

## Численное моделирование гиперзвукового обтекания полусферы с учетом неравновесных физико-химических процессов в высокотемпературном воздухе

**К. Н. Волков**

Балтийский государственный технический университет “Военмех” имени Д. Ф. Устинова,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0003-3797-4645, e-mail: [dsci@mail.ru](mailto:dsci@mail.ru)

**В. А. Гимадиев**

Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-0284-8465, e-mail: [vlad.gimadiev@mail.ru](mailto:vlad.gimadiev@mail.ru)

**Ю. В. Добров**

Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-2552-1879, e-mail: [youdobrov@gmail.com](mailto:youdobrov@gmail.com)

**А. Г. Карпенко**

Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-1250-9766, e-mail: [aspera.2003.ru@mail.ru](mailto:aspera.2003.ru@mail.ru)

**Аннотация:** Высокотемпературные эффекты оказывают существенное влияние на характеристики летательных аппаратов, движущихся с гиперзвуковой скоростью. В связи со сложностью постановки физического эксперимента, методы математического моделирования играют важную роль для нахождения характеристик гиперзвуковых летательных аппаратов. Обсуждается построение и реализация математической модели, предназначенной для численного моделирования гиперзвукового обтекания тела с учетом неравновесных физико-химических процессов в высокотемпературном воздухе. Математическая модель включает в себя уравнения газовой динамики, уравнения модели турбулентности и уравнения химической кинетики. Проводится численное моделирование сверх- и гиперзвукового обтекания полусферы потоком воздуха с учетом высокотемпературных эффектов. Приводится критический обзор различных моделей, которые применяются для нахождения расстояния от фронта ударной волны до поверхности сферы. Результаты расчетов, полученные с использованием разработанного численного метода, сравниваются с данными физического эксперимента и расчетными данными, имеющимися в литературе, в широком диапазоне чисел Маха набегающего потока. Разработанная модель и результаты расчетов имеют значение для моделирования обтекания тел сложной конфигурации и проектирования высокоскоростных летательных аппаратов.

**Ключевые слова:** вычислительная газовая динамика, гиперзвуковое течение, сфера, аэродинамика, ударная волна, высокотемпературные эффекты.

**Для цитирования:** Волков К.Н., Гимадиев В.А., Добров Ю.В., Карпенко А.Г. Численное моделирование гиперзвукового обтекания полусферы с учетом неравновесных физико-химических процессов в высокотемпературном воздухе // Вычислительные методы и программирование. 2022. 23, № 3. 248–274. doi 10.26089/NumMet.v23r316.



# Numerical simulation of hypersonic flow around semi-sphere with non-equilibrium physical and chemical processes in high-temperature air

**Konstantin N. Volkov**

Ustinov Baltic State Technical University, St. Petersburg, Russia  
ORCID: 0000-0003-3797-4645, e-mail: [dsci@mail.ru](mailto:dsci@mail.ru)

**Vladislav A. Gimadiev**

St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg, Russia  
ORCID: 0000-0002-0284-8465, e-mail: [vlad.gimadiev@mail.ru](mailto:vlad.gimadiev@mail.ru)

**Yuri V. Dobrov**

St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg, Russia  
ORCID: 0000-0002-2552-1879, e-mail: [youdobrov@gmail.com](mailto:youdobrov@gmail.com)

**Anton G. Karpenko**

St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg, Russia  
ORCID: 0000-0002-1250-9766, e-mail: [aspera.2003.ru@mail.ru](mailto:aspera.2003.ru@mail.ru)

**Abstract:** High-temperature effects have a significant impact on the characteristics of aircraft moving at hypersonic speed. Due to the complexity of setting up a physical experiment, mathematical modelling plays an important role in finding the characteristics of hypersonic aircraft. The construction and implementation of a mathematical model for the numerical simulation of a hypersonic flow around a semi-sphere is discussed, taking into account non-equilibrium physical and chemical processes in high-temperature air. The mathematical model includes the equations of gas dynamics, the equations of the turbulence model and the equations of chemical kinetics. Numerical simulation of supersonic and hypersonic air flow around a hemi-sphere is carried out, taking into account high-temperature effects. A critical review of various models that are used to find the shock stand-off is given. The results of calculations obtained using the developed numerical method are compared with the data of a physical experiment and the computational data available in the literature in a wide range of Mach numbers. The developed model and computational results are important for simulation of flows around bodies of complex configuration and designing high-speed aircraft.

**Keywords:** computational fluid dynamics, hypersonic flow, sphere, aerodynamics, shock wave, high-temperature effects.

**For citation:** K. N. Volkov, V. A. Gimadiev, Yu. V. Dobrov, and A. G. Karpenko, “Numerical simulation of hypersonic flow around semi-sphere with non-equilibrium physical and chemical processes in high-temperature air,” *Numerical Methods and Programming*. 23 (3), 248–274 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r316.

---

**1. Введение.** Одной из основных задач гиперзвуковой аэродинамики является проблема численного моделирования гиперзвуковых течений газа с учетом реальных физико-химических процессов, происходящих в ударном слое около обтекаемых притупленных тел [1–3]. Основными особенностями гиперзвуковых течений являются значительный рост температуры за фронтом головной ударной волны, сильное торможение потока внутри ударного слоя и аэродинамический нагрев поверхности. При гиперзвуковом обтекании головная ударная волна имеет размытый фронт, что связывается не только с физическими эффектами (возбуждение колебательных степеней свободы в двух- и многоатомных газах), но и с газодинамическими процессами (уменьшение плотности газовой среды при полете на больших высотах).

Простейшим телом с обтекаемой поверхностью постоянной кривизны является сфера [4]. Задача обтекания сферы гиперзвуковым потоком имеет как самостоятельное значение, поскольку носовая часть многих гиперзвуковых летательных аппаратов имеет затупленную форму, так и находит применение для тестирования различных вычислительных алгоритмов. Зависимость коэффициента сопротивления сферы

в широком диапазоне чисел Маха обсуждается в работах [5–8], а расстояния от головной ударной волны до поверхности сферы — в работах [9, 10]. Вопросы, связанные с тепловым проектированием гиперзвуковых летательных аппаратов, обсуждаются в работе [11].

В работе [12] рассматривается обтекание сферы гиперзвуковым потоком совершенного газа при числах Маха до 20. Метод расчета основан на расщеплении системы уравнений динамики вязкого теплопроводного газа на две группы уравнений. Уравнения Навье–Стокса интегрируются с использованием AUSM конечно-разностных схем, а для решения уравнения сохранения энергии применяется пятиточечная конечно-разностная схема. Предположение о совершенном газе приводит к завышенной температуре сжатого слоя. Влияние численной диссипации на точность расчетов при гиперзвуковых скоростях обсуждается в работе [13].

Экспериментальные и численные данные по гиперзвуковому обтеканию сферы приводятся в работах [14–16]. Результаты численного моделирования обтекания сферы гиперзвуковым потоком с учетом равновесных и неравновесных химических реакций обсуждаются в работах [17–19]. Высокотемпературные эффекты учитываются в работе [20]. При малых числах Кнудсена решаются уравнения Навье–Стокса, а расчеты в разреженном потоке проводятся при помощи метода прямого статистического моделирования. В работах [21, 22] для моделирования гиперзвукового обтекания сферы с учетом высокотемпературных эффектов применяется модель с равновесными химическими реакциями и модель воздуха, предложенная в работе [23].

Влияние равновесных и неравновесных химических реакций на аэродинамические характеристики спускаемого космического аппарата сегментальной и конической формы исследуется в работе [24]. Неравновесность химических реакций проявляется в узком градиентном слое за ударной волной из-за начальных условий постоянства состава газа на ударной волне. Влияние химических реакций, неравновесного возбуждения внутренних степеней свободы молекул и многокомпонентной диффузии на параметры течения и конвективный теплообмен рассматривается в работе [25]. Диссоциация и ионизация поглощают до 75% энергии потока, что делает неприменимыми многие результаты газовой динамики совершенного газа. Конечно-разностные схемы для решения уравнений Эйлера, описывающих течения реальных газов, подчиняющихся различным уравнениям состояния, обсуждаются в работе [26]. В работе [27] предлагается ряд канонических тестовых задач для проверки работоспособности моделей турбулентности в гиперзвуковых течениях. Верификация и валидация разработанного метода численного расчета высокоскоростных и высокотемпературных течений равновесного химически реагирующего воздуха, а также сравнение различных конечно-разностных схем расчета конвективных потоков применительно к численному моделированию сверхзвуковых течений проводится в работе [28].

Для проведения параметрических расчетов высокоскоростных течений в широком диапазоне определяющих параметров требуется разработка методов ускорения расчетов гиперзвуковых течений с помощью совмещения технологий распараллеливания на основе геометрической декомпозиции области и вычислений на графических процессорных устройствах. Для создания такого программного кода поэтапно развивается несколько подходов, в одном из которых реализуются модели высокотемпературного воздуха. В работах [21, 22] реализован подход к моделированию высокоскоростных течений с учетом равновесных химических реакций. В данной работе развивается подход к численному моделированию гиперзвуковых пространственных течений газа с учетом неравновесных химических реакций.

Обсуждается построение и реализация математической модели, предназначенной для численного моделирования гиперзвукового обтекания тела с учетом неравновесных физико-химических процессов, протекающих в высокотемпературном воздухе. Проведена реализация 5-компонентной неравновесной химии для воздуха и ее тестирование на модельной задаче, связанной с обтеканием сферы высокоскоростным потоком в широком диапазоне чисел Маха. Приводятся результаты расчетов по величине отхода головной ударной волны от поверхности сферы, полученные на основе различных подходов. Результаты численного моделирования позволяют установить, в какой степени можно использовать основные положения термодинамики идеального газа для несовершенного газа. Делаются выводы о влиянии неравновесных химических реакций на локальные и интегральные характеристики обтекания полусферы. Разработанный программный код применим для численного моделирования гиперзвукового обтекания тел произвольной формы с учетом неравновесных физико-химических процессов в высокотемпературном воздухе.

**2. Математическая модель.** Моделирование течений на основе полных уравнений Навье–Стокса позволяет исследовать структуру сложных течений с зонами сильного вязко-невязкого взаимодействия, скачками уплотнения, отрывами, формированием рециркуляционных зон. Во многих практически важных



случаях описание течений с достаточной точностью возможно в рамках более простых математических моделей, численная реализация которых требует существенно меньших вычислительных ресурсов.

**2.1. Основные допущения.** Обтекание тела гиперзвуковым потоком на больших высотах имеет ряд специфических особенностей, связанных с разрежением атмосферы, которые необходимо учитывать при разработке математической модели. В таких условиях устанавливается возможность применения модели сплошной среды, основанной на использовании уравнений Навье–Стокса. В сжатом пограничном слое воздух теряет свойства идеального газа. При этом существенную роль начинают играть химические реакции диссоциации, рекомбинации и ионизации.

Число Кнудсена устанавливает соотношение между средней длиной свободного пробега  $l$  частиц (молекул, атомов) с характерным линейным размером  $L$  обтекаемого тела:  $\text{Kn} = l/L$ . Условие континуума выполняется, когда критерий Кнудсена находится в диапазоне  $0 < \text{Kn} < 0.01$ . В этом случае течение описывается при помощи уравнений Навье–Стокса, а на поверхности обтекаемого тела используется условие прилипания для тангенциальной компоненты скорости. Уравнения Навье–Стокса применяются также в переходном режиме, который реализуется в диапазоне изменения критерия Кнудсена  $0.01 < \text{Kn} < 0.1$ . При этом для тангенциальной компоненты скорости на стенке используется условие проскальзывания. При числах Кнудсена, превышающих 0.1, течение является свободномолекулярным и не описывается уравнениями Навье–Стокса.

При построении математической модели предполагается, что средняя длина свободного пробега частиц в сжатом слое на порядок величины меньше характерного размера обтекаемого тела. Течение описывается уравнениями Навье–Стокса с граничными условиями прилипания и непротекания для тангенциальной и нормальной компонент скорости.

**2.2. Уравнения газовой динамики.** Рассматривается моделирование течения воздуха около тела в условиях химической неравновесности. Модель включает уравнения, описывающие течение вязкого теплопроводного газа с учетом реакций диссоциации, рекомбинации, обменных реакций и ионизации. Предполагается равновесное распределение компонентов смеси по поступательным и внутренним степеням свободы (однотемпературная модель). Система уравнений включает следующие уравнения:

уравнение сохранения массы смеси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1}$$

уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p - \boldsymbol{\tau}) = 0, \tag{2}$$

уравнение сохранения полной энергии

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e + p) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}] = 0. \tag{3}$$

Здесь  $t$  — время,  $\rho$  — плотность смеси,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор вязких напряжений,  $e$  — полная энергия единицы массы смеси,  $\mathbf{q}$  — вектор теплового потока.

Связь между компонентами тензора вязких напряжений и компонентами тензора скоростей деформаций имеет вид

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right).$$

Вектор теплового потока находится из соотношения

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T.$$

Здесь  $T$  — температура смеси,  $\mu$  — динамическая вязкость,  $\lambda$  — теплопроводность.

Полная энергия единицы массы равняется сумме внутренней энергии, обусловленной термодинамическими процессами (включает в себя энергии поступательного движения, вращательного, колебательно-го и электронного возбуждения атомных и молекулярных компонентов газовой смеси), и кинетической энергии

$$e = u + \frac{1}{2} v^2.$$

Уравнения, записанные в виде (1)–(3), пригодны для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений молекулярные коэффициенты переноса заменяются на их эффективные значения. В частности, эффективная вязкость и эффективная теплопроводность находятся из соотношений  $\mu_e = \mu + \mu_t$  и  $\lambda_e = \lambda + \lambda_t$ . Для расчета турбулентной вязкости используется модель турбулентности Спаларта–Аллмареса. Турбулентная теплопроводность выражается через турбулентную вязкость и турбулентное число Прандтля:  $\lambda_t = c_p \mu_t / \text{Pr}_t$ , где  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение ( $\text{Pr}_t = 0.9$ ).

**2.3. Уравнения диффузии и химической кинетики.** Учет реальных свойств газовой смеси, образующейся около обтекаемого тела за счет нагревания при торможении потока, увеличивает количество дифференциальных уравнений соответственно числу рассматриваемых компонентов смеси. Для каждого из компонентов газовой смеси  $i = 1, \dots, N - 1$  решается уравнение переноса массовой концентрации

$$\frac{\partial \rho_i c_i}{\partial t} + \nabla (\rho_i \mathbf{v} c_i) = -\nabla \mathbf{J}_i + \omega_i,$$

где  $\mathbf{J}_i$  — вектор диффузионного потока компонента  $i$ ,  $\omega_i$  — массовая скорость образования компонента  $i$  в химических реакциях. Для описания модели реагирующего газа используется  $N - 1$  уравнений диффузии, к которым добавляется условие

$$\sum_{i=1}^N c_i = 1,$$

где  $N$  — число компонентов смеси.

Вектор диффузионного потока компонента  $i$  вычисляется из закона Фика

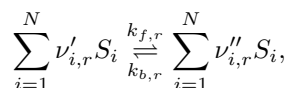
$$\mathbf{J}_i = -\rho D_{m,i} \nabla c_i - D_{T,i} \frac{\nabla T}{T},$$

где  $D_{m,i}$  и  $D_{T,i}$  — коэффициенты диффузии и термодиффузии компонента  $i$  соответственно.

Массовая скорость образования компонента  $i$  вычисляется с помощью ламинарной конечно-скоростной модели (влияние турбулентных флуктуаций игнорируется), в основе которой лежит закон действующих масс. Связь между температурой и константой скорости химической реакции устанавливается с помощью уравнения Аррениуса. Скорость образования компонента  $i$  в химических реакциях вычисляется с использованием соотношения вида

$$\omega_i = M_i \sum_{r=1}^{N_r} \hat{\omega}_{i,r},$$

где  $M_i$  — молярная масса компонента  $i$ ,  $\hat{\omega}_{i,r}$  — молярная скорость образования или распада компонента  $i$  в реакции  $r$ . Суммирование происходит по реакциям, в которых участвует компонент  $i$  (под  $N_r$  понимается количество таких химических реакций). В общем виде реакция  $r$  записывается в виде



где  $\nu'_{i,r}$  — стехиометрический коэффициент реагента  $i$  реакции  $r$ ,  $\nu''_{i,r}$  — стехиометрический коэффициент продукта  $i$  реакции  $r$ ,  $k_{f,r}$  — константа скорости прямой реакции,  $k_{b,r}$  — константа скорости обратной реакции. Под  $S_i$  понимается символ, обозначающий компонент  $i$ .

Молярная скорость образования или распада компонента  $i$  в реакции  $r$  определяется формулой

$$\hat{\omega}_{i,r} = \Gamma_r (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r}) \left( k_{f,r} \prod_{j=1}^N C_{j,r}^{\nu'_{j,r}} - k_{b,r} \prod_{j=1}^N C_{j,r}^{\nu''_{j,r}} \right),$$

где  $C_{j,r}$  — молярная концентрация компонента  $j$  реакции  $r$ ,  $\nu'_{j,r}$  — коэффициент скорости реагента компонента  $i$  в реакции  $r$ ,  $\nu''_{j,r}$  — коэффициент скорости продукта компонента  $i$  в реакции  $r$ . Под  $\Gamma_r$  понимается коэффициент, учитывающий влияние третьих тел на скорость реакции  $r$ .



Коэффициент, учитывающий влияние третьих тел на скорость химической реакции, вычисляется следующим образом:

$$\Gamma_r = \sum_{j=1}^N \gamma_{j,r} C_{j,r},$$

где  $\gamma_{j,r}$  — эффективность компонента  $j$  в реакции  $r$  как третьего тела.

При использовании модели воздуха, состоящего из 5 компонентов, коэффициент  $\Gamma_r$  отличен от единицы в реакциях, в которых участвует третья нереагирующая частица, например в реакции диссоциации молекулы кислорода молекулой азота, которая не распадается ( $O_2 + N_2 = 2O + N_2$ ). Это позволяет вместо множества реакций вида  $O_2 + M = 2O + M$ , где  $M = N, O, N_2, O_2, NO$ , записать всего одну реакцию (в формуле Аррениуса для этих реакций отличаются только предэкспоненциальные множители), вводя коэффициент эффективности третьей частицы в этой реакции  $\gamma_{j,r}$ . В других реакциях  $\Gamma_r = 1$ . Эффективность каждого химического компонента в качестве третьего тела представлена в табл. 1.

Таблица 1. Эффективности химических компонентов в качестве третьего тела

Table 1. The effectiveness of chemical components as a third body

Реакция Reaction	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	NO	N	O
O <sub>2</sub> +M=2O+M	1	1	1	5	5
N <sub>2</sub> +M=2N+M	1	1	1	4.28	4.28
NO+M=N+O+M	1	1	22	22	22

Константа скорости прямой реакции  $k_{f,r}$  вычисляется с помощью уравнения Аррениуса

$$k_{f,r} = A_r T^{\beta_r} \exp\left(-\frac{E_r}{R_0 T}\right),$$

где  $A_r$  — предэкспоненциальный множитель,  $\beta_r$  — температурный показатель,  $E_r$  — энергия активации реакции,  $R_0$  — универсальная газовая постоянная. Константа скорости обратной реакции вычисляется с помощью константы скорости прямой реакции и константы равновесия по формуле

$$k_{b,r} = \frac{k_{f,r}}{K_r},$$

где  $K_r$  — константа равновесия реакции  $r$ . Константа равновесия определяется следующим соотношением:

$$K_r = \exp\left(\frac{\Delta S_r^0}{R} - \frac{\Delta H_r^0}{RT}\right) \left(\frac{p_a}{RT}\right)^{\sum_{i=1}^N (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r})},$$

где  $p_a$  — атмосферное давление,  $R$  — газовая постоянная. Показатель экспоненты выражает изменение энергии Гиббса, а энтропийный и энтальпийный факторы определяются соответственно выражениями

$$\frac{\Delta S_r^0}{R} = \sum_{i=1}^N (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r}) \frac{S_i^0}{R};$$

$$\frac{\Delta H_r^0}{RT} = \sum_{i=1}^N (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r}) \frac{h_i^0}{RT}.$$

Здесь  $S_i^0$  и  $h_i^0$  — энтропия стандартного состояния и энтальпия стандартного состояния соответственно. В правую часть уравнения энергии вводится дополнительный источниковый член, учитывающий выделение тепловой энергии

$$S_h = - \sum_{i=1}^N \frac{h_i^0}{M_i} \omega_i.$$

**2.4. Модель турбулентности.** В модели Спаларта–Аллармареа решается одно уравнение для переноса модифицированной турбулентной вязкости  $\tilde{\nu}$ , которое имеет вид

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dt} = \frac{1}{\sigma} \{ \nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + c_{b2} [(\nabla \tilde{\nu}) \cdot (\nabla \tilde{\nu})] \} + P^\nu - D^\nu + f_{t1} \Delta u^2,$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость. Модифицированная турбулентная вязкость определяется через кинематическую турбулентную вязкость

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu_t}{f_{\nu 1}},$$

где

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}.$$

Член генерации турбулентности  $P^\nu$  и диссипативный член  $D^\nu$  определяются следующими выражениями:

$$P^\nu = c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}, \quad D^\nu = \left( c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}f_{t2} \right) \left( \frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right)^2.$$

Здесь

$$\tilde{S} = \Omega + f_{\nu 2} \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa d_w)^2}, \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}.$$

Поправочные функции имеют вид

$$f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}(\kappa d_w)^2},$$

где  $d_w$  — расстояние до стенки,  $\kappa$  — постоянная Кармана ( $\kappa = 0.41$ ). Модуль тензора завихренности находится из соотношения

$$\Omega = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Функция  $f_{t2}$  отвечает за подавление спонтанного или численного ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое и определяется выражением

$$f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4}\chi^2).$$

Член  $f_{t1}\Delta u^2$  в уравнении переноса турбулентной вязкости отвечает за иницирование ламинарно-турбулентного перехода в заданной точке. Константы, определяющие модель, имеют следующие значения:  $\sigma = 2/3$ ,  $c_{b1} = 0.1355$ ,  $c_{b2} = 0.622$ ,  $c_{w2} = 0.3$ ,  $c_{w3} = 2$ ,  $c_{\nu 1} = 7.1$ ,  $c_{t3} = 1.2$ ,  $c_{t4} = 0.5$ . При этом имеет место следующая связь между постоянными модели:

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}.$$

**2.5. Термодинамические и теплофизические свойства.** Воздух рассматривается как многокомпонентный газ, состоящий из  $n$  компонентов. Парциальная плотность компонента  $i$  находится из уравнения состояния

$$\rho_i = \frac{p_i}{R_i T},$$

где  $p_i$  — парциальное давление компонента  $i$ ,  $R_i$  — газовая постоянная компонента  $i$  в составе смеси. Газовая постоянная определяется соотношением  $R_i = R_0/M_i$ , где  $R_0$  — универсальная газовая постоянная,  $M_i$  — молярная масса компонента  $i$ . Плотность смеси находится из уравнения состояния

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где  $p$  — давление смеси. Давление смеси находится из закона Дальтона

$$p = \sum_{i=1}^n p_i.$$





Молярная масса смеси находится из соотношения

$$M = \sum_{i=1}^n c_i M_i.$$

где  $c_i$  — массовая концентрация компонента  $i$  в смеси ( $c_i = \rho_i/\rho$ ).

Энтальпия смеси имеет вид

$$h = \sum_{i=1}^n c_i h_i.$$

Энтальпия компонента  $i$  смеси находится из соотношения

$$h_i = \int_{T_1}^{T_2} c_{pi} dT.$$

Удельная теплоемкость каждого компонента  $i$  смеси задается в виде кусочно-линейной зависимости как функция температуры и давления. Средняя удельная теплоемкость газовой смеси вычисляется с использованием соотношения

$$c = \sum_{i=1}^n c_i c_{pi},$$

где  $c_{pi}$  — удельная теплоемкость компонента  $i$ .

Вязкость и теплопроводность газовой смеси определяются по формулам

$$\mu = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n x_j \varphi_{ij}}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \lambda_i}{\sum_{j=1}^n x_j \varphi_{ij}},$$

где  $x_i$  — молярная концентрация компонента  $i$ . Параметр  $\varphi_{ij}$  рассчитывался с использованием соотношения

$$\varphi_{ij} = \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_{wj}}{M_{wi}} \right)^{1/4} \right]^2 \left[ 8 \left( 1 + \frac{M_{wi}}{M_{wj}} \right) \right]^{-1/2}.$$

Индекс  $w$  относится к стенке. Вязкость каждого компонента вычисляется по формуле Сазерленда

$$\mu_i = \mu_{0i} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S},$$

где  $\mu_{0i}$  — динамическая вязкость компонента  $i$  при температуре  $T_0$ ,  $S$  — эффективная температура (константа Сазерленда,  $S = 110.4$  К). Динамическая вязкость воздуха  $\mu_0 = 1.76 \cdot 10^{-5}$  Па·с при  $T_0 = 273.14$  К. Теплопроводность каждого компонента определяется с использованием соотношения из кинетической теории газов

$$\lambda_i = \frac{15}{4} \frac{R_0}{M_i} \mu_i \left( \frac{4}{15} \frac{c_{pi} M_i}{R_0} + \frac{1}{3} \right).$$

**3. Модель воздуха.** Для воздуха при высоких температурах известно довольно большое количество моделей химической кинетики, учитывающих реакции обмена, диссоциации и ионизации.

**3.1. Состав воздуха.** Для высокоскоростных течений газа, в которых температура достигает высоких значений, модель совершенного газа неприменима и необходимо учитывать химические реакции, протекающие в газе. Одной из наиболее простых моделей является модель равновесной химии, использование которой требует выполнения предположения, что характерные времена всех реакций велики по сравнению со средним временем свободного пробега частиц, а скорости реакций много меньше, чем скорость установления максвелловского равновесия за счет упругих столкновений. Основные уравнения имеют такой же вид, что и уравнения нереагирующего газа, однако значения термодинамических параметров и коэффициентов переноса в случае учета равновесных химических реакций меняются в зависимости от давления и плотности [21]. Выбор модели равновесной химии приводит к решению уравнений Эйлера или Навье–Стокса с уравнением состояния идеальной равновесной химически реагирующей смеси.



В случае, если условие применимости модели равновесных химических реакций не выполняется, необходимо использовать неравновесную модель. На практике находят модели с различным числом компонентов. Газовая среда рассматривается как идеальная квазинейтральная смесь совершенных газов из  $N$  компонентов, между которыми протекают неравновесные химические реакции и ионизация. Состав компонентов в различных моделях высокотемпературного воздуха приводится в табл. 2.

Модели химической кинетики, учитывающие реакции диссоциации, рекомбинации и обмена, предлагаются в работах [29–31]. Несмотря на важность процессов ионизации, во многих задачах они не учитываются.

**3.2. Модель из 5 компонентов.** Воздух рассматривается как многокомпонентный газ, состоящий из 5 компонентов ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $O$ ,  $N$ ,  $NO$ ). Константы, входящие в уравнение Аррениуса, описываются моделью Парка [29]. Для вычисления константы скорости каждой реакции применяются коэффициенты, представленные в табл. 3. Под  $M$  понимается любой из рассматриваемых компонентов ( $M=O$ ,  $N$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ). Реакции 1–6 представляют собой реакции диссоциации, а реакции 7–8 — реакции Зельдовича.

**3.3. Модели диссоциации и рекомбинации.** В модели, предложенной в работе [30], коэффициенты прямых  $k_f$  и обратных  $k_r$  реакций представляются в форме Аррениуса

$$k_s = C_s T^{n_s} \exp\left(-\frac{E_{a,s}}{k_B T}\right),$$

где  $C_s$  — предэкспоненциальный множитель,  $n_s$  — показатель степени,  $E_{a,s}$  — удельная энергия активации,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Отношение  $E_{a,s}/(k_B T)$  представляет собой характеристическую температуру химической реакции. Индекс  $s = f$  соответствует прямой реакции, а индекс  $s = r$  — обратной реакции. Коэффициенты химических реакций и энергии активации приводятся в табл. 4.

В модели, предложенной в работе [31], коэффициенты прямых реакций находятся из уравнения Аррениуса

$$k_f = C_f T_c^{n_f} \exp\left(-\frac{E_{a,f}}{k T_c}\right).$$

Температура  $T_c$  контролирует скорость реакции и учитывает колебательные степени свободы молекул. Она находится как среднее из температур, соответствующих поступательным и колебательным степеням свободы,  $T_c = T^\theta T_v^{1-\theta}$ , где  $\theta = 0.5$  — для реакций диссоциации и рекомбинации и  $\theta = 1.0$  — для обменных реакций. Коэффициенты обратных реакций выражаются через коэффициенты прямых реакций и постоянную равновесия:  $k_r = k_f/K_e$ . Для расчета постоянной равновесия используется интерполяция

Таблица 2. Состав многокомпонентных моделей высокотемпературного воздуха  
Table 2. Composition of multicomponent models of high-temperature air

$N$	Состав Compound
5	O, N, O <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> , NO
7	O, N, O <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> , NO, NO <sup>+</sup> , e
9	O, N, O <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> , NO, NO <sup>+</sup> , e, O <sub>2</sub> <sup>+</sup> , N <sub>2</sub> <sup>+</sup>
11	O, N, O <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> , NO, NO <sup>+</sup> , e, O <sub>2</sub> <sup>+</sup> , N <sub>2</sub> <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> , N <sup>+</sup>

Таблица 3. Химические реакции в модели [29]

Table 3. Chemical reactions in the model [29]

№ No.	Реакция Reaction	$A_r$ , см <sup>3</sup> /(моль · с) $A_r$ , cm <sup>3</sup> /(mol · s)	$\beta_r$	$E_r/k_B$ , К
1	O <sub>2</sub> +M=O+O+M (M=N, O)	1.0 · 10 <sup>22</sup>	−1.50	59500
2	O <sub>2</sub> +M=O+O+M (M=N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO)	2.0 · 10 <sup>21</sup>	−1.50	59500
3	N <sub>2</sub> +M=N+N+M (M=N, O)	3.0 · 10 <sup>22</sup>	−1.60	113200
4	N <sub>2</sub> +M=N+N+M (M=N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO)	7.0 · 10 <sup>21</sup>	−1.60	113200
5	NO+M=N+O+M (M=N, O, NO)	1.1 · 10 <sup>17</sup>	0	75500
6	NO+M=N+O+M (M=N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> )	5.0 · 10 <sup>15</sup>	0	75500
7	NO+O=O <sub>2</sub> +N	8.37 · 10 <sup>12</sup>	0	19450
8	N <sub>2</sub> +O=NO+N	6.44 · 10 <sup>17</sup>	−1.0	38370



Таблица 4. Химические реакции в модели [30]

Table 4. Chemical reactions in the model [30]

№ No.	Реакция Reactions	$C_f, \text{м}^3/(\text{моль} \cdot \text{с})$ $C_f, \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{s})$	$n_f$	$E_{a,f}/k_B, \text{К}$	$C_r, \text{м}^6/(\text{моль}^2 \cdot \text{с})$ $C_r, \text{m}^6/(\text{mol}^2 \cdot \text{s})$	$n_r$	$E_{a,r}/k_B, \text{К}$
Реакции диссоциации и рекомбинации Dissociation and recombination reactions							
1	$\text{O}_2 + \text{N} = \text{O} + \text{O} + \text{N}$	$5.99 \cdot 10^{-12}$	-1	59500	$8.30 \cdot 10^{-45}$	-0.5	0.0
2	$\text{O}_2 + \text{NO} = \text{O} + \text{O} + \text{NO}$	$5.99 \cdot 10^{-12}$	-1	59500	$8.30 \cdot 10^{-45}$	-0.5	0.0
3	$\text{O}_2 + \text{N}_2 = \text{O} + \text{O} + \text{N}_2$	$1.20 \cdot 10^{-11}$	-1	59500	$1.66 \cdot 10^{-44}$	-0.5	0.0
4	$\text{O}_2 + \text{O}_2 = \text{O} + \text{O} + \text{O}_2$	$5.39 \cdot 10^{-11}$	-1	59500	$7.47 \cdot 10^{-44}$	-0.5	0.0
5	$\text{O}_2 + \text{O} = \text{O} + \text{O} + \text{O}$	$1.50 \cdot 10^{-10}$	-1	59500	$2.07 \cdot 10^{-43}$	-0.5	0.0
6	$\text{N}_2 + \text{O} = \text{N} + \text{N} + \text{O}$	$3.18 \cdot 10^{-13}$	-0.5	113200	$3.01 \cdot 10^{-44}$	-0.5	0.0
7	$\text{N}_2 + \text{O}_2 = \text{N} + \text{N} + \text{O}_2$	$3.18 \cdot 10^{-13}$	-0.5	113200	$3.01 \cdot 10^{-44}$	-0.5	0.0
8	$\text{N}_2 + \text{NO} = \text{N} + \text{N} + \text{NO}$	$3.18 \cdot 10^{-13}$	-0.5	113200	$3.01 \cdot 10^{-44}$	-0.5	0.0
9	$\text{N}_2 + \text{N}_2 = \text{N} + \text{N} + \text{N}_2$	$7.97 \cdot 10^{-13}$	-0.5	113200	$7.51 \cdot 10^{-44}$	-0.5	0.0
10	$\text{N}_2 + \text{N} = \text{N} + \text{N} + \text{N}$	$6.90 \cdot 10^{-8}$	-1.5	113200	$6.42 \cdot 10^{-39}$	-1.5	0.0
11	$\text{NO} + \text{N}_2 = \text{N} + \text{O} + \text{N}_2$	$6.59 \cdot 10^{-10}$	-1.5	75500	$2.78 \cdot 10^{-40}$	-1.5	0.0
12	$\text{NO} + \text{O}_2 = \text{N} + \text{O} + \text{O}_2$	$6.59 \cdot 10^{-10}$	-1.5	75500	$2.78 \cdot 10^{-40}$	-1.5	0.0
13	$\text{NO} + \text{NO} = \text{N} + \text{O} + \text{NO}$	$1.32 \cdot 10^{-8}$	-1.5	75500	$5.57 \cdot 10^{-39}$	-1.5	0.0
14	$\text{NO} + \text{O} = \text{N} + \text{O} + \text{O}$	$1.32 \cdot 10^{-8}$	-1.5	75500	$5.57 \cdot 10^{-39}$	-1.5	0.0
15	$\text{NO} + \text{N} = \text{N} + \text{O} + \text{N}$	$1.32 \cdot 10^{-8}$	-1.5	75500	$5.57 \cdot 10^{-39}$	-1.5	0.0
Обменные реакции Exchange reactions							
16	$\text{NO} + \text{O} = \text{O}_2 + \text{N}$	$5.28 \cdot 10^{-21}$	1.0	19220	$1.60 \cdot 10^{-18}$	0.5	3580
17	$\text{N}_2 + \text{O} = \text{NO} + \text{N}$	$1.12 \cdot 10^{-16}$	0.0	38400	$2.49 \cdot 10^{-17}$	0.0	0.0

Таблица 5. Химические реакции в модели [31]

Table 5. Chemical reactions in the model [31]

№ No.	Реакция Reactions	$C_f, \text{м}^3/(\text{моль} \cdot \text{с})$ $C_f, \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{s})$	$n_f$	$E_{a,f}/k_B, \text{К}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
Реакции диссоциации и рекомбинации Dissociation and recombination reactions									
1	$\text{O}_2 + \text{N} = \text{O} + \text{O} + \text{N}$	$1.66 \cdot 10^{-8}$	-1.5	59500	2.855	0.988	-6.181	-0.023	-0.001
2	$\text{O}_2 + \text{NO} = \text{O} + \text{O} + \text{NO}$	$3.32 \cdot 10^{-9}$	-1.5	59500	2.855	0.988	-6.181	-0.023	-0.001
3	$\text{O}_2 + \text{N}_2 = \text{O} + \text{O} + \text{N}_2$	$3.32 \cdot 10^{-9}$	-1.5	59500	2.855	0.988	-6.181	-0.023	-0.001
4	$\text{O}_2 + \text{O}_2 = \text{O} + \text{O} + \text{O}_2$	$3.32 \cdot 10^{-9}$	-1.5	59500	2.855	0.988	-6.181	-0.023	-0.001
5	$\text{O}_2 + \text{O} = \text{O} + \text{O} + \text{O}$	$1.66 \cdot 10^{-8}$	-1.5	59500	2.855	0.988	-6.181	-0.023	-0.001
6	$\text{N}_2 + \text{O} = \text{N} + \text{N} + \text{O}$	$4.98 \cdot 10^{-8}$	-1.6	113200	1.858	-1.325	-9.856	-0.174	0.008
7	$\text{N}_2 + \text{O}_2 = \text{N} + \text{N} + \text{O}_2$	$1.16 \cdot 10^{-8}$	-1.6	113200	1.858	-1.325	-9.856	-0.174	0.008
8	$\text{N}_2 + \text{NO} = \text{N} + \text{N} + \text{NO}$	$1.16 \cdot 10^{-8}$	-1.6	113200	1.858	-1.325	-9.856	-0.174	0.008
9	$\text{N}_2 + \text{N}_2 = \text{N} + \text{N} + \text{N}_2$	$1.16 \cdot 10^{-8}$	-1.6	113200	1.858	-1.325	-9.856	-0.174	0.008
10	$\text{N}_2 + \text{N} = \text{N} + \text{N} + \text{N}$	$4.98 \cdot 10^{-8}$	-1.6	113200	1.858	-1.325	-9.856	-0.174	0.008
11	$\text{NO} + \text{N}_2 = \text{N} + \text{O} + \text{N}_2$	$8.30 \cdot 10^{-15}$	0.0	75500	0.792	-0.492	-6.761	-0.091	0.004
12	$\text{NO} + \text{O}_2 = \text{N} + \text{O} + \text{O}_2$	$8.30 \cdot 10^{-15}$	0.0	75500	0.792	-0.492	-6.761	-0.091	0.004
13	$\text{NO} + \text{NO} = \text{N} + \text{O} + \text{NO}$	$1.83 \cdot 10^{-13}$	0.0	75500	0.792	-0.492	-6.761	-0.091	0.004
14	$\text{NO} + \text{O} = \text{N} + \text{O} + \text{O}$	$1.83 \cdot 10^{-13}$	0.0	75500	0.792	-0.492	-6.761	-0.091	0.004
15	$\text{NO} + \text{N} = \text{N} + \text{O} + \text{N}$	$1.83 \cdot 10^{-13}$	0.0	75500	0.792	-0.492	-6.761	-0.091	0.004
Обменные реакции Exchange reactions									
16	$\text{NO} + \text{O} = \text{O}_2 + \text{N}$	$1.39 \cdot 10^{-17}$	0.0	19400	-1.840	-1.768	-4.759	1.154	-0.239
17	$\text{N}_2 + \text{O} = \text{NO} + \text{N}$	$9.46 \cdot 10^{-18}$	0.42	42938	-3.032	0.078	-7.693	1.411	-0.517

экспериментальных данных. Для реакций 1–10 и реакций 16–17 постоянная равновесия находится из соотношения [31]

$$K_e(T) = \exp \left[ \frac{A_1}{Z} + A_2 + A_3 \ln(Z) + A_4 Z + A_5 Z^2 \right].$$

Для реакций 11–15 постоянная равновесия находится из соотношения [31]

$$K_e(T) = \exp [A_1 + A_2 \ln(Z) + A_3 Z + A_4 Z^2 + A_5 Z^3].$$

Здесь  $Z = 10000/T$ . Коэффициенты химических реакций и интерполяционные множители приводятся в табл. 5.

Зависимости коэффициентов наиболее важных прямых и обратных реакций от температуры показывают рис. 1 и рис. 2 (температура изменяется в интервале от 3000 К до 13000 К). В целом, полученные результаты показывают, что модели химических реакций, предложенные в работах [30] и [31], дают сравнимые значения коэффициентов для наиболее важных реакций.

**3.4. Модель из 11 компонентов.** Воздух рассматривается как многокомпонентный газ, состоящий из 11 компонентов ( $N_2$ ,  $O_2$ ,  $NO$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $Ar$ ,  $NO^+$ ,  $N^+$ ,  $O^+$ ,  $Ar^+$ ,  $e^-$ ). Константы, входящие в уравнение Аррениуса, описываются моделью Парка [29]. Для вычисления константы скорости каждой реакции

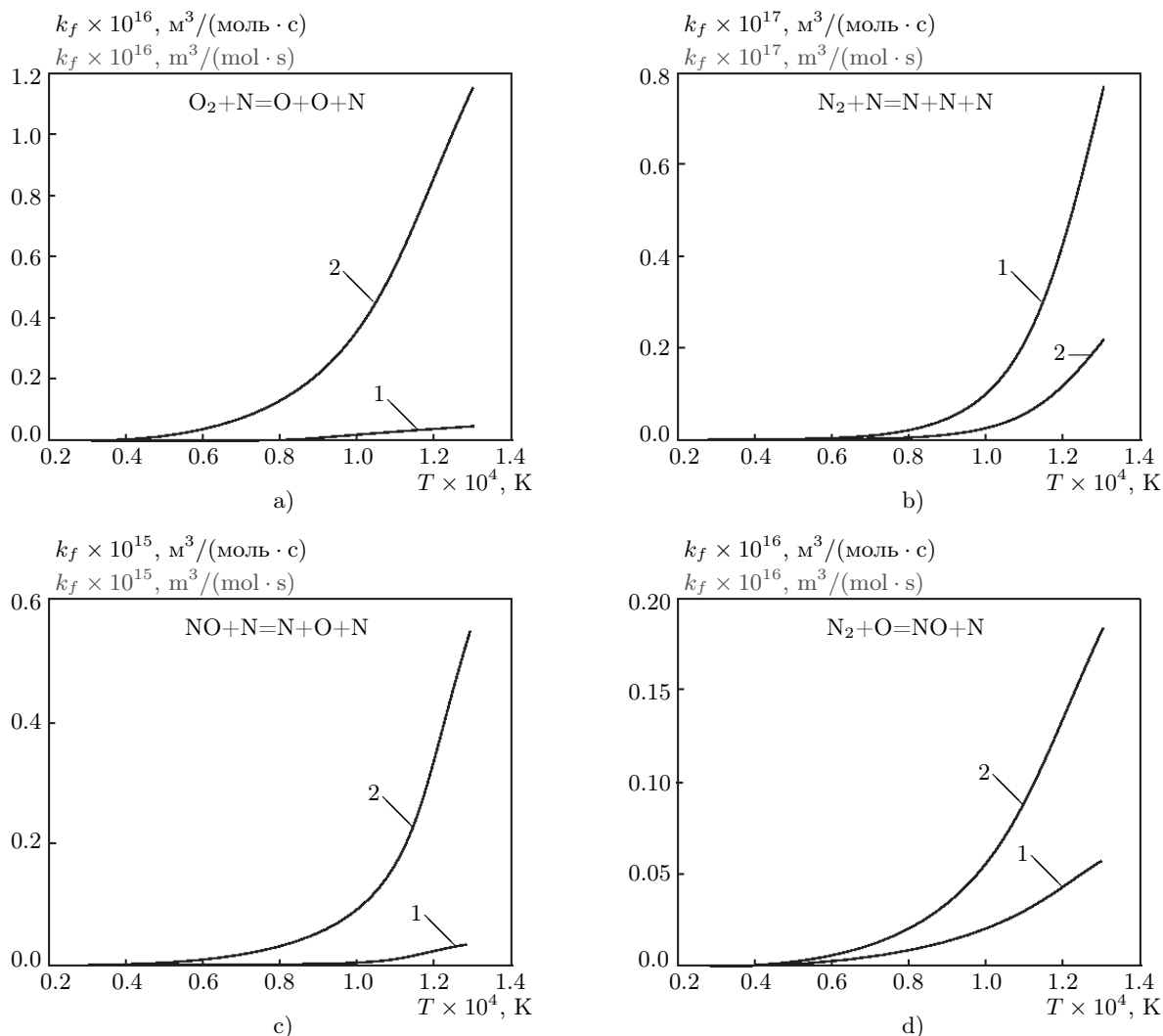


Рис. 1. Распределения коэффициентов прямых реакций в моделях [30] (линии 1) и [31] (линии 2)  
 Fig. 1. Distributions of coefficients of forward reactions in the models [30] (lines 1) and [31] (lines 2)

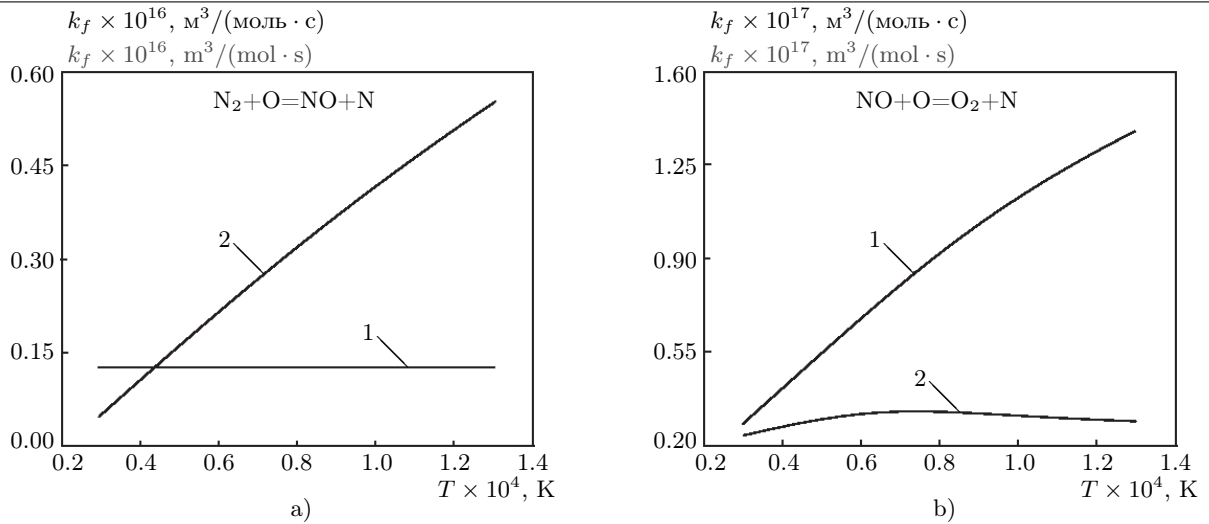


Рис. 2. Распределения коэффициентов обратных реакций в моделях [30] (линии 1) и [31] (линии 2)

Fig. 2. Distributions of reversed reaction coefficients in the models [30] (lines 1) and [31] (lines 2)

Таблица 6. Химические реакции в модифицированной модели [31]

Table 6. Chemical reactions in the modified model [31]

№ No.	Реакция Reaction	$A_{f,r}, cm^3/(mol \cdot s)$ $A_{f,r}, cm^3/(mol \cdot s)$	$b_{f,r}$	$E_{f,r}/k_B, K$
Реакции диссоциации Dissociation reactions				
1	$O_2+M=2O+M$ (M=N, O, N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> )	1.0e+22	-1.50	59500
2	$O_2+M=2O+M$ (M=Ar, N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO, NO <sup>+</sup> )	2.0e+21	-1.50	59500
3	$N_2+M=2N+M$ (M=N, O, N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> )	3.0e+22	-1.60	113200
4	$N_2+M=2N+M$ (M=Ar, N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO, NO <sup>+</sup> )	7.0e+21	-1.60	113200
5	$N_2+e^- = 2N+e^-$	1.2e+25	-1.60	113200
6	$NO+M=N+O+M$ (M=NO, N, O, N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> )	1.1e+17	0	75500
7	$NO+M=N+O+M$ (M=Ar, N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO <sup>+</sup> )	5.0e+15	0	75500
Реакции Зельдовича Zel'dovich reactions				
8	$NO+O=O_2+N$	8.37e+12	0	19450
9	$N_2+O=NO+N$	6.44e+17	-1.00	38370
Реакции обмена зарядом Charge exchange reactions				
10	$NO^++N=N_2+O^+$	3.4e+13	-1.08	12800
11	$NO^++O=O_2+N^+$	1.0e+12	0.50	77200
12	$O^++NO=O_2+N^+$	1.4e+05	1.90	26600
Реакции ассоциативной ионизации Associative ionization reactions				
13	$N+O=NO^++e^-$	8.8e+08	1	31900
Реакции ионизации электронным ударом Electron impact ionization reactions				
14	$O+e^- = O^++e^-+e^-$	3.9e+33	-3.78	158500
15	$N+e^- = N^++e^-+e^-$	2.5e+34	-3.82	168600
Дополнительные данные [32] Additional data [32]				
16	$Ar+Ar=Ar^++e^-+Ar$	1.16e+10	0	100000
17	$Ar+e^- = Ar^++e^-+e^-$	3.46e+18	0.59	202367

применяются коэффициенты, представленные в табл. 6. Под  $M$  понимается любой из рассматриваемых компонентов ( $M = O, N, O_2, N_2, NO, Ar$ ).

**3.5. Модели ионизации.** В моделях, предложенных в работах [30] и [31], предполагается, что воздух состоит из 11 компонентов ( $O_2, N_2, O, N, NO, O_2^+, N_2^+, O^+, N^+, NO^+, e^-$ ).

Для модели [30] в табл. 4 приводятся коэффициенты реакций для нейтральных компонентов, а коэффициенты, приведенные в табл. 7, относятся к процессу ионизации.

В модели [31] температура, контролирующая скорость реакции, учитывает температуру поступательных степеней свободы и электронную температуру и находится из соотношения  $T_c = T_e^\theta T^{1-\theta}$ . В расчетах полагается, что  $\theta = 0$ . Для модели [31] в табл. 6 приводятся коэффициенты реакций для нейтральных компонентов, а коэффициенты, приведенные в табл. 8, относятся к процессу ионизации.

Таблица 7. Реакции ионизации в модели [30]

Table 7. Ionization reactions in the model [30]

№ No.	Реакция Reaction	$C_f, \text{м}^3/(\text{моль} \cdot \text{с})$ $C_f, \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{s})$	$n_f$	$E_{a,f}/k_B, \text{К}$	$C_r, \text{м}^3/(\text{моль} \cdot \text{с})$ $C_r, \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{s})$	$n_r$	$E_{a,r}/k_B, \text{К}$
1	$N+O=NO^++e^-$	$1.50 \cdot 10^{-20}$	0.5	32400	$2.99 \cdot 10^{-11}$	-1.0	0.0
2	$O+e^-=O^++e^-+e^-$	$5.98 \cdot 10$	2.91	158000	$3.65 \cdot 10^{10}$	-4.5	0.0
3	$N+e^-=N^++e^-+e^-$	$1.83 \cdot 10^{-10}$	-3.14	169000	$3.65 \cdot 10^{10}$	-4.5	0.0
4	$O+O=O_2^++e^-$	$2.66 \cdot 10^{-13}$	-0.98	80800	$1.33 \cdot 10^{-8}$	-1.5	0.0
5	$O+O_2^+=O_2+O^+$	$4.85 \cdot 10^{-12}$	-1.11	28000	$1.30 \cdot 10^{-18}$	0.5	0.0
6	$N_2+N^+=N+N_2^+$	$3.35 \cdot 10^{-19}$	0.81	13000	$1.30 \cdot 10^{-18}$	0.5	0.0
7	$N+N=N_2^++e^-$	$2.32 \cdot 10^{-17}$	0	67800	$2.49 \cdot 10^{-8}$	-1.5	0.0
8	$O+NO^+=NO+O^+$	$6.03 \cdot 10^{-15}$	-0.6	50800	$2.49 \cdot 10^{-17}$	0.0	0.0
9	$N_2+O^+=O+N_2^+$	$5.65 \cdot 10^{-11}$	-2	23000	$4.12 \cdot 10^{-11}$	-2.2	0.0
10	$O_2+NO^+=NO+O_2^+$	$2.99 \cdot 10^{-15}$	0.17	33000	$2.99 \cdot 10^{-17}$	0.5	0.0
11	$O+NO^+=O_2+N^+$	$2.23 \cdot 10^{-17}$	0.31	77270	$1.66 \cdot 10^{-16}$	0.0	0.0
12	$O_2+N_2=NO+NO^++e^-$	$2.29 \cdot 10^{-10}$	-1.84	141000	$1.66 \cdot 10^{-6}$	-2.5	0.0
13	$NO+O_2=NO^++e^-+O_2$	$3.65 \cdot 10^{-15}$	-0.35	108000	$3.65 \cdot 10^{-4}$	-2.5	0.0
14	$NO+N_2=NO^++e^-+N_2$	$3.65 \cdot 10^{-15}$	-0.35	108000	$3.65 \cdot 10^{-4}$	-2.5	0.0
15	$N+NO^+=NO+N^+$	$1.66 \cdot 10^{-11}$	-0.93	61000	$7.97 \cdot 10^{-16}$	0.0	0.0

Таблица 8. Реакции ионизации в модели [31]

Table 8. Ionization reactions in the model [31]

№ No.	Реакция Reaction	$C_f, \text{м}^3/(\text{моль} \cdot \text{с})$ $C_f, \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{s})$	$n_f$	$E_{a,f}/k_B, \text{К}$	$C_r, \text{м}^3/(\text{моль} \cdot \text{с})$ $C_r, \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{s})$	$n_r$	$E_{a,r}/k_B, \text{К}$
1	$N+O=NO^++e^-$	$8.80 \cdot 10^{-18}$	0.0	31900	$1.79 \cdot 10^{-7}$	-1.65	0.0
2	$O+e^-=O^++e^-+e^-$	$8.80 \cdot 10^{-18}$	0.0	31900	$1.79 \cdot 10^{-7}$	-1.65	0.0
3	$N+e^-=N^++e^-+e^-$	$4.15 \cdot 10^{+4}$	-3.82	162000	$1.86 \cdot 10^{+12}$	-5.2	0.0
4	$O+O=O_2^++e^-$	$1.86 \cdot 10^{-17}$	0.0	80600	$1.45 \cdot 10^{-4}$	-2.412	0.0
5	$O+O_2^+=O_2+O^+$	$6.64 \cdot 10^{-18}$	-0.09	18000	$4.99 \cdot 10^{-18}$	-0.001	0.0
6	$N_2+N^+=N+N_2^+$	$1.66 \cdot 10^{-18}$	0.5	12200	$2.34 \cdot 10^{-14}$	-0.610	0.0
7	$N+N=N_2^++e^-$	$7.31 \cdot 10^{-23}$	1.5	67500	$1.79 \cdot 10^{+08}$	-0.58	0.0
8	$O+NO^+=NO+O^+$	$4.57 \cdot 10^{-17}$	0.01	50800	$2.32 \cdot 10^{+15}$	0.5	2500
9	$N_2+O^+=O+N_2^+$	$1.51 \cdot 10^{-18}$	0.36	22800	$1.98 \cdot 10^{+18}$	0.109	0.0
10	$O_2+NO^+=NO+O_2^+$	$3.99 \cdot 10^{-17}$	0.41	32600	$2.99 \cdot 10^{-08}$	0.5	0.0
11	$O+NO^+=O_2+N^+$	$1.95 \cdot 10^{-16}$	0.0	35500	$1.66 \cdot 10^{-16}$	0.0	0.0
12	$N_2+O_2^+=NO+NO^++e^-$	$1.64 \cdot 10^{-17}$	0.0	40700	$4.59 \cdot 10^{-18}$	-0.037	0.0
13	$O+NO^+=N+O_2^+$	$1.20 \cdot 10^{-17}$	0.29	48600	$8.92 \cdot 10^{-13}$	-0.969	0.0
14	$NO+O^+=O_2+N^+$	$2.32 \cdot 10^{-25}$	1.9	26600	$2.44 \cdot 10^{-26}$	2.102	0.0
15	$N+NO^+=N_2+O^+$	$5.65 \cdot 10^{-17}$	-1.08	12800	$7.97 \cdot 10^{-18}$	-0.71	0.0



Для реакций 2 и 3 постоянная равновесия находится из соотношения

$$K_e(T) = \exp \left[ \frac{A_1}{Z} + A_2 + A_3 \ln(Z) + A_4 Z + A_5 Z^2 \right].$$

Для реакции 8 постоянная равновесия находится из соотношения

$$K_e(T) = \exp [A_1 + A_2 \ln(Z) + A_3 Z + A_4 Z^2 + A_5 Z^3].$$

Здесь  $Z = 10000/T$ . Постоянные равновесия для модели [31] приводятся в табл. 9.

**4. Метод расчета.** Для дискретизации по времени используется явная схема Рунге–Кутты 4-го порядка. Для расчета потоков применяется разностная схема, основанная на решении задачи о распаде произвольного разрыва [33]. Для повышения порядка аппроксимации схемы по пространству используется интерполяция значений на грань из центров ячеек, а градиент в центрах ячеек вычисляется с помощью метода наименьших квадратов. Для обеспечения монотонности схемы применяются ограничители градиентов.

Таблица 9. Постоянные равновесия для модели [31]

Table 9. Equilibrium constants for the model [31]

№ No.	Реакция Reaction	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
2	$O+e^- = O^+ + e^- + e^-$	0.614	-6.755	-0.774	-16.003	0.006
3	$N+e^- = N^+ + e^- + e^-$	0.201	-3.966	-0.042	-18.063	0.126
8	$O+NO^+ = NO + O^+$	0.148	-1.011	-4.121	-0.132	0.006

Ячейки  $V$  расчетной сетки представляют собой выпуклые многогранники (тетраэдры, пирамиды, гексаэдры, призмы). В дискретной форме основные уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dU_i}{dt} = R_i, \quad R_i = -\frac{1}{|V_i|} \sum_k (F_{ki}^I - F_{ki}^V) + S_i,$$

где  $U_i$  — среднее значение вектора консервативных переменных по ячейке,  $F_{ki}^I$  — конвективный (невязкий) численный поток через грань контрольного объема  $k$ ,  $F_{ki}^V$  — вязкий численный поток через грань  $k$ ,  $S_i$  — источниковый член. Суммирование проводится по всем граням контрольного объема.

Численные потоки находятся при помощи интегрирования невязких и вязких потоков по каждому контрольному объему. В дискретном виде имеем

$$F_{ki}^I = \int_{S_{ki}} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{F}^I) dS, \quad F_{ki}^V = \int_{S_{ki}} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{F}^V) dS,$$

где  $S_{ki}$  — площадь грани  $k$  контрольного объема  $i$ ,  $\mathbf{n}_k$  — внешняя единичная нормаль к грани  $k$ .

Вычисление конвективного численного потока начинается с построения для каждой ячейки реконструкционного многочлена, аппроксимирующего вектор консервативных переменных в пределах ячейки. Для вычисления значений на гранях ячеек по известным средним значениям используется многомерная процедура реконструкции решения. Для получения второго порядка аппроксимации строится кусочно-линейное представление функции распределения в каждой пространственной ячейке, коэффициенты которого вычисляются с помощью метода наименьших квадратов по значениям в ячейках шаблона реконструкции.

Применение процедуры реконструкции к каждой грани контрольного объема  $i$  приводит к формированию двух векторов консервативных переменных  $U^-$  и  $U^+$ , соответствующих контрольному объему  $i$  и контрольному объему, который имеет с контрольным объемом  $i$  общую грань. На грани возникает задача о распаде произвольного разрыва [34]. Опуская для простоты записи индекс шага по времени  $n$ , конвективный поток находим из соотношения

$$F_{ki}^I = \int_{S_{ki}} T_{ki}^{-1} \mathbf{F}^I(T_{ki} \mathbf{U}) dS = T_{ki}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{Q}^-, \mathbf{Q}^+) |S_{ki}|,$$

где  $T_{ki}$  — матрица поворота системы координат в локальную систему для грани  $k$  ячейки  $i$ ,  $\mathbf{Q}^- = T_{ki} \mathbf{U}^-$ ,  $\mathbf{Q}^+ = T_{ki} \mathbf{U}^+$ . Под  $\mathbf{Q}$  понимается вектор консервативных переменных в системе координат, ориентированной по грани контрольного объема. Под  $\mathbf{f}(\mathbf{Q}^-, \mathbf{Q}^+)$  понимается решение задачи о распаде разрыва.

Дискретизация вязких численных потоков требует нахождения производных от компонент скорости и температуры на гранях ячеек сетки. В численном методе применяется дискретизация производных с использованием значений решения в центрах прилегающих ячеек, а также в вершинах грани. Неизвестные значения в вершинах грани находятся с помощью осреднения по соседним к грани ячейкам с геометрическими весами, обратно пропорциональными расстоянию от вершины до центра ячейки. Стационарное решение задачи (в этом случае невязка обращается в ноль,  $R_i \equiv 0$ ) строится методом установления по времени с помощью конечно-объемной схемы типа Годунова второго порядка аппроксимации.

**5. Расчетная область и сетка.** Для оценки точности разработанного численного метода применительно к расчетам газодинамических параметров гиперзвуковых течений около затупленных тел проводится моделирование обтекания полусферы в широком диапазоне параметров набегающего потока. Выбор сферы обусловлен подробными исследованиями данной формы тела в различных работах [14, 15].

Рассматривается обтекание сферы диаметром  $D = 12.7$  мм гиперзвуковым потоком воздуха с учетом высокотемпературных эффектов. Выбранные параметры потока соответствуют значениям в эксперименте по определению отхода головной ударной волны от сферы при обтекании воздухом [14]. Давление невозмущенного потока полагается равным  $p_\infty = 666.61$  Па, а температура —  $T_\infty = 293$  К (при этих условиях плотность составляет  $\rho_\infty = 7.9 \cdot 10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>, что соответствует высоте полета 41.87 км). Число Маха набегающего потока  $M$  изменяется от 7.10 до 17.77, что соответствует изменению скорости полета  $V$  от 2438 м/с до 6706 м/с. Набегающий сверхзвуковой поток рассматривается как смесь 23.3%  $O_2$  и 76.7%  $N_2$ . Число Кнудсена в условиях рассматриваемой задачи составляет  $Kn = \lambda/D = 0.008$  и соответствует режиму течения сплошной среды.

Схема расчетной области приводится на рис. 3. Внешняя граница расчетной области удалена от сферы на 4 мм в точке торможения и на 8.65 мм в верхней точке. Задача решается в осесимметричной постановке. На входной границе задаются граничные условия сверхзвукового втекания в расчетную область, а на выходной границе — условия сверхзвукового вытекания. На стенке используются граничные условия прилипания, но для упрощения постановки выходного граничного условия в конце сферы небольшой участок стенки задается как невязкая стенка с проскальзыванием [28]. Поверхность сферы полагается теплоизолированной. Расчетная сетка состоит из  $400 \times 400 = 160000$  гексагональных ячеек.

Сгущение узлов сетки производится к поверхности сферы по закону геометрической прогрессии таким образом, чтобы расстояние между стенкой и первым сеточным узлом составляло  $10^{-6}$  м (сетка 3), что соответствует безразмерной пристеночной координате  $y^+ < 2$  (такое требование накладывает используемая модель турбулентности). При этом также учитываются рекомендации работы [35], согласно которым необходимо, чтобы величина пристеночного числа Рейнольдса не превышала 20. Для проверки сеточной сходимости решения были проведены расчеты с более грубым пристеночным шагом сетки, который изменялся от  $10^{-4}$  (сетка 1) до  $5 \cdot 10^{-6}$  (сетка 2). Расхождение толщин ударного слоя, полученных на сетках 2 и 3, составляет около 5%.

**6. Результаты расчетов.** Для верификации разработанной вычислительной процедуры производится численный расчет обтекания наветренной части сферы потоком совершенного газа. Зависимости расстояния от фронта ударной волны до поверхности сферы на оси симметрии, расстояния от оси симметрии до звуковых точек на поверхности сферы и ударной волны, коэффициента сопротивления полусферы от числа Маха приводятся на рис. 4. Линейные размеры относятся к радиусу сферы, а коэффициент сопротивления при  $\theta = 90^\circ$  относится к миделю сферы,  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от передней критической точки. Расстояние от оси симметрии до звуковых точек на поверхности сферы и ударной волны характеризует собой величину минимальной области влияния. При этом положение звуковой точки на поверхности тела слабо зависит от числа Маха. При обработке экспериментальных данных из значений

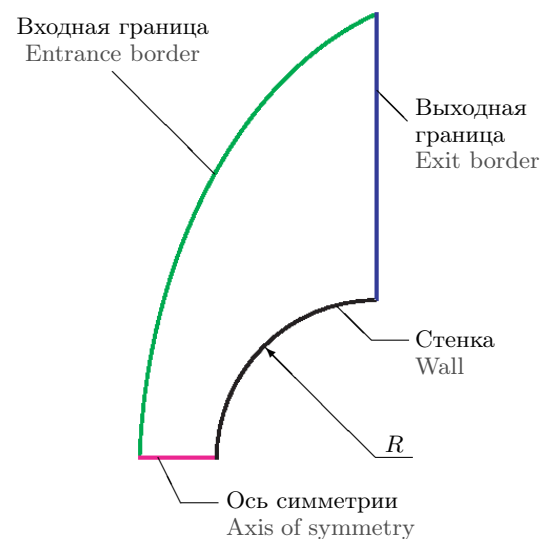


Рис. 3. Схема расчетной области  
 Fig. 3. Scheme of the computational domain



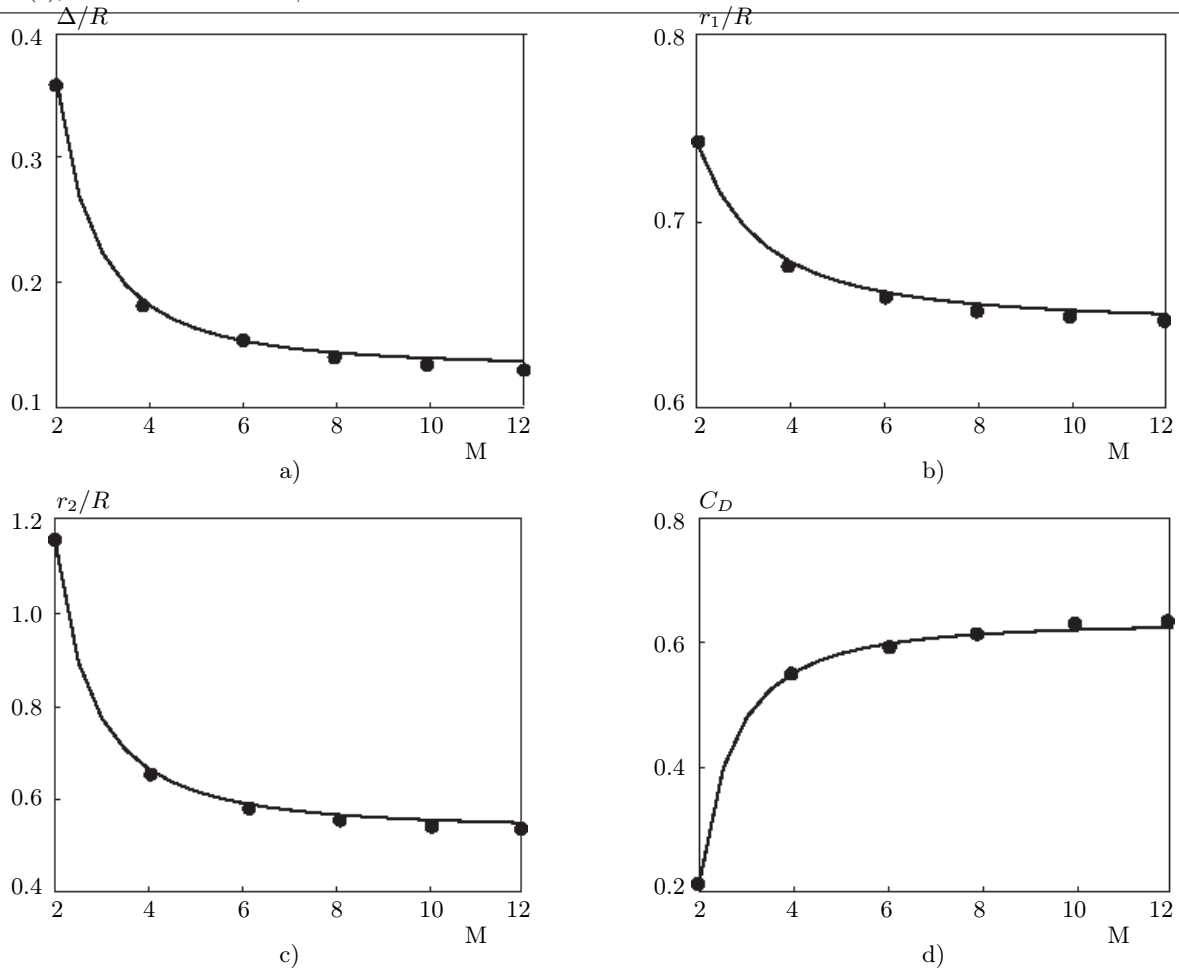


Рис. 4. Зависимости безразмерного расстояния от фронта ударной волны до поверхности сферы (а), расстояния от оси симметрии до звуковых точек на поверхности сферы (b) и ударной волны (с), коэффициента сопротивления (d) от числа Маха. Линии соответствуют расчетам, а символы • — данным [4]

Fig. 4. Dependences of the dimensionless distance from the shock wave front to the sphere surface (a), the distance from the symmetry axis to sound points on the sphere surface (b) and the shock wave (c), drag coefficient (d) on the Mach number. Lines correspond to calculations, and symbols • — to data [4]

коэффициента сопротивления для сферы вычитается коэффициент донного сопротивления сферы, который принимается равным  $1/(\gamma M^2)$ . Для полной сферы при  $M > 6$  коэффициент сопротивления составляет 0.87–0.92.

Основной вариант расчета соответствует числу Маха  $M = 12$ . При сверхзвуковом обтекании сферы в лобовой области линии уровня температуры имеют округлую форму в виде волн, расходящихся от лобовой точки. Головной скачок уплотнения представляет собой высокоградиентную область изменения параметров, которая визуально определяется как зона стягивания линий уровня. При гиперзвуковом обтекании из-за большой разреженности газа фронт ударной волны, в том числе головного скачка, имеет конечную толщину, а точность моделирования этой структуры определяется качеством вычислительного алгоритма (подходы, всегда обеспечивающие узость фронта скачка, являются неприемлемыми).

В результате численного моделирования получены картины течения, обработанные в виде линий уровня газодинамических параметров. Поля скорости, плотности и температуры потока показывает рис. 5. Полученные результаты свидетельствуют о правильном предсказании формы ударной волны и основных элементов течения вблизи лобовой поверхности (форма головной ударной волны, местоположение звуковой линии). Распределения плотности и температуры являются характерными для сверхзвукового обтекания, когда их максимумы находятся в точке торможения потока, а минимумы — в подветренной области. Учет реальных свойств газа приводит к тому, что температура в точке торможения оказывается ниже температуры, рассчитанной по модели совершенного газа.

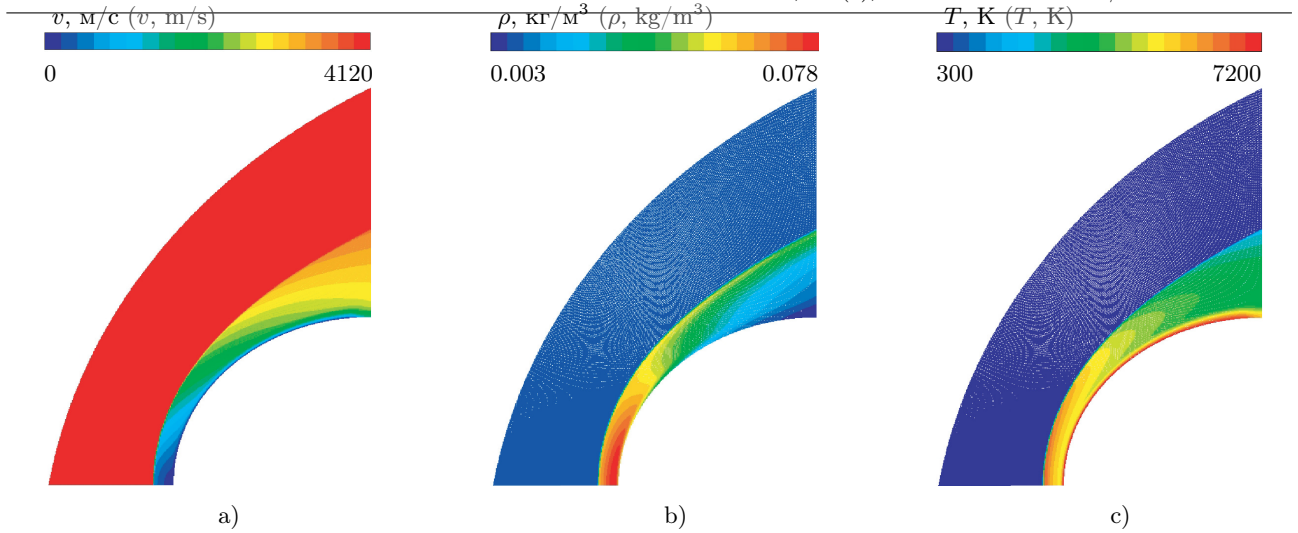


Рис. 5. Поля скорости (a), плотности (b) и температуры (c)

Fig. 5. Velocity (a), density (b) and temperature (c) fields

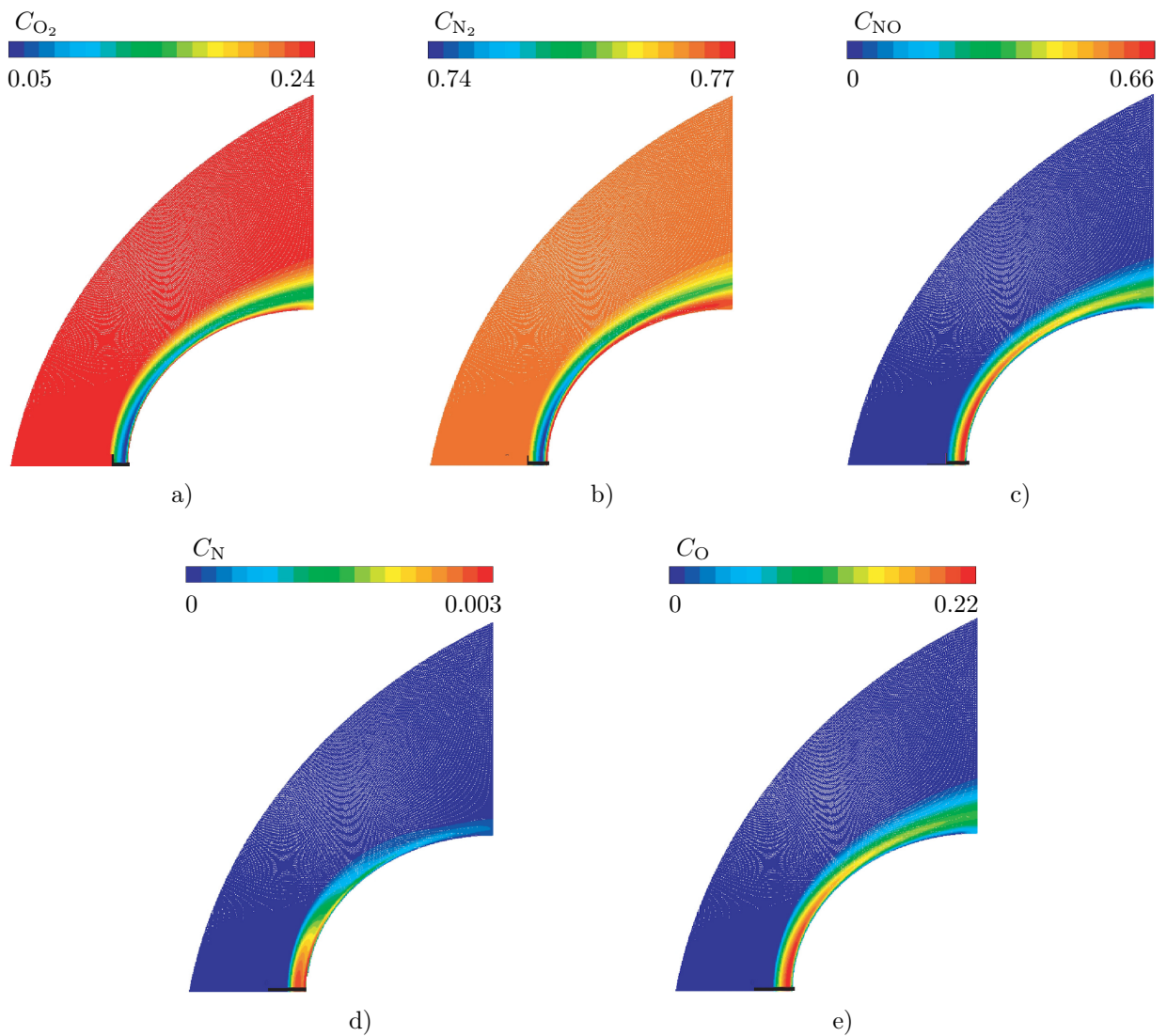


Рис. 6. Поля концентраций компонентов: O<sub>2</sub> (a), N<sub>2</sub> (b), NO (c), N (d), O (e)

Fig. 6. Component concentration fields: O<sub>2</sub> (a), N<sub>2</sub> (b), NO (c), N (d), O (e)



Поверхность фронта скачка является достаточно гладкой. Расстояние между фронтом головной ударной волны и поверхностью тела является минимальным на линии торможения (условная линия, выходящая из лобовой точки тела, коллинеарная вектору скорости невозмущенного потока) и монотонно увеличивается при удалении от лобовой части тела вдоль его поверхности вниз по потоку. Поля концентраций различных компонентов смеси показывает рис. 6. В целом, представленные данные соответствуют изменению химического состава воздуха при увеличении температуры. Примерно до 2500 К происходит увеличение концентрации окиси азота NO, затем идет уменьшение ее концентрации, а также концентраций молекул кислорода и азота. Это происходит вследствие процессов диссоциации. До 5000 К образование электронов происходит из-за ионизации окиси азота, затем включаются механизмы ионизации кислорода, азота и аргона.

Распределение давления по поверхности сферы показывает рис. 7. Давление нормируется на его значение в критической точке. При использовании модели совершенного газа распределение давления при  $M > 6$  перестает зависеть от числа Маха и носит практически универсальный характер. При учете высокотемпературных эффектов в воздухе зависимость распределения давления по поверхности сферы так же является достаточно слабой. Согласно выводам теории гиперзвуковых течений около тупых тел, течение зависит, в основном, от параметра  $\rho_\infty/\rho_s$ , где  $\rho_s$  — плотность за прямым скачком уплотнения. Этот параметр уменьшается с увеличением скорости набегающего потока. Индекс  $\infty$  относится к параметрам в набегающем потоке.

Коэффициент давления и коэффициент поверхностного трения определяются следующими соотношениями:

$$C_p = \frac{2(p_w - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2}, \quad C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty V_\infty^2},$$

где  $p_w$  — давление на стенке,  $\tau_w$  — напряжение поверхностного трения. Распределения коэффициентов давления и трения по поверхности сферы показывает рис. 8 при фиксированном числе Маха. Коэффициент давления принимает максимальное значение в передней критической точке и постепенно убывает вдоль поверхности сферы. Следует отметить сравнительно слабую зависимость распределения давления по поверхности сферы от числа Маха (при  $M > 2$  практически наступает режим гиперзвуковой стабилизации). Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными измерений [5]. Коэффициент поверхностного трения имеет минимальное значение в передней критической точке, затем возрастает, достигая максимального значения при  $\theta = 46^\circ$ , после чего убывает. Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными, полученными на основе полуэмпирических зависимостей, представленных в работе [36].

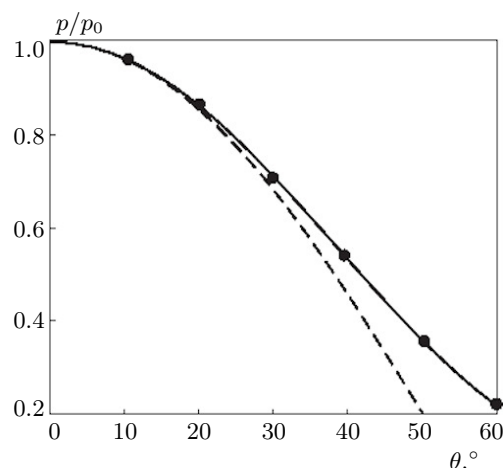


Рис. 7. Распределение давления по поверхности сферы при использовании модели совершенного газа (сплошная линия) и модели высокотемпературного воздуха (пунктирная линия). Символы • соответствуют данным [4] для совершенного газа

Fig. 7. Pressure distribution over the surface of a sphere using the perfect gas model (solid line) and the high-temperature air model (dashed line). The symbols • correspond to the data [4] for a perfect gas

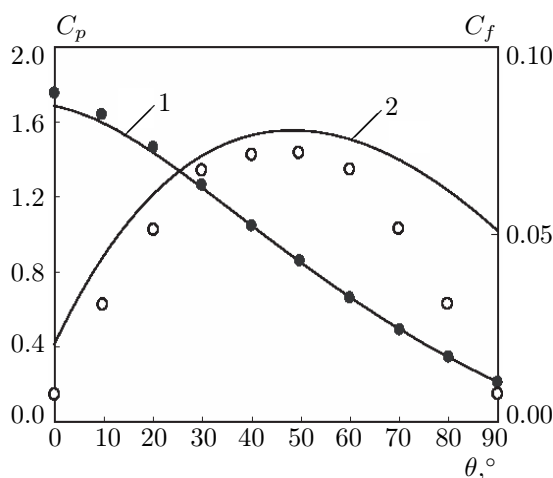


Рис. 8. Распределения коэффициента давления (линия 1, •) и коэффициента трения (линия 2, о) по поверхности сферы. Сплошные линии соответствуют расчетным данным, а символы • и о — оценкам по полуэмпирическим зависимостям [36]

Fig. 8. Distributions of the pressure coefficient (line 1, •) and friction coefficient (line 2, o) over the sphere surface. The solid lines correspond to the calculated data, and the symbols • and o — to estimates based on semi-empirical dependencies [36]

При этом следует отметить, что оценки по полуэмпирической зависимости приводят к завышенным значениям давления по сравнению с расчетами. Согласование расчетных и экспериментальных данных по коэффициенту трения несколько хуже, чем по давлению.

Результаты численного моделирования сравниваются с ранее опубликованными данными [19] при числе Маха  $M = 17.6$  ( $V = 5804$  м/с,  $p = 57.4$  Па,  $T = 200$  К,  $Re = 3.4 \times 10^5$ ). Распределение давления на оси симметрии перед поверхностью сферы показывает рис. 9. Имеет место достаточно хорошее согласование результатов расчетов (линия 1) с имеющимися данными, приведенными в работе [19] (линия 2). При этом наблюдается небольшое различие в толщине ударного слоя. Сравнение распределений температуры для совершенного и химически реагирующего газа показывает, что имеются существенные (до 30%) отличия в распределении температур поперек ударного слоя в пристеночной области, где наблюдаются значительные концентрации химических компонентов.

В то время как в масштабе рисунка распределения давления совпадают, значения температуры за ударной волной существенно различаются, а наибольшее различие имеет место в точке торможения. При равновесном протекании химических реакций молекулы кислорода отсутствуют. Основной причиной существенного различия в значениях температуры является условие для концентраций химических компонентов на ударной волне. При существующих значениях температуры и малой плотности газовой среды концентрация молекул азота также существенно отличается от ее величины в набегающем потоке в равновесном случае.

Распределение теплового потока на холодной поверхности передней части сферы показывает рис. 10 (по горизонтальной оси откладывается безразмерная координата на поверхности тела, отсчитываемая от лобовой точки). Условия расчета соответствуют данным работы [37] ( $M = 5$ ,  $Re = 3.94 \times 10^6$ ,  $T_w/T_{w0} = 0.26$ , где  $T_w$  — температура стенки,  $T_{w0}$  — температура в точке торможения). Сплошная линия соответствует результатам расчетов, которые проводятся с учетом ламинарного и турбулентного режимов течения, а пунктирная линия и символы  $\circ$  соответствуют расчету и данным измерений, взятым из работы [37]. Символ  $\bullet$  обозначает максимальный турбулентный тепловой поток, полученный по формуле из работы [11]. Около тела реализуется как ламинарный, так и турбулентный режим течения, что обуславливает немонотонность распределения теплового потока по поверхности сферы и его резкое увеличение в области турбулентного течения относительно теплового потока в лобовой точке ( $s = 0$ ). Отличие расчетного максимального турбулентного теплового потока от значения, полученного по формуле из работы [11], составляет около 6%. Расчетный тепловой поток достаточно хорошо согласуется с расчетными и экспериментальными данными работы [37].

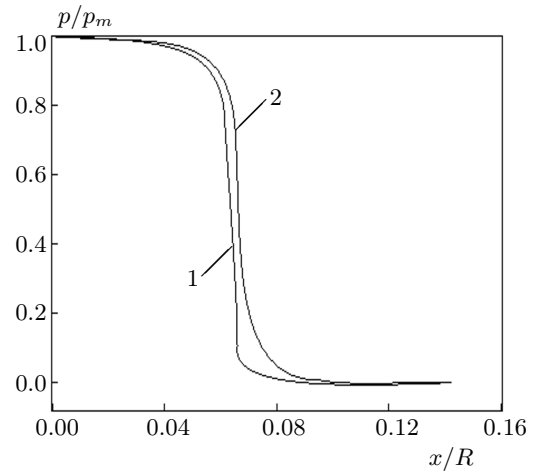


Рис. 9. Распределения давления на оси симметрии перед сферой (линия 1) в сравнении с данными работы [19] (линия 2)

Fig. 9. Pressure distributions on the axis of symmetry in front of the sphere (line 1) in comparison with the data of [19] (line 2)

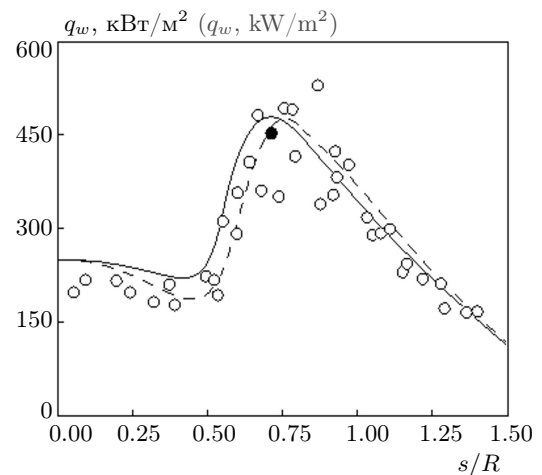


Рис. 10. Распределения теплового потока на полусфере, обтекаемой гиперзвуковым потоком воздуха (сплошная линия). Пунктирная линия и значки  $\circ$  соответствуют расчетным и экспериментальным данным работы [37]

Fig. 10. Heat flux distributions on a hemisphere in a hypersonic air flow (solid line). The dotted line and  $\circ$  symbols correspond to the calculated and experimental data of [37]



Проводится также серия расчетов сверх- и гиперзвукового обтекания сферы с изотермической поверхностью в широком диапазоне высот и чисел Маха. При заданной высоте и скорости полета с помощью модели стандартной атмосферы определяются параметры невозмущенного потока и параметры в точке торможения. Численное решение задачи сравнивается с имеющимися данными по плотности теплового потока в точке торможения и его максимальному значению в области турбулентного течения [11, 38]. Рассматривается обтекание сферы радиусом  $R = 0.05$  м гиперзвуковым потоком воздуха на высотах  $H = 10, 20, 40$  км. Скорость набегающего потока изменяется от 1500 до 6300 м/с. Температура поверхности сферы полагается равной  $T_w = 293$  К. Результаты численных расчетов конвективного теплового потока в точке торможения на поверхности сферы показывает рис. 11 для различных высот полета. Течение при данных исходных параметрах является ламинарным в окрестности критической точки.

Отличие теплового потока в точке торможения, полученного по формуле из работы [38], от расчетного значения варьируется от 2 до 8%. Значения теплового потока в точке торможения при полете в плотных слоях атмосферы на высоте  $H = 10$  км (линия 1) превышают соответствующие значения на высоте  $H = 40$  км (линия 3) несмотря на меньшую скорость полета. Это объясняется тем, что скорость полета влияет на значение теплового потока слабее, чем плотность воздуха, которая различается примерно в 100 раз для этих высот. Отметим, что с учетом влияния турбулентности на тепловой поток на поверхности тела это отличие становится еще более сильным.

Для совершенного газа относительная толщина ударного слоя находится из соотношения [14]

$$\frac{\Delta}{D} = K\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{2}{\gamma - 1} M_\infty^2 \right),$$

где  $\Delta$  — толщина ударного слоя,  $D$  — диаметр сферы. Параметр  $\varepsilon$  представляет собой отношение плотностей в невозмущенном потоке и в ударном слое ( $\varepsilon = \rho_\infty / \rho_s$ ), а коэффициент пропорциональности равен  $K = 0.39-0.41$ . Для низких скоростей поток можно считать замороженным, а различия данных физического и вычислительного эксперимента связаны с неравновесными эффектами в воздухе [14].

Для учета влияния высокотемпературных эффектов на толщину ударного слоя используется распределение средней плотности [39]. В частности, для упрощения расчетов в работе [40] предполагается, что распределение плотности между фронтом головной ударной волны и поверхностью сферы подчиняется линейной зависимости. Согласно данным [40], толщина ударного слоя является обратно пропорциональной средней плотности  $\bar{\rho}$  за фронтом ударной волны:

$$\frac{\Delta}{D} = 0.25 \frac{\rho_\infty}{\bar{\rho}}.$$

Такое соотношение игнорирует влияние химических реакций и приводит к достаточно большим погрешностям при высоких числах Маха [10]. Для учета химических реакций величина постоянного множителя изменяется, а соотношение для нахождения толщины ударного слоя принимает вид [40]

$$\frac{\Delta}{D} = 0.41 \frac{\rho_\infty}{\bar{\rho}}.$$

Однако такой подход является достаточно приближенным, а нахождение средней плотности в ударном слое требует достаточно трудоемких расчетов [41].

Модель, построенная в работе [42], учитывает геометрию головной части летательного аппарата и свойства потока. Подход, предложенный в работе [43], позволяет получить соотношение для толщины

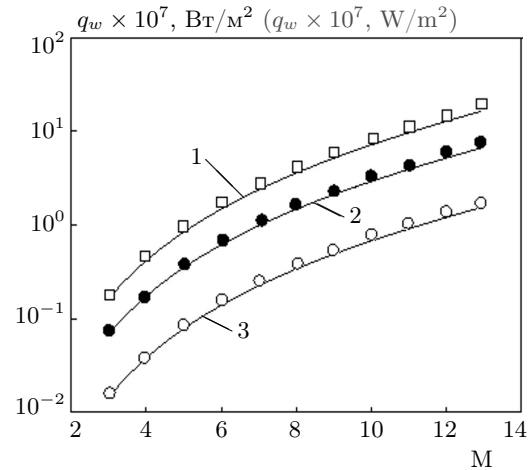


Рис. 11. Распределения плотности теплового потока в критической точке на поверхности сферы при  $H = 10$  (1, □), 20 (2, ●), 40 км (3, ○). Символы соответствуют данным [38]

Fig. 11. Distributions of the heat flux density at the critical point on the surface of the sphere at  $H = 10$  (1, □), 20 (2, ●), 40 km (3, ○). Symbols match data [38]



ударного слоя, параметрами которого являются число Маха и плотность. Подход развивается в работе [10], в которой приводится толщина ударного слоя как функция числа Маха и высоты полета, которая изменяется от 25 до 55 км. В модели высокотемпературного воздуха учитывается 9 компонентов ( $N_2$ ,  $O_2$ ,  $NO$ ,  $O$ ,  $N$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $NO^+$ ,  $e^-$ ). Один из интересных эффектов, наблюдаемых в расчетах, состоит в наличии точки минимума (turning point) на распределении толщины ударного слоя в зависимости от числа Маха. Точка минимума соответствует числам Маха от 27 до 31 в зависимости от высоты полета. Такое явление объясняется различной скоростью роста давления и температуры за фронтом ударной волны при увеличении числа Маха, а также сложной зависимостью коэффициентов переноса от температуры. Такое же поведение имеет средняя плотность в ударном слое.

Сравнение, проведенное в работе [10], показывает, что модель [40], не учитывающая наличие химических реакций, и модель [40], учитывающая химические реакции в высокотемпературном воздухе, приводят к погрешностям порядка 11.94% и 8.22% относительно результатов численного моделирования. В то же время, модель [10] дает среднюю погрешность около 1.27%, которая уменьшается при увеличении числа Маха.

Зависимость безразмерного расстояния от фронта ударной волны до поверхности сферы от числа Маха показывает рис. 12. Линия 1 соответствует зависимости безразмерного расстояния до ударной волны от числа Маха при использовании предположения о полностью равновесных химических реакциях (модель Крайко). Линия 2 показывает интерполированные экспериментальные данные из работы [14] с соответствующими оценками ошибок измерений. Линия 3 соответствует результатам расчета при использовании модели нереагирующего совершенного газа с постоянным показателем адиабаты ( $\gamma = 1.4$ ). Линия 4 получена на основе расчетов по модели Парка [31]. При  $M = 14$  линия равновесного расчета (линия 1) наиболее близко подходит к экспериментальным данным (линия 2) и приближается к ним при более высоких числах Маха набегающего потока. Результаты расчетов для различных высот полета показывает рис. 13.

В сильной ударной волне, возникающей перед затупленным телом, происходит преобразование кинетической энергии набегающего потока во внутренние степени свободы молекул воздуха (вращательные и колебательные), что приводит к заметному снижению температуры в сжатом слое и уменьшению отхода фронта ударной волны от поверхности. Наблюдается типичная картина течения с отошедшей ударной волной и пограничным слоем. Разогрев газа на фронте ударной волны инициирует химические реакции, которые приводят к распаду молекул азота и кислорода и образованию атомарных  $N$ ,  $O$ , а также  $NO$ . В пограничном слое температура резко падает до заданной температуры поверхности, в результате чего происходит восстановление массовых концентраций молекулярных азота и кислорода.

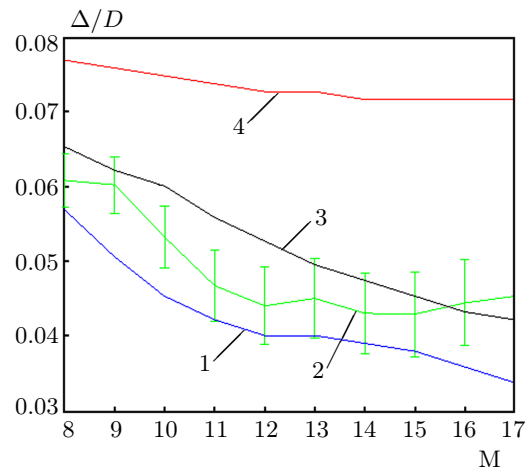


Рис. 12. Зависимость безразмерного расстояния от фронта ударной волны до поверхности сферы от числа Маха

Fig. 12. Dependence of the dimensionless distance from the shock wave front to the sphere surface on the Mach number

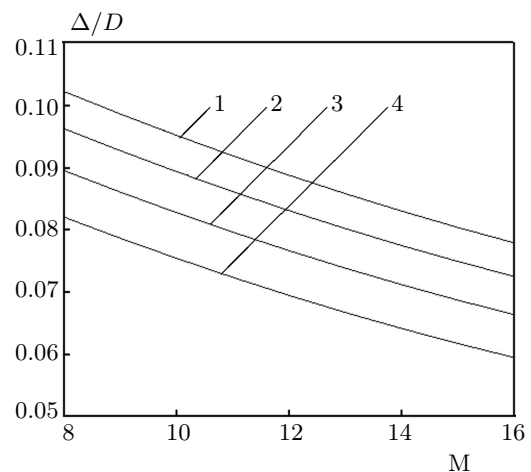


Рис. 13. Зависимости безразмерного расстояния от фронта ударной волны до поверхности сферы от числа Маха и высоты полета 30 км (линия 1), 40 км (линия 2), 50 км (линия 3), 60 км (линия 4)

Fig. 13. Dependences of the dimensionless distance from the shock wave front to the sphere surface on the Mach number and the flight altitude of 30 km (line 1), 40 km (line 2), 50 km (line 3), 60 km (line 4)



Таблица 10. Молярные концентрации различных компонентов в точке торможения  
 Table 10. Molar concentrations of various components at the stagnation point

Модель Model	$C_{O_2}$	$C_{N_2}$	$C_O$	$C_N$	$C_{NO}$
[30]	0.0041	0.632	0.346	0.011	0.010
[31]	0.0034	0.621	0.341	0.012	0.020

Полученные результаты позволяют оценить влияние различных моделей высокотемпературного воздуха. Составы воздуха, предсказанные двумя химическими моделями в точке торможения сферы, не сильно различаются (табл. 10). Несмотря на то, что две модели воздуха приводят к различным концентрациям компонентов на линии торможения потока, они дают схожие концентрации различных компонентов на поверхности сферы. С понижением температуры разница между коэффициентами скоростей реакций у обеих моделей имеет тенденцию к уменьшению. По этой причине химические модели не оказывают значимого влияния на вычисления. Однако расчеты с использованием химической модели, предложенной в работе [31], позволяют быстрее достичь установившегося состояния по сравнению с расчетами на основе химической модели, предложенной в работе [30].

Наиболее значимым эффектом, обусловленным химическими моделями, является толщина ударного слоя, что оказывает локально сильное влияние на расчет тепловых потоков. В частности, толщина ударного слоя, полученная при помощи модели [31], меньше, чем толщина ударного слоя по модели [30].

Когда процессы ионизации не учитываются, химические модели приводят к различным составам среды за фронтом ударной волны, но практически к такому же составу на поверхности тела. Напротив, когда процессы ионизации учитываются, химические модели приводят к различным составам в ударном слое и на поверхности. Учет процессов ионизации приводит к увеличению расхождения между результатами, полученными на основе двух моделей. Эффекты ионизации сильнее сказываются в расчетах на основе модели, предложенной в работе [31]. Такое поведение двух моделей связано, помимо разных коэффициентов скоростей реакций, также с тем, что реакции с 11 по 15 являются разными. Молярные доли нейтральных компонентов O, N и NO близки друг к другу без учета ионизации и сильно различаются при учете ионизации.

**7. Заключение.** Расчет обтекания гиперзвукового летательного аппарата в условиях входа в атмосферу и сильного аэродинамического нагрева требует определения термодинамических параметров, которые не определяются с достаточной точностью при помощи модели совершенного газа.

Разработан подход к моделированию обтекания затупленных тел потоком вязкой многокомпонентной химически реагирующей смеси газов с учетом влияния неравновесных физико-химических процессов. Проведен сравнительный анализ результатов расчетов, полученных с использованием разработанного численного метода, с данными натурных испытаний и расчетными данными, имеющимися в литературе. Качественное и количественное согласование параметров неравновесных течений позволяет судить о правильности расчета химических концентраций в ударном слое. Количественные отличия обусловлены различными моделями химических реакций сравниваемых методов, включающими в себя константы скоростей химических реакций и граничные условия.

Проведенные тестовые расчеты показывают, что представленная модель и вычислительная процедура дают возможность с достаточной степенью точности определять распределения давления и плотности теплового потока по поверхности полусферы, обтекаемой гиперзвуковым потоком воздуха, что позволяет их применять в решении задач аэродинамического проектирования летательных аппаратов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта 19–71–10019.

### Список литературы

1. Fletcher D.G. Fundamentals of hypersonic flow — aerothermodynamics // Critical Technologies for Hypersonic Vehicle Development. Rhode-St-Genese: Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2005. 3-1–3-47.
2. Anderson J.D. Hypersonic and high temperature gas dynamics. Reston: AIAA Press, 2006.
3. Суржиков С.Т. Расчетное исследование аэротермодинамики гиперзвукового обтекания затупленных тел на примере анализа экспериментальных данных. М.: ИПМех РАН, 2011.



4. Башкин В.А., Егоров И.В. Численное моделирование динамики вязкого совершенного газа. М.: Физматлит, 2012.
5. Holt M., Hoffman G.H. Calculation of hypersonic flow past sphere and ellipsoids. Report No. 61-209-1903. New York: American Rocket Society, 1961.
6. Cox R.N., Crabtree L.F. Elements of hypersonic aerodynamics. New York: Academic Press, 1965.
7. Красильщиков А.П., Гурьяшкин Л.П. Экспериментальные исследования тел вращения в гиперзвуковых потоках. М.: Физматлит, 2007.
8. Kharchenko N.A., Kotov M.A. Analysis of the high speed gas flow over a sphere in the range of Mach numbers 2–12 // Journal of Physics: Conference Series. 2018. **1009**. doi 10.1088/1742-6596/1009/1/012007.
9. Olivier H. A theoretical model for the shock stand-off distance in frozen and equilibrium flows // Journal of Fluid Mechanics. 2000. **413**, N 01. 345–353.
10. Hu Y.M., Huang H.M., Guo J. Shock wave standoff distance of near space hypersonic vehicles // Science China. Technological Sciences. 2017. **60**, N 8. 1123–1131.
11. Hankey W.L. Re-entry aerodynamics. Washington: AIAA Press, 1988. <https://arc.aiaa.org/doi/book/10.2514/4.862342>. Cited August 28, 2022.
12. Surzhikov S.T. Numerical simulation of heat radiation generated by entering space vehicle // AIAA Paper 2004-2379. 2004. doi 10.2514/6.2004-2379.
13. Quirk J.J. A contribution to the great Riemann solver debate // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1994. **18**, N 6. 555–574.
14. Lobb R.K. Experimental measurement of shock detachment distance on spheres fired in air at hypervelocities // High Temperature Aspects of Hypersonic Flow. Oxford: Pergamon Press, 1964. 519–527.
15. McIntyre T.J., Bishop A.I., Rubinsztein-Dunlop H., Gnoffo P. Comparison of experimental and numerical studies of ionizing flow over a cylinder // AIAA Journal. 2003. **41**, N 11. 2157–2161.
16. Hornung H.G., Schramm J.M., Hannemann K. Hypersonic flow over spherically blunted cone capsules for atmospheric entry. Part 1. The sharp cone and the sphere // Journal of Fluid Mechanics. 2019. **871**. 1097–1116.
17. Widhoppe G.F., Victoria K.J. On the solution of the unsteady Navier–Stokes equations including multicomponent finite rate chemistry // Computers and Fluids. 1973. **1**, N 2. 159–184.
18. Widhoppe G., Wang J. A TVD finite-volume technique for nonequilibrium chemically reacting flows // AIAA Paper 88-2711. 1988. doi 10.2514/6.1988-2711.
19. Olsen M.E., Liu Y., Vinokur M., Olsen T. Implementation of premixed equilibrium chemistry capability in OVERFLOW // AIAA Paper 2004-1273. 2004. doi 10.2514/6.2004-1273.
20. Chen S., Hu Y., Sun Q. Study of the coupling between real gas effects and rarefied effects on hypersonic aerodynamics // AIP Conference Proceedings. 2012. **1501**, N 1. 1515–1521.
21. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г. Численное моделирование газодинамических и физико-химических процессов при обтекании тел гиперзвуковым потоком // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**, № 4. 387–405. doi 10.26089/NumMet.v18r433.
22. Emelyanov V., Karpenko A., Volkov K. Simulation of hypersonic flows with equilibrium chemical reactions on graphics processor units // Acta Astronautica. 2019. **163**, Part A. 259–271. doi 10.1016/j.actaastro.2019.01.010.
23. Крайко А.Н., Макаров В.Е. Явные аналитические формулы, определяющие равновесный состав и термодинамические функции воздуха для температур от 200 до 20000 К // Теплофизика высоких температур. 1996. **34**, № 2. 208–219.
24. Голомазов М.М. Исследование химических процессов при гиперзвуковом обтекании затупленных тел углекислым газом // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2012. № 2012-10-18-001. <http://chemphys.edu.ru/issues/2012-13-2/articles/308/>. Cited August 28, 2022.
25. Шевелев Ю.Д., Сызранова Н.Г., Кустова Е.В., Нагнибеда Е.А. Численные исследования гиперзвукового обтекания космических аппаратов при спуске в атмосфере Марса // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 9. 23–50.
26. Gallouët T., Herard J.-M., Seguin N. Some recent finite volume schemes to compute Euler equations using real gas EOS // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2002. **39**, N 12. 1073–1138.
27. Roy C.J., Blottner F.G. Review and assessment of turbulence models for hypersonic flows // Progress in Aerospace Sciences. 2006. **42**, N 7–8. 469–530.
28. Dobrov Yu., Gimadiev V., Karpenko A., Volkov K. Numerical simulation of hypersonic flow with non-equilibrium chemical reactions around sphere // Acta Astronautica. 2022. **194**. 468–479.



29. *Park C.* Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions. Part I. Earth entries // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 1993. **7**, N 3. 385–398.
30. *Gupta R.N., Yos J.M., Thompson R.A.* A review of reaction rates and thermodynamic transport properties for an 11-species air model for chemical and thermal non-equilibrium calculations to 30,000 K // NASA Report No. TM101528. 1989. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19900017748>. Cited August 28, 2022.
31. *Park C., Jaffe R.L., Partridge H.* Chemical-kinetic parameters of hyperbolic Earth entry // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2001. **15**, N 1. 76–90.
32. *Starik A.M., Titova N.S., Arsentiev I.V.* Comprehensive analysis of the effect of atomic and molecular metastable state excitation on air plasma composition behind strong shock waves // *Plasma Sources Science and Technology*. 2009. **19**, N 1. doi 10.1088/0963-0252/19/1/015007.
33. *Edwards J.R., Liou M.-S.* Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds // *AIAA Journal*. 1998. **36**, N 9. 1610–1617.
34. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 2009.
35. *Qu F., Chen J., Sun D., Bai J., Zuo G.* A grid strategy for predicting the space plane’s hypersonic aerodynamic heating loads // *Aerospace Science and Technology*. 2019. **86**. 659–670.
36. *Kotov V.M., Lychkin E.N., Reshetin A.G., Schelkonogov A.N.* An approximate method of aerodynamic calculation of complex shape bodies in a transition region // *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 1. New York: Plenum Press, 1985. 487–494.
37. *Widhopf G.F., Hall R.* Transitional and turbulent heat-transfer measurements on yawed blunt conical nosetip // *AIAA Journal*. 1972. **10**, N 10. 1318–1325.
38. *Fay J.A., Riddell F.R.* Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air // *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1958. **25**, N 2. 73–85.
39. *Belouaggadia N., Olivier H., Brun R.* Numerical and theoretical study of the shock stand-off distance in non-equilibrium flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2008. **607**. 167–197.
40. *Wen C.-Y., Hornung H.G.* Non-equilibrium dissociating flow over spheres // *Journal of Fluid Mechanics*. 1995. **299**. 389–405.
41. *Martel J., Jolly B., Lawrence W.* Shock standoff and shape predictions with validation for flat face cylinder // *AIAA Paper 2015-0523*. 2015. doi 10.2514/6.2015-0523.
42. *Askari S.* An analytical approach for stand-off distance of detached shock waves // *Aerospace Science and Technology*. 2013. **28**, N 1. 384–390.
43. *Hu Y., Huang H., Zhang Z.* New formulas for standoff distance in front of spacecraft in hypersonic flow // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2016. **53**, N 5. 993–997.

Поступила в редакцию  
 31 марта 2022 г.

Принята к публикации  
 15 августа 2022 г.

### Информация об авторах

*Константин Николаевич Волков* — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр.; Балтийский государственный технический университет “Военмех” имени Д. Ф. Устинова, 1-ая Красноармейская ул., 1, 190005, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

*Владислав Александрович Гимадиев* — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр-т, 28, 198504, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

*Юрий Владимирович Добров* — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр-т, 28, 198504, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

*Антон Геннадьевич Карпенко* — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр-т, 28, 198504, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

## References

1. D. G. Fletcher, “Fundamentals of Hypersonic Flow — Aerothermodynamics,” in *Critical Technologies for Hypersonic Vehicle Development* (Von Karman Inst. for Fluid Dynamics, Rhode-St-Genese, 2005), pp. 3-1–3-47.
2. J. D. Anderson, *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics* (AIAA Press, Reston, 2006).
3. S. T. Surzhikov, *Numerical Study of Aerothermodynamics of Hypersonic Flow over Blunt Bodies by the Example of Experimental Data Analysis* (Inst. for Problems in Mechanics, Moscow, 2011) [in Russian].
4. V. A. Bashkin and I. V. Egorov, *Numerical Simulation of Viscous Perfect Gas Dynamics* (Fizmatlit, Moscow, 2012; Begell House, New York, 2016).
5. M. Holt and G. H. Hoffman, *Calculation of Hypersonic Flow Past Sphere and Ellipsoids*, Report No. 61-209-1903 (American Rocket Society, New York, 1961).
6. R. N. Cox and L. F. Crabtree, *Elements of Hypersonic Aerodynamics* (Academic Press, New York, 1965).
7. A. P. Krasil’schikov and L. P. Gur’yashkin, *Experimental Studies of Rotating Bodies in Hypersonic Flows* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
8. N. A. Kharchenko and M. A. Kotov, “Analysis of the High Speed Gas Flow over a Sphere in the Range of Mach Numbers 2–12,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **1009** (2018). doi [10.1088/1742-6596/1009/1/012007](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1009/1/012007).
9. H. Olivier, “A Theoretical Model for the Shock Stand-off Distance in Frozen and Equilibrium Flows,” *J. Fluid Mech.* **413** (01), 345–353 (2000). doi [10.1017/S0022112000008703](https://doi.org/10.1017/S0022112000008703).
10. Y. M. Hu, H. M. Huang, and J. Guo, “Shock Wave Standoff Distance of Near Space Hypersonic Vehicles,” *Sci. China. Technol. Sci.* **60** (8), 1123–1131 (2017). doi [10.1007/s11431-016-9055-5](https://doi.org/10.1007/s11431-016-9055-5).
11. W. L. Hankey, *Re-Entry Aerodynamics* (AIAA Press, Washington, 1988). <https://arc.aiaa.org/doi/book/10.2514/4.862342>. Cited August 28, 2022.
12. S. T. Surzhikov, “Numerical Simulation of Heat Radiation Generated by Entering Space Vehicle,” AIAA Paper 2004-2379 (2004). doi [10.2514/6.2004-2379](https://doi.org/10.2514/6.2004-2379).
13. J. J. Quirk, “A Contribution to the Great Riemann Solver Debate,” *Int. J. Numer. Methods Fluids* **18** (6), 555–574 (1994). doi [10.1002/flid.1650180603](https://doi.org/10.1002/flid.1650180603).
14. R. K. Lobb, “Experimental Measurement of Shock Detachment Distance on Spheres Fired in Air at Hypervelocities,” in *High Temperature Aspects of Hypersonic Flow* (Pergamon Press, Oxford, 1964), pp. 519–527. doi [10.1016/B978-1-4831-9828-6.50031-X](https://doi.org/10.1016/B978-1-4831-9828-6.50031-X).
15. T. J. McIntyre, A. I. Bishop, H. Rubinsztein-Dunlop, and P. Gnoffo, “Comparison of Experimental and Numerical Studies of Ionizing Flow over a Cylinder,” *AIAA J.* **41** (11), 2157–2161 (2003). doi [10.2514/2.6833](https://doi.org/10.2514/2.6833).
16. H. G. Hornung, J. M. Schramm, and K. Hannemann, “Hypersonic Flow over Spherically Blunted Cone Capsules for Atmospheric Entry. Part 1. The Sharp Cone and the Sphere,” *J. Fluid Mech.* **871**, 1097–1116 (2019). doi [10.1017/jfm.2019.342](https://doi.org/10.1017/jfm.2019.342).
17. G. F. Widhoppe and K. J. Victoria, “On the Solution of the Unsteady Navier–Stokes Equations Including Multi-component Finite Rate Chemistry,” *Comput. Fluids* **1** (2), 159–184 (1973). doi [10.1016/0045-7930\(73\)90016-9](https://doi.org/10.1016/0045-7930(73)90016-9).
18. G. F. Widhopf and J. C. T. Wang, “A TVD Finite-Volume Technique for Nonequilibrium Chemically Reacting Flows,” AIAA Paper 88-2711 (1988). doi [10.2514/6.1988-2711](https://doi.org/10.2514/6.1988-2711).
19. M. E. Olsen, Y. Liu, M. Vinokur, and T. Olsen, “Implementation of Premixed Equilibrium Chemistry Capability in OVERFLOW,” AIAA Paper 2004-1273 (2004). doi [10.2514/6.2004-1273](https://doi.org/10.2514/6.2004-1273).
20. S. Chen, Y. Hu, and Q. Sun, “Study of the Coupling between Real Gas Effects and Rarefied Effects on Hypersonic Aerodynamics,” *AIP Conf. Proc.* **1501** (1), 1515–1521 (2012). doi [10.1063/1.4769718](https://doi.org/10.1063/1.4769718).
21. K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, and A. G. Karpenko, “Numerical Simulation of Gas Dynamic and Physical-Chemical Processes in Hypersonic Flows past Bodies,” *Vychisl. Metody Program.* **18** (4), 387–405 (2017). doi [10.26089/NumMet.v18r433](https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r433).
22. V. Emelyanov, A. Karpenko, and K. Volkov, “Simulation of Hypersonic Flows with Equilibrium Chemical Reactions on Graphics Processor Units,” *Acta Astronaut.* **163** (Part A), 259–271 (2019). doi [10.1016/j.actaastro.2019.01.010](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.01.010).
23. A. N. Kraiko and V. E. Makarov, “Explicit Analytic Formulas Defining the Equilibrium Composition and Thermodynamic Functions of Air for Temperatures from 200 to 20000 K,” *Teplofiz. Vys. Temp.* **34** (2), 208–219 (1996) [*High Temp.* **34** (2), 202–213 (1996)].



24. M. M. Golomazov, “Investigation Chemical Processes for Hypersonic Flow of Carbon Dioxide around Blunt Bodies,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. No. 2012-10-18-001. (2012). <http://chemphys.edu.ru/issues/2012-13-2/articles/308/>. Cited August 28, 2022.
25. Yu. D. Shevelev, N. G. Syzranova, E. V. Kustova, and E. A. Nagnibeda, “Numerical Simulation of Hypersonic Flows around Space Vehicles Descending in the Martian Atmosphere,” *Mat. Model.* **22** (9), 23–50 (2010) [*Math. Models Comput. Simul.* **3** (2), 205–224 (2011)]. doi [10.1134/S2070048211020104](https://doi.org/10.1134/S2070048211020104).
26. T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin, “Some Recent Finite Volume Schemes to Compute Euler Equations Using Real Gas EOS,” *Int. J. Numer. Methods Fluids* **39** (12), 1073–1138 (2002). doi [10.1002/flid.346](https://doi.org/10.1002/flid.346).
27. C. J. Roy and F. G. Blottner, “Review and Assessment of Turbulence Models for Hypersonic Flows,” *Prog. Aerosp. Sci.* **42** (7–8), 469–530 (2006). doi [10.1016/j.paerosci.2006.12.002](https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2006.12.002).
28. Yu. Dobrov, V. Gimadiev, A. Karpenko, and K. Volkov, “Numerical Simulation of Hypersonic Flow with Non-equilibrium Chemical Reactions around Sphere,” *Acta Astronaut.* **194**, 468–479 (2022). doi [10.1016/j.actaastro.2021.10.008](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.10.008).
29. C. Park, “Review of Chemical-Kinetic Problems of Future NASA Missions. Part I. Earth Entries,” *J. Thermophys. Heat Transf.* **7** (3), 385–398 (1993). doi [10.2514/3.431](https://doi.org/10.2514/3.431).
30. R. N. Gupta, J. M. Yos, and R. A. Thompson, *A Review of Reaction Rates and Thermodynamic Transport Properties for an 11-Species Air Model for Chemical and Thermal Non-equilibrium Calculations to 30,000 K* NASA Report No. TM101528 (1989). <https://ntrs.nasa.gov/citations/19900017748>. Cited August 28, 2022.
31. C. Park, R. L. Jaffe, and H. Partridge, “Chemical-Kinetic Parameters of Hyperbolic Earth Entry,” *J. Thermophys. Heat Transf.* **15** (1), 76–90 (2001). doi [10.2514/2.6582](https://doi.org/10.2514/2.6582).
32. A. M. Starik, N. S. Titova, and I. V. Arsentiev, “Comprehensive Analysis of the Effect of Atomic and Molecular Metastable State Excitation on Air Plasma Composition behind Strong Shock Waves,” *Plasma Sources Sci. Technol.* **19** (1) (2009). doi [10.1088/0963-0252/19/1/015007](https://doi.org/10.1088/0963-0252/19/1/015007).
33. J. R. Edwards and M.-S. Liou, “Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Flows at all Speeds,” *AIAA J.* **36** (9), 1610–1617 (1998). doi [10.2514/2.587](https://doi.org/10.2514/2.587).
34. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics* (Springer, Berlin, 2009). doi [10.1007/b79761](https://doi.org/10.1007/b79761).
35. F. Qu, J. Chen, D. Sun, et al., “A Grid Strategy for Predicting the Space Plane’s Hypersonic Aerodynamic Heating Loads,” *Aerosp. Sci. Technol.* **86**, 659–670 (2019). doi [10.1016/j.ast.2019.01.049](https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.01.049).
36. V. M. Kotov, E. N. Lychkin, A. G. Reshetin, and A. N. Schelkonogov, “An Approximate Method of Aerodynamic Calculation of Complex Shape Bodies in a Transition Region,” in *Rarefied Gas Dynamics* (Plenum Press, New York, 1985), Vol. 1, pp. 487–494.
37. G. F. Widhopf and R. Hall, “Transitional and Turbulent Heat-Transfer Measurements on Yawed Blunt Conical Nosedtip,” *AIAA J.* **10** (10), 1318–1325 (1972). doi [10.2514/3.50376](https://doi.org/10.2514/3.50376).
38. J. A. Fay and F. R. Riddell, “Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air,” *J. Aeronaut. Sci.* **25** (2), 73–85 (1958). doi [10.2514/8.7517](https://doi.org/10.2514/8.7517).
39. N. Belouaggadia, H. Olivier, and R. Brun, “Numerical and Theoretical Study of the Shock Stand-off Distance in Non-equilibrium Flows,” *J. Fluid Mech.* **607**, 167–197 (2008). doi [10.1017/S0022112008001973](https://doi.org/10.1017/S0022112008001973).
40. C.-Y. Wen and H. G. Hornung, “Non-equilibrium Dissociating Flow over Spheres,” *J. Fluid Mech.* **299**, 389–405 (1995). doi [10.1017/S0022112095003545](https://doi.org/10.1017/S0022112095003545).
41. J. Martel, B. Jolly, and W. Lawrence, “Shock Standoff and Shape Predictions with Validation for Flat Face Cylinder,” *AIAA Paper 2015-0523* (2015). doi [10.2514/6.2015-0523](https://doi.org/10.2514/6.2015-0523).
42. S. Askari, “An Analytical Approach for Stand-off Distance of Detached Shock Waves,” *Aerosp. Sci. Technol.* **28** (1), 384–390 (2013). doi [10.1016/j.ast.2012.12.004](https://doi.org/10.1016/j.ast.2012.12.004).
43. Y. Hu, H. Huang, and Z. Zhang, “New Formulas for Standoff Distance in Front of Spacecraft in Hypersonic Flow,” *J. Spacecr. Rockets* **53** (5), 993–997 (2016). doi [10.2514/1.A33642](https://doi.org/10.2514/1.A33642).

Received  
 March 31, 2022

Accepted for publication  
 August 15, 2022

### Information about the authors

*Konstantin N. Volkov* — Dr. Sci., Leading Scientist; Ustinov Baltic State Technical University, ul. 1-ya Krasnoarmeyskaya, 1, 190005, St. Petersburg, Russia.

*Vladislav A. Gimadiev* — PhD student, St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, Universitetskii prospekt 28, 198504, St. Petersburg, Russia.

*Yuri V. Dobrov* — PhD student, St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, Universitetskii prospekt 28, 198504, St. Petersburg, Russia.

*Anton G. Karpenko* — Ph.D., Associate Professor, St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, Universitetskii prospekt 28, 198504, St. Petersburg, Russia.