2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

doi 10.26089/NumMet.v23r210 УДК 519.63

Численный метод решения нелокальных краевых задач для многомерного уравнения параболического типа

З. В. Бештокова
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-8020-4406, e-mail: zarabaeva@yandex.ru

Аннотация: Работа посвящена нелокальным краевым задачам для многомерного уравнения параболического типа с переменными коэффициентами. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решений нелокальных краевых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения каждой из рассмотренных задач по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи в L_2-норме со скоростью $O(|h|+\tau)$. Для каждой из рассмотренных задач построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров.

Ключевые слова: нелокальные краевые задачи, априорная оценка, уравнение параболического типа, разностные схемы, устойчивость и сходимость разностных схем.

Для цитирования: Бештокова З.В. Численный метод решения нелокальных краевых задач для многомерного уравнения параболического типа // Вычислительные методы и программирование. 2022. **23**, № 2. 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210.

Numerical method for solving a nonlocal boundary value problem for a multidimensional parabolic equation

Zaryana V. Beshtokova
Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS, Nalchik, Russia
ORCID: 0000-0001-8020-4406, e-mail: zarabaeva@yandex.ru

Abstract: The work is devoted to nonlocal boundary value problems for a multidimensional parabolic equation with variable coefficients. The method of energy inequalities is used to obtain a priori estimates in differential and difference interpretations for solutions of nonlocal boundary value problems. The resulting estimates imply the uniqueness and stability of the solution of each of the considered problems with respect to the right-hand side and initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem in the L_2-norm at a rate of $O(|h|+\tau)$. For each of the considered problems, a numerical solution algorithm is constructed, and numerical calculations of test examples are carried out.

Keywords: nonlocal boundary value problems, a priori estimate, parabolic type equation, difference schemes, stability and convergence of difference schemes.

For citation: Z. V. Beshtokova, “Numerical method for solving a nonlocal boundary value problem for a multidimensional parabolic equation,” Numerical Methods and Programming. **23** (2), 153–171 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r210.

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

1. Введение. При исследовании прикладных задач механики сплошной среды, тепло- и массопереноса широко используются методы математического моделирования и вычислительной математики. В качестве основных при исследовании многих процессов в движущихся средах можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос. В газо- и гидродинамике одной из базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи для нестационарных уравнений конвекции–диффузии (т. е. параболических уравнений второго порядка с младшими членами) [1].

Одним из направлений современной теории дифференциальных уравнений с частными производными является постановка новых задач по краевым условиям и поиск методов решения поставленных задач. Последние годы интерес многих ученых вызывают задачи, названные нелокальными. Нелокальными задачами в литературе принято называть такие задачи, в которых вместо обычных точечных ("локальных") граничных условий задаются условия, связывающие значения искомого решения и/или его производных в различных точках границы либо же в точках границы и в каких-либо внутренних точках [2, с. 135]. К первым работам с неклассическими граничными условиями относятся, по-видимому, работы T. Carleman [3], J.R. Canon [4], Л.А. Камынина [5] и А.Ф. Чудновского [6]. Естественность постановки задач, когда краевые условия представляют собой соотношение между значениями неизвестной функции, вычисленной в различных точках границы, отмечалась еще В.А. Стекловым [7].

Настоящая работа посвящена исследованию многомерного уравнения конвекции-диффузии с переменными коэффициентами и граничными условиями интегрального вида. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решений нелокальных краевых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения каждой из рассмотренных задач по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи в L_2-норме со скоростью $O(|h| + \tau)$.

Заметим, что из физических соображений условия интегрального вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины [6]. Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы, при изучении движения почвенной влаги в капиллярно-пористых средах. На задачи подобного типа, как качественно новые и возникающие при решении современных проблем физики, указывает в своей обзорной статье А.А. Самарский [8] и приводит постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач.

Различные классы нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучались многими учеными, здесь отметим лишь работы [9–19], посвящённые краевым задачам для параболических уравнений с интегральным условием.

2. Постановка краевой задачи с нелокальным линейным источником и априорная оценка в дифференциальной форме. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : \ 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)u + \displaystyle\int_0^{l_\alpha} \rho_\alpha(x,t)u(x,t)dx_\alpha - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u$, $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T]$, $\alpha = \overline{1,p}$,

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |r_\alpha(x,t)|, \quad |q_\alpha(x,t)|, \quad |\rho_\alpha(x,t)|, \quad |\beta_{\pm\alpha}(x,t)| \leqslant c_2, \quad c_0, c_1, c_2 = \text{const} > 0. \tag{4}$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре $\overline{Q}_T$.

Обозначим через M_i $(i=1,2,\ldots)$ положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной дифференциальной задачи (1)–(3).

Допуская существование регулярного решения дифференциальной задачи (1)–(3) в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку, для чего воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1) скалярно на u и получим энергетическое тождество:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right)=\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),u\right)+\left(\sum_{\alpha=1}^{p}r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},u\right)-\left(\sum_{\alpha=1}^{p}q_\alpha(x,t)u,u\right)+\Big(f(x,t),u\Big). \quad (5)$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v)=\int_G uv\,dx,\quad \|u\|_0^2=\int_G u^2dx.$$

Введем также обозначение

$$u_x^2=\sum_{\alpha=1}^{p}\left(u_{x_\alpha}\right)^2.$$

Справедлива следующая [20]

Теорема 1. *Пусть Ω — область с гладкой границей $\partial\Omega$. Для элементов $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ определены следы на областях Γ гладких гиперповерхностей как элементы $L_2(\Gamma)$, и они непрерывно меняются. Для них справедливы неравенства вида*

$$\int_\Gamma \big[u(x+le_1)-u(x)\big]^2ds\equiv\|u(x+le_1)-u(x)\|_{2,\,\Gamma}^2\leqslant cl\int_{Q_l(\Gamma)}u_x^2dx,\quad 0\leqslant l\leqslant\delta,$$

и

$$\|u(x)\|_{2,\,\Gamma}^2\leqslant c\left[\frac{1}{\delta}\|u(x)\|_{2,\,Q_\delta(\Gamma)}^2+\delta\|u_x(x)\|_{2,\,Q_\delta(\Gamma)}^2\right],$$

где $e_1=(1,0,0,\ldots,0)$ — единичный вектор нормали к Γ в точке x, а $Q_l(\Gamma)$ — криволинейный цилиндр, образованный отрезками нормалей $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ длины l, выходящими из точек Γ (δ — наибольшая из тех длин l, при которых $Q_l(\Gamma)\subset\Omega$).

Для всех элементов $v(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ с гладкой (или с кусочно-гладкой) границей $\partial\Omega$ справедлива оценка

$$\int_{\partial\Omega}v^2ds\leqslant\bar c_1\int_\Omega\left(|v|\cdot|v_x|+v^2\right)dx\leqslant\bar c_1\int_\Omega\left[\frac{\varepsilon}{\bar c_1}v_x^2+\left(\frac{\bar c_1}{4\varepsilon}+1\right)v^2\right]dx\equiv\int_\Omega\left(\varepsilon v_x^2+c_\varepsilon v^2\right)dx,\quad\varepsilon>0,$$

$c,\bar c_1$ — постоянные, не зависящие от функции $u(x)$.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (5), с учетом теоремы 1:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right)=\int_G u\frac{\partial u}{\partial t}dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2,$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),u\right)=\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}k_\alpha(x,t)u\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^{l_\alpha}dx'-\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx.$$

Для оценки слагаемых в правой части применим ε-неравенство Коши:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},u\right)\leqslant\sum_{\alpha=1}^{p}\left(r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},u\right)\leqslant\varepsilon\|u_x\|_0^2+M_1(\varepsilon)\|u\|_0^2,$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)u, u\right) \leqslant c_0\|u\|_0^2,$$

$$\Big(f(x,t), u\Big) \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2,$$

где $G' = \{x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p) :\ 0 < x_k < l_k, k = 1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, p\}$, $dx' = dx_1 dx_2 \ldots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \ldots dx_p$.

Для простоты введем также обозначение

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p) = (x_\alpha, x').$$

Принимая во внимание полученные преобразования, из (5) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'} u k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_2(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (6)$$

Первое слагаемое в правой части (6), с учетом (2), оценим следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'} u k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' = \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(k_\alpha(l_\alpha, x', t)u_{x_\alpha}(l_\alpha, x', t)u(l_\alpha, x', t) -$$

$$-k_\alpha(0, x', t)u_{x_\alpha}(0, x', t)u(0, x', t)\Big)dx' = \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{+\alpha}(l_\alpha, x', t)u(l_\alpha, x', t) - \beta_{+\alpha}(l_\alpha, x', t)u^2(l_\alpha, x', t) -$$

$$-\beta_{-\alpha}(0, x', t)u^2(0, x', t) - u(0, x', t)\int\limits_0^{l_\alpha}\rho_\alpha(x,t)u(x,t)dx_\alpha + \mu_{-\alpha}(0, x', t)u(0, x', t)\Big)dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\left(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2 + \left(\int\limits_0^{l_\alpha}\rho_\alpha(x,t)u(x,t)dx_\alpha\right)^2 + M_3\left(u^2(0, x', t) + u^2(l_\alpha, x', t)\right)\right)dx' \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M_4\|u_x\|_0^2 + M_5(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\left(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\right)dx'. \quad (7)$$

Тогда из неравенства (6), с учетом (7), находим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leqslant \varepsilon M_6\|u_x\|_0^2 + M_7(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx' + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (8)$$

Проинтегрируем (8) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \leqslant \varepsilon M_8\int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau +$$

$$+ M_9(\varepsilon)\int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{10}\left(\int\limits_0^t\left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\right)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\right). \quad (9)$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{M_8}$, из (9) находим

$$\|u\|_0^2 \leqslant M_{11}\int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{12}\left(\int\limits_0^t\left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\right)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\right). \quad (10)$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

На основании леммы Гроноулла (лемма 1.1 [20, с. 152]) из (10) получаем неравенство

$$\|u\|_0^2 \leqslant M(T)\left(\int\limits_0^t\left(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_{G'}\left(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\right)dx'\right)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\right), \tag{11}$$

где $M(T)$ зависит только от входных данных задачи (1)–(3).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда для решения задачи* (1)–(3) *справедлива априорная оценка* (11).

Из априорной оценки (11) следует единственность решения исходной задачи (1)–(3), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временно́м слое в L_2-норме.

3. Построение разностной схемы. В замкнутой области $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку [21]:

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau=\{(x_i,t_j),\ x\in\overline{\omega}_h,\ t\in\overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h=\prod_{\alpha=1}^p\overline{\omega}_{h_\alpha},\quad \overline{\omega}_{h_\alpha}=\{x_\alpha^{i_\alpha}=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha=l_\alpha\},$$

$$\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,m,\ m\tau=T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\big(|h|+\tau\big)$:

$$y_{\overline{t}}=\Lambda(\widetilde{t})y+\varphi,\quad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{12}$$

$$\begin{cases} a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}=\beta_{-\alpha}\,y_0+\sum\limits_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}p_{i_\alpha}^\alpha y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}h_\alpha-\mu_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ -a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha}=\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}-\mu_{+\alpha}, & x_\alpha=l_\alpha, \end{cases} \tag{13}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{14}$$

где

$$\Lambda(\widetilde{t})=\sum_{\alpha=1}^p\Lambda_\alpha(\widetilde{t}),\quad \Lambda_\alpha(\widetilde{t})y=\big(a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha}+r_\alpha^+y_{x_\alpha}+r_\alpha^-y_{\overline{x}_\alpha}-d_\alpha y,\quad y_{\overline{x}_\alpha}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_\alpha},\quad y_{x_\alpha}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_\alpha},$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)}=a_{\alpha,i_\alpha+1},\ \ y_{\overline{t}}=\frac{y^j-y^{j-1}}{\tau},\ \ y=y^j,\ \ \check{y}=y^{j-1},\ \ r_\alpha=r_\alpha^++r_\alpha^-,\quad |r_\alpha|=r_\alpha^+-r_\alpha^-,\quad r_\alpha^+=0.5(r_\alpha+|r_\alpha|)\geqslant 0,$$

$$r_\alpha^-=0.5(r_\alpha-|r_\alpha|)\leqslant 0,\quad x^{-0.5_\alpha}=x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha-0.5h_\alpha,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,\quad \hbar_\alpha=\begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha=1,2,\ldots,N_\alpha-1,\\ \dfrac{h_\alpha}{2}, & i_\alpha=0,N_\alpha,\end{cases}$$

$$\widetilde{t}=(j+0.5)\tau=t_j+0.5\tau=t_{j+0.5},\quad t_{j+\frac{\alpha}{p}}=t_j+\frac{\alpha\tau}{p}=\left(j+\frac{\alpha}{p}\right)\tau,\quad \beta_{\pm\alpha}=\beta_{\pm\alpha}(x_i,\widetilde{t}_j),\quad \tau,\ h\text{ — шаги сетки},$$

$$a_\alpha=k_\alpha(x^{-0.5_\alpha},\widetilde{t}_j),\quad r_\alpha=r_\alpha(x,\widetilde{t}_j),\quad d_\alpha=q_\alpha(x,\widetilde{t}_j),\quad p^\alpha=\rho_\alpha(x,\widetilde{t}_j),\quad \varphi=f(x,\widetilde{t}_j),\quad \mu_{\pm\alpha}=\mu_{\pm\alpha}(x,\widetilde{t}_j).$$

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы, аппроксимирующей задачу (1)–(3). Для решения задачи (12)–(14) получим априорную оценку, для чего воспользуемся методом энергетических неравенств. Введем скалярное произведение в следующем виде:

$$\big(u,v\big)=\sum_{x\in\omega_h}u(x)v(x)h_1h_2\ldots h_p=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\ldots\sum_{i_p=1}^{N_p-1}u(i_1h_1,i_2h_2,\ldots,i_p\,h_p)v(i_1h_1,i_2h_2,\ldots,i_p\,h_p)h_1h_2\ldots h_p\,;$$

$$(u,v)_\alpha=\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\ldots\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\ldots\sum_{i_p=1}^{N_p-1}u(x)v(x)h_1h_2\ldots h_p=\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}u(x)v(x)h_\alpha\right)H/h_\alpha,$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

$$(u,v]_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\ldots\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\ldots\sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(x)v(x)h_1h_2\ldots h_p = \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} u(x)v(x)h_\alpha\right)H/h_\alpha, \quad H=\prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha.$$

В пространстве функции определим норму и введем ее в таком виде:

$$(u,u)=\|u\|^2, \quad (u,u]=\|u]|^2, \quad (u,v]=\sum_{\alpha=1}^{p}(u,v]_\alpha, \quad (u,v)=\sum_{\alpha=1}^{p}(u,v)_\alpha, \quad \|Y_{\overline{x}}]|^2=\sum_{\alpha=1}^{p}\|Y_{\overline{x}_\alpha}]|^2.$$

Умножим теперь разностное уравнение (12) скалярно на $2\tau y$:

$$2\tau(y_{\overline{t}},y)=2\tau(\Lambda(\widetilde{t})y,y)+2\tau(\varphi,y). \tag{15}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (15), с учетом условий (13) и формулы $2zz_{\overline{t}}=(z^2)_{\overline{t}}+\tau(z_{\overline{t}})^2$:

$$2\tau(y_{\overline{t}},y)=(1,y^2)-(1,\check{y}^2)+\tau^2(1,y_{\overline{t}}^2), \tag{16}$$

$$\Big(\Lambda(\widetilde{t})y,y\Big)=\Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha(\widetilde{t})y,y\Big)=\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\Lambda_\alpha(\widetilde{t})y,y\Big)_\alpha=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\big((a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha},y\big)_\alpha+\big(r_\alpha^+y_{x_\alpha},y\big)_\alpha+\big(r_\alpha^-y_{\overline{x}_\alpha},y\big)_\alpha-\big(d_\alpha y,y\big)_\alpha\Big). \tag{17}$$

Применяя первую разностную формулу Грина в (17) и подставляя преобразованные таким образом выражения в тождество (15), с учетом (16), находим

$$(1,y^2)-(1,\check{y}^2)+\tau^2(1,y_{\overline{t}}^2)+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(a_\alpha,y_{\overline{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha=2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^+y_{x_\alpha},y\big)_\alpha+$$

$$+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^-y_{\overline{x}_\alpha},y\big)_\alpha-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(d_\alpha y,y\Big)_\alpha-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}p_{i_\alpha}^\alpha y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}h_\alpha\right)H/h_\alpha+$$

$$+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}y_{N_\alpha}+\mu_{-\alpha}y_0\right)H/h_\alpha-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^2+\beta_{-\alpha}y_0^2\right)H/h_\alpha+2\tau\big(\varphi,y\big). \tag{18}$$

Используя ε-неравенство Коши и лемму 1 из [22], оценим суммы, входящие в тождество (18):

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\big(a_\alpha,y_{\overline{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha\geqslant c_0\sum_{\alpha=1}^{p}\big(1,y_{\overline{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha=c_0\big(1,y_{\overline{x}}^2\,\big]=c_0\|y_{\overline{x}}]|^2,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^+y_{x_\alpha},y\big)_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^-y_{\overline{x}_\alpha},y\big)_\alpha\leqslant 2c_2\|y_{\overline{x}}]|\,\|y\|\leqslant c_2\left(\varepsilon\|y_{\overline{x}}]|^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|y\|^2\right),$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(d_\alpha y,y\Big)_\alpha\leqslant c_2\|y\|^2,$$

$$-2\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^2+\beta_{-\alpha}y_0^2\right)H/h_\alpha\leqslant 2c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0^2+y_{N_\alpha}^2\right)H/h_\alpha\leqslant$$

$$\leqslant M_1\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\varepsilon\|y_{\overline{x}_\alpha}]|^2+c(\varepsilon)\|y\|^2\right)\leqslant\varepsilon M_1\|y_{\overline{x}}]|^2+M_2(\varepsilon)\|y\|^2, \quad c(\varepsilon)=\frac{1}{l_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon},$$

$$-2\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}p_{i_\alpha}^\alpha y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}h_\alpha\right)H/h_\alpha\leqslant\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0^2+\left(\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}p_{i_\alpha}^\alpha y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}h_\alpha\right)^2\right)H/h_\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0^2+M_2\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\left(y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)^2h_\alpha\right)H/h_\alpha\leqslant\varepsilon M_3\|y_{\overline{x}}]|^2+M_4(\varepsilon)\|y\|^2,$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

$$2\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}y_{N_\alpha}+\mu_{-\alpha}y_0\right)H/h_\alpha\leqslant\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}^2+\mu_{-\alpha}^2\right)H/h_\alpha+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0^2+y_{N_\alpha}^2\right)H/h_\alpha\leqslant\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}^2+\mu_{-\alpha}^2\right)H/h_\alpha+M_5\left(\varepsilon\|y_{\overline{x}}]|^2+c(\varepsilon)\|y\|^2\right),$$

$$(\varphi,y)\leqslant\frac{1}{2}\|y\|^2+\frac{1}{2}\|\varphi\|^2.$$

Учитывая полученные оценки, после несложных преобразований из (18) находим

$$\|y\|^2-\|\check{y}\|^2+2\tau c_0\|y_{\overline{x}}]|^2+\tau^2\|y_{\overline{t}}]|^2\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon M_6\|y_{\overline{x}}]|^2\tau+M_5(\varepsilon)\|y\|^2\tau+M_7\left(\|\varphi\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}^2+\mu_{-\alpha}^2\right)H/h_\alpha\right)\tau. \tag{19}$$

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{c_0}{2M_6}$, из (19) находим неравенство

$$\|y\|^2-\|\check{y}\|^2\leqslant M_8\|y\|^2\tau+M_9\left(\|\varphi\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}^2+\mu_{-\alpha}^2\right)H/h_\alpha\right)\tau. \tag{20}$$

Суммируя (20) по $j\,'$ от 1 до j, получаем

$$\|y^j\|^2\leqslant M_{10}\sum_{j\,'=1}^{j}\|y^{j\,'}\|^2\tau+M_{11}\left(\sum_{j\,'=1}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\right)\tau+\|y^0\|^2\right).$$

Из последнего неравенства имеем

$$\|y^j\|^2\leqslant M_{10}\|y^j\|^2\tau+M_{10}\sum_{j\,'=1}^{j-1}\|y^{j\,'}\|^2\tau+$$

$$+M_{11}\left(\sum_{j\,'=1}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\right)\tau+\|y^0\|^2\right). \tag{21}$$

Выбрав $\tau_0=\dfrac{1}{2M_{10}}$, из (21) получим, что для всех $\tau\leqslant\tau_0$ имеет место неравенство

$$\|y^j\|^2\leqslant M_{12}\sum_{j\,'=1}^{j-1}\|y^{j\,'}\|^2\tau+M_{13}\left(\sum_{j\,'=1}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\right)\tau+\|y^0\|^2\right). \tag{22}$$

На основании аналога леммы Гронуолла [23, с. 171] для сеточной функции из неравенства (22) получаем априорную оценку

$$\|y^j\|^2\leqslant M(T)\left(\sum_{j\,'=1}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\right)\tau+\|y^0\|^2\right), \tag{23}$$

где $M(T)$ — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Из этой априорной оценки следует следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи* (12)–(14) *при достаточно малом* $\tau\leqslant\tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ *справедлива априорная оценка* (23) *на каждом временно́м слое в сеточной норме* $L_2(G)$.

Таким образом, доказаны единственность и устойчивость решения разностной задачи (12)–(14) по начальным данным и правой части в сеточной норме $L_2(G)$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ – решение разностной задачи (12)–(14). Обозначим через $z_i^j=y_i^j-u_i^j$ погрешность аппроксимации, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в (12)–(14), получим задачу для z:

$$z_{\overline{t}}=\Lambda(\widetilde{t})z+\Psi,\quad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{24}$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

$$\begin{cases} a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha}\, z_0 + \sum\limits_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} p^\alpha_{i_\alpha} z_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} h_\alpha - \nu_{-\alpha}, \quad x = 0, \\ -a_\alpha z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} = \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}, \quad x = l_\alpha, \end{cases} \tag{25}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{26}$$

где $\Psi = O\big(|h| + \tau\big),\ \nu_{-\alpha} = O\big(|h| + \tau\big),\ \nu_{+\alpha} = O\big(|h| + \tau\big)$ — погрешности аппроксимации на решении задачи (1)–(3).

Применяя априорную оценку (23) к решению задачи (24)–(26), получим

$$\|z^j\|^2 \leqslant M \sum_{j\,'=1}^{j} \left(\|\psi^{j\,'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left((\nu_{+\alpha}^{j'})^2 + (\nu_{-\alpha}^{j'})^2 \right) H/h_\alpha \right) \tau, \tag{27}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Из априорной оценки (27) следует сходимость схемы (12)–(14) со скоростью $O(|h| + \tau)$ в сеточной норме $L_2(G)$, где $|h| = h_1 + h_2 + \ldots + h_p$.

5. Алгоритм численного решения дифференциальной задачи (1)–(3). Перепишем нелокальную краевую задачу (1)–(3) при $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2,\ p = 2$, тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) +$$
$$+ r_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + r_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q_1(x_1,x_2,t)u - q_2(x_1,x_2,t)u + f(x_1,x_2,t), \tag{28}$$

$$\begin{cases} k_1(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \beta_{-1}(x,t)u + \displaystyle\int_0^{l_1} \rho_1(x,t)u dx_1 - \mu_{-1}(x,t), \quad x_1 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_1(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \beta_{+1}(x,t)u - \mu_{+1}(x,t), \quad x_1 = l_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ k_2(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \beta_{-2}(x,t)u + \displaystyle\int_0^{l_2} \rho_1(x,t)u dx_2 - \mu_{-2}(x,t), \quad x_2 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_2(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \beta_{+2}(x,t)u - \mu_{+2}(x,t), \quad x_2 = l_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{29}$$

$$u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2). \tag{30}$$

Рассмотрим сетку $x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ \alpha = 1,2,\ t_j = j\tau,$ где $i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha,\ h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha,\ j = 0,1,\ldots,m,\ \tau = T/m$. Вводится один дробный шаг $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + 0.5\tau$. Обозначим через $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{k}{2}} = y^{j+\frac{k}{2}} = y(i_1h_1, i_2h_2, (j+0.5k)\tau),\ k = 0,1,\ \ j = 0,1,2,\ldots,j_0$ сеточную функцию.

Для численного решения двумерной задачи (28)–(30) построим локально-одномерную схему, тогда имеем

$$\begin{cases} \dfrac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \varphi_1, \\ \dfrac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y_{1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \\ y_{i_1,0}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) y_{i_1,1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}), \\ y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}), \end{cases} \tag{32}$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

$$y^0_{i_1,i_2} = u_0(i_1h_1, i_2h_2), \tag{33}$$
$$\Lambda_\alpha(\widetilde{t})y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} + r^+_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}_{x_\alpha} + r^-_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}},\ \alpha = 1,2,$$
$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2}f(x_1,x_2,t_{j+0.5\alpha}) \text{ или } \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = f(x_1,x_2,t_{j+1}).$$

Приведем расчетные формулы для решения схемы (31)–(33).

На первом этапе находим решение $y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2-1}$ решается задача

$$A_{1(i_1,i_2)}y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1-1,i_2} - C_{1(i_1,i_2)}y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2} + B_{1(i_1,i_2)}y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1+1,i_2} = -F^{j+\frac{1}{2}}_{1(i_1,i_2)},\ 0 < i_1 < N_1, \tag{34}$$
$$y^{j+\frac{1}{2}}_{0,i_2} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}})y^{j+\frac{1}{2}}_{1,i_2} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}),$$
$$y^{j+\frac{1}{2}}_{N_1,i_2} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}})y^{j+\frac{1}{2}}_{N_1-1,i_2} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}),$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2} - \frac{(r_1^-)_{i_1,i_2}}{h_1},\quad B_{1(i_1,i_2)} = \frac{(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2} + \frac{(r_1^+)_{i_1,i_2}}{h_1},$$
$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{p}(d_1)_{i_1,i_2},\quad F^{j+\frac{1}{2}}_{1(i_1,i_2)} = \frac{1}{\tau}y^j_{i_1,i_2} + \varphi_{1(i_1,i_2)},$$
$$\varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\dfrac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}}{\dfrac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac{1}{2}}_{-1,i_2}},\quad \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\dfrac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}}{\dfrac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac{1}{2}}_{+1,i_2}},$$
$$\mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\mu_{-1}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) + \sum\limits_{i_1=0}^{N_1} p_1 y^j_{i_1,i_2}\hbar_1}{\dfrac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac{1}{2}}_{-1,i_2}},\quad \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\mu_{+1}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) + \sum\limits_{i_1=0}^{N_1} p_2 y^j_{i_1,i_2}\hbar_1}{\dfrac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac{1}{2}}_{+1,i_2}}.$$

На втором этапе находим решение $y^{j+1}_{i_1,i_2}$. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N_1-1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2-1} - C_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2} + B_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2+1} = -F^{j+1}_{2(i_1,i_2)},\ 0 < i_2 < N_2, \tag{35}$$
$$y^{j+1}_{i_1,0} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1})y^{j+1}_{i_1,1} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}),$$
$$y^{j+1}_{i_1,N_2} = \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1})y^{j+1}_{i_1,N_2-1} + \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}),$$

где

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2} - \frac{(r_2^-)_{i_1,i_2}}{h_2},\quad B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} + \frac{(r_2^+)_{i_1,i_2}}{h_2},$$
$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{p}(d_2)_{i_1,i_2},\ F^{j+1}_{2(i_1,i_2)} = \frac{1}{\tau}y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2} + \varphi_{2(i_1,i_2)},$$
$$\varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\dfrac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\dfrac{(a_2)_{i_1,1}}{h_1} + \beta^{j+1}_{-2,i_1}},\quad \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\dfrac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}}{\dfrac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + \beta^{j+1}_{+2,i_1}},$$
$$\mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\mu_{-2}(i_1h_1, t_{j+1}) + \sum\limits_{i_2=0}^{N_2} p_1 y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2}\hbar_2}{\dfrac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2} + \beta^{j+1}_{-2,i_1}},\quad \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\mu_{+2}(i_1h_1, t_{j+1}) + \sum\limits_{i_2=0}^{N_2} p_2 y^{j+\frac{1}{2}}_{i_1,i_2}\hbar_2}{\dfrac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + \beta^{j+1}_{+2,i_1}}.$$

Как можно видеть, нелокальное условие в граничном условии приводит к нарушению трехдиагональной структуры матрицы коэффициентов разностной схемы. Поэтому для решения полученных систем разностных уравнений (34), (35) методом прогонки [21, с. 40] можно получить трехдиагональную структуру матрицы коэффициентов разностных схем, если брать значение искомой сеточной функции при вычислении суммы в граничном условии (13) с нижнего слоя.

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

6. Постановка краевой задачи с эффектом памяти и априорная оценка в дифференциальной форме. В задаче (1)–(3) заменим условия (2) условиями вида

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)u + \displaystyle\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(x,\tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{36}$$

где $|\rho(t,\tau)| \leqslant c_2$.

Допуская существование регулярного решения задачи (1), (36), (3) в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для этого воспользуемся методом энергетических неравенств. Повторяя рассуждения (5)–(6), получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{37}$$

Пользуясь теоремой 1 и ε-неравенством Коши, первое слагаемое в правой части (37), с учетом (36), оценим следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' = \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(k_\alpha(l_\alpha,x',t)u_x(l_\alpha,x',t)u(l_\alpha,x',t) - k_\alpha(0,x',t)u_x(0,x',t)u(0,x',t)\Big)dx' =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)u(l_\alpha,x',t) - \beta_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)u^2(l_\alpha,x',t) - \beta_{-\alpha}(0,x',t)u^2(0,x',t) -$$

$$- u(0,x',t)\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l_\alpha,x',\tau)d\tau + u(0,x',t)\mu_{-\alpha}(0,x',t)\Big)dx' \leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2 +$$

$$+ M_2(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \varepsilon\int\limits_0^t\|u_x\|_0^2 d\tau + M_3(\varepsilon)\int\limits_0^t\|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'. \tag{38}$$

Тогда из неравенства (37), с учетом (38), находим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leqslant \varepsilon M_4\|u_x\|_0^2 + M_5(\varepsilon)\|u\|_0^2 +$$

$$+ \varepsilon\int\limits_0^t\|u_x\|_0^2 d\tau + M_6(\varepsilon)\int\limits_0^t\|u\|_0^2 d\tau + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx' + \|f\|_0^2. \tag{39}$$

Проинтегрируем (39) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t\|u_x\|_0^2 d\tau \leqslant \varepsilon M_7\int\limits_0^t\|u_x\|_0^2 d\tau + M_8(\varepsilon)\int\limits_0^t\|u\|_0^2 d\tau + \varepsilon M_9\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\|u_x\|_0^2 d\tau_1 d\tau +$$

$$+ M_{10}(\varepsilon)\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\|u\|_0^2 d\tau_1 d\tau + M_{11}\left(\int\limits_0^t\left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\right)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\right). \tag{40}$$

Оценим третье и четвертое слагаемые в правой части неравенства (40) следующим образом:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\|u_x\|_0^2 d\tau_1 d\tau \leqslant T\int\limits_0^t\|u_x\|_0^2 d\tau, \qquad \int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\|u\|_0^2 d\tau_1 d\tau \leqslant T\int\limits_0^t\|u\|_0^2 d\tau.$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

С учетом последнего из (40) находим

$$\|u\|_0^2+\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau\leqslant\varepsilon M_{12}\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau++M_{13}(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+$$

$$+M_{14}\Bigg(\int_0^t\Bigg(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^p\int_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\Bigg).\tag{41}$$

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{1}{M_{12}}$, из (41) находим

$$\|u\|_0^2\leqslant M_{15}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_{14}\Bigg(\int_0^t\Bigg(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^p\int_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\Bigg).\tag{42}$$

На основании леммы Гронуолла (лемма 1.1 [20, с. 152]) из (42) получаем неравенство

$$\|u\|_0^2\leqslant M(T)\Bigg(\int_0^t\Bigg(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^p\int_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\Bigg),\tag{43}$$

где $M(T)$ зависит только от входных данных задачи (1), (36), (3).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (4)*, тогда для решения задачи* (1)*,* (36)*,* (3) *справедлива априорная оценка* (43)*.*

Из априорной оценки (43) следует единственность решения исходной задачи (1), (36), (3), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временно́м слое в L_2-норме.

7. Устойчивость и сходимость разностной схемы, аппроксимирующей задачу (1),(3),(36). На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (36), (3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\big(|h|+\tau\big)$:

$$y_{\overline{t}}=\Lambda(\widetilde{t})y+\varphi,\quad (x,t)\in\omega_{h\tau},\tag{44}$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}=\beta_{-\alpha}\,y_0+\sum_{s=0}^j p_{s,j}y_0^s\tau-\mu_{-\alpha},\quad x_\alpha=0,\tag{45}$$

$$-\,a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha}=\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}-\mu_{+\alpha},\quad x_\alpha=l_\alpha,\tag{46}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{47}$$

где $\Lambda(\widetilde{t})=\sum\limits_{\alpha=1}^p\Lambda_\alpha(\widetilde{t})$, $\quad\Lambda_\alpha(\widetilde{t})y=\big(a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha}+r_\alpha^+y_{x_\alpha}+r_\alpha^-y_{\overline{x}_\alpha}-d_\alpha y,\quad \rho(t,\tau)=p_{s,j}$.

Для решения задачи (44)–(47) получим априорную оценку, для чего воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим разностное уравнение (44) скалярно на $2\tau y$:

$$2\tau(y_{\overline{t}},y)=2\tau(\Lambda(\widetilde{t})y,y)+2\tau(\varphi,y).\tag{48}$$

Следуя рассуждениям (16)–(19), оценим следующее выражение:

$$-2\sum_{\alpha=1}^p\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0\sum_{s=0}^j p_{s,j}y_0^s\tau\right)H/h_\alpha\leqslant\sum_{\alpha=1}^p\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0^2+\left(\sum_{s=0}^j p_{s,j}y_0^s\tau\right)^2\right)H/h_\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\alpha=1}^p\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(y_0^2+M_2\sum_{s=0}^j\left(y_0^s\right)^2\tau\right)H/h_\alpha\leqslant\varepsilon\|y_{\overline{x}}]|^2+c(\varepsilon)\|y\|^2+M_1\sum_{s=0}^j\Big(\varepsilon\|y_{\overline{x}}^s]|^2+c(\varepsilon)\|y^s\|^2\Big)\tau.\tag{49}$$

Тогда, учитывая (16)–(19), (49), после несложных преобразований из (48) получим неравенство

$$\|y\|^2-\|\check{y}\|^2+\sum_{\alpha=1}^p\big(a_\alpha,y_{\overline{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha+\tau^2\|y_{\overline{t}}]|^2\leqslant\varepsilon M_2\|y_{\overline{x}}]|^2\tau+M_3(\varepsilon)\|y\|^2\tau+$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

$$+\varepsilon M_4\sum_{s=0}^{j}\|y_{\bar x}^{s}]|^2\tau+M_5(\varepsilon)\sum_{s=0}^{j}\|y^s\|^2\tau+M_6\Big(\|\varphi\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{+\alpha}^2+\mu_{-\alpha}^2\right)H/h_\alpha\Big)\tau. \tag{50}$$

Заменив τ на $\bar\tau$ и умножив затем обе части на τ, просуммируем (50) по $j\,'$ от 1 до j. Тогда получим

$$\|y^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\tau\leqslant\varepsilon M_7\sum_{j\,'=1}^{j}\|y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\tau+M_8(\varepsilon)\sum_{j\,'=1}^{j}\|y^{j\,'}\|^2\tau+$$

$$+\varepsilon M_9\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|y_{\bar x}^{s}]|^2\bar\tau\tau+M_{10}(\varepsilon)\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|y^s\|^2\bar\tau\tau+$$

$$+M_{11}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\varphi^{j\,'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\Big)\tau. \tag{51}$$

Третье и четвертое слагаемые в правой части (51) оценим так:

$$\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|y_{\bar x}^{s}]|^2\bar\tau\tau\leqslant T\sum_{j\,'=1}^{j}\|y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\tau,\qquad\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|y^s\|^2\bar\tau\tau\leqslant T\sum_{j\,'=1}^{j}\|y^{j\,'}\|^2\tau.$$

В силу последнего из (51) имеем

$$\|y^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\tau\leqslant\varepsilon M_{12}\sum_{j\,'=1}^{j}\|y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\tau+M_{13}(\varepsilon)\sum_{j\,'=1}^{j}\|y^{j\,'}\|^2\tau+$$

$$+M_{14}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\varphi^{j\,'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\Big)\tau. \tag{52}$$

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{1}{M_{12}}$, из последнего находим

$$\|y^j\|^2\leqslant M_{14}\sum_{j\,'=1}^{j}\|y^{j\,'}\|^2\tau+M_{15}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\varphi^{j\,'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\Big)\tau=$$

$$=M_{14}\|y^j\|^2\tau+M_{14}\sum_{j\,'=1}^{j-1}\|y^{j\,'}\|^2\tau+M_{15}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\varphi^{j\,'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\Big)\tau. \tag{53}$$

Выбрав $\tau_0=\dfrac{1}{2M_{14}}$, из (52) получим, что для всех $\tau\leqslant\tau_0$ имеет место неравенство

$$\|y^j\|^2\leqslant M_{16}\sum_{j\,'=1}^{j-1}\|y^{j\,'}\|^2\tau+M_{17}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\varphi^{j\,'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\Big)\tau. \tag{54}$$

На основании аналога леммы Гронуолла для сеточной функций [21, с. 171] из (53) получаем априорную оценку

$$\|y^j\|^2\leqslant M(T)\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\varphi^{j\,'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left((\mu_{+\alpha}^{j'})^2+(\mu_{-\alpha}^{j'})^2\right)H/h_\alpha\Big)\tau, \tag{55}$$

где $M(T)$ — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Тогда справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи* (44)–(47) *при достаточно малом* $\tau\leqslant\tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ *справедлива априорная оценка* (54) *на каждом временно́м слое в сеточной норме* $L_2(G)$.

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

Таким образом, доказаны единственность и устойчивость решения разностной задачи (44)–(47) по начальным данным и правой части в сеточной норме $L_2(G)$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1), (36), (3), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ – решение разностной задачи (44)–(47). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации. Тогда, подставляя $y=z+u$ в (44)–(47), получим задачу для z:

$$z_{\overline{t}} = \Lambda(\widetilde{t})z + \Psi, \quad (x,t)\in\omega_{h\tau}\,, \tag{56}$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha}\, z_0 + \sum_{s=0}^{j} p_{s,j}^{\alpha} z_0^s \tau - \nu_{-\alpha}, \quad x=0, \tag{57}$$

$$-\,a_\alpha z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} = \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}, \quad x=l_\alpha, \tag{58}$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{59}$$

где $\Psi = O\big(|h|+\tau\big),\ \nu_{-\alpha}=O\big(|h|+\tau\big),\ \nu_{+\alpha}=O\big(|h|+\tau\big)$ — погрешности аппроксимации на решении задачи (1), (36), (3).

Применяя априорную оценку (54) к решению задачи (55)–(58), получим

$$\|z^j\|^2 \leqslant M\sum_{j\,'=1}^{j}\left(\|\psi^{j\,'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\Big((\nu_{+\alpha}^{j'})^2 + (\nu_{-\alpha}^{j'})^2\Big)\,H/h_\alpha\right)\tau, \tag{60}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Из априорной оценки (59) следует сходимость схемы (44)–(47) со скоростью $O(|h|+\tau)$ в сеточной норме $L_2(G)$, где $|h| = h_1+h_2+\ldots+h_p$.

8. Алгоритм численного решения дифференциальной задачи (1), (36), (3). Перепишем нелокальную краевую задачу (1), (36), (3) при $0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=1,2,\ p=2$, тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + r_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1} +$$
$$+\, r_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q_1(x_1,x_2,t)u - q_2(x_1,x_2,t)u + f(x_1,x_2,t), \tag{61}$$

$$k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)u + \int_0^t \rho(t,\tau)u(x,\tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{62}$$

$$-\,k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{63}$$

$$u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2). \tag{64}$$

Рассмотрим сетку $x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ \alpha=1,2,\ t_j=j\tau,$ где $i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ j=0,1,\ldots,m,\ \tau = T/m$. Вводится один дробный шаг $t_{j+\frac12} = t_j + 0.5\tau$. Обозначим через $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{k}{2}} = y^{j+\frac{k}{2}} = y(i_1h_1, i_2h_2, (j+0.5k)\tau),\ k=0,1,\ \ j=0,1,2,\ldots,j_0$ сеточную функцию.

Для численного решения двумерной задачи (60)–(63) построим локально-одномерную схему, тогда имеем

$$\begin{cases} \dfrac{y^{j+\frac12}-y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac12} + \varphi_1, \\[2mm] \dfrac{y^{j+1}-y^{j+\frac12}}{\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \tag{65}$$

$$\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+\frac12} = \varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12})y_{1,i_2}^{j+\frac12} + \widetilde{\varkappa}_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12})y_{N_1,i_2}^{j+\frac12} + \mu_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac12} = \varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12})y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac12} + \mu_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12}), \\ y_{i_1,0}^{j+1} = \varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1} + \widetilde{\varkappa}_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,N_2}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}), \\ y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}), \end{cases} \tag{66}$$

$$y^0_{i_1,i_2} = u_0(i_1h_1, i_2h_2), \tag{67}$$

$$\Lambda_\alpha(\widetilde{t})y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} + r^+_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}_{x_\alpha} + r^-_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}},\ \alpha = 1,2,$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2}f(x_1,x_2,t_{j+0.5\alpha}) \text{ или } \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = f(x_1,x_2,t_{j+1}).$$

Приведем расчетные формулы для решения схемы (64)–(66).

На первом этапе находим решение $y^{j+\frac12}_{i_1,i_2}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2-1}$ решается задача

$$A_{1(i_1,i_2)}y^{j+\frac12}_{i_1-1,i_2} - C_{1(i_1,i_2)}y^{j+\frac12}_{i_1,i_2} + B_{1(i_1,i_2)}y^{j+\frac12}_{i_1+1,i_2} = -F^{j+\frac12}_{1(i_1,i_2)},\ 0 < i_1 < N_1, \tag{68}$$

$$y^{j+\frac12}_{0,i_2} = \varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12})y^{j+\frac12}_{1,i_2} + \widetilde{\varkappa}_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12})y^{j+\frac12}_{N_1,i_2} + \mu_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12}),$$

$$y^{j+\frac12}_{N_1,i_2} = \varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12})y^{j+\frac12}_{N_1-1,i_2} + \mu_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12}),$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2} - \frac{(r_1^-)_{i_1,i_2}}{h_1},\quad B_{1(i_1,i_2)} = \frac{(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2} + \frac{(r_1^+)_{i_1,i_2}}{h_1},$$

$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}(d_1)_{i_1,i_2},\quad F^{j+\frac12}_{1(i_1,i_2)} = \frac{1}{\tau}y^j_{i_1,i_2} + (\varphi_1)_{i_1,i_2},$$

$$\varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12}) = \frac{\dfrac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}}{\dfrac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac12}_{-1,i_2}},\quad \widetilde{\varkappa}_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12}) = \frac{\dfrac{\tau}{2}p_{1,j,j}}{\dfrac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac12}_{-1,i_2}},$$

$$\mu_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12}) = \frac{\mu_{-1}(i_2h_2,t_{j+\frac12}) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j}p_{1,j,s}y^s_{N_1,i_2}\tau}{\dfrac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac12}_{-1,i_2}},$$

$$\varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12}) = \frac{\dfrac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}}{\dfrac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac12}_{+1,i_2}} = 1,\quad \mu_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12}) = \frac{\mu_{+1}(i_2h_2,t_{j+\frac12}) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j}p_{2,j,s}y^s_{0,i_2}\tau}{\dfrac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta^{j+\frac12}_{+1,i_2}}.$$

На втором этапе находим решение $y^{j+1}_{i_1,i_2}$. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N_1-1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2-1} - C_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2} + B_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2+1} = -F^{j+1}_{2(i_1,i_2)},\ 0 < i_2 < N_2, \tag{69}$$

$$y^{j+\frac12}_{i_1,0} = \varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y^{j+1}_{i_1,1} + \widetilde{\varkappa}_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y^{j+1}_{i_1,N_2} + \mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}),$$

$$y^{j+1}_{i_1,N_2} = \varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y^{j+1}_{i_1,N_2-1} + \mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}),$$

где

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2} - \frac{(r_2^-)_{i_1,i_2}}{h_2},\quad B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} + \frac{(r_2^+)_{i_1,i_2}}{h_2},$$

$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}(d_2)_{i_1,i_2},\quad F^{j+\frac12}_{2(i_1,i_2)} = \frac{1}{\tau}y^j_{i_1,i_2} + (\varphi_1)_{i_1,i_2},$$

$$\varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\dfrac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\dfrac{(a_2)_{i_1,1}}{h_1} + \beta^{j+1}_{-2,i_1}},\quad \widetilde{\varkappa}_{21}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\dfrac{\tau}{2}p_{1,j,j}}{\dfrac{(a_2)_{i_1,1}}{h_1} + \beta^{j+1}_{-2,i_1}},$$

$$\mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\mu_{-2}(i_1h_1,t_{j+1}) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j}p_{1,j,s}y^{s+\frac12}_{i_1,N_2}\tau}{\dfrac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2} + \beta^{j+1}_{-2,i_1}},$$

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

$$\varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\dfrac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}}{\dfrac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + \beta_{+2,i_1}^{j+1}} = 1, \qquad \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\mu_{+2}(i_1h_1, t_{j+1}) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^{j} p_{2,j,s} y_{i_1,0}^{s+\frac{1}{2}} \tau}{\dfrac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} + \beta_{+2,i_1}^{j+1}}.$$

Как можно видеть, нелокальное условие в граничном условии (45) приводит к нарушению трехдиагональной структуры матрицы коэффициентов разностной схемы (64)–(66), поэтому для решения каждой из задач (67), (68) применяется метод окаймления [24, с. 187]. С помощью этого метода решение каждой задачи (67), (68) сводится к решению двух систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов [25, 26], решение каждой из которых находится известным методом прогонки [21, с. 40].

Для решения полученных систем разностных уравнений (34), (35), (67), (68) также можно использовать итерационные методы решения. При решении полученной алгебраической задачи $Ay = f$ итерационным методом, где A — матрица коэффициентов системы разностных уравнений, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия сходимости итерационного процесса:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \qquad \|Ay_k - f\| \leqslant \varepsilon \|Ay_0 - f\|, \qquad \|y_k - y\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

9. Тестовая задача и численные результаты. Коэффициенты уравнения и граничных условий дифференциальных задач (1)–(3) и (1), (36), (3) подбираются таким образом, чтобы точным решением каждой из задач при $p = 2$ была функция

$$u(x,t) = t^3(x_1^4 + x_2^4).$$

В табл. 1–4 при уменьшении шагов сетки приведены максимальные значения погрешности ($z = y - u$) и вычислительный (апостериорный) порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где

Таблица 1. Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении шагов сетки для задачи (1)–(3)

Table 1. The error in the norm $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ when decreasing grid size for problem (1)–(3)

$\bar{h}$	Максимальная погрешность Maximum error	ПС$_1$ CO$_1$	ПС$_2$ CO$_2$
1/10	1.032637015		
1/20	0.547813706	0.914575949	0.200892451
1/40	0.281603185	0.960021708	0.343534224
1/80	0.142720882	0.980467215	0.444284024
1/160	0.071841399	0.990309082	0.518857968
1/320	0.036041221	0.995167572	0.576093455

Таблица 2. Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении шагов сетки для задачи (1)–(3)

Table 2. The error in the norm $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ when decreasing grid size for problem (1)–(3)

$\bar{h}$	Максимальная погрешность Maximum error	ПС$_1$ CO$_1$	ПС$_2$ CO$_2$
1/10	1.044516941		
1/20	0.537693875	0.957978946	0.207116601
1/40	0.276630161	0.958826576	0.348364276
1/80	0.143524709	0.946659326	0.443002343
1/160	0.074316082	0.949552780	0.512184999
1/320	0.037822868	0.974415684	0.567728700

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

Таблица 3. Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$
при уменьшении шагов сетки для задачи (1), (36), (3)

Table 3. The error in the norm $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ when decreasing grid size for problem (1), (36), (3)

$\bar{h}$	Максимальная погрешность Maximum error	ПС$_1$ CO$_1$	ПС$_2$ CO$_2$
1/10	0.761603659		
1/20	0.420323759	0.857539400	0.289321584
1/40	0.225420126	0.898884680	0.403859602
1/80	0.113923876	0.984546188	0.495712369

Таблица 4. Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
при уменьшении шагов сетки для задачи (1), (36), (3)

Table 4. The error in the norm $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ when decreasing grid size for problem (1), (36), (3)

$\bar{h}$	Максимальная погрешность Maximum error	ПС$_1$ CO$_1$	ПС$_2$ CO$_2$
1/10	0.887284182		
1/20	0.469849020	0.917199009	0.252139977
1/40	0.248699773	0.917792048	0.377217216
1/80	0.130161211	0.934105605	0.465305594

$\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(\bar{h}+\tau)$.

Вычислительный (апостериорный) порядок сходимости будем определять по двум формулам

$$\text{ПС}_1 = \log_2 \frac{||z_1||}{||z_2||}, \qquad \text{ПС}_2 = \frac{\ln ||z_2||}{\ln \bar{h}},$$

где z_1 и z_2 — погрешности, соответствующие шагам $0,5\bar{h}$ и $\bar{h}$.

10. Заключение. В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для многомерного уравнения параболического типа с переменными коэффициентами и граничными условиями интегрального вида. Методом энергетических неравенств для решения каждой из нелокальных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи в L_2-норме со скоростью $O(|h|+\tau)$. Для каждой из рассмотренных задач построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров.

Список литературы

1. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Эдиториал, 2004.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
3. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrates et ses applications // Verh. Internat. Math. Kongr. 1932. **1**. 138–151.
4. *Canon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. **21**, N 2. 155–160.
5. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. **4**, № 6. 1006–1024.
6. *Чудновский А.Ф.* Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сб. трудов АФИ. 1969. № 23. 41–54.

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

7. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
8. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. **16**, № 11. 1925–1935. http://mi.mathnet.ru/de4116. Cited May 30, 2022.
9. *Кожанов А.И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференциальные уравнения. 2004. **40**, № 6. 763–774. http://mi.mathnet.ru/de11086. Cited May 30, 2022.
10. *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. **42**, № 9. 1166–1179. http://mi.mathnet.ru/de11554. Cited May 30, 2022.
11. *Пулькина Л.С.* О разрешимости в L2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. **36**, № 2. 279–280. http://mi.mathnet.ru/de10101. Cited May 30, 2022.
12. *Данилкина О.Ю.* Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2007. **1**, № 14. 5–9. http://mi.mathnet.ru/vsgtu480. Cited May 30, 2022.
13. *Тагиев Р.К., Габибов В.М.* Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для параболического уравнения с интегральным условием // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 50. 30–44. http://mi.mathnet.ru/vtgu616. Cited May 30, 2022.
14. *Критская Е.А., Смагин В.В.* О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем. 2008. № 1. 222–225. http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2008/01/kritzkaya.pdf. Cited May 30, 2022.
15. *Пулькина Л.С., Савенкова А.Е.* Задача с нелокальным по времени условием для многомерного гиперболического уравнения // Изв. вузов. Матем. 2016. № 10. 41–52. http://www.mathnet.ru/links/f4874abe19f06cf46efd0e13d9abaa14/ivm9163.pdf. Cited May 30, 2022.
16. *Попов Н.С.* О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // Математические заметки СВФУ. 2016. **13**, № 1. 79–86. http://www.mathnet.ru/links/eb7d3c7cb0c7de0a204012cbff688616/svfu17.pdf. Cited May 30, 2022.
17. *Уринов А.К., Нишонова Ш.Т.* Задача с интегральными условиями для эллиптико-параболического уравнения // Матем. заметки. 2017. **102**, № 1. 81–95. doi 10.4213/mzm10674.
18. *Nam D.H.Q., Baleanu D., Luc N.H., Can N.H.* On a Kirchhoff diffusion equation with integral condition // Adv. Differ. Equ. 2020. **2020**, № 1. 617. https://link.springer.com/article/10.1186/s13662-020-03077-y. Cited May 30, 2022.
19. *Дмитриев В.Б.* Краевая задача с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерного уравнения IV порядка // Вестн. СамУ. Естественно-научн. сер. 2021. **27**, № 1. 15–28. http://www.mathnet.ru/links/d09ac87e549829361bda4a7ba7e5389d/vsgu644.pdf. Cited May 30, 2022.
20. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
21. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
22. *Андреев В.Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. **8**, № 6. 1218–1231.
23. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
24. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.
25. *Абрамов А.А., Андреев В.Б.* О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. **3**, № 2. 377–381.
26. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
27. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
13 апреля 2022 г.

Принята к публикации
19 мая 2022 г.

Информация об авторе

Зарьяна Владимировна Бештокова — младший научный сотрудник, отдел вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, ул. Шортанова, 89 а, 360000, Нальчик, Российская Федерация.

References

1. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Convection–Diffusion Problems* (Editorial, Moscow, 2004) [in Russian].
2. A. M. Nakhushev, *Equations of Mathematical Biology* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1995) [in Russian].
3. T. Carleman, “Sur la Théorie des Équations Intégrales et ses Applications,” in *Actes Verh. Internat. Math. Kongr., Zürich, Switzerland, September 5–12, 1932* (Orel Füssli, Zürich, 1933), Vol. 1, pp. 138–151.
4. J. R. Canon, “The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy,” Quart. Appl. Math. **21** (2), 155–160 (1963). doi 10.1090/qam/160437.
5. L. I. Kamynin, “ A Boundary Value Problem in the Theory of Heat Conduction with a Nonclassical Boundary Condition,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **4** (6), 1006–1024 (1964). [USSR Comput. Math. Math. Phys. **4** (6), 33–59 (1964)]. doi 10.1016/0041-5553(64)90080-1.
6. A. F. Chudnovsky, “Some Corrections in the Formulation and Solution of Problems of Heat and Moisture Transfer in Soil,” Proc. Agrophysical Inst. Issue 23, 41–54 (1969).
7. V. A. Steklov, *Fundamental Problems in Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
8. A. A. Samarskii, “Some Problems in the Theory of Differential Equations,” Differ. Uravn. **16** (11), 1925–1935 (1980). http://mi.mathnet.ru/de4116. Cited May 30, 2022.
9. A. I. Kozhanov, “On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation,” Differ. Uravn. **40** (6), 763–774 (2004) [Differ. Equ. **40** (6), 815–826 (2004)]. http://mi.mathnet.ru/de11086. Cited May 30, 2022.
10. A. I. Kozhanov and L. S. Pulkina, “On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimensional Hyperbolic Equations,” Differ. Uravn. **42** (9), 1166–1179 (2006) [Differ. Equ., **42** (9), 1233–1246 (2006).] http://mi.mathnet.ru/de11554. Cited May 30, 2022.
11. L. S. Pulkina, “Solvability in L_2 of a Nonlocal Problem with Integral Conditions for a Hyperbolic Equation,” Differ. Uravn. **36** (2), 279–280 (2000) [Differ. Equ. **36** (2), 316–318 (2000)]. http://mi.mathnet.ru/de10101. Cited May 30, 2022.
12. O. Yu. Danilkina, “On One Nonlocal Problem for the Heat Equation with an Integral Condition,” Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. **1** (14), 5–9 (2007). http://mi.mathnet.ru/vsgtu480. Cited May 30, 2022.
13. R. K. Tagiev and V. M. Gabibov, “Difference Approximation and Regularization of the Optimal Control Problem for a Parabolic Equation with an Integral Condition,” Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. No 50, 30–44 (2017). http://mi.mathnet.ru/vtgu616. Cited May 30, 2022.
14. E. A. Kritskaya and V. V. Smagin, “On the Weak Solvability of a Parabolic Variational Problem with an Integral Condition,” Vestn. Voronezh. State Univ. Ser. Phys. Math. No 1, 222–225 (2008). http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2008/01/kritzkaya.pdf. Cited May 30, 2022.
15. L. S. Pul’kina and A. E. Savenkova, “A Problem with a Nonlocal, with Respect to Time, Condition for Multidimensional Hyperbolic Equations,” Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 10, 41–52 (2016) [Russ. Math. **60** (10), 33–43 (2016)]. doi 10.3103/S1066369X16100066.
16. N. S. Popov, “On the Solvability of Boundary Value Problems for Multidimensional Parabolic Equations of Fourth Order with Nonlocal Boundary Condition of Integral Form,” Math. Notes of NEFU **23** (1), 79–86 (2016). http://www.mathnet.ru/links/eb7d3c7cb0c7de0a204012cbff688616/svfu17.pdf. Cited May 30, 2022.
17. A. K. Urinov and Sh. T. Nishonova, “A Problem with Integral Conditions for an Elliptic-Parabolic Equation,” Mat. Zametki **102** (1), 81–95 (2017) [Math. Notes **102** (1), 68–80 (2017)]. doi 10.4213/mzm10674.
18. D. H. Q. Nam, D. Baleanu, N. H. Luc, and N. H. Can, “On a Kirchhoff Diffusion Equation with Integral Condition,” Adv. Differ. Equ. **2020**, No 1 (2020). doi 10.1186/s13662-020-03077-y.
19. V. B. Dmitriev, “Boundary Value Problem with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for a Multidimensional Equation of IV Order,” Vestnik SamU. Estestvenno-Nauchnaya Ser. **27** (1), 15–28 (2021). doi 10.18287/2541-7525-2021-27-1-15-28.
20. O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973; Springer, New York, 1985).
21. A. A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1983; Marcel Dekker, New York, 2001).
22. V. B. Andreev, “On the Convergence of Difference Schemes Approximating the Second and Third Boundary Value Problems for Elliptic Equations,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **8** (6), 1218–1231 (1968). [USSR Comput. Math. Math. Phys. **8** (6), 44–62 (1968)]. doi 10.1016/0041-5553(68)90092-X.
23. A. A. Samarsky and A. V. Gulin, *Stability of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].

2022, **23** (2), 153–171. doi 10.26089/NumMet.v23r210

24. D. K. Faddeev and V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra* (Fizmatgiz, Moscow, 1960; Freeman, San Francisco, 1963).

25. A. A. Abramov and V. B. Andreev, “On the Application of the Method of Successive Substitution to the Determination of Periodic Solutions of Differential and Difference Equations,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **3** (2), 377–381 (1963). [USSR Comput. Math. Math. Phys. **3** (2), 498–504 (1963)]. doi 10.1016/0041-5553(63)90034-X.

26. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Numerical Methods for Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1978; Birkhäuser, Basel, 1989).

27. A. F. Voevodin and S. M. Shugrin, *Numerical Methods for One-Dimensional Systems* (Nauka, Novosibirsk, 1981) [in Russian].

Received
April 13, 2022

Accepted for publication
May 19, 2022

Information about the author

Zaryana V. Beshtokova — Junior Scientist, Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS, Shortanova ulitsa 89 a, 360000, Nalchik, Russia.