

Численное решение эллиптической задачи с несколькими интерфейсами

В. П. Шапеев

Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-6761-7273, e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

Л. С. Брындин

Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-0211-5800, e-mail: l.bryndin@g.nsu.ru

В. А. Беляев

Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-5901-2880, e-mail: belyaevasily@mail.ru

Аннотация: Разработан алгоритм высокоточного численного решения эллиптического уравнения второго порядка при наличии в области нескольких интерфейсов, в том числе пересекающихся и невыпуклых. Для аппроксимации задачи в окрестности интерфейсов используются нерегулярные ячейки (н-ячейки), отсекаемые ими от регулярных ячеек прямоугольной сетки, и законтурные части этих ячеек. Для построения приближенного решения предложено: 1) выписывать дополнительные условия согласования в н-ячейках на интерфейсах, увеличивая количество согласуемых ячеек вблизи интерфейсов; 2) уменьшать общую часть интерфейса, заключенную в соседних ячейках и используемую для записи условий. Для решения краевой задачи Дирихле реализован hp-вариант метода коллокации и наименьших квадратов (hp-МКНК) в сочетании с современными алгоритмами ускорения итерационного процесса: предобуславливание; распараллеливание с помощью OpenMP; ускорение, основанное на подпространствах Крылова; многосеточный алгоритм. При решении различных тестовых задач исследованы сходимость hp-МКНК и обусловленность возникающих переопределенных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Проведено сравнение результатов, полученных МКНК, с результатами других авторов, использовавших метод МИБ (англ. *matched interface and boundary*).

Ключевые слова: эллиптическая задача с интерфейсами, разрыв коэффициента, разрыв решения, уравнение Пуассона, метод коллокации и наименьших квадратов, предобуславливание, распараллеливание с помощью OpenMP, подпространства Крылова, многосеточный комплекс.

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания (№ 121030500137–5).

Для цитирования: Шапеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А. Численное решение эллиптической задачи с несколькими интерфейсами // Вычислительные методы и программирование. 2022. 23, № 3. 172–190. doi 10.26089/NumMet.v23r311.



Numerical solution of an elliptic problem with several interfaces

Vasily P. Shapeev

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0001-6761-7273, e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

Luka S. Bryndin

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0002-0211-5800, e-mail: l.bryndin@ng.nsu.ru

Vasily A. Belyaev

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0001-5901-2880, e-mail: belyaevasily@mail.ru

Abstract: An algorithm of the high-accuracy numerical solution of the second order elliptic equation with several interfaces including intersecting and non-convex ones is developed. To approximate the interface problem in the neighbourhood of the discontinuity lines irregular cells (i-cells) which are cut off by the discontinuity lines from the regular cells of the rectangular grid and the “outside-the-contour” parts of the cells are used. To construct an approximate solution, it is proposed: 1) to write out the additionally matching conditions in i-cells on interfaces increasing the number of matching cells; 2) to reduce the common part of the discontinuity line enclosed between neighboring cells and used for setting conditions. To solve the Dirichlet boundary value problem the hp-version of the least-squares collocation method (hp-LSCM) is implemented in combination with modern algorithms for accelerating the iterative process: preconditioning, parallelization of the computational program using OpenMP, Krylov subspaces; multigrid method. The convergence of the hp-LSCM and the conditionality of the arising overdetermined systems of linear algebraic equations (SLAE) are investigated in solving various test problems. The results obtained by the LSCM and other authors using the method MIB (matched interface and boundary) are compared.

Keywords: elliptic interface problem, coefficient discontinuity, discontinuity of solution, Poisson equation, least-squares collocation method, preconditioning, parallelization using OpenMP, Krylov subspaces, multigrid complex.

Acknowledgements: The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 121030500137–5).

For citation: V. P. Shapeev, L. S. Bryndin, and V. A. Belyaev “Numerical solution of an elliptic problem with several interfaces,” *Numerical Methods and Programming*. 23 (3), 172–190 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r311.

1. Введение. Большинство явлений в природе протекают в средах, в которых одновременно существуют подобласти с непрерывными значениями физических параметров и их разрывами на границах таких подобластей, которые далее в работе мы будем называть интерфейсами (внутренние линии разрыва). По мере развития науки и техники математическое и численное моделирование добилось значительных успехов в направлении количественного описания процессов с непрерывными параметрами. Однако в настоящее время все более актуальными становятся решения задач с разрывными параметрами [1]. Такие физические задачи повлекли появление новых математических постановок. Исследования в этом направлении в частности связаны с возросшими потребностями производства и применения композиционных материалов в различных отраслях промышленности.

Данная работа посвящена численному решению краевых задач Дирихле для двумерного эллиптического уравнения, когда в области решения имеют место разрывы его коэффициентов, решения, производных и/или правой части уравнения на интерфейсах. Условия подобного рода встречаются во многих прикладных задачах, например: при моделировании теплопереноса в конструкциях из разнородных материалов [2], при моделировании многофазных потоков [3], в электростатике [4] и др.

Решение численными методами задач с такими особенностями представляет определенные трудности, для преодоления которых используются различные подходы. Например, при построении консервативной конечно-разностной схемы второго порядка в [5] использовался интегро-интерполяционный метод. В недавней работе [3] построена компактная конечно-разностная схема шестого порядка на девятиточечном шаблоне, коэффициенты которой зависят от того, сколько точек шаблона попали в подобласть с другими (находящимися по другую сторону от интерфейса) значениями параметров задачи. В [6, 7] реализован адаптивный разрывный метод Галеркина с использованием линейных, квадратичных и кубических элементов, в котором узлы на интерфейсе дублируются и в слабой постановке задачи учитывается соотношение на разрыве. Существует множество других методов, посвященных решению таких задач со вторым порядком аппроксимации: метод конечных разностей (МКР) [8, 9], метод конечных объемов [10] и др. При этом стоит отметить, что в указанных выше работах решались задачи с одним интерфейсом. Только сравнительно недавно начали появляться первые работы по решению численными методами эллиптических уравнений с несколькими интерфейсами [11, 12].

В предыдущих исследованиях [13, 14] в развиваемом здесь коллокационно-сеточном методе [15] продемонстрированы хорошие возможности решения эллиптических уравнений с одним интерфейсом консервативным и “традиционным” hp-МКНК с возможностями измельчать шаги расчетной сетки (h-подход) и/или увеличивать степень аппроксимирующих полиномов до произвольного порядка (p-подход). В [13] показано, что МКНК удается достичь более высоких точности и порядка сходимости по сравнению с МКР [8, 9]. В [14] приведены результаты сравнения решений задач Дирихле для уравнения Пуассона с сильным разрывом решения на прямо- или криволинейном интерфейсе, полученных МКНК и адаптивным разрывным методом Галеркина [6, 7]. Анализ показал, что оба метода позволяют достичь высокой точности решения и высокого порядка сходимости.

Развиваемый авторами настоящей статьи подход привлекателен прежде всего тем, что сетка сохраняет регулярную структуру, используется хорошо зарекомендовавшая себя идея, основанная на присоединении малых и/или вытянутых n-ячеек для нерегулярных областей [16], условия на разрыве учитываются в уравнениях согласования, выписанных точно на интерфейсе. Кроме того, при аппроксимации дифференциальной задачи в МКНК нет сильной зависимости от формы ячеек сетки и положения точек, в которых аппроксимируются уравнения исходной задачи. Новизна данного исследования заключается в формулировке и реализации алгоритма решения задачи, учитывающего наличие в области нескольких интерфейсов. Здесь рассматриваются пересекающиеся, имеющие прямолинейную и криволинейную форму, а также замкнутые и невыпуклые интерфейсы. Работоспособность предложенного подхода проверена на решении нескольких тестовых задач. Проведено сравнение с результатами работы [11], полученными методом МПВ.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения с коэффициентом $k(x_1, x_2) > 0$ в области Ω с внешней границей $\delta\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = f(x_1, x_2), \quad (1)$$

$$u|_{\delta\Omega} = u_b(x_1, x_2), \quad (2)$$

где $f(x_1, x_2)$ и $u_b(x_1, x_2)$ заданы, $u(x_1, x_2)$ — искомая функция.

Пусть в Ω имеются интерфейсы Γ_i , делящие Ω на несколько подобластей Ω_s , на которых коэффициент k , решение u , производная по нормали $u_n(x_1, x_2)$ и f могут терпеть разрыв с различными значениями в подобластях. Для исследования возможностей МКНК здесь для простоты ограничимся рассмотрением случаев, когда Ω — квадратная область, $i = 1, 2$, $s = \overline{1, 4}$ (примеры 1 (рис. 1 а) и 3 в разделе 4) или $s = \overline{1, 3}$ (примеры 2 и 4 в разделе 4). В дальнейшем указание значений индексов i и s опустим. Для решения задач МКНК в нерегулярных областях Ω с различными краевыми условиями возможно эффективное комбинирование изложенного здесь алгоритма и подходов, предложенных в работе [16]. Конкретные соотношения на Γ_i выписаны ниже.

3. Численный алгоритм. В работе [14] с одним интерфейсом (граница раздела) Γ область Ω покрывалась регулярной сеткой $N \times N$ с квадратными ячейками размера $2h \times 2h$. Около Γ рассматривался “одинарный” слой самостоятельных и несамостоятельных n-ячеек. Под самостоятельной ячейкой понималась такая ячейка, в которой сохранился центр (x_{1j}, x_{2j}) исходной “материнской” (квадратной) j -й ячейки, $j = 1, \dots, N^2$ (рис. 1 в [14]), от которой ее отсекала Γ . Далее указание значений индекса j также опустим

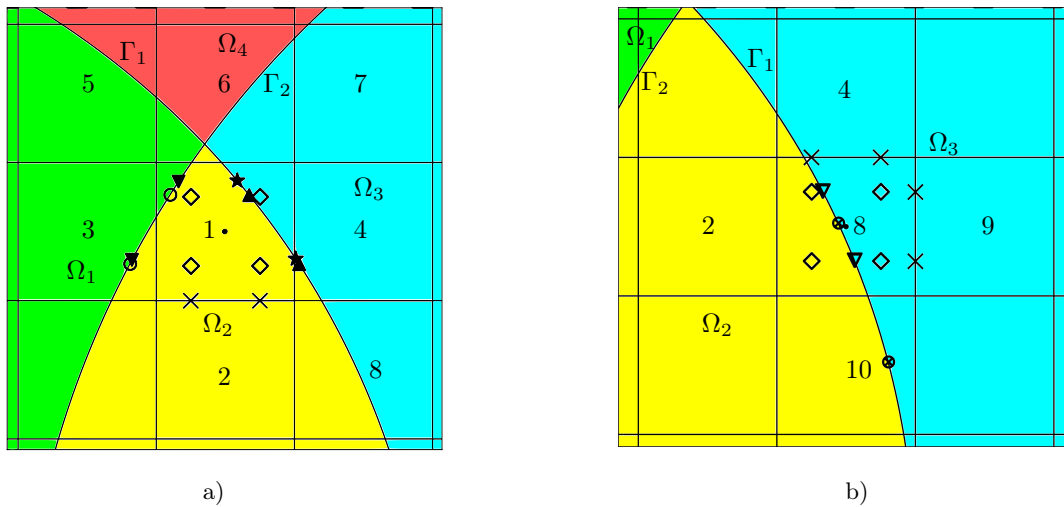


Рис. 1. Фрагменты области Ω и расстановка точек коллокации и согласования: а) в ячейке 1; б) в ячейке 4. Значок \diamond обозначает точки коллокации, \times — точки согласования на сторонах соседних ячеек, \circ — точки согласования на интерфейсах между ячейками 1 и 3, \blacktriangle — между 1 и 4, \blacktriangledown — между 1 и 5, \star — между 1 и 7, ∇ — между 8 и 2, \otimes — между 8 и 10

Fig. 1. Domain fragments Ω and arrangement of collocation and matching points: a) in the cell 1; b) in the cell 4. The \diamond icon denotes collocation points, \times — matching condition on the sides of neighboring cells, \circ — matching points on interfaces between cell 1 and 3, \blacktriangle — between 1 and 4, \blacktriangledown — between 1 and 5, \star — between 1 and 7, ∇ — between 8 and 2, \otimes — between 8 and 10

за исключением случая записи вида погрешностей в разделе 4. Было предложено несамостоятельную n -ячейку присоединять к соседним самостоятельным ячейкам внутри той подобласти, в которой они находятся. Чтобы уменьшить вклад в погрешность решения из-за “соседства” самостоятельных с малыми и вытянутыми несамостоятельными ячейками, было предложено численное решение строить только в самостоятельных ячейках. А для вычисления решения в любой точке несамостоятельных ячеек продолжать решение в них из соседней самостоятельной ячейки, центр которой по сравнению с центрами других ячеек находится ближе к рассматриваемой точке.

Здесь аналогично [14] приближенное решение задачи (1), (2) в каждой j -й ячейке ищется в виде линейной комбинации базисных мономов линейного пространства полиномов степени K

$$v_{hj}(y_1, y_2) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^{K-i_1} c_{i_1 i_2, j} y_1^{i_1} y_2^{i_2}, \quad (3)$$

где $y_1 = \frac{(x_1 - x_{1j})}{h}$, $y_2 = \frac{(x_2 - x_{2j})}{h}$ — переменные локальной системы координат в ячейке, $v_{hj}(y_1, y_2) = u_{hj}(x_1(y_1), x_2(y_2))$.

В [14] для определения неизвестных коэффициентов $c_{i_1 i_2, j}$ в каждой самостоятельной ячейке выписывалась переопределенная локальная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из уравнений коллокации $p_c \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_2^2} \right) = p_c f$, где p_c — весовой множитель, условий согласования и приближенных краевых условий (в случае граничной ячейки). Первые из них получаются из требования того, чтобы уравнение (1) было аппроксимировано в точках коллокации искомым решением (3). Условия согласования фрагментов глобального кусочно-полиномиального решения — соотношения, которые обеспечивают известные свойства приближенного решения и не противоречат постановке задачи: непрерывность, гладкость решения внутри подобластей в выбранных точках на общих сторонах соседних ячеек, выполнение условий сопряжения решения на интерфейсе. Наконец, приближенные краевые условия аппроксимируют в выбранных на $\delta\Omega$ точках краевые условия задачи (2). В [14] в каждой самостоятельной ячейке выписывалось K^2 уравнений коллокации и $4K$ условий согласования в совокупности с краевыми условиями, если ячейка примыкала к $\delta\Omega$. Кроме того, при записи уравнений коллокации и условий согласования в самостоятельных n -ячейках использовались их законтурные части, отсеченные

линиями разрыва от их материнских (квадратных) ячеек. В [14] применением дифференциального hp-МКНК решена задача Дирихле для уравнения Пуассона с сильным разрывом решения на интерфейсе Γ . Уравнения коллокации, условия согласования и краевые условия выписывались в узловых точках ячеек.

Отметим, что в работе [13] для исходной краевой задачи для эллиптического уравнения с разрывным коэффициентом $k(x_1, x_2)$ записывалась обобщенная постановка задачи с интегральным законом сохранения. В частности, в реализованном там консервативном hp-МКНК использовались интегральные уравнения коллокации, а для записи условий согласования требовалась непрерывность функции v_{hj} и потока

$$F = - \int_{T_1}^{T_2} k(x_1, x_2) \frac{\partial v_{hj}(x_1(t), x_2(t))}{\partial n} \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t)} |dt|$$

через произвольную дугу γ (часть прямолинейной стороны ячейки либо часть Γ), заданную параметрически $x_1(t), x_2(t), t \in [T_1, T_2]$, с внешней единичной нормалью n к ней. В [13] было установлено, что в самостоятельных граничных n -ячейках для записи краевых условий не следует использовать точки в законтурных частях их материнских ячеек, поскольку вследствие этого понижается порядок сходимости предложенного hp-МКНК. Исходя из этого наблюдения, в [13] уменьшалось количество точек записи краевых условий, что также использовалось в настоящей работе.

В данной работе для решения задачи с двумя внутренними интерфейсами мы воспользуемся опытом, изложенным в [13, 14], и рассмотрим модифицированный алгоритм построения приближенного решения.

3.1. Уравнения коллокации. Выписывались в K^2 равномерно распределенных точках коллокации в каждой самостоятельной ячейке и имели следующий вид:

$$p_c k \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_2^2} \right) = p_c f.$$

В рассмотренных нами примерах коэффициент k являлся константой в каждой из Ω_i . При этом значение k для всех уравнений коллокации в конкретной ячейке бралось равным его значению в центре рассматриваемой ячейки. Отметим, что в [14] не рассматривались примеры с разрывным коэффициентом.

3.2. Условия согласования. В случае разрыва коэффициента $k(x_1, x_2)$ и производной по нормали к интерфейсу $u_n(x_1, x_2)$ условие согласования в МКНК, например, для ячейки из Ω_1 , которая является соседней с ячейкой из Ω_2 , имеет вид

$$p_{m_0} v_{hj} + p_{m_1} k_1 \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = p_{m_0} \hat{v}_h + p_{m_1} k_2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j}, \tag{4}$$

где v_{hj} и \hat{v}_h — пределы значений приближенного решения задачи при стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки соответственно, n_j — внешняя нормаль к границе j -й ячейки, p_{m_0} и p_{m_1} — весовые множители. Естественно, в случае согласования решения в разных ячейках из одной подобласти Ω_i условия согласования (4) записывались с одинаковым k по аналогии с [14]. Здесь во всех случаях выписывались K условий согласования на общей стороне или на общей части интерфейса между соседними ячейками.

Если две соседние ячейки разделены сразу двумя криволинейными интерфейсами Γ_1 и Γ_2 и не имеют общей части границы (рис. 1 а, ячейки 1 и 6), то для построения приближенного решения предложено выписывать K условий согласования между исходной ячейкой и соседними ячейками с учетом их дополнения малыми/вытянутыми несамостоятельными n -ячейками. Точки согласования располагались на общей части интерфейса, заключенной в “большом” квадрате минимального размера, включающем эти ячейки, и находящейся по ту же сторону от другого интерфейса, что и центры согласуемых ячеек (рис. 1 а, ячейки 1 и 5, ячейки 1 и 7). Таким образом, возможна ситуация, когда одна ячейка согласуется сразу с пятью (рис. 1, ячейки 1, 3–7). В качестве примера на рис. 1 а изображено расположение точек записи уравнений приближенной задачи для ячейки 1, а на рис. 1 б — расположение точек коллокации и согласования в ячейке, которая имеет четырех соседей, причем с двумя из них согласование проводится через интерфейс (ячейка 8 согласуется с ячейками 2, 4, 9 и 10).

Замечание. В случае, когда две соседние ячейки отделены друг от друга сразу двумя интерфейсами и не имеют общей части границы, также возможен вариант метода, когда между ними выписывается меньше условий согласования. Например, ячейка 1 на рис. 1 а согласуется только с ячейками 2, 3 и 4, тем самым уменьшается количество уравнений в переопределенной СЛАУ. Авторами в частных случаях



проверено, что при таком подходе получаются результаты, близкие к результатам изложенного выше алгоритма. Однако для “надежности” с точки зрения согласования решения этот вариант не использовался, и результаты расчетов приведены по предложенному выше алгоритму.

Части интерфейсов, на которых выписываются условия согласования, могут иметь достаточно большую длину по сравнению со стороной ячейки (превышать более чем в два раза). В случае решения задачи, когда интерфейс является невыпуклым (рис. 6), это приводит к ухудшению сходимости итерационного процесса: ухудшается обусловленность локальных СЛАУ в таких ячейках, увеличивается количество итераций, увеличивается погрешность приближенного решения, при увеличении K и уменьшении шагов сетки может наблюдаться расходимость. Предложено в таких случаях для поиска общего “уменьшенного” куска интерфейса, на котором будут расставляться точки согласования, использовать область, образованную объединением соседних ячеек и ограниченную отрезками, проходящими через центры этих ячеек.

3.3. Краевые условия. Выписывались в K равномерно распределенных точках записи краевых условий [14] (за исключением тех точек в самостоятельных граничных n -ячейках, которые оказались в законтурных частях их материнских ячеек [13]) в каждой граничной ячейке и имели вид

$$p_b v_{hj} = p_b u_b, \tag{5}$$

где p_b — весовой множитель.

В данной работе в численных экспериментах (раздел 4, пример 1) было установлено, что уменьшение количества точек записи краевых условий (2) приводит к заметному возрастанию погрешности приближенного решения. В МКНК за счет его гибкости есть две эффективные дополнительные реализованные возможности улучшения сходимости в этом случае: увеличение значения p_b в (5) и увеличение количества точек записи краевых условий в граничных n -ячейках на части $\delta\Omega$ без учета их законтурных частей.

Глобальная СЛАУ, полученная объединением локальных СЛАУ из каждой ячейки, здесь решалась с помощью метода итераций по подобластям [14]. Одна глобальная итерация заключается в последовательном решении локальных переопределенных СЛАУ во всех ячейках с помощью ортогонального метода (в данном случае — метода отражений Хаусхолдера). При этом в правой части условий согласования (4) в качестве \hat{v}_h берутся либо значения решения на текущей итерации, если они уже найдены, либо их значения на предыдущей итерации. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{i_1 i_2, j} |c_{i_1 i_2, j}^{n+1} - c_{i_1 i_2, j}^n| < \varepsilon, \quad i_1 = 0, \dots, K, \quad i_2 = 0, \dots, K - i_1, \tag{6}$$

где $c_{i_1 i_2, j}^n$ — коэффициент полинома в j -й ячейке на n -й итерации, ε — наперед заданная малая константа, называемая псевдопогрешностью решения.

Для уменьшения времени расчетов и количества итераций здесь использовалось комбинированное применение МКНК с современными алгоритмами ускорения итерационного процесса [14, 17]:

- Предобуславливание — диагональный предобуславливатель [18] и выбор значений весовых множителей в МКНК. В первом случае в локальной переопределенной СЛАУ $Ax = b$, где прямоугольная матрица A имеет размер $d \times l$, а вектор правой части b — размер d , l -вектор x заменяется на Cy , $C = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{ll}}} \right)$ — диагональная матрица. После чего сначала решается СЛАУ $ACy = b$ относительно y , а затем находится искомым вектор x .
- Распараллеливание вычислительных программ с помощью OpenMP со способом обхода подобластей, основанным на красно-черном упорядочивании [14, 19]. Фрагмент кода программы, написанной на языке C++, реализующий данный алгоритм, приведен в [14].
- Алгоритм ускорения итераций, основанный на подпространствах Крылова [17, 20], который заключается в уточнении приближенного решения после каждых N_r итераций. В нем к найденному текущему приближенному решению $x^n = (c_{00,1}^n, \dots, c_{K0,1}^n, c_{00,2}^n, \dots, c_{K0,2}^n, \dots, c_{00,N^2}^n, \dots, c_{K0,N^2}^n)^T$ добавляется поправка из подпространства Крылова, натянутого на вектора невязок, составленных из разниц найденных приближений на последних N_r итерациях. Для этого дополнительно решается переопределенная СЛАУ, из которой находится эта поправка [17].
- Операция продолжения вдоль восходящей ветви V-цикла на многосеточном комплексе в методе Федоренко [16, 21, 22]. Необходимые формулы задания начального приближения в расчетах при переходе с грубой сетки на более мелкую для представления решения в виде (3) приведены в [16]. Отметим, что при осуществлении операции продолжения после измельчения шагов сетки вдвое в

полученной ячейке, центр которой оказался в другой подобласти Ω , нежели центр включающей ее материнской ячейки на предыдущей грубой сетке, в качестве начального приближения бралось решение из соседней с ней ячейки, центр которой находится в этой же подобласти.

На рис. 2 изображена схема компьютерной программы, написанной на языке C++. Она включает в себя ряд глобальных переменных, определенных в начале кода, например, размер сетки и степень аппроксимирующего полинома, а также несколько десятков различных функций. Для проведения расче-

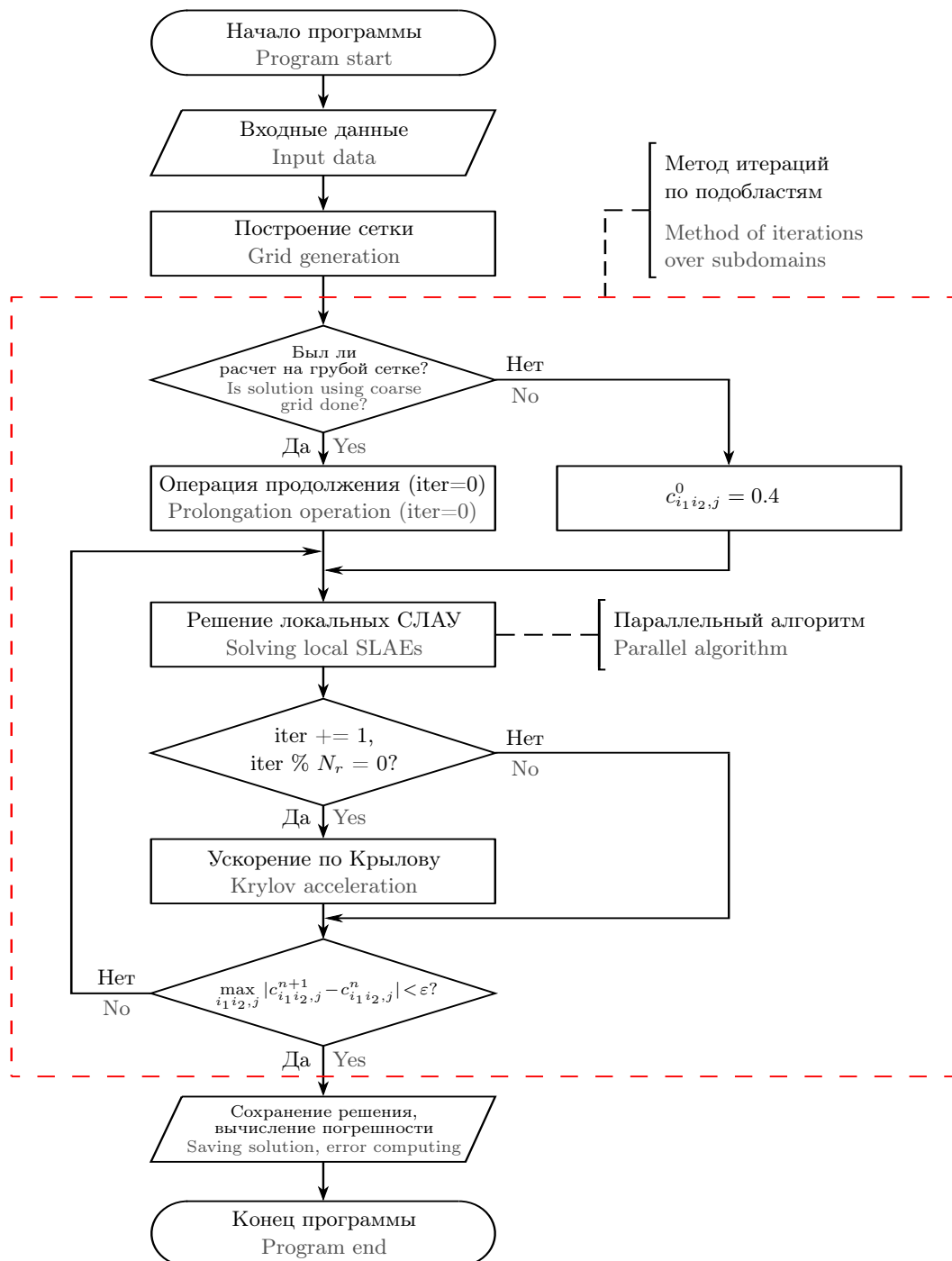


Рис. 2. Схема программы для высокоточного численного решения эллиптического уравнения второго порядка при наличии в области нескольких интерфейсов
 Fig. 2. Scheme of the program for a high-precision numerical solution of a second-order elliptic equation in the presence of several interfaces in the domain



тов в программе основная функция main вызывает ряд функций, которые также в свою очередь могут вызывать другие вспомогательные функции, и т.д.

Во входных данных задаются:

- размер сетки $N \times N$,
- степень аппроксимирующего полинома K ,
- значение псевдопогрешности ε ,
- значения весовых множителей $p_c, p_{m_0}, p_{m_1}, p_{b_0}$,
- количество невязок N_r в методе подпространств Крылова,
- геометрия области Ω и интерфейсов Γ_i ,
- правые части уравнений коллокации f и краевых условий u_b ,
- условия сопряжения на Γ_i .

На самой грубой сетке в качестве начального приближения в итерационном процессе [14] взяты $c_{i_1 i_2, j} = 0.4$. В ускорении по Крылову [17] было взято от 10 до 40 невязок.

4. Результаты численных экспериментов. В примерах 1, 2 и 4 правая часть f и краевые условия u_b вычислялись при подстановке точного решения в (1) и (2) соответственно. Все расчеты проведены на компьютере Intel Core i5-8265U CPU 1.6 GHz, 4 Cores, DIMM DDR4-2400 1200 MHz 8 Gb. Были взяты следующие весовые множители: $p_c = h^2$, $p_{m_0} = 1$, $p_{m_1} = \frac{2h}{(k_a + k_b)}$, здесь k_a и k_b — коэффициенты в соседних согласуемых ячейках, $p_b = 10$ в краевых условиях для примеров 1–3, а для примера 4 значение $p_b = 1$.

В представленных ниже таблицах приведены значения: относительной и абсолютной погрешностей приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E_r\|_\infty = \frac{\max_{j=1, \dots, N^2} (\max_{m=1, \dots, Q_j} |u(x_{1m}, x_{2m}) - u_{hj}(x_{1m}, x_{2m})|)}{\max_{j=1, \dots, N^2} (\max_{m=1, \dots, Q_j} |u(x_{1m}, x_{2m})|)},$$

$$\|E_a\|_\infty = \max_{j=1, \dots, N^2} (\max_{m=1, \dots, Q_j} |u(x_{1m}, x_{2m}) - u_{hj}(x_{1m}, x_{2m})|),$$

где $Q_j = 100$ — количество равномерно распределенных контрольных точек (x_{1m}, x_{2m}) , взятых в j -й ячейке для подсчета в них погрешности; значение величин в бесконечной и L_2 нормах соответственно

$$\frac{\|u_N^h - u_{N/2}^h\|_\infty^\Omega}{\|u_N^h\|_\infty^\Omega} = \frac{\max_{m=1, \dots, Q} |u_N^h(x_{1m}, x_{2m}) - u_{N/2}^h(x_{1m}, x_{2m})|}{\max_{m=1, \dots, Q} |u_N^h(x_{1m}, x_{2m})|},$$

$$\frac{\|u_N^h - u_{N/2}^h\|_2^\Omega}{\|u_N^h\|_2^\Omega} = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^Q (u_N^h(x_{1m}, x_{2m}) - u_{N/2}^h(x_{1m}, x_{2m}))^2}{\sum_{m=1}^Q (u_N^h(x_{1m}, x_{2m}))^2}},$$

где $u_{N/2}^h$ — приближенное решение на грубой сетке из $N/2 \times N/2$ ячеек, u_N^h — на более подробной сетке из $N \times N$ ячеек, $Q = 101^2$ — количество равномерно распределенных контрольных точек (x_{1m}, x_{2m}) во всей Ω .

Аналогично определяются значения $\frac{\|u_N^h - u_{N/2}^h\|_\infty^\Omega}{\|u_N^h\|_\infty^{\hat{\Omega}}}$ и $\frac{\|u_N^h - u_{N/2}^h\|_2^\Omega}{\|u_N^h\|_2^{\hat{\Omega}}}$ в точках (x_{1m}, x_{2m}) , принадлежащих только выбранной подобласти $\hat{\Omega} \subset \Omega$ (в Ω тоже распределялось 101^2 точек).

Порядок сходимости погрешности приближенного решения на последовательности сеток при измельчении их шагов вдвое и фиксированной степени полиномов K определяется как

$$R = \log_2 \frac{E_p}{E_c},$$

где E_p — значение погрешности $\|E_r\|_\infty$ на сетке из $N_1/2 \times N_2/2$ ячеек и E_c — значение $\|E_r\|_\infty$ на сетке из $N_1 \times N_2$ ячеек, либо $E_p = \frac{\|u_{N/2}^h - u_{N/4}^h\|_\infty^\Omega}{\|u_{N/2}^h\|_\infty^\Omega}$ и $E_c = \frac{\|u_N^h - u_{N/2}^h\|_\infty^\Omega}{\|u_N^h\|_\infty^\Omega}$. Аналогично определяется порядок сходимости в L_2 норме и порядок сходимости в подобласти $\hat{\Omega}$.

В приведенных ниже таблицах указано количество итераций N_{iter} , время выполнения итерационного процесса в секундах t_{sol} и значение псевдопогрешности ε для остановки итерационного процесса (6).

Пример 1. Рассмотрим (1), (2) в $\Omega = [0.1, 0.9] \times [0, 0.8]$ (рис. 3 а) с тестовым непрерывным решением

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.5D & \text{в } \Omega_1 = \{x_1 \geq 0.1, x_2 \geq 0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 0.6, \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} \geq 0.7\}, \\ 10D & \text{в } \Omega_2 = \{x_2 \geq 0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 0.6, \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} \leq 0.7\}, \\ D & \text{в } \Omega_3 = \{x_1 \leq 0.9, x_2 \geq 0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0.6, \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} \leq 0.7\}, \\ 6D & \text{в } \Omega_4 = \{0.1 \leq x_1 \leq 0.9, x_2 \leq 0.8, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0.6, \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} \geq 0.7\}, \end{cases}$$

$D = (e^{r_1} - e^{0.6})(e^{r_2} - e^{0.7})$, $r_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$. Здесь криволинейные интерфейсы являются частями окружностей и имеют вид: $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0.6 \text{ при } x_1 \geq 0.1 \text{ и } x_2 \geq 0\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} = 0.7 \text{ при } x_1 \leq 0.9 \text{ и } x_2 \geq 0\}$. В этом случае u_n и коэффициент k терпят разрыв, при этом k имеет значения

$$k(x_1, x_2) = \begin{cases} 20 & \text{в } \Omega_1, \\ 1 & \text{в } \Omega_2, \\ 10 & \text{в } \Omega_3, \\ \frac{5}{3} & \text{в } \Omega_4. \end{cases}$$

В табл. 1 приведены результаты высокоточного численного решения этого примера. Видно, что с увеличением старшей степени аппроксимирующих полиномов K возрастают точность численного решения, порядок сходимости и время решения задачи ввиду роста числа арифметических действий. Однако время расчетов t_{sol} на персональном компьютере осталось небольшим за счет эффективного сочетания hp-МКНК с различными способами ускорения итерационного процесса. Отметим также, что порядок сходимости не хуже K -го для полиномов степеней K и $K + 1$, как и во многих случаях применения МКНК для решения краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с гладкими решениями [14, 21, 23]. При этом величина ε бралась такой, чтобы она отличалась от погрешности не менее чем на два десятичных порядка. На рис. 3 б приведен график величины $|u - u_h|$, из которого видно, что наибольшие ее значения, как и ожидалось ввиду особенности задачи, достигаются в окрестностях интерфейсов Γ_i .

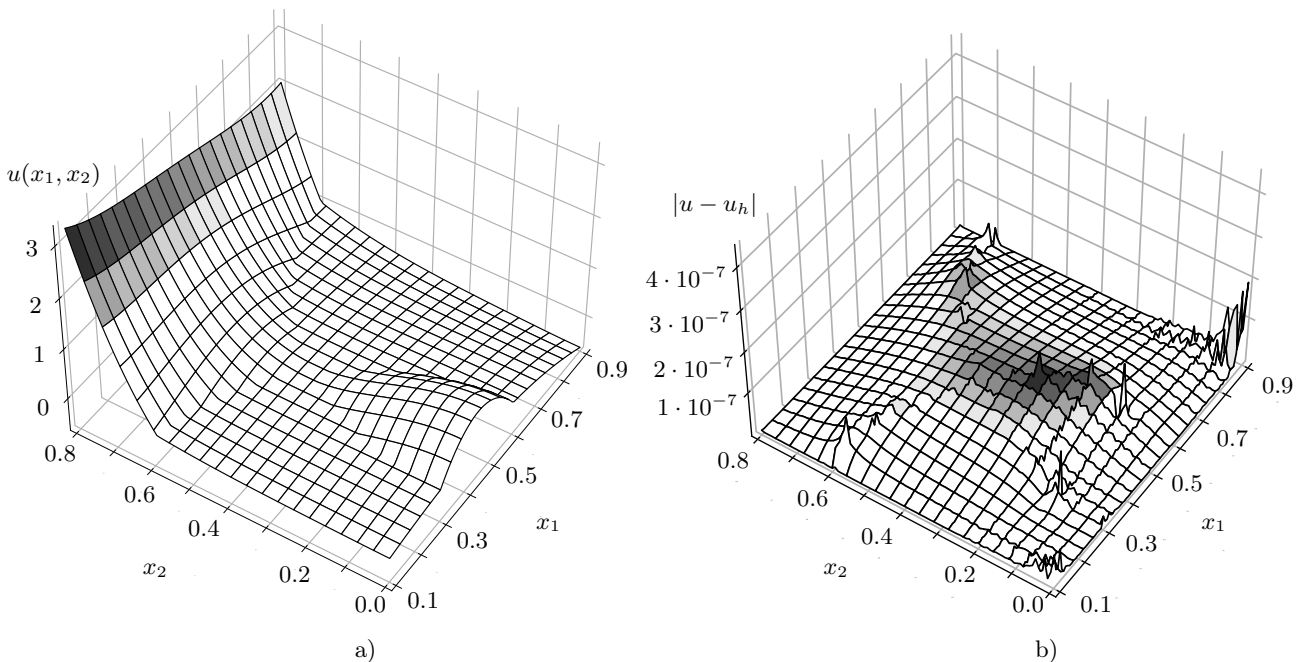


Рис. 3. В примере 1 при $K = 4$: а) точное решение $u(x_1, x_2)$; б) значения $|u - u_h|$ на сетке 32×32
 Fig. 3. In example 1 with $K = 4$: а) exact solution $u(x_1, x_2)$; б) values of $|u - u_h|$ on the grid 32×32



Таблица 1. Результаты численных экспериментов в примере 1

Table 1. Results of numerical experiments in example 1

$N \times N$	$K = 2 (\varepsilon = 10^{-10})$				$K = 3 (\varepsilon = 10^{-10})$			
	$\ E_r\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}	$\ E_r\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}
8×8	$6.62 \cdot 10^{-3}$	—	41	0.015	$4.75 \cdot 10^{-4}$	—	41	0.047
16×16	$7.43 \cdot 10^{-4}$	3.15	53	0.047	$5.82 \cdot 10^{-5}$	3.02	42	0.14
32×32	$1.59 \cdot 10^{-4}$	2.22	121	0.468	$9.39 \cdot 10^{-6}$	2.63	121	1.297
64×64	$2.76 \cdot 10^{-5}$	2.52	241	2.859	$2.10 \cdot 10^{-6}$	2.16	196	6.391
$N \times N$	$K = 4 (\varepsilon = 10^{-12})$				$K = 5 (\varepsilon = 10^{-12})$			
	$\ E_r\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}	$\ E_r\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}
8×8	$5.38 \cdot 10^{-5}$	—	41	0.063	$9.30 \cdot 10^{-6}$	—	61	0.171
16×16	$3.09 \cdot 10^{-6}$	4.12	81	0.375	$4.38 \cdot 10^{-7}$	4.40	121	1.406
32×32	$2.07 \cdot 10^{-7}$	3.89	161	3.047	$1.25 \cdot 10^{-8}$	5.13	201	8.75
64×64	$9.12 \cdot 10^{-9}$	4.52	241	18.75	$3.19 \cdot 10^{-10}$	5.59	2241	371.797

В табл. 2 приведены минимальные ν_{\min} и максимальные ν_{\max} значения чисел обусловленности матриц локальных СЛАУ в спектральной норме (после применения диагонального предобуславливателя) и типы ячеек, для которых были выписаны эти СЛАУ. Видно, что практически всегда ν_{\max} возникают в n -ячейках в окрестности криволинейных интерфейсов Γ_i . Это указывает на то, что необходимо тщательно рассматривать свойства численного алгоритма при его построении с целью достичь его применением высокой точности решения задачи. При этом по возможности использовать средства, влияющие на его точность. В данном случае прежде всего необходимо наблюдать ключевое свойство СЛАУ приближенной задачи – ее обусловленность, от которой в значительной мере зависит возможность применения тех или иных методов ее решения и точность численного решения. Ранее было показано [24], что в МКНК на обусловленность СЛАУ приближенной задачи в некоторых пределах эффективно можно воздействовать выбором весовых параметров при применении в нем взвешенного метода наименьших квадратов. В данной работе это также использовалось помимо применения диагонального предобуславливателя. Из приведенных результатов численных экспериментов здесь, как и в других исследованиях, видно, что повышение степени полиномов в базисе используемых полиномиальных пространств приводит к увеличению числа обусловленности СЛАУ [16]. Но выбор весовых параметров позволяет до некоторых пределов сдерживать увеличение ее обусловленности и повысить точность решения задачи. Увеличение значения весового множителя с $p_b = 1$ до $p_b = 10$ позволило уменьшить число обусловленности ν в граничной n -ячейке, отсеченной Γ_2 от квадратной материнской ячейки, например на сетке 32×32 с $\nu = 340.049$ до $\nu = 256.4$, тем самым увеличить точность приближенного решения с $\|E_r\|_\infty = 5.98 \cdot 10^{-6}$ до $\|E_r\|_\infty = 2.07 \cdot 10^{-7}$, т.е. более чем на порядок.

Таблица 2. Числа обусловленности матриц СЛАУ в примере 1

Table 2. Condition numbers of matrices of SLAEs in example 1

$N \times N$	$K = 2$			
	ν_{\min}	тип ячейки	ν_{\max}	тип ячейки
8×8	2.37	внутренняя в Ω_4	22.59	граничная в Ω_1
16×16	2.30	внутренняя в Ω_4	25.88	внутренняя в Ω_1 , пересеченная Γ_1
32×32	2.20	внутренняя в Ω_4	47.09	граничная в Ω_1 , пересеченная Γ_1
64×64	2.10	внутренняя в Ω_4	35.99	внутренняя в Ω_1 , пересеченная Γ_1
$N \times N$	$K = 5$			
	ν_{\min}	тип ячейки	ν_{\max}	тип ячейки
8×8	10.79	внутренняя в Ω_2	705.47	внутренняя в Ω_3 , пересеченная Γ_2
16×16	10.79	внутренняя в Ω_2	2187.75	внутренняя в Ω_1 , пересеченная Γ_1
32×32	10.79	внутренняя в Ω_2	2788.97	внутренняя в Ω_1 , пересеченная Γ_1
64×64	10.79	внутренняя в Ω_2	3307.95	внутренняя в Ω_1 , пересеченная Γ_1

Пример 2. Рассмотрим (1), (2) в $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ с условиями разрывов на линиях Γ_i

$$[u] = g_i(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_i,$$

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial n} \right] = h_i(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_i,$$

где $[u]$ и $\left[k \frac{\partial u}{\partial n} \right]$ — скачки решения и производной по нормали, домноженной на разрывный коэффициент, на соответствующих интерфейсах Γ_i , равные функциям g_i и h_i , которые вычислялись из точного решения. Здесь прямолинейные интерфейсы имеют вид: $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{18} \text{ при } -1 \leq x_2 \leq 1\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{18} \text{ при } -1 \leq x_2 \leq 1\}$ (рис. 4 а). Рассмотрим эту задачу с тестовым разрывным решением [11] (рис. 4 б)

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) & \text{в } \Omega_1 = \{x_1 \geq -1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_2 \geq \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{18}, x_2 \leq -\frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{18}\}, \\ 8 + \sin(x_1 + x_2) & \text{в } \Omega_2 = \{x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_2 \leq \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{18}, x_2 \geq -\frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{18}\}, \\ x_1^2 + x_2^2 & \text{в } \Omega_3 = \{\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\}. \end{cases}$$

Здесь разрывный коэффициент k имеет значения

$$k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega_1, \\ 2 & \text{в } \Omega_2, \\ 3 & \text{в } \Omega_3. \end{cases}$$

В этом примере также разрывна и правая часть f уравнения (1). В отличие от (4) здесь в приближенном решении в соседних ячейках согласовывались значения функции и производной по нормали, домноженной на разрывный коэффициент, с учетом их скачков на Γ_1 и Γ_2 . Например, условие согласования на Γ_1 между решениями в ячейках, расположенных в Ω_1 , и решениями в ячейках в Ω_3 имеет вид

$$p_{m_0} v_{hj} + p_{m_1} \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = p_{m_0} \hat{v}_h + 3p_{m_1} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j} + p_{m_0} g_1 + p_{m_1} h_1.$$

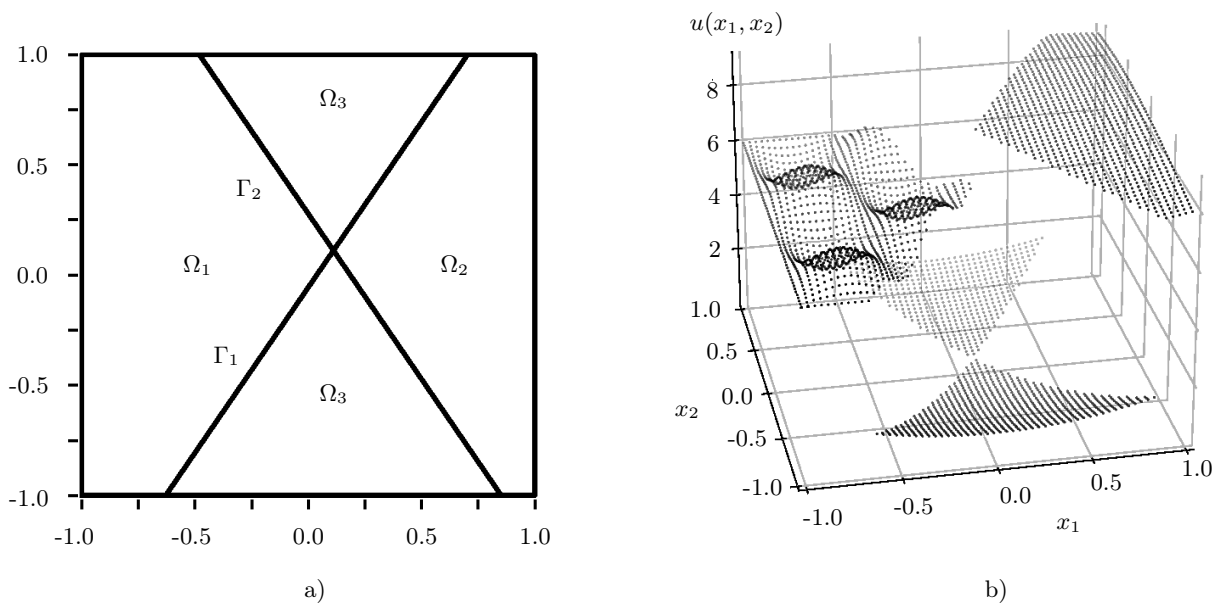


Рис. 4. В примере 2: а) область решения Ω ; б) точное решение $u(x_1, x_2)$

Fig. 4. In example 2: а) solution domain Ω ; б) exact solution $u(x_1, x_2)$



Таблица 3. Результаты численных экспериментов в примере 2

Table 3. Results of numerical experiments in example 2

$N \times N$	метод МІВ [11] MIB method [11]		hp-МКНК, $K = 2$ ($\varepsilon = 10^{-10}$) hp-LSCM, $K = 2$ ($\varepsilon = 10^{-10}$)				hp-МКНК, $K = 4$ ($\varepsilon = 10^{-12}$) hp-LSCM, $K = 4$ ($\varepsilon = 10^{-12}$)			
	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}	$\ E_a\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}
10×10	—	—	$1.95 \cdot 10^{-1}$	—	41	0.015	$1.92 \cdot 10^{-2}$	—	42	0.125
20×20	$2.00 \cdot 10^{-1}$	—	$4.00 \cdot 10^{-2}$	2.28	81	0.156	$7.19 \cdot 10^{-4}$	4.75	121	1.297
40×40	$5.01 \cdot 10^{-2}$	2.00	$8.54 \cdot 10^{-3}$	2.22	192	1.532	$2.88 \cdot 10^{-5}$	4.64	241	7.469
80×80	$6.16 \cdot 10^{-3}$	3.02	$2.54 \cdot 10^{-3}$	1.74	362	9.969	$2.18 \cdot 10^{-6}$	3.72	562	81.828
160×160	$6.44 \cdot 10^{-4}$	3.26	$6.28 \cdot 10^{-4}$	2.01	921	137.641	$1.53 \cdot 10^{-7}$	3.83	886	493.594

В табл. 3 приведены результаты численного решения задачи, полученные методом МІВ в работе [11] и hp-МКНК. Из табл. 3 видно, что методом МІВ и МКНК при $K = 2$ удается построить приближенное решение, сходящееся с порядком сходимости не хуже второго. При этом отметим, что на одинакового размера сетках $N \times N$ количество степеней свободы приближенного решения (англ. DoFs — degrees of freedom) в методе МІВ (значений решений в узлах) равно N^2 , а в МКНК значение DoFs (суммарное количество неизвестных коэффициентов) равно $N^2 \frac{(K+1)(K+2)}{2}$. Также, как и в предыдущем примере 1, увеличение K в hp-МКНК приводит к существенному увеличению точности решения и уменьшению DoFs, необходимых для достижения заданной точности. Например, для того чтобы достичь точность порядка 10^{-4} , в МКНК при $K = 2$ требуется DoFs = 153600, в методе МІВ [11] DoFs = 25600, а в МКНК при $K = 4$ требуется уже только DoFs = 6000. При этом в hp-МКНК увеличение точности решения достигается относительно просто с помощью увеличения степеней полиномов в базисе используемого пространства за счет универсальности и простоты алгоритма построения приближенного решения. Однако в некоторых других методах достижение такой цели может вызывать существенные трудности [25]. Кроме того, в МКНК удобно определять значения решения и его производных в любых точках расчетной области без потери точности, так как решение является аналитическим. Тем самым МКНК является достаточно привлекательным и удобным высокоточным численным методом для решения различных задач.

В МКНК в этом примере числа обусловленности локальных матриц были порядка $C_1 \cdot 10^0$ и $C_2 \cdot 10$, где C_1, C_2 — константы, меньшие десяти.

Пример 3. Рассмотрим в $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ задачу (1), (2) с однородным уравнением и неизвестным точным решением $u(x_1, x_2)$. Пусть здесь интерфейсы прямолинейны и имеют вид: $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_1 = 0.5 \text{ при } 0 \leq x_2 \leq 1\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_2 = 0.5 \text{ при } 0 \leq x_1 \leq 1\}$. Пусть

$$k(x_1, x_2) = \begin{cases} 8, & (x_1, x_2) \in \Omega_1 = [0, 0.5] \times [0, 0.5], \\ 2, & (x_1, x_2) \in \Omega_2 = [0.5, 1] \times [0, 0.5], \\ 2, & (x_1, x_2) \in \Omega_3 = [0, 0.5] \times [0.5, 1], \\ 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_4 = [0.5, 1] \times [0.5, 1], \end{cases}$$

а краевые условия имеют вид

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} c_1(4x_1 + x_2)(x_1 + x_2) + c_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_1 \cap \delta\Omega \\ c_2x_1 + c_3x_2^3, & (x_1, x_2) \in \Omega_2 \cap \delta\Omega, \\ c_3x_1^3 + c_2x_2, & (x_1, x_2) \in \Omega_3 \cap \delta\Omega, \\ c_4e^{x_1+x_2} + (0.25 - x_1 + x_1^2)(-0.5c_4e^2 + 2c_4e^2x_2 - 2c_4e^2x_2^2), & (x_1, x_2) \in \Omega_4 \cap \delta\Omega, \end{cases}$$

$c_0 = 7, c_1 = 4, c_2 = 16, c_3 = 11.636363636363637, c_4 = 3.8946355225907756$. Они здесь подобраны так, чтобы решение u и ku_n были непрерывными на границе $\delta\Omega$ (при этом u_n разрывно) и не было разрывов вторых производных в угловых точках Ω . В численных расчетах на Γ_i выписывались условия согласования (4), как и в примере 1.

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 4, где $\hat{\Omega} = \Omega \setminus \{(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \leq 0.2^2\}$. Величина погрешности в бесконечной норме в процессе четырехкратного и трехкратного мельчения ячеек сетки в подобласти $\hat{\Omega}$ уменьшается значительно быстрее, чем в Ω , и становится на десятичный порядок

Таблица 4. Результаты численных экспериментов в примере 3
 Table 4. Results of numerical experiments in example 3

$N \times N$	$K = 2$							
	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _\infty^\Omega}{\ u_N^h\ _\infty^\Omega}$	R	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _2^\Omega}{\ u_N^h\ _2^\Omega}$	R	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _\infty^{\hat{\Omega}}}{\ u_N^h\ _\infty^{\hat{\Omega}}}$	R	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _2^{\hat{\Omega}}}{\ u_N^h\ _2^{\hat{\Omega}}}$	R
8×8	$6.61 \cdot 10^{-3}$	—	$1.44 \cdot 10^{-3}$	—	$2.75 \cdot 10^{-3}$	—	$1.03 \cdot 10^{-3}$	—
16×16	$2.63 \cdot 10^{-3}$	1.32	$4.21 \cdot 10^{-4}$	1.77	$5.49 \cdot 10^{-4}$	2.32	$2.57 \cdot 10^{-4}$	2.00
32×32	$1.03 \cdot 10^{-3}$	1.35	$1.25 \cdot 10^{-4}$	1.75	$1.40 \cdot 10^{-4}$	1.97	$7.51 \cdot 10^{-5}$	1.77
64×64	$3.07 \cdot 10^{-4}$	1.74	$3.74 \cdot 10^{-5}$	1.74	$4.02 \cdot 10^{-5}$	1.80	$2.17 \cdot 10^{-5}$	1.79
128×128	$1.35 \cdot 10^{-4}$	1.18	$1.13 \cdot 10^{-5}$	1.72	$1.17 \cdot 10^{-5}$	1.78	$6.30 \cdot 10^{-6}$	1.78
сред. арифм. average	—	1.39	—	1.74	—	1.96	—	1.83
$N \times N$	$K = 4$							
	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _\infty^\Omega}{\ u_N^h\ _\infty^\Omega}$	R	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _2^\Omega}{\ u_N^h\ _2^\Omega}$	R	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _\infty^{\hat{\Omega}}}{\ u_N^h\ _\infty^{\hat{\Omega}}}$	R	$\frac{\ u_N^h - u_{N/2}^h\ _2^{\hat{\Omega}}}{\ u_N^h\ _2^{\hat{\Omega}}}$	R
8×8	$2.12 \cdot 10^{-3}$	—	$2.62 \cdot 10^{-4}$	—	$8.28 \cdot 10^{-4}$	—	$1.31 \cdot 10^{-4}$	—
16×16	$8.40 \cdot 10^{-4}$	1.33	$7.55 \cdot 10^{-5}$	1.80	$6.58 \cdot 10^{-5}$	3.65	$3.15 \cdot 10^{-5}$	2.05
32×32	$2.64 \cdot 10^{-4}$	1.66	$2.71 \cdot 10^{-5}$	1.47	$2.44 \cdot 10^{-5}$	1.43	$1.29 \cdot 10^{-5}$	1.28
64×64	$1.16 \cdot 10^{-4}$	1.18	$1.18 \cdot 10^{-5}$	1.19	$1.03 \cdot 10^{-5}$	1.24	$6.11 \cdot 10^{-6}$	1.08
сред. арифм. average	—	1.39	—	1.48	—	2.10	—	1.47

меньше второй. При этом среднее арифметическое значение величины R в процессе мельчения сетки в $\hat{\Omega}$ практически в полтора раза больше, чем в Ω . Различие ее значений при анализе сходимости погрешности в норме L_2 в $\hat{\Omega}$ и Ω небольшое. Значение R в этом примере ограничено и практически не превышает двух. Точность приведенных величин погрешностей в табл. 4 также не улучшается существенно при увеличении K , хотя их значения стремятся к нулю и достаточно малы. На рис. 5 а изображен график приближенного решения на сетке 32×32 , а на рис. 5 б — график значений $|u_{32}^h - u_{16}^h|$ при $K = 4$. Видно, что наибольшие значения $|u_{32}^h - u_{16}^h|$ сосредоточены в окрестности центра квадратной области Ω и график при приближении к центру резко возрастает.

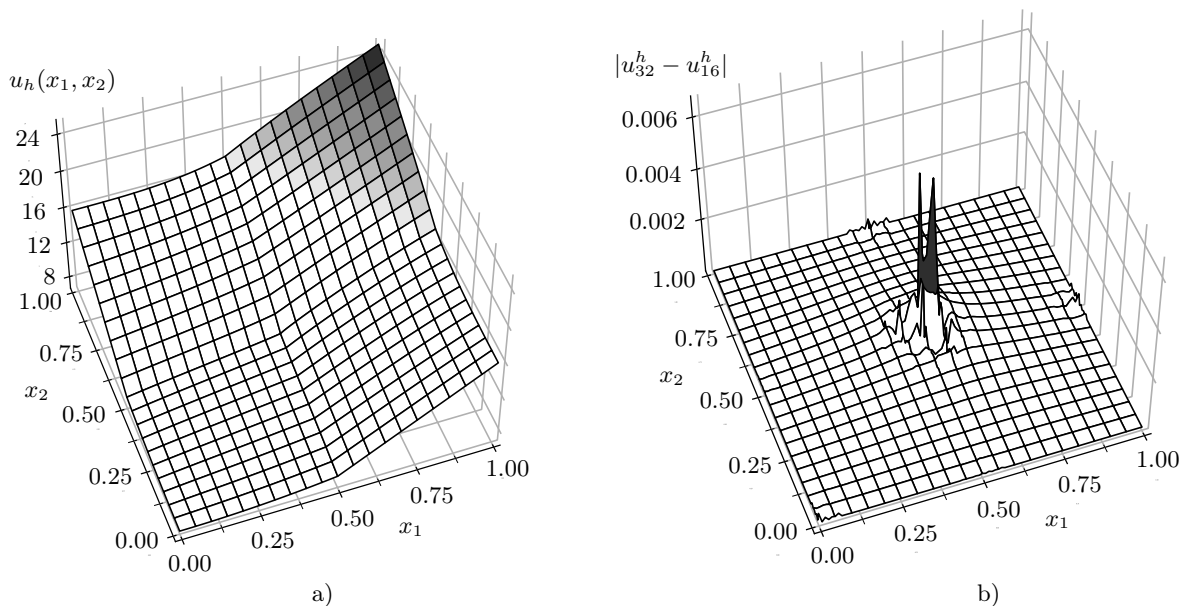


Рис. 5. В примере 3 при $K = 4$: а) приближенное решение на сетке 32×32 ; б) значения $|u_{32}^h - u_{16}^h|$
 Fig. 5. In example 3 with $K = 4$: а) numerical solution on the grid 32×32 ; б) values of $|u_{32}^h - u_{16}^h|$



Отметим, что вышеприведенные наблюдения, касающиеся ограничений порядка сходимости погрешности, характера ее поведения в зависимости от вида рассматриваемой подобласти в Ω , во многом коррелируют с результатами решения различных эллиптических задач разными методами. Например, это наблюдалось в [25] при решении уравнения Пуассона МКР и в [21, 26] МКНК при наличии разрывов вторых производных в угловых точках $\delta\Omega$ полигональных выпуклых областей. Это также наблюдалось в [6] при применении адаптивного разрывного метода Галеркина и в [14] при применении МКНК для решения уравнения Пуассона с особенностью в виде разрыва производных третьего порядка и обращения в бесконечность производных четвертого порядка в точке $(0, 0)$ в квадратной области $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$. Аналогичные наблюдения имели место в [27], где проводилось численное моделирование течения полимерной жидкости в многосвязной области и решалась нелинейная система уравнений с частными производными МКНК, МКЭ и нелокальным методом без насыщения с неизвестным точным решением. При этом применение последнего в эллиптической системе координат позволило избавиться от одной из особенностей. Также они имели место в [16] и [28], где МКНК и МКЭ соответственно решалось бигармоническое уравнение в L-образной области с известным точным решением $u \in H^{\frac{8}{3}-\epsilon} \notin H^3(\Omega)$, у которого вторые производные обращались в бесконечность в угловой точке.

В отличие от примера 1, здесь все ячейки имеют квадратную форму и вид локальных матриц СЛАУ не зависит от размера сетки при измельчении ее шагов вдвое, и их обусловленность не меняется. При этом обусловленность глобальной СЛАУ, полученной объединением всех локальных СЛАУ, будет изменяться. В этом примере при $K = 2$ значение $\nu_{\max} = 12.054$ в угловой граничной ячейке, принадлежащей Ω_4 , $\nu_{\min} = 2.54$ в нижней левой квадратной ячейке, принадлежащей Ω_4 , т.е. граничащей с Γ_1 и Γ_2 . При $K = 4$ значение $\nu_{\max} = 42.19$ во внутренней ячейке, принадлежащей Ω_1 , $\nu_{\min} = 7.11$ во внутренней ячейке, принадлежащей Ω_4 .

Пример 4. Рассмотрим (1), (2) в $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ с $k(x_1, x_2) = 1$ с условиями разрывов на линиях Γ_i

$$[u] = g_i(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_i,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = h_i(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_i,$$

где $[u]$ и $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]$ — скачки решения и производной по нормали через соответствующие интерфейсы Γ_i , равные функциям g_i и h_i , вычисленным из точного решения. В этом примере криволинейные интерфейсы имеют вид: $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_1(t) = (0.6 + 0.25 \sin(5t)) \cos(t), x_2(t) = (0.6 + 0.25 \sin(5t)) \sin(t) \text{ при } t \in [0, 2\pi]\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_1^2 + x_2^2 = 0.2^2\}$ (рис. 6 а). Рассмотрим эту задачу со следующим тестовым

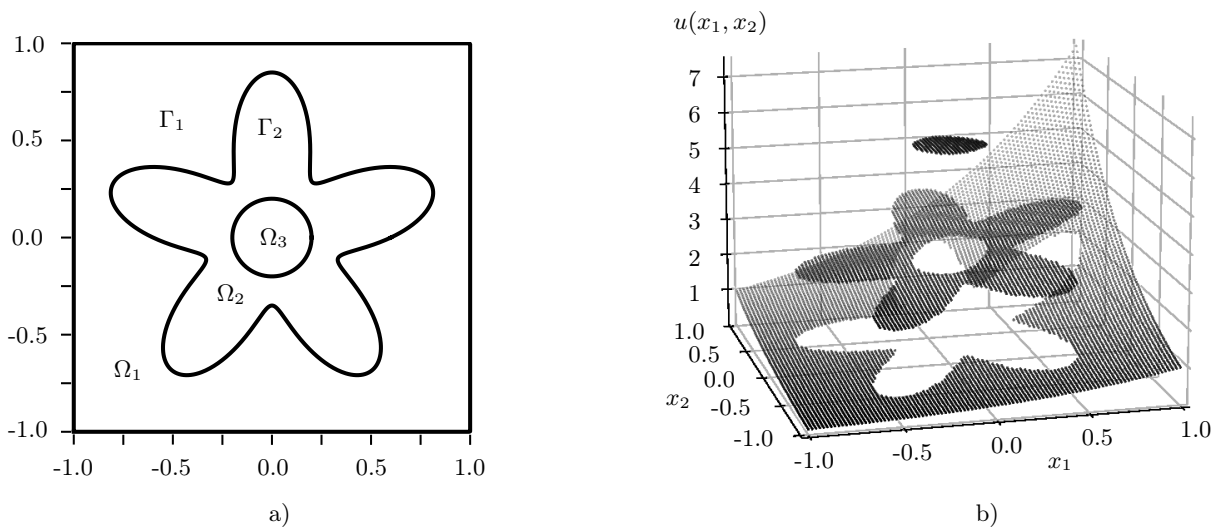


Рис. 6. В примере 4: а) область решения Ω ; б) точное решение $u(x_1, x_2)$

Fig. 6. In example 4: а) solution domain Ω ; б) exact solution $u(x_1, x_2)$

Таблица 5. Результаты численных экспериментов в примере 4

Table 5. Results of numerical experiments in example 4

$N \times N$	$K = 2 (\varepsilon = 10^{-10})$				$K = 4 (\varepsilon = 10^{-12})$			
	$\ E_r\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}	$\ E_r\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}
8×8	$6.54 \cdot 10^{-3}$	—	41	0.015	$5.46 \cdot 10^{-5}$	—	81	0.328
16×16	$5.65 \cdot 10^{-4}$	3.53	81	0.141	$2.00 \cdot 10^{-6}$	4.77	161	1.515
32×32	$1.36 \cdot 10^{-4}$	2.05	199	1.391	$2.05 \cdot 10^{-8}$	6.61	241	6.203
64×64	$2.33 \cdot 10^{-5}$	2.54	441	9.516	$7.96 \cdot 10^{-10}$	4.69	243	26.422

разрывным решением (рис. 6 b):

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{x_1+x_2} & \text{в } \Omega_1, \\ \sin(x_1 + x_2) + 3 & \text{в } \Omega_2, \\ \cos(x_1 + x_2) + 5 & \text{в } \Omega_3, \end{cases}$$

где подобласти Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 изображены на рис. 6 а. В этом примере также разрывна и правая часть $f(x_1, x_2)$ уравнения (1). Здесь в отличие от (4) условие согласования между решениями в ячейках, расположенных в разных подобластях, на Γ_i имеет вид

$$p_{m_0} v_{hj} + p_{m_1} \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = p_{m_0} \hat{v}_h + p_{m_1} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j} + p_{m_0} g_i + p_{m_1} h_i.$$

В табл. 5 приведены высокоточные результаты расчетов МКНК. Стоит отметить, что, как и в примерах 1 и 2, значения порядка сходимости R здесь колеблются. Это объясняется появлением особенностей, возникающих на интерфейсах Γ_1 и Γ_2 , и наличием нерегулярности сетки в их окрестности в виде н-ячеек, вид которых изменяется при измельчении шагов сетки. Аналогичные эффекты в виде колебаний порядка сходимости (при этом повышенного) наблюдались, например, у МКР [29] и у МКНК [16] при решении бигармонического уравнения в нерегулярных областях с гладкими тестовыми решениями.

В конце раздела 3 было сделано замечание относительно необходимости уменьшения куска невыпуклого интерфейса (в данном случае звездной кривой), используемой для расстановки точек согласования на ней. Если не применять предложенную здесь технику, а воспользоваться только алгоритмом из [14], то на сетке 32×32 в случае $K = 4$ получаются значения $\|E_r\|_\infty = 9.36 \cdot 10^{-8}$, $N_{\text{iter}} = 2141$, $t_{\text{sol}} = 58.93$ секунд при $\nu_{\text{max}} = 91.32$ в н-ячейке, пересеченной Γ_1 и находящейся в Ω_1 . Из табл. 5 видно, что точность решения, количество итераций и время расчета в разы лучше в случае применения указанной модификации алгоритма. При этом число обусловленности понижается практически в два раза и $\nu_{\text{max}} = 47.05$. Таким образом, при построении высокоточных алгоритмов необходимо особо обращать внимание на обусловленность возникающих СЛАУ в hp-вариантах численных методов. А также из изложенного видно, что различные варианты МКНК позволяют получить сходящиеся решения благодаря своим хорошим аппроксимативным свойствам и эффективному сочетанию с другими вычислительными алгоритмами.

Наконец, стоит отметить некоторые преимущества прямоугольной сетки внутри области. При программной реализации в таких ситуациях: 1) проще вычислять производные по нормали на прямолинейных сторонах между соседними ячейками в условиях согласования по сравнению, например, с неструктурированной треугольной сеткой [30]; 2) проще реализовать обход подобластей с применением распараллеливания, который [19] естественным образом здесь использован; 3) проще построить и применить формулы для осуществления операции продолжения [16], когда материнская прямоугольная ячейка делится на четыре “маленькие” прямоугольные ячейки; 4) можно эффективно использовать свойство локальной системы координат в МКНК при решении линейных задач с постоянными коэффициентами, так как в этих случаях вид матриц локальных СЛАУ всех внутренних прямоугольных ячеек одинаковый и не зависит от номера итерации, это влечет за собой ускорение решения задачи [14]. Есть и другие преимущества, например в [30] подчеркивается: “Относительно криволинейных сеток данный способ позволяет лучше локализовать мелкие ячейки на тех участках, где это необходимо”.

5. Заключение. Проведенное исследование показало, что реализованный алгоритм позволяет быстро и с высокой точностью решать краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в областях с несколькими интерфейсами достаточно произвольных форм. В МКНК относительно просто реализовывать различные hp-варианты в комбинации с современными способами ускорения итерационного



процесса. В нем зачастую предъявляются не такие жесткие требования с точки зрения зависимости вычислительного алгоритма от формы ячеек и построения базиса, например, по сравнению с МКЭ. Поэтому можно полагать, что создаваемые алгоритмы позволят проводить высокоточное численное моделирование сложных физических процессов с разрывами параметров и в прикладных нестационарных задачах, например с движущимися границами. Скорее всего, в этом случае будет эффективным сочетание конечно-разностной аппроксимации временной переменной в МКНК [31], методики восполнения внешней дискретно заданной границы области векторными сплайн-функциями [26], предложенных и реализованных в настоящей работе алгоритмов решения задач с разрывными параметрами, и других, которые, возможно, появятся в ходе дальнейшего поиска.

Список литературы

1. Олейник О.А. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // Успехи математических наук. 1959. **14**, № 5. 164–166. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=9165&option_lang=rus. Cited June 30, 2022.
2. Isaev V.I., Cherepanov A.N., Shapeev V.P. Numerical study of heat modes of laser welding of dissimilar metals with an intermediate insert // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. **99**. 711–720. doi 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.04.019.
3. Feng Q., Han B., Mineev P. Sixth order compact finite difference schemes for Poisson interface problems with singular sources // Computers & Mathematics with Applications. 2021. **99**. 2–25. doi 10.1016/j.camwa.2021.07.020.
4. Harris R.C., Boschitsch A.H., Fenley M.O. Numerical difficulties computing electrostatic potentials near interfaces with the Poisson–Boltzmann equation // Journal of Chemical Theory and Computation. 2017. **13**, N 8. 3945–3951. doi 10.1021/acs.jctc.7b00487.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
6. Sabawi Y.A. Adaptive discontinuous Galerkin methods for interface problems. PhD Thesis. Leicester: University of Leicester, 2016.
7. Cangiani A., Georgoulis E.H., Sabawi Y.A. Adaptive discontinuous Galerkin methods for elliptic interface problems // Mathematics of Computation. 2018. **87**. 2675–2707. doi 10.1090/mcom/3322.
8. Zhilin L. Fast iterative algorithm for elliptic interface problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1998. **35**, N 1. 230–254. doi 10.1137/S0036142995291329.
9. Tzou C.-N., Stechmann S.N. Simple second-order finite differences for elliptic PDEs with discontinuous coefficients and interfaces // Communications in Applied Mathematics and Computational Science. 2019. **14**, N 2. 121–147. doi 10.2140/camcos.2019.14.121.
10. Bochkov D., Gibou F. Solving elliptic interface problems with jump conditions on Cartesian grids // Journal of Computational Physics. 2020. **407**. doi 10.1016/j.jcp.2020.109269.
11. Xia K., Zhan M., Wei G.-W. MIB method for elliptic equations with multi-material interfaces // Journal of Computational Physics. 2011. **230**, N 12. 4588–4615. doi 10.1016/j.jcp.2011.02.037.
12. Chen Y., Hou S., Zhang X. A bilinear partially penalized immersed finite element method for elliptic interface problems with multi-domain and triple-junction points // Results in Applied Mathematics. 2020. **8**. doi 10.1016/j.rinam.2020.100100.
13. Shapeev V.P., Belyaev V.A., Bryndin L.S. High accuracy numerical solution of elliptic equations with discontinuous coefficients // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2021. **14**, № 4. 88–101. doi 10.14529/mmp210407.
14. Беляев В.А. Об эффективной реализации и возможностях метода коллокации и наименьших квадратов решения эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительные методы и программирование. 2021. **22**, № 3. 211–229. doi 10.26089/NumMet.v22r313.
15. Колобов Б.П., Коробицына Ж.Л., Плясунова А.В., Слепцов А.Г. Коллокационно-сеточный метод на подвижных сетках численного моделирования пограничных слоев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. **30**, № 4. 521–534. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=3278&option_lang=rus. Cited June 30, 2022.
16. Беляев В.А., Брындин Л.С., Голушко С.К., Семисалов Б.В., Шанеев В.П. Н-, Р- и НР-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. **62**, № 4. 531–552. doi 10.31857/S0044466922040020.

17. Vorozhtsov E.V., Shapeev V.P. On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals // Applied Mathematics and Computation. 2019. **363**. doi [10.1016/j.amc.2019.124644](https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124644).
18. Ramšak M., Škerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. **46**, N 8. 815–847. doi [10.1002/flid.776](https://doi.org/10.1002/flid.776).
19. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.
20. Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems. Philadelphia: SIAM, 2011. doi [10.1137/1.9781611970739](https://doi.org/10.1137/1.9781611970739).
21. Беляев В.А. Решение уравнения Пуассона с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2020. **23**, № 3. 249–263. doi [10.15372/SJNM20200302](https://doi.org/10.15372/SJNM20200302).
22. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Московский физико-технический институт, 1994.
23. Исаев В.И., Шанеев В.П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. **50**, № 10. 1758–1770. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15249920>. Cited June 30, 2022.
24. Исаев В.И., Шанеев В.П., Еремин С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса // Вычислительные технологии. 2007. **12**, № 3. 53–70. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12878946>. Cited June 30, 2022.
25. Шанеев В.П., Шанеев А.В. Решение эллиптических задач с особенностями по схемам высокого порядка аппроксимации // Вычислительные технологии. 2006. **11**, специальный выпуск, часть 2. 84–91. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15281780>. Cited June 30, 2022.
26. Беляев В.А., Шанеев В.П. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом коллокации и наименьших квадратов в области с дискретно заданной границей // Вычислительные технологии. 2018. **23**, № 3. 15–30. <https://elibrary.ru/item.asp?id=35095975>. Cited June 30, 2022.
27. Семисалов Б.В., Брындин Л.С., Беляев В.А., Горынин А.Г. Численный анализ стационарных течений полимерной жидкости и его верификация // Тезисы XXI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, 7–11 декабря 2020, Новосибирск. Новосибирск: Изд-во ФИЦ ИВТ, 2020. 18–19. <https://elibrary.ru/item.asp?id=44687787>. Cited June 30, 2022.
28. Guo H., Zhang Z., Zou Q. A C^0 linear finite element method for biharmonic problems // Journal of Scientific Computing. 2018. **74**. 1397–1422. doi [10.1007/s10915-017-0501-0](https://doi.org/10.1007/s10915-017-0501-0).
29. Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.-P., Fishelov D. A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2009. **47**, N 4. 3087–3108. doi [10.1137/080718784](https://doi.org/10.1137/080718784).
30. Беляев В.В., Шанеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычислительные технологии. 2020. **5**, № 4. 13–21. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13026317>. Cited June 30, 2022.
31. Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V. CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of the Burgers and Korteweg-de Vries–Burgers equations // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8660. Heidelberg: Springer, 2014. 432–446. doi [10.1007/978-3-319-10515-4_31](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10515-4_31)

Поступила в редакцию
25 мая 2022 г.

Принята к публикации
20 июня 2022 г.

Информация об авторах

Василий Павлович Шанеев — д.ф.-м.н., главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, д. 4/1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Лука Сергеевич Брындин — младший научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, д. 4/1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Василий Алексеевич Беляев — младший научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, д. 4/1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.



References

1. O. A. Oleinik, “Equations of Elliptic and Parabolic Type with Discontinuous Coefficients,” *Usp. Mat. Nauk* **14** (5), 164–166 (1959). http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=9165&option_lang=eng. Cited June 30, 2022.
2. V. I. Isaev, A. N. Cherepanov, and V. P. Shapeev, “Numerical Study of Heat Modes of Laser Welding of Dissimilar Metals with an Intermediate Insert,” *Int. J. Heat Mass Transf.* **99**, 711–720 (2016). doi [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.04.019](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.04.019).
3. Q. Feng, B. Han, and P. Minev, “Sixth Order Compact Finite Difference Schemes for Poisson Interface Problems with Singular Sources,” *Comput. Math. Appl.* **99**, 2–25 (2021). doi [10.1016/j.camwa.2021.07.020](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.07.020).
4. R. C. Harris, A. H. Boschitsch, and M. O. Fenley, “Numerical Difficulties Computing Electrostatic Potentials Near Interfaces with the Poisson–Boltzmann Equation,” *J. Chem. Theory Comput.* **13** (8), 3945–3951 (2017). doi [10.1021/acs.jctc.7b00487](https://doi.org/10.1021/acs.jctc.7b00487).
5. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1977; Marcel Dekker, New York, 2001).
6. Y. A. Sabawi, *Adaptive Discontinuous Galerkin Methods for Interface Problems*, PhD Thesis (University of Leicester, Leicester, 2016).
7. A. Cangiani, E. H. Georgoulis, and Y. A. Sabawi, “Adaptive Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Interface Problems,” *Math. Comp.* **87**, 2675–2707 (2018). doi [10.1090/mcom/3322](https://doi.org/10.1090/mcom/3322).
8. L. Zhilin, “Fast Iterative Algorithm for Elliptic Interface Problems,” *SIAM J. Numer. Anal.* **35** (1), 230–254 (1998). doi [10.1137/S0036142995291329](https://doi.org/10.1137/S0036142995291329).
9. C.-N. Tzou and S. N. Stechmann, “Simple Second-Order Finite Differences for Elliptic PDEs with Discontinuous Coefficients and Interfaces,” *Commun. App. Math. Comp. Sci.* **14** (2), 121–147 (2019). doi [10.2140/camcos.2019.14.121](https://doi.org/10.2140/camcos.2019.14.121).
10. D. Bochkov and F. Gibou, “Solving Elliptic Interface Problems with Jump Conditions on Cartesian Grids,” *J. Comput. Phys.* **407** (2020). doi [10.1016/j.jcp.2020.109269](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109269).
11. K. Xia, M. Zhan, and G.-W. Wei, “MIB Method for Elliptic Equations with Multi-Material Interfaces,” *J. Comput. Phys.* **230** (12), 4588–4615 (2011). doi [10.1016/j.jcp.2011.02.037](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.02.037).
12. Y. Chen, S. Hou, and X. Zhang, “A Bilinear Partially Penalized Immersed Finite Element Method for Elliptic Interface Problems with Multi-Domain and Triple-Junction Points,” *Results Appl. Math.* **8** (2020). doi [10.1016/j.rinam.2020.100100](https://doi.org/10.1016/j.rinam.2020.100100).
13. V. P. Shapeev, V. A. Belyaev, and L. S. Bryndin, “High Accuracy Numerical Solution of Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients,” *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Programm.* **14** (4), 88–101 (2021). doi [10.14529/mmp210407](https://doi.org/10.14529/mmp210407).
14. V. A. Belyaev, “On the Effective Implementation and Capabilities of the Least-Squares Collocation Method for Solving Second-Order Elliptic Equations,” *Vychisl. Metody Program.* **22** (3), 211–229 (2021). doi [10.26089/NumMet.v22r313](https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r313).
15. B. P. Kolobov, Zh. L. Korobitsyna, A. V. Plyasunova, and A. G. Sleptsov, “A Collocation-Grid Method on Moving Grids for the Numerical Modelling of Boundary Layers,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **30** (4), 521–534 (1990) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **30** (2), 120–129 (1990)]. doi [10.1016/0041-5553\(90\)90087-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90087-9).
16. V. A. Belyaev, L. S. Bryndin, S. K. Golushko, et al., “H-, P-, and HP-Versions of the Least-Squares Collocation Method for Solving Boundary Value Problems for Biharmonic Equation in Irregular Domains and Their Applications,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **62** (4), 531–552 (2022) [*Comput. Math. Math. Phys.* **62** (4), 517–537 (2022)]. doi [10.1134/S0965542522040029](https://doi.org/10.1134/S0965542522040029).
17. E. V. Vorozhtsov and V. P. Shapeev, “On the Efficiency of Combining Different Methods for Acceleration of Iterations at the Solution of PDEs by the Method of Collocations and Least Residuals,” *Appl. Math. Comput.* **363** (2019). doi [10.1016/j.amc.2019.124644](https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124644).
18. M. Ramšak and L. Škerget, “A Subdomain Boundary Element Method for High-Reynolds Laminar Flow Using Stream Function-Vorticity Formulation,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **46** (8), 815–847 (2004). doi [10.1002/flid.776](https://doi.org/10.1002/flid.776).
19. J. M. Ortega, *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems* (Plenum, New York, 1988; Mir, Moscow, 1991). doi [10.1007/978-1-4899-2112-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2112-3).
20. Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems* (SIAM, Philadelphia, 2011). doi [10.1137/1.9781611970739](https://doi.org/10.1137/1.9781611970739).

21. V. A. Belyaev, “Solving a Poisson Equation with Singularities by the Least-Squares Collocation Method,” *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **23** (3), 249–263 (2020). doi 10.15372/SJNM20200302 [Numer. Anal. Appl. **13** (3), 207–218 (2020). doi 10.1134/S1995423920030027].
22. R. P. Fedorenko, *Introduction to Computational Physics* (Moscow Inst. Phys. Technol., Moscow, 1994) [in Russian].
23. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (10), 1758–1770 (2010) [Comput. Math. Math. Phys. **50** (10), 1670–1681 (2010). doi 10.1134/S0965542510100040].
24. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and S. A. Eremin, “An Investigation of the Collocation and the Least Squares Method for Solution of Boundary Value Problems for the Navier–Stokes and Poisson Equations,” *Vychisl. Tekhnol.* **12** (3), 53–70 (2007). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12878946>. Cited June 30, 2022.
25. V. P. Shapeev and A. V. Shapeev, “Solutions of the Elliptic Problems with Singularities Using Finite Difference Schemes with High Order of Approximation,” *Vychisl. Tekhnol.* **11** (special issue, part 2), 84–91 (2006). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15281780>. Cited June 30, 2022.
26. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, “Solving the Dirichlet Problem for the Poisson Equation by the Least Squares Collocation Method with Given Discrete Boundary Domain,” *Vychisl. Tekhnol.* **23** (3), 15–30 (2018). <https://elibrary.ru/item.asp?id=35095975>. Cited June 30, 2022.
27. B. V. Semisalov, L. S. Bryndin, V. A. Belyaev, and A. G. Gorynin, “Numerical Analysis of Steady Polymer Fluid Flows and Its Verification,” in *Proc. XXI All-Russian Conf. of Young Scientists on Mathematical Modeling and Information Technology, Novosibirsk, Russia, December 7–11, 2020* (Center Inform. Comput. Tekhnol., Novosibirsk, 2020), pp. 18–19. <https://elibrary.ru/item.asp?id=44687787>. Cited June 30, 2022.
28. H. Guo, Z. Zhang, and Q. Zou, “A C^0 Linear Finite Element Method for Biharmonic Problems,” *J. Sci. Comput.* **74**, 1397–1422 (2018). doi 10.1007/s10915-017-0501-0.
29. M. Ben-Artzi, I. Chorev, J.-P. Croisille, and D. Fishelov, “A Compact Difference Scheme for the Biharmonic Equation in Planar Irregular Domains,” *SIAM J. Numer. Anal.* **47** (4), 3087–3108 (2009). doi 10.1137/080718784.
30. V. V. Belyaev and V. P. Shapeev, “The Collocation and Least Squares Method on Adaptive Grids in a Domain with a Curvilinear Boundary,” *Vychisl. Tekhnol.* **5** (4), 13–21 (2000). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13026317>. Cited June 30, 2022.
31. V. P. Shapeev and E. V. Vorozhtsov, “CAS Application to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for the Solution of the Burgers and Korteweg-de Vries–Burgers Equations,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2014), Vol. 8660, pp. 432–446. doi 10.1007/978-3-319-10515-4_31.

Received
May 25, 2022

Accepted for publication
June 20, 2022

Information about the authors

Vasily P. Shapeev — Dr. Sci., Principal Scientist, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Institutskaya ulitsa 4/1, 630090, Novosibirsk, Russia.

Luka S. Bryndin — Junior Scientist, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Institutskaya ulitsa 4/1, 630090, Novosibirsk, Russia.

Vasily A. Belyaev — Junior Scientist, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Institutskaya ulitsa 4/1, 630090, Novosibirsk, Russia.