M},\\
\vartheta_n(x)\in H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau),\quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_n(x)|\leqslant\overline{\mathcal{M}}_0,\quad |\hat{\vartheta}(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}\leqslant\overline{\mathcal{M}}_1,
\end{gathered}\tag{59}$$

где $\overline{M}_0$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}$, $\overline{\mathcal{M}}_0$ и $\overline{\mathcal{M}}_1$ — положительные постоянные, не зависящие от x, τ, n.

Доказательство. Исходя из начального момента времени $t_0=0$, предположим, что вплоть до момента $t'=t_{n-1}$ решения $\{\psi_j(x),\vartheta_j(x)\}$ $(j=\overline{1,n-1})$ уже найдены и соответствующие оценки для них уже установлены, в частности, $\max\limits_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n-1}(x)|\leqslant\overline{\mathcal{M}}_0$, $\overline{\mathcal{M}}_0=(1+\varepsilon)f_{\max}a_{\min}^{-1}\max(M_0,w_{\max})$, где M_0 — оценка принципа максимума для $u(x,t)$ (см. (11)), $w_{\max}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|w(t)|$.

Из соотношения (56) следует, что

$$|\vartheta_n(x)|\leqslant\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n-1}(x)| + \tau\chi_{\max}|\vartheta_n(x)| + \tau f_{\max}\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\psi_{n-1}(x)|,$$

т.е. при достаточно малом шаге τ $(0<\tau\leqslant\tau_0, \tau_0=\chi_{\max}^{-1})$ имеет место неравенство

$$|\vartheta_n(x)|\leqslant K_{26}\big\{\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n-1}(x)| + \tau f_{\max}\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\psi_{n-1}(x)|\big\},\quad K_{26}=\text{const}>0.$$

Применение принципа максимума для $\psi_{n-1}(x)$ с учетом граничных и начальных условий позволяет по аналогии с (57) установить, что

$$\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\psi_{n-1}(x)|\leqslant c_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}T\exp(K_{24}T)\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n-1}(x)| + 2a_{\min}^{-1}(M_0+w_{\max})\exp(K_{24}T).$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Учитывая эту оценку и выбирая величину шага сетки $\overline{\omega}_\tau$ из условия

$$0<\tau\leqslant\tau_{00},\quad 0<\tau_{00}=\varepsilon\big\{f_{\max}c_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}T\exp(K_{24}T)\big\}^{-1},\quad \varepsilon>0 \text{ любое},$$

приходим к неравенству

$$|\vartheta_n(x)|\leqslant K_{26}(1+\varepsilon)\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n-1}(x)|+2K_{26}\tau f_{\max}a_{\min}^{-1}(M_0+w_{\max})\exp(K_{24}T).$$

Предположим, что шаг сетки $\overline{\omega}_\tau$ удовлетворяет еще одному ограничению $0<\tau\leqslant\tau_{000}$, $0<\tau_{000}\leqslant\varepsilon\{2\exp(K_{24}T)\}^{-1}$. Тогда при выполнении условия $0<\tau\leqslant\min(\tau_0,\tau_{00},\tau_{000})$ имеют место оценки

$$|\vartheta_n(x)|\leqslant(1+\varepsilon)\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n-1}(x)|+\varepsilon f_{\max}a_{\min}^{-1}\max(M_0,w_{\max}),$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_n(x)|\leqslant\overline{\mathcal{M}}_0,\quad \overline{\mathcal{M}}_0=(1+\varepsilon)f_{\max}a_{\min}^{-1}\max(M_0,w_{\max}).$$

Наличие оценки для $|\vartheta_n(x)|$ позволяет применить принцип максимума уже для $\psi_n(x)$ и установить, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\psi_n(x)|\leqslant\overline{M}_0,$$

$$\overline{M}_0=(1+\varepsilon)\Big\{c_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}T\overline{\mathcal{M}}_0+a_{\min}^{-1}\max(M_0,w_{\max})\Big\}\exp(K_{24}T),\quad \varepsilon>0 \text{ любое}. \tag{60}$$

Дальнейшее доказательство леммы 4 связано с оценкой нормы $\psi_n(x)$ в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$. Ее вывод основан на принадлежности $\psi_n(x)$ (как решения дифференциально-разностного уравнения (52) с установленной оценкой (60)) некоторому специальному классу $\mathcal{B}_{2\tau}$ сеточно-непрерывных функций, вложимому в $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$. Это утверждение следует из соответствующих теорем 4.3.1 и 4.3.2 из [6, 7] для $\mathcal{B}_{2\tau}$, который, как мы уже отмечали, является дискретным аналогом известного класса $\mathcal{B}_2$ из [4]. Применительно к $\psi_n(x)$ искомая оценка имеет вид

$$|\hat\psi(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}\leqslant\overline{M}_1,$$

где постоянная $\overline{M}_1>0$ зависит лишь от параметров класса $\mathcal{B}_{2\tau}$, в частности от $\overline{M}_0$, $\overline{Q}_\tau$ и от равномерных оценок коэффициентов уравнения (52). Заметим, что оценка принципа максимума (60) позволяет установить оценки приграничных производных $\psi_{nx}(x)$ при $x=0$, $x=l$ из условий (53), (54). Это означает ограниченность в замкнутой области величины $\langle\hat\psi(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$, входящей в определение нормы в классе $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}$.

Переходя к получению оценки $|\hat\psi(x)|_{Q_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2}\leqslant\overline{M}$, заметим, что эта оценка связана в силу (58) с получением оценки $|\hat\vartheta(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$. Из соотношения (56) сразу следует, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n\bar t}(x)|\leqslant\chi_{\max}\overline{\mathcal{M}}_0+f_{\max}\overline{M}_0.$$

Кроме того, в силу (56) справедливо представление

$$\vartheta_n(x)=(1-\tau\chi_n)^{-1}\vartheta_{n-1}(x)+(1-\tau\chi_n)^{-1}\tau f_n(x)\psi_{n-1}(x),\quad n\geqslant1,\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Учитывая условия $\psi_0(x)=0$, $\vartheta_0(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$ (см. (55) и (56)), заключаем, что и $\vartheta_1(x)=0$. При достаточно малом шаге τ $(0<\tau\leqslant\tau_0)$ это представление позволяет оценить величину $\langle\hat\vartheta(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$ при всех $n>1$, исходя из ее определения, а также из требований теоремы 4 к гладкости функции $f(x,t)$. Следует также учитывать указанную выше ограниченность величины $\langle\hat\psi(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$.

Полученные оценки для $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_n(x)|$, $\langle\hat\vartheta(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$ и для $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}|\vartheta_{n\bar t}(x)|$ позволяют в силу определения нормы в классе $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ установить искомую оценку для $|\hat\vartheta(x)|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$ в (59).

Таким образом, сеточно-непрерывная функция $\vartheta_n(x)$, найденная из соотношения (56) по известным $\vartheta_{n-1}(x)$ и $\psi_{n-1}(x)$, удовлетворяет требованиям, при которых в силу леммы 3 дифференциально-разностная краевая задача (52)–(55) имеет единственное решение $\psi_n(x)$ в классе $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_\tau)$ с соответствующими оценками (59). Лемма 4 доказана.

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Замечание 3. Решение $\psi_n(x)$ принадлежит $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}$ не только в области $Q_\tau = \{0 < x < l, 0 < t_n \leqslant T\}$ но и в замкнутой области $\overline{Q}_\tau$, кроме точки $x = 0$, $t_n = 0$, в которой не выполняется условие согласования ($u_0(x)|_{x=0} \neq w_0$ вообще говоря).

Результаты леммы 4 позволяют перейти к этапу 3 и установить следующую теорему.

Теорема 5. *При выполнении входными данными требований теоремы* 4 *сопряженная задача* (47)–(51) *имеет единственное решение* $\{\psi(x,t'), \vartheta(x,t')\}$ *в классе гладких функций такое, что*

$$\psi(x,t') \in C(\overline{Q}), \quad \psi(x,t') \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q), \quad |\psi(x,t')|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant \overline{M},$$

$$\vartheta_t(x,t') \in C(\overline{Q}), \quad \vartheta(x,t') \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad |\vartheta(x,t')|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \overline{\mathcal{M}}.$$

Его можно получить как предел решения $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$ *дифференциально-разностной системы* (52)–(56) *при стремлении шага сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *к нулю.*

Доказательство. Равномерные оценки (59) (не зависящие от x, τ, n) означают компактность семейства $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$ в соответствующих функциональных пространствах. Это позволяет, проводя обычные рассуждения при совершении предельного перехода в условиях (52)–(56) при $\tau \to 0$ (т.е. при $n \to \infty$), установить, что сопряженная задача (47)–(51) (в переменных (x,t'), $t' = T - t$) имеет по крайней мере одно гладкое решение $\{\psi(x,t'), \vartheta(x,t')\}$ в указанных классах функций. Используя понятия согласования начальных и граничных данных [4] применительно к сопряженной задаче (47)–(51), отметим, что для нее выполнены условия согласования первого порядка при $x = l$, $t' = 0$ (см. (49), (50)), но, вообще говоря, не выполнены при $x = 0$, $t' = 0$ (см. (48), (50)). Следовательно, решение $\psi(x,t')$ принадлежит классу Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}$ во всей замкнутой области $\overline{Q}$, кроме точки $x = 0$, $t' = 0$.

Доказательство единственности решения $\{\psi(x,t'), \vartheta(x,t')\}$ в классе гладких функций таких, что

$$\sup_{(x,t')\in\overline{Q}} |\psi, \psi_x, \psi_{xx}, \psi_t| < \infty, \qquad \sup_{(x,t')\in\overline{Q}} |\vartheta, \vartheta_t| < \infty,$$

аналогично доказательству соответствующего утверждения о единственности решения в теореме 1. Оно проводится последовательно для конечных отрезков времени и использует принцип от противного.

3.4. Представление дифференциала с помощью сопряженной задачи. Для завершения доказательства теоремы 4 возвращаемся к сопряженной задаче (30)–(34) в переменных (x,t) и установим справедливость представления (29) для дифференциала минимизируемого функционала $J(q)$.

Покажем, что приращение функционала $J(q)$ можно представить в виде

$$\Delta J(q) = -\int_0^T \psi(x,t)|_{x=l} \Delta q(t)\, dt - \int_0^T \int_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\, dx\, dt + \int_0^T \mathcal{F}_0(t)\psi(x,t)|_{x=0}\, dt -$$

$$- \int_0^T \mathcal{F}_1(t)\psi(x,t)|_{x=l}\, dt + \int_0^T \big(\Delta u(x,t)|_{x=0}\big)^2\, dt, \qquad (61)$$

где $\mathcal{F}(x,t)$ — правая часть уравнения (41), $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$ — правые части граничных условий (42) и (43) при $x = 0$ и $x = l$, для которых справедливо неравенство (46).

Рассмотрим вспомогательное выражение

$$I = \int_0^T \int_0^l \psi\big\{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\big\}\, dx\, dt + \int_0^T \int_0^l \Delta u\big\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\big\}\, dx\, dt + \int_0^T \int_0^l \vartheta\big\{\Delta p_t - \chi\Delta p\big\}\, dx\, dt,$$

в котором операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$ имеют соответственно вид

$$\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(u)\Delta u_x)_x - \mathcal{B}_0(x,t,u)\Delta u_x - \mathcal{B}_1(x,t,u)\Delta u,$$

$$\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(u)\psi_x)_x + \big(\mathcal{B}_0(x,t,u)\psi\big)_x - \mathcal{B}_1(x,t,u)\psi$$

с коэффициентами $\mathcal{B}_0(x,t,u)$ и $\mathcal{B}_1(x,t,u)$, определенными в (35).

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

С одной стороны, в силу уравнений (30) и (41) для $\psi(x,t)$ и $\Delta u(x,t)$, а также уравнения (45) для $\Delta p(x,t)$ имеем

$$I = \int_0^T\int_0^l \psi(x,t)f(x,t)\Delta p(x,t)\,dx\,dt + \int_0^T\int_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt. \tag{62}$$

С другой стороны, представим I в виде $I = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = \int_0^T\int_0^l \big\{\psi c\Delta u_t + \Delta u(c\psi)_t\big\}\,dx\,dt, \qquad I_2 = \int_0^T\int_0^l \big\{-\psi\mathcal{L}\Delta u + \Delta u\mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt,$$

$$I_3 = \int_0^T\int_0^l \vartheta\big\{\Delta p_t - \chi\Delta p\big\}\,dx\,dt.$$

Учитывая соотношения (30)–(33) для $\psi(x,t)$, (41)–(44) для $\Delta u(x,t)$, а также (34) и (45) для $\vartheta(x,t)$ и $\Delta p(x,t)$, заключаем, что

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^l \big[\psi c\Delta u\big]_{t=0}^{t=T}\,dx = 0,\\
I_2 &= \int_0^T \psi|_{x=0}\big(a\Delta u_x - \mathcal{B}_0\Delta u\big)|_{x=0}\,dt - \int_0^T \psi|_{x=l}\big(a\Delta u_x - \mathcal{B}_0\Delta u\big)|_{x=l}\,dt + \int_0^T \big[\Delta u a\psi_x\big]_{x=0}^{x=l}\,dt =\\
&= \int_0^T \psi|_{x=0}\mathcal{F}_0\,dt - \int_0^T \psi|_{x=l}\Delta q\,dt - \int_0^T \psi|_{x=l}\mathcal{F}_1\,dt - 2\int_0^T \Delta u|_{x=0}\big(u|_{x=0} - w(t)\big)\,dt,\\
I_3 &= \int_0^l \big[\vartheta\Delta p\big]_{t=0}^{t=T}\,dx - \int_0^T\int_0^l (\vartheta_t + \chi\vartheta)\Delta p\,dx\,dt = \int_0^T\int_0^l f\psi\Delta p\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, для вспомогательного выражения I имеет место равенство

$$\begin{aligned}
I = \int_0^T \psi(x,t)|_{x=0}\mathcal{F}_0(t)\,dt - \int_0^T \psi(x,t)|_{x=l}\Delta q(t)\,dt - \int_0^T \psi(x,t)|_{x=l}\mathcal{F}_1(t)\,dt -\\
- 2\int_0^T \Delta u(x,t)|_{x=0}\big(u(x,t)|_{x=0} - w(t)\big)\,dt + \int_0^T\int_0^l f(x,t)\psi(x,t)\Delta p(x,t)\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

откуда, с учетом (62),

$$\begin{aligned}
2\int_0^T \Delta u(x,t)|_{x=0}\big(u(x,t)|_{x=0} - w(t)\big)\,dt = -\int_0^T \psi(x,t)|_{x=l}\Delta q(t)\,dt - \int_0^T\int_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt +\\
+ \int_0^T \mathcal{F}_0(t)\psi(x,t)|_{x=0}\,dt - \int_0^T \mathcal{F}_1(t)\psi(x,t)|_{x=l}\,dt.
\end{aligned}$$

В силу (36) это означает, что представление (61) действительно имеет место. Из этого представления на основании теоремы 5 для $\psi(x,t)$, оценок (38) для $\Delta p(x,t)$ и оценок (46) для функций $\mathcal{F}(x,t)$, $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$ заключаем, что справедливо равенство

$$\Delta J(q) = -\int_0^T \psi(x,t)|_{x=l}\Delta q(t)\,dt + o\big(\|\Delta q\|_{W_2^{3/2}[0,T]}\big).$$

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

Интеграл в этом равенстве является линейным функционалом в $W_2^{3/2}[0,T]$ относительно Δq, т.е. приращение функционала $\Delta J(q)$ вида (36) приведено к виду (37), что и требовалось. Следовательно, функционал $J(q)$ дифференцируем на множестве Θ_R и его дифференциал $d\,J(q)$ в точке $q \in \Theta_R$ представим в виде (29). Этим утверждением доказательство теоремы 4 завершено.

Замечание 4. Множество допустимых граничных управлений Θ_R кроме требований гладкости и согласования (см. (18)) может включать априорные представления о качественной структуре искомых управляющих режимов (знание участков знакоопределенности, монотонности, выпуклости, расположения точек экстремумов и перегибов и т.п.). Такие ограничения качественного характера позволяют сузить множество Θ_R, в частности, они могут привести к единственности оптимального управления — в общем случае любой граничный режим из множества $\Theta_R^* \in \Theta_R$ (см. (20)) является оптимальным управляющим воздействием. Кроме того, такого рода ограничения обладают стабилизирующими свойствами (см., например, [12, 13]), что позволяет использовать их для приближенного решения широкого круга задач, в том числе задач минимизации. Так в [13, глава 6] априорная информация о качественном поведении допустимых управляющих воздействий использована для численного решения методом проекции сопряженных градиентов различных вариационных задач. Возможность эффективного применения этого метода для минимизации функционала $J(q)$ основана на полученном в теореме 4 явном представлении $d\,J(q)$ через решение сопряженной задачи.

4. Некоторые математические модели нестационарных фильтрационных процессов. Исследованные постановки нелинейных параболических задач связаны с математическим моделированием нестационарной фильтрации слабосжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде. В соответствующих моделях подземной гидродинамики предполагается [14–16], что движение жидкости к скважине в пласте с трещиновато-пористой структурой происходит по системе трещин, а основной запас флюида содержится в пористых блоках. В частности, математическая модель нестационарной фильтрации жидкости к вертикальной скважине в круговом пласте состоит в нахождении распределения давлений в трещинах и пористых блоках [17] из следующих условий (в цилиндрической системе координат (r,t)):

$$\beta_{cr} u_t = \mu^{-1} r^{-1} \big(k(u) r u_r\big)_r + \mu^{-1}\alpha(p-u), \quad (r,t) \in Q = \{r_{bh} < r < r_{fc}, 0 < t \leqslant T\}, \tag{63}$$

$$u(r,t)|_{r=r_{bh}} = u_{bh}, \quad u(r,t)|_{r=r_{fc}} = u_{fc}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{64}$$

$$\beta_{pb} p_t = -\mu^{-1}\alpha(p-u), \quad (r,t) \in Q, \tag{65}$$

$$u(r,t)|_{t=0} = \varphi(r), \quad p(r,t)|_{t=0} = \varphi(r), \quad r_{bh} \leqslant r \leqslant r_{fc}. \tag{66}$$

Здесь $u(r,t)$ — давление в трещинах, $p(r,t)$ — давление в пористых блоках, β_{cr} и β_{pb} — коэффициенты упругости соответственно в трещинах и пористых блоках, r_{bh} — радиус скважины, r_{fc} — радиус контура питания, u_{bh} и u_{fc} — соответствующие распределения давлений на этих границах, $\varphi(r)$ — начальное распределение давления в пласте, μ — вязкость жидкости, α — параметр перетока жидкости между блоками и трещинами, k — коэффициент проницаемости пласта.

Известно, что фильтрационные свойства трещиновато-пористых пластов зависят от давления. Это означает, что коэффициент проницаемости в уравнении (63) имеет вид $k = k(u)$. Граничные условия в системе (63)–(66) могут быть второго рода

$$2\pi H\mu^{-1}\big(k(u) r u_r\big)|_{r=r_{bh}} = Q(t), \quad 2\pi H\mu^{-1}\big(k(u) r u_r\big)|_{r=r_{fc}} = q(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{67}$$

или смешанного типа

$$2\pi H\mu^{-1}\big(k(u) r u_r\big)|_{r=r_{bh}} = Q(t), \quad u(r,t)|_{r=r_{fc}} = u_{fc}, \quad 0 < t \leqslant T,$$

где H — толщина пласта, $Q(t)$ — дебит, $q(t)$ —граничный поток на контуре питания.

Все эти модели, возникающие при разработке нефтегазовых месторождений, можно рассматривать как нелинейные параболические задачи с неизвестной функцией источника в уравнении (63). Роль такой функции играет давление $p(r,t)$ в пористых блоках, уравнение (65) задает закон изменения $p(r,t)$ по времени. В частности, исследованная задача (1)–(5) представляет собой постановку в общем виде одной из таких математических моделей.

Вариационная задача (19) с управляющим воздействием в граничном условии (3) для системы (1)–(5) связана с возможностью современных способов разработки нефтегазовых месторождений повышать ее

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

эффективность. Одним из таких способов является управление граничным потоком на контуре питания для того, чтобы повысить давление на скважине. Соответствующая задача граничного управления состоит в минимизации функционала $J(q)$ вида

$$J(q) = \int\limits_0^T \left(u(r,t;q)|_{r=r_{bh}} - w(t)\right)^2 dt,$$

где $w(t)$ — желаемое давление на скважине, $u(r,t;q)$ — решение математической модели фильтрации с краевыми условиями (67). Задание множества допустимых граничных воздействий $q(t)$ на контуре питания учитывает соответствующие технологические возможности.

5. Заключение. В работе исследованы нелинейные параболические системы, возникающие при моделировании и управлении нестационарными процессами фильтрации в подземной гидродинамике (в частности, при движении жидкости в трещиновато-пористых средах).

Цель исследования — обосновать постановки таких систем, которые включают в себя краевую задачу второго рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной функцией источника, а также уравнение зависимости этой функции от времени. Следует отметить существенное отличие рассмотренных постановок от обычных постановок краевых задач и задач управления для параболических уравнений с заданными правыми частями.

Один из результатов, полученных в работе, состоит в доказательстве однозначной разрешимости в классе гладких функций для постановки нелинейной параболической системы, которая позволяет учитывать особенности математического моделирования фильтрационных процессов слабосжимаемой жидкости. Этот результат основан на исследовании соответствующей нелинейной дифференциально-разностной системы, которая аппроксимирует исходную систему методом прямых Ротэ.

Другой результат работы связан с проблемой граничного управления для этой параболической системы. Обоснована постановка соответствующей вариационной задачи, особенность которой состоит в том, что наблюдаемое состояние тоже является граничным. Как отмечено в [3], такие вариационные постановки относятся к задачам граничного управления с граничным наблюдением и они наиболее важны для приложений. Для выбора компактного множества допустимых граничных управлений и для доказательства непрерывности минимизируемого функционала использованы оценки в классах Гельдера, полученные для решения исходной нелинейной параболической системы. Установлены условия дифференцируемости этого функционала на выбранном множестве допустимых граничных управлений и получено явное представление его дифференциала через решение сопряженной задачи. Доказательство однозначной разрешимости этой сопряженной задачи в классе гладких функций основано, как и исходной параболической системы, на методе Ротэ, но с учетом ее особенностей. В частности, данная задача является системой, которая включает в себя краевую задачу третьего рода для линейного параболического уравнения с неизвестной функцией в правой части. Указанное представление дифференциала минимизируемого функционала имеет важное значение при численном нахождении граничного управления. Наличие такого явного представления обеспечивает существенную экономию вычислительных затрат при определении градиента в применяемых численных методах минимизации.

Теоретический интерес к рассмотренным постановкам нелинейных параболических задач связан с уже отмеченными существенными отличиями этих постановок от обычных краевых задач и задач управления для параболических уравнений с заданными правыми частями. Полученные результаты имеют и практическое значение для моделирования и управления разнообразными фильтрационными процессами в подземной гидродинамике. В статье приведены примеры некоторых таких приложений.

Список литературы

1. *Gol'dman N.* Nonlinear boundary value problems for a parabolic equation with an unknown source function // AIMS Mathematics. 2019. **4**, N 5. 1508–1522.
2. *Гольдман Н.Л.* Исследование некоторых математических моделей нестационарных фильтрационных процессов // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 1. 1–12.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
6. *Gol'dman N.L.* Inverse Stefan Problems. Dordrecht: Kluwer, 1997.
7. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
8. *Gol'dman N.L.* Boundary value problems for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient // J. Differential Equations. 2019. **266**, N 8. 4925–4952.
9. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
11. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации (в 2-х томах). М.: МЦНМО, 2011.
12. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
13. *Gilyazov S.F., Gol'dman N.L.* Regularization of ill-posed problems by iteration methods. Dordrecht: Kluwer, 2000.
14. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
15. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.
16. *Губайдуллин Д.А., Садовников Р.В.* Применение параллельных алгоритмов для решения задачи фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте к скважинам со сложной траекторией // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 3. 244–251.
17. *Хайруллин М.Х., Абдуллин А.И., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н.* Численное решение коэффициентной обратной задачи для деформируемого трещиновато-пористого пласта // Матем. моделирование. 2008. **20**, № 11. 35–40.

Поступила в редакцию
26 мая 2022 г.

Принята к публикации
11 июля 2022 г.

Информация об авторе

Наталия Львовна Гольдман — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 1, стр. 4, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. N. Gol'dman, "Nonlinear Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with an Unknown Source Function," AIMS Math. **4** (5), 1508–1522 (2019). doi 10.3934/math.2019.5.1508.
2. N. L. Gol'dman, "Study of Some Mathematical Models of Nonstationary Filtration Processes," Vychisl. Metody Program. **21** (1), 1–12 (2020). doi 10.26089/NumMet.v21r101.
3. J.-L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* (Springer, Berlin, 1971; Mir, Moscow, 1972).
4. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; AMS Press, Providence, 1968).
5. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964; Mir, Moscow, 1968).
6. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
7. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems. Theory and Methods of Solution* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1999) [in Russian].
8. N. L. Gol'dman, "Boundary Value Problems for a Quasilinear Parabolic Equation with an Unknown Coefficient," J. Differ. Equations **266** (8), 4925–4952 (2019). doi 10.1016/j.jde.2018.10.015.
9. S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems* (Nauka, Moscow, 1969; Springer, New York, 1975).

2022, **23** (3), 207–229. doi 10.26089/NumMet.v23r313

10. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1977; Pergamon Press, New York, 1982).
11. F. P. Vasil'ev, *Optimization Methods*, Vols. 1, 2 (MTsNMO, Moscow, 2011) [in Russian].
12. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Regularizing Algorithms and a Priori Information* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
13. S. F. Gilyazov and N. L. Gol'dman, *Regularization of Ill-Posed Problems by Iteration Methods* (Kluwer, Dordrecht, 2000).
14. G. I. Barenblatt, V. M. Entov, and V. M. Ryzhik, *Theory of Fluid Flows through Natural Rocks* (Nedra, Moscow, 1984; Kluwer, Dordrecht, 1990).
15. K. S. Basniev, I. N. Kochina, and V. M. Maksimov, *Underground Hydrodynamics* (Nedra, Moscow, 1993) [in Russian].
16. D. A. Gubaidullin and R. V. Sadovnikov, "Application of Parallel Algorithms for Solving the Problem of Fluid Flow to Wells with Complicated Configurations in Fractured Porous Reservoirs," Vychisl. Metody Program. **8** (3), 244–251 (2007).
17. M. H. Khairullin, A. I. Abdullin, P. E. Morozov, and M. N. Shamsiev, "Numerical Solution of the Coefficient Inverse Problem for a Deformable Fractured Porous Reservoir," Mat. Model. **20** (11), 35–40 (2008).

Received
May 26, 2022

Accepted for publication
July 11, 2022

Information about the author

Nataliya L. Gol'dman — Dr. Sci., Leading Scientist; Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Leninskie Gory, 1, building 4, 119991, Moscow, Russia.