УДК 517.96

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Ю. П. Горьков[1]

Построено явное решение первой краевой задачи в полупространстве для стационарного уравнения броуновского движения.

Ключевые слова: броуновское движение, краевая задача, асимптотическое разложение.

В настоящей работе построено решение краевой задачи

$$u_{yy} - yu_x = 0, \quad x \in (0,\infty), \quad y \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad y \in [0,\infty), \tag{2}$$

при условии, что функция $\varphi(y)$ имеет степенной порядок роста при $y \to \infty$. При этом предполагается, что $\varphi(y)$ является непрерывной функцией при $y \geqslant 0$ и достаточно быстро стремится к нулю при $y \to 0$.

Под решением задачи (1), (2) понимается функция $u(x,y)$, непрерывная при $x \in [0,\infty)$, $y \in (-\infty,\infty)$, имеющая непрерывные производные u_x, u_{yy} при $x \in (0,\infty)$, $y \in (-\infty,\infty)$ и удовлетворяющая уравнению (1) и условию (2).

В классе функций, имеющих степенной порядок роста при $x^2+y^2 \to \infty$, решение задачи (1), (2) не единственно. Достаточным условием единственности решения является, например, следующее условие:

$$\varphi(y) = O\left(y^{1/2-\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad y \to \infty, \quad \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Если выполнено условие (3), то решение задачи (1), (2) может быть представлено в таком виде [1][2]:

$$u(x,y) = \int\limits_0^\infty \gamma\varphi(\gamma) G(x,y,\gamma)\, d\gamma,$$

где

$$\begin{aligned} G(x,y,\gamma) &= -\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{3/2}}{\tau^3+1}\,\Phi(0,-\tau\gamma,x,y)\,d\tau + \Phi(0,\gamma,x,y),\\ \Phi(x,y,\xi,\eta) &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2}\,\exp\left\{-\frac{(y-\eta)^2}{4t} - \frac{3}{t^3}\left(x-\xi+\frac{y+\eta}{2}\,t\right)^2\right\} dt. \end{aligned} \tag{4}$$

1. Асимптотика фундаментального решения.

Лемма 1. *При $\gamma \to \infty$ и ограниченных значениях x, y функция $\Phi(0,\gamma,x,y)$ из (4) разлагается в равномерный асимптотический ряд*

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{C_k(x,y)}{\gamma^{k+2}}, \tag{5}$$

где

$$C_{3k}(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left[y^{3k} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m!}\prod_{i=0}^{m-1}\left[3k-3(m-i-1)\right]\left[3k-3(m-i-1)-1\right] y^{3k-3m}x^m\right],$$

$$C_{3k+1}(x,y) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left[y^{3k+1} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m!}\prod_{i=0}^{m-1}\left[3k+1-3(m-i-1)\right]\left[3k-3(m-i-1)\right] y^{3k+1-3m}x^m\right],$$

$$C_{3k+2}(x,y) = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

---

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

[2] В работе [2] получено представление решения аналогичной задачи для более общего уравнения. Применительно к задаче (1), (2) полученные представления являются различными. Различными также являются достаточные условия единственности решений.

Асимптотический ряд (5) *допускает почленное дифференцирование по* x, y, γ *любое число раз.*

Доказательство. После замены переменной интегрирования $t = (\gamma - y)^2/\mu$ функция $\Phi(0,\gamma,x,y)$ принимает следующий вид:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\mu}{4} - \frac{3\mu^3}{(\gamma-y)^6}\left(-x + \frac{(\gamma+y)(\gamma-y)^2}{2\mu}\right)^2\right\} d\mu\,\frac{1}{(\gamma-y)^2}.$$

Разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{1}{(\gamma-y)^2}\int\limits_0^\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{1}{(\gamma-y)^2}\int\limits_\gamma^\infty \equiv J_1 + J_2.$$

При $\gamma \to \infty$ интеграл J_2 экспоненциально стремится к нулю вместе с производными по x, y, γ любого порядка. Разлагая в подынтегральном выражении в J_1 функцию

$$\exp\left\{-\frac{3\mu^3}{(\gamma-y)^6}\left(-x + \frac{(\gamma+y)(\gamma-y)^2}{2\mu}\right)^2\right\}$$

в ряд Тейлора (при условии, что γ достаточно велико), получим

$$J_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{1}{(\gamma-y)^2}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^\gamma \exp\left\{-\frac{\mu}{\gamma}\right\}\left[-\frac{3x^2\mu^3}{(\gamma-y)^6} + \frac{3x(\gamma+y)}{(\gamma-y)^4}\,\mu^2 - \frac{3(\gamma+y)^2\mu}{4(\gamma-y)^2}\right]^k \frac{1}{k!}\,d\mu + {}$$
$$+ R_n(x,y,\gamma).$$

Здесь

$$R_n(x,y,\gamma) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int\limits_0^\gamma \exp\left\{-\frac{\mu}{4}\right\}\left[\int\limits_0^g [g-t]^{n-1}e^{-t}\,dt\right] d\mu\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{1}{(\gamma-y)^2},$$
$$g = -\frac{3x^2\mu^3}{(x-\gamma)^6} + \frac{3x(\gamma+y)}{(\gamma-y)^4}\,\mu^2 - \frac{3(\gamma+y)^2\mu}{4(\gamma-y)^2}.$$

Представим J_1 в следующем виде:

$$J_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi(\gamma-y)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\mu}{4}\right\}[g]^k\frac{1}{k!}\,d\mu - \frac{\sqrt{3}}{2\pi(\gamma-y)^2}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_\gamma^\infty \exp\left\{-\frac{\mu}{4}\right\}[g]^k\frac{1}{k!}\,d\mu + \bar{R}_n(x,y,\gamma). \qquad (6)$$

Первое слагаемое в выражении (6) разлагается в асимптотический ряд вида (5), допускающий почленное дифференцирование по x, y, γ любое число раз. Второе слагаемое экспоненциально стремится к нулю вместе с производными по x, y, γ любого порядка. Простой, но несколько громоздкий подсчет приводит к следующей оценке производных третьего слагаемого:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\nu}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial\gamma^\nu}\,\bar{R}_n(x,y,\gamma) = O\left(\frac{1}{\gamma^{n+2+\nu}}\right),\quad \gamma\to\infty.$$

Далее, поскольку $\Phi(0,\gamma,x,y) = \Phi(-x,\gamma,0,y)$, то функция $\Phi(0,\gamma,x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{yy} - \gamma u_x = -\delta(x)\cdot\delta(\gamma-y). \qquad (7)$$

Подставляя асимптотический ряд (5) в уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях γ в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений для функций $C_k(x,y)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\,C_0(x,y) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\,C_1(x,y) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial x}\,C_2(x,y) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\,C_k(x,y) = k(k-1)\,C_{k-3}(x,y),\quad k = 3,4,5,\ldots.\end{aligned} \qquad (8)$$

Решая систему уравнений (8) с граничными условиями

$$C_{3k}(0,y)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,y^{3k},\quad C_{3k+1}(0,y)=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,y^{3k+1},\quad C_{3k+2}(0,y)=0,\quad k=0,1,2,\dots,$$

получим явные значения функций $C_k(x,y)$. Лемма 1 доказана.

Заметим, что

$$C_k(-x,-y)=(-1)^k C_k(x,y). \tag{9}$$

2. Асимптотика функции Грина.

Лемма 2. *Пусть* $\mu(\tau,\alpha)\in C^{\infty}\big(\bar{R}_1^+\times\mathcal{P}\big)$, *где* $\mathcal{P}\subset R_2$ *— некоторая замкнутая ограниченная область,* $\bar{R}_1^+=[\tau:\tau\geqslant 0]$, $\alpha\in\mathcal{P}$. *Пусть* $\mu(\tau,\alpha)$ *разлагается в равномерный асимптотический ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(\lambda)}{\tau^{k+2}} \tag{5$'$}$$

при $\tau\to\infty$; $C_k(\alpha)\in C^{\infty}(\mathcal{P})$. *Пусть производные от* $\mu(\tau,\alpha)$ *разлагаются в равномерные асимптотические ряды, формально получающиеся из ряда* ($5'$) *при соответствующем дифференцировании слагаемых ряда. Тогда функция*

$$J(\lambda,\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau^{3/2}}{\tau^3+1}\,\mu(\tau\lambda,\alpha)\,d\tau$$

разлагается в равномерный асимптотический ряд вида

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_r(\alpha)}{\lambda^{2+r/2}},\quad \lambda\to\infty. \tag{10}$$

Производные от функции $J(\lambda,\alpha)$ *разлагаются в равномерные асимптотические ряды, формально получающиеся из ряда* (10) *при соответствующем дифференцировании слагаемых ряда. При этом справедливы равенства*

$$\begin{aligned}&B_{6n}=(-1)^n\,\frac{2\pi}{3}\,C_{3n},\quad B_{6n+2}=(-1)^{n+1}\,\frac{2\pi}{3}\,C_{3n+1};\\ &B_{6n+4}=0,\quad \text{если}\quad C_{3n+2}=0,\quad n=0,1,2,\dots.\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Имеем:

$$J(\lambda,\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau^{3/2}}{\tau^3+1}\,\mu(\tau\lambda,\alpha)\,d\tau=\lambda^{1/2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\xi^{3/2}}{\xi^3+\lambda^3}\,\mu(\xi,\alpha)\,d\xi=$$

$$=\lambda^{1/2}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\xi^3+\lambda^3}\left[\xi^{3/2}\mu(\xi,\alpha)-\frac{C_0(\alpha)}{\sqrt{\xi}}\right]d\xi+C_0(\alpha)\lambda^{1/2}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\xi}(\xi^3+\lambda^3)}\,d\xi.$$

Введем следующие обозначения:

$$q(\xi,\alpha)=\xi^{3/2}\mu(\xi,\alpha)-\frac{C_0(\alpha)}{\sqrt{\xi}},\quad P(\xi)=\frac{\xi^3}{\xi^3+1}.$$

Учитывая, что $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}(\tau^3+1)}=\frac{2\pi}{3}$, получим

$$J(\lambda,\alpha)=\frac{2\pi}{3}\,\frac{C_0(\alpha)}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^{5/2}}\int\limits_0^{\infty}q(\xi,\alpha)\,\frac{1}{\xi^3/\lambda^3+1}\,d\xi=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\,\frac{C_0(\alpha)}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^{5/2}}\int\limits_0^{\infty}q(\xi,\alpha)\,d\xi-\frac{1}{\lambda^{5/2}}\int\limits_0^{\infty}P\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)q(\xi,\alpha)\,d\xi.$$

Представим интеграл $J_1 = \int\limits_0^\infty P\Big(\dfrac{\xi}{\lambda}\Big) q(\xi,\alpha)\, d\xi$ в виде суммы трех интегралов

$$J_1 = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\lambda/2} + \int\limits_{\lambda/2}^\infty = J_{11} + J_{12} + J_{13}.$$

Имеем:

$$J_{11} = \int\limits_0^1 \left[P\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) - \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) \Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)^k \frac{1}{k!} \right] q(\xi,\alpha)\, d\xi + \sum_{k=0}^\infty P^{(k)}(0) \frac{1}{\lambda^k k!} \int\limits_0^1 \xi^k q(\xi,\alpha)\, d\xi, \tag{12}$$

$$J_{13} = \int\limits_{\lambda/2}^\infty P\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) q(\xi,\alpha)\, d\xi = \int\limits_{\lambda/2}^\infty P\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) \left[q(\xi,\alpha) - \frac{1}{\xi^{1/2}} \sum_{k=1}^m \frac{C_k(\alpha)}{\xi^k} \right] d\xi + \sum_{k=1}^m C_k(\alpha) \int\limits_{\lambda/2}^\infty \frac{P\Big(\dfrac{\xi}{\lambda}\Big)}{\xi^{k+1/2}}\, d\xi. \tag{13}$$

Интеграл J_{12} преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{12} = \int\limits_1^{\lambda/2} &\left[P\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) - \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) \Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)^k \frac{1}{k!} \right] \left[q(\xi,\alpha) - \frac{1}{\xi^{1/2}} \sum_{r=1}^m \frac{C_r(\alpha)}{\xi^r} \right] d\xi + \\ &+ \sum_{r=1}^m C_r(\alpha) \int\limits_1^{\lambda/2} \frac{P\Big(\dfrac{\xi}{\lambda}\Big)}{\xi^{r+1/2}}\, d\xi + \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) \frac{1}{k!\lambda^k} \int\limits_1^{\lambda/2} \xi^k \left[q(\xi,\alpha) - \frac{1}{\xi^{1/2}} \sum_{r=1}^m \frac{C_r(\alpha)}{\xi^r} \right] d\xi. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $m > n$. Первые слагаемые в правых частях равенств (12) – (14) являются бесконечно дифференцируемыми функциями λ и α ($\lambda \geqslant 2$). При этом производные от этих функций вида $\dfrac{\partial^{k+\beta}}{\partial\alpha_i^k \partial\lambda^\beta}$ стремятся к нулю (при $\lambda \to \infty$) не медленнее, чем $O\Big(\dfrac{1}{\lambda^{n+1+\beta}}\Big)$. Стремление равномерное по α. Аналогичные утверждения справедливы также и по отношению к функциям

$$\frac{1}{\lambda^i} \int\limits_{\lambda/2}^\infty \xi^i \left[q(\xi,\alpha) - \frac{1}{\xi^{1/2}} \sum_{r=1}^m \frac{C_r(\alpha)}{\xi^r} \right] d\xi, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Перейдем к разложению в асимптотический ряд функции

$$J_2(\lambda,\alpha) = \sum_{r=1}^m C_r(\alpha) \int\limits_1^\infty P\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) \frac{1}{\xi^{r+1/2}}\, d\xi.$$

Имеем:

$$J_2(\lambda,\alpha) = \sum_{r=1}^m C_r(\alpha) \frac{1}{\lambda^{r-1/2}} \int\limits_{1/\lambda}^\infty \frac{\xi^{5/2-r}}{\xi^3+1}\, d\xi.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{r-1/2}} \int\limits_{1/\lambda}^\infty \frac{\xi^{5/2-r}}{\xi^3+1}\, d\xi &= \sum_{k=1}^i A_k^{(r)} \frac{1}{\lambda^{3k}(1+1/\lambda^3)^k} + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^{r-1/2}} \frac{3^i \cdot i!}{(7/2-r)(13/2-r)\ldots(1/2+3i-r)} \int\limits_{1/\lambda}^\infty \frac{\xi^{3i-r+5/2}}{(\xi^3+1)^{i+1}}\, d\xi = \\ &= \sum_{k=1}^i \frac{1}{\lambda^{3k}} \frac{A_k^{(r)}}{(1+1/\lambda^3)^k} + \frac{1}{\lambda^{r-1/2}} K_i^{(r)}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big). \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что

$$K_i^{(3i)}(0) = (-1)^{i-1}\frac{2\pi}{3}, \quad K_i^{(3i+1)}(0) = (-1)^i\frac{2\pi}{3}. \tag{15}$$

Поскольку функция

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}}\int\limits_0^{1/\lambda}\frac{\xi^\beta}{(\xi^3+1)^{i+1}}\,d\xi, \quad \beta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2},$$

разлагается в асимптотический ряд по целым степеням $1/\lambda$ (и асимптотический ряд допускает дифференцирование по λ любое число раз), функция $J_2(\lambda,\alpha)$ разлагается в асимптотический ряд по целым степеням $1/\sqrt{\lambda}$. Очевидно, что разложение этой функции, а следовательно, и функции $J_2(\lambda,\alpha)$ допускает дифференцирование по λ и α любое число раз. Справедливость равенств (11) вытекает из равенств (9) и (15). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $(x,y)\in\mathcal{K}$, *где* $\mathcal{K}$ — *произвольная ограниченная замкнутая область, принадлежащая множеству* $\{(x,y) : x \geqslant 0,\ -\infty < y < \infty\}$. *При* $\gamma\to\infty$ *функция* $G(x,y,\gamma)$ *разлагается в равномерный асимптотический ряд*

$$\frac{1}{\gamma^{5/2}}\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x,y)\,\frac{1}{\gamma_k}, \quad A_k(x,y)\in C^\infty(\mathcal{K}), \quad k = 0,1,2,\dots. \tag{16}$$

Производные от функции $G(x,y,\gamma)$ *разлагаются в равномерные асимптотические ряды, формально получающиеся из ряда* (16) *при соответствующем дифференцировании слагаемых ряда.*

Доказательство. При $y\neq-\gamma$ функция $\Phi(0,-\gamma,x,y)\in C^\infty(\mathcal{K})$ и $\Phi(0,-\gamma,x,y) = \Phi(0,\gamma,-x,-y)$. Применяя к функции

$$\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{3/2}}{\tau^3+1}\,\Phi(0,-\tau\gamma,x,y)\,d\tau$$

лемму 2, получим асимптотическое разложение

$$\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{3/2}}{\tau^3+1}\,\Phi(0,-\tau\gamma,x,y)\,d\tau = \frac{3}{2\pi}\sum_{r=0}^\infty\frac{B_r(x,y)}{\gamma^{2+r/2}}, \quad \gamma\to\infty.$$

Соответственно, для $G(x,y,\gamma)$ получим следующее разложение:

$$G(x,y,\gamma) = \sum_{k=0}^\infty\frac{C_k(x,y)}{\gamma^{k+2}} - \frac{3}{2\pi}\sum_{r=0}^\infty\frac{B_r(x,y)}{\gamma^{2+r/2}}, \quad \gamma\to\infty.$$

Справедливость леммы 3 следует теперь из последнего разложения и равенств (9), (11).

3. Представление решения задачи (1), (2). Положим

$$G_{3n}(x,y,\gamma) = G(x,y,\gamma) - \frac{1}{\gamma^{5/2}}\sum_{k=0}^{3n}A_k(x,y)\,\frac{1}{\gamma^k}. \tag{17}$$

Поскольку асимптотическое разложение (16) сохраняется при формальном дифференцировании обеих частей равенства, то функции $A_k(x,y)$ являются решениями уравнения (1). Следовательно, функция $G_{3n}(x,y,\gamma)$ также является решением уравнения (1). Из явного вида функции $G(x,y,\gamma)$ (см. (4)) следует, что

$$G(0,y,\gamma) = \frac{3}{2\pi}\,\frac{\gamma^{1/2}|y|^{1/2}}{\gamma^3+|y|^3}, \quad \gamma>0, \quad y<0. \tag{18}$$

Из равенств (17), (18) следует, что

$$\gamma G_{3n}(0,y,\gamma) = \frac{3}{2\pi}\,\frac{\gamma^{3/2}|y|^{1/2}}{\gamma^3+|y|^3} - \frac{3}{2\pi}\,\frac{|y|^{1/2}}{\gamma^{3/2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{|y|^{3k}}{\gamma^{3k}} = \frac{3}{2\pi}\,\frac{\gamma^{3/2}|y|^{1/2}}{\gamma^3+|y|^3} -$$
$$- \frac{3}{2\pi}\,\frac{|y|^{1/2}}{\gamma^{3/2}}\,\frac{\gamma^{3n+3}+(-1)^{3n}|y|^{3n+3}}{(\gamma^3+|y|^3)\gamma^{3n-3}} = \frac{3}{2\pi}\,(-1)^{3n+1}|y|^{3n+3}\,\frac{|y|^{1/2}\gamma^{3/2}}{(\gamma^3+|y|^3)\gamma^{3n+3}}, \quad \gamma>0, \quad y<0.$$

Теперь уже нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Теорема. *Пусть* $\varphi(y)$ *— непрерывная функция при* $y \geqslant 0$. *Пусть выполнены условия*

$$\varphi(y) = O\Big(y^{3n+1/2+\varepsilon}\Big) \quad \textit{при} \quad y \to 0,$$
$$\varphi(y) = O\Big(y^{3n+7/2-\varepsilon}\Big) \quad \textit{при} \quad y \to \infty,$$

где ε *— произвольно малое положительное число. Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_0^\infty \gamma\varphi(\gamma) G_{3n}(x,y,\gamma)\,d\gamma$$

является решением задачи (1), (2). *При* $y < 0$ *выполнено равенство*

$$u(0,y) = \frac{3}{2\pi}\,(-1)^{n+1} \int\limits_0^\infty \frac{\xi^{3/2}}{\xi^3+1}\,\frac{1}{\xi^{3n+3}}\,\varphi\big(|y|\xi\big)\,d\xi.$$

Замечание. Явные представления решений краевой задачи (1), (2) играют важную роль при построении приближенных решений первой краевой задачи для уравнения броуновского движения с малым параметром при старшей производной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горьков Ю.П.* Формула решения одной краевой задачи для стационарного уравнения броуновского движения // Доклады АН СССР. 1974. **223**, № 3. 525–528.
2. *Pagani C.* On the parabolic equation $\operatorname{sgn}(x)\,|x|^p u_y - u_{xx} = 0$ and a related one // Annali di matematica pure ed applicata. 1974. **IV**, N 1. 333–399.

Поступила в редакцию
23.03.2004