

УДК 519.6

МАРШРУТИЗАЦИЯ НА РЕШЕТЧАТО-КЛЕТОЧНЫХ СТРУКТУРАХ

Г. Г. Рябов¹

Рассматривается расширение класса решетчатых графов с включением в окрестность на решетке дополнительных ребер с весами, равными соответствующим длинам векторов в евклидовом пространстве с целью приближения к евклидовой метрике. Установлено соответствие координат вершин, инцидентных дополнительным ребрам, последовательностям несократимых дробей Фарея–Коши. Предложен соответствующий алгоритм построения множества кратчайших путей на такой взвешенной решетке, который по существу моделирует “волновой” процесс построения поля всех кратчайших (от множества-источника) путей. Приведены оценки и примеры при машинной реализации.

Ключевые слова: решетчатые графы, окрестности на решетке, целые точки, кратчайшие пути, метрика, волновой процесс.

Введение. Бурное развитие вычислительной техники, рассматриваемой в триединстве логики–элементов–конструкции, поставило серьезные прикладные задачи и в области конструкции. Конструкция ЭВМ, как область с плотнейшим размещением элементов и физических коммутаций между ними (в многослойных структурах), потребовала новых технологий как изготовления, так и проектирования. Основополагающим началом в этом направлении послужила работа С. Ли [2], вызвавшая целый поток работ, использующих решетчато-клеточные структуры. Само осознание конструкции ЭВМ, как объекта изучения с позиций геометрии в целом, основы которой заложены в трудах А. Д. Александрова [1], пришло значительно позже и послужило более широкому взгляду на решетчато-клеточные модели [14].

Выбор в качестве математических моделей для различных объектов решетчатых графов сыграл важную роль при решении и чисто математических, и прикладных задач. К моделям того же класса следует отнести и так называемые клеточные множества и автоматы, которым было уделено значительное внимание [5–7, 9–13]. Поскольку в дальнейшем решетчатые и клеточные модели, в зависимости от ситуации, позволяют более отчетливо представить те или иные свойства, целесообразно с самого начала установить более жесткое соответствие между ними. В двумерном (квадратная решетка) и трехмерном (кубическая решетка) случаях сопоставим с вершинами решетки целочисленные декартовы координаты (рис. 1). Эта “жесткая” решетка будет иметь геометрическую длину ребра между смежными вершинами, равную 1, что совпадает с длиной “графского” ребра по определению.

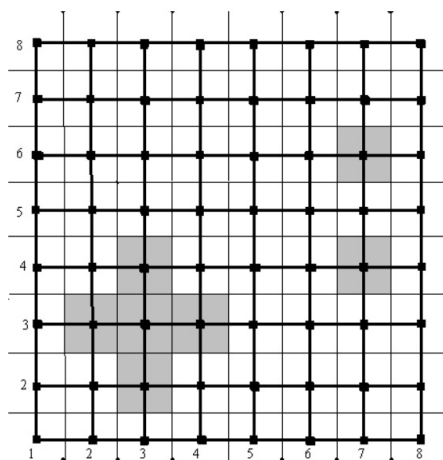


Рис. 1. Двумерная решетка и соответствующая клеточная структура

¹ Институт точной механики и вычислительной техники РАН им. С. А. Лебедева, Ленинский пр., 51, Москва; e-mail: ggr@irmse.ru

Представим, что вокруг каждой “целочисленной” вершины построен квадрат (куб) с ребрами, равными 1. Тогда мы получим клеточную (квадратную или кубическую) структуру, где каждому квадрату (кубу) поставлены в соответствие целочисленные декартовы координаты (рис. 1).

Такое однозначное соответствие позволяет использовать весь багаж свойств и методов, разработанных для решетчатых графов и клеточных структур (связность, перечисления, маршрутизация и т.д.).

В дальнейшем будет использовано двойное представление и в виде решетчатого графа, и в виде клеточной структуры. Это вызвано тем, что:

1. часто будут использованы методы маркировки (пометок) вершин, а это легче отображать внутри соответствующего квадрата (куба);
2. будут рассматриваться более “густые” (в смысле количества ребер) решетчатые однородные структуры, для которых достаточно указать, как устроена “окрестность” одной вершины (все смежные с ней вершины), а маркировку вершин опять же удобнее отображать на клеточной структуре.

Поскольку далее решетки (клеточные структуры) будут рассматриваться как дискретные модели некоторых геометрических объектов, так что необходимо отделять множество вершин (клеток) одного объекта от другого, в том числе и от как бы свободного пространства между ними. Поэтому маркировка вершин (клеток) должна изначально давать такую возможность.

В дальнейшем речь будет идти только о конечных решетчатых (клеточных) структурах, для которых поставим в соответствие каждой вершине (клетке) неотрицательные целочисленные координаты.

Целью дальнейшего рассмотрения будут являться такие конечные решетчатые (клеточные) структуры как модели для решения прикладных задач генерации на ЭВМ объектов с заданными геометрическими свойствами и возможностью исследования в рамках этих объектов ряда “полевых” задач, пользуясь единством математической модели.

Кратчайшие пути на решетках. В данном разделе рассматриваются задачи маршрутизации на решетках, в первую очередь, построения кратчайших путей и их перечисления для двумерного и трехмерного случаев. Во многих случаях будет удобнее пользоваться клеточным представлением, когда клетка соответствует вершине решетки.

Решетки без дефектов. Для простейших решеток каждая вершина конечной решетки (за исключением пограничных) соединена ребрами с ближайшими 4 вершинами в двумерном случае и с 6 вершинами в трехмерном случае.

Поскольку каждой вершине поставлены в соответствие целочисленные координаты, будем считать, что $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$, $0 \leq z \leq Z$. Путь минимальной длины (кратчайший путь) между вершинами (клетками) с координатами (x_i, y_i) и (x_j, y_j) равен

$$r_{\min}\{(x_i, y_i), (x_j, y_j)\} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$$

и соответственно для (x_i, y_i, z_i) и (x_j, y_j, z_j) — равен

$$r_{\min}\{(x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j)\} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j| + |z_i - z_j|.$$

Иногда такую метрику называют “манхаттановой”. Построение указанного пути может быть реализовано одним из алгоритмов нахождения кратчайших путей на неориентированных графах.

Для подсчета количества кратчайших путей без нарушения общности будем считать, что для x_i, y_i и (x_j, y_j) выполняется $x_j \geq x_i$, $y_j \geq y_i$. Каждый кратчайший путь, начинающийся в (x_i, y_i) , проходит через $(x_i + 1, y_i)$ или через $(x_i, y_i + 1)$ (запишем в эти вершины по единице). Затем кратчайшие пути шага 2 проходят через $(x_i + 2, y_i)$, $(x_i, y_i + 2)$, $(x_i + 1, y_i + 1)$, при этом приписываем $(x_i + 2, y_i)$, $(x_i, y_i + 2)$ по единице, а для $(x_i + 1, y_i + 1)$ суммируем количество путей из $(x_i + 1, y_i)$ и $(x_i, y_i + 1)$, т.е. приписываем 2. Продолжая процесс (рис. 2 А), мы видим, что он совпадает с процессом получения членов в треугольнике Паскаля, но в нашем случае он как бы положен на бок. Отсюда общее число кратчайших путей в простой двумерной решетке между (x_i, y_i) и (x_j, y_j) равно

$$N_2((x_i, y_i), (x_j, y_j)) = \frac{(|x_j - x_i| + |y_j - y_i|)!}{|x_j - x_i|! |y_j - y_i|!}.$$

Эти значения равны соответствующим биномиальным коэффициентам.

Аналогичное построение можно провести и для трехмерного случая, рассматривая конструкцию, вполне претендующую на термин пирамиды Паскаля. Для трехмерной решетки:

$$N_3((x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j)) = \frac{(|x_j - x_i| + |y_j - y_i| + |z_j - z_i|)!}{|x_j - x_i|! |y_j - y_i|! |z_j - z_i|!}.$$

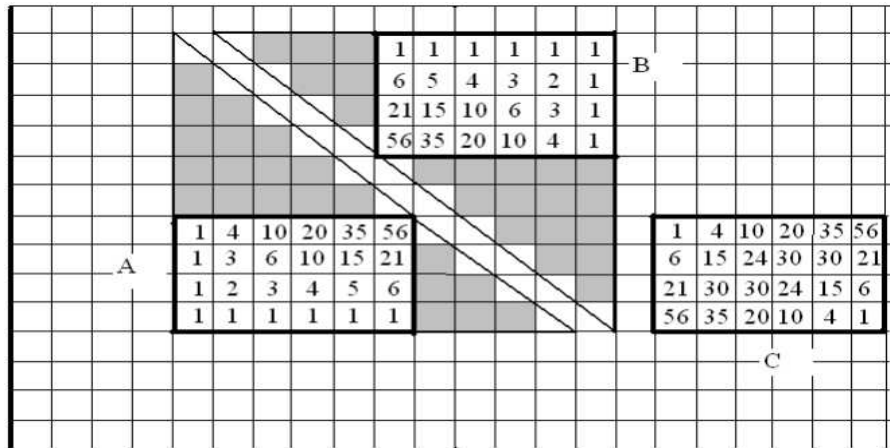


Рис. 2. Подсчет кратчайших путей методом треугольника Паскаля: А) из левого нижнего угла, В) из правого верхнего угла, С) число кратчайших путей через каждую клетку в структуре 6х4 (перемножение А и В)

Кстати отметим, что по аналогичной формуле для одномерного случая имеем $N_1 = 1$. В общем случае для n -мерной решетки без дефектов справедливо равенство

$$N_n(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}), (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}) = \frac{\sum_{s=1}^n (|x_{is} - x_{js}|)!}{\prod_{s=1}^n |x_{is} - x_{js}|!}.$$

Вернемся к нашей процедуре последовательного получения (методом треугольника Паскаля) числа кратчайших (от исходной вершины) путей в каждой текущей вершине (клетке). Чтобы получить число кратчайших путей, проходящих через некоторую “промежуточную” (между (x_i, y_i) , (x_j, y_j)) вершину (клетку), нам необходимо реализовать симметричную процедуру, начинающуюся в (x_j, y_j) и заканчивающуюся в (x_i, y_i) , а полученные числа для промежуточной вершины (клетки) перемножить (рис. 2). Тогда число кратчайших путей, соединяющих (x_i, y_i) и (x_j, y_j) и проходящих через (x_k, y_k) , оказывается равным

$$N_2\{(x_k, y_k)/r_{\min}((x_i, y_i), (x_j, y_j))\} = \frac{(|x_k - x_i| + |y_k - y_i|)! (|x_j - x_k| + |y_j - y_k|)!}{|x_k - x_i|! |y_k - y_i|! |x_j - x_k|! |y_j - y_k|!}.$$

Аналогичные равенства имеют место для трехмерного и n -мерного случаев.

Решетки с дефектами. Под дефектом решетки будем подразумевать удаление одной или нескольких вершин и инцидентных им ребер. После такого удаления решетка, вообще говоря, может стать несвязным графом. Однако в большинстве рассматриваемых случаев мы будем подразумевать связность “оставшейся” решетки, т.е. будем говорить о “малых” дефектах.

На решетке с дефектами для нахождения кратчайшего пути между вершинами (клетками) можно применить любой из алгоритмов нахождения кратчайших путей в неориентированном графе. Здесь же мы остановимся на применении так называемого “волнового” алгоритма [3, 4].

Кратко изложим основные моменты этого алгоритма. Алгоритм состоит в последовательном приписывании целочисленных пометок (весов) вершинам (клеткам) на этапе так называемого распространения волны и последовательном прохождении по этим пометкам (весам) на этапе построения кратчайшего пути. Свяжем с прохождением алгоритма некоторое дискретное время $t = 0, 1, 2, 3, \dots$. Обозначим через $\Phi(t)$ множество координат вершин (клеток), которым приписаны пометки (веса) на шаге t . Пусть $q(t)$ — пометка (вес) на шаге t . Тогда $q(t+1) = q(t) + 1$. На шаге $t+1$ рассматриваются все вершины $(x_i, y_i) \in \Phi(t)$. Для каждой такой вершины рассматриваются вершины, смежные с ней. Пусть (x_j, y_j) такая вершина. Если эта вершина не имеет уже приписанной пометки (веса) и не является удаленной (запретной), то ей приписывается пометка (вес) $q(t+1)$ и (x_j, y_j) включается в $\Phi(t+1)$ (рис. 3). Исчерпав все множество $\Phi(t)$, переходим к шагу $t+2$.

Заметим, что $\Phi(0)$ содержит координаты исходной вершины (клетки) или множества вершин (клеток), до которой или до которого ищется кратчайший путь из любой вершины (клетки) решетки

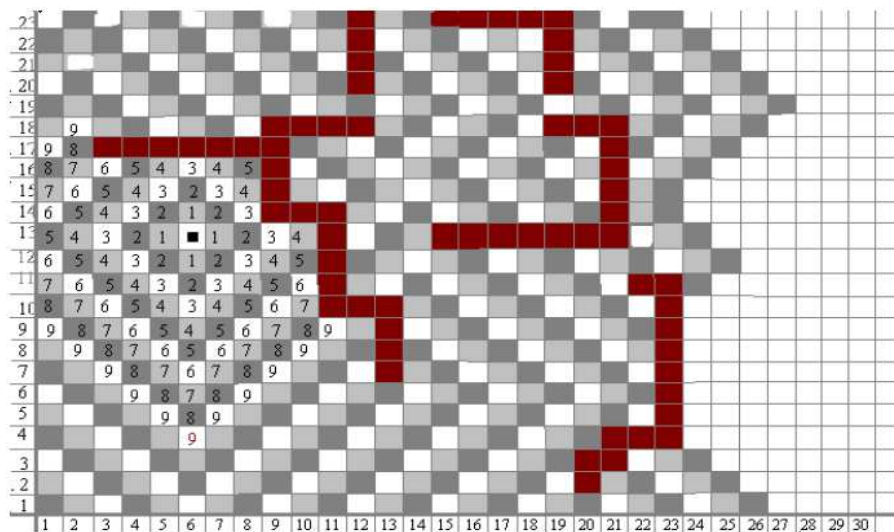


Рис. 3. Распространение волны из (6,13) на простой решетке. Черным цветом помечены дефекты (преграды). Числовые пометки показаны до 9

($q(0) = 0$). Процесс распространения волны заканчивается, когда $\Phi(t + s) = \emptyset$ (этот момент ввиду конечности решетки или несвязности решетки из-за дефектов рано или поздно наступит).

Построение пути. Прежде всего отметим, что после этапа распространения волны каждой вершине (клетке), кроме удаленных (запретных), приписана пометка (вес), равная длине кратчайшего пути из этой вершины (клетки) до источника волны (исходной вершины или исходного множества вершин). Если смотреть на эти числовые пометки как на столбики соответствующей высоты, то мы получим картину спуска по ступеням к источнику: каждый раз шагаем на одну из ближайших ступенек вниз, т.е. переходим в вершину (клетку) с пометкой (весом) на единицу меньше, чем у текущей вершины. Такая ступенька всегда найдется по построению этапа распространения волны, т.к. величина $q(t) = q(t-1) + 1$ могла быть получена только от одной из ближайших вершин (клеток) с приписанным значением $q(t-1)$.

Заметим также, что множество $\Phi(t)$ есть аналог для “манхаттановой” метрики окружности при евклидовой метрике с радиусом, равным $q(t)$.

Теперь вернемся к задаче перечисления кратчайших путей в случае решетки с дефектами. Рассмотрим пример, изображенный на рис. 4 А.

Запретным (дефектным) вершинам решетки соответствуют зачерненные клетки. Пусть требуется определить число кратчайших различных путей между (0,0) и (5,3). Будем последовательно суммировать числа в клетках так же, как с треугольником Паскаля в случае бездефектной решетки, только зачерненные клетки априори будут иметь числовые пометки, равные 0 (через них не может проходить ни один из кратчайших путей). Полученные числовые значения в клетках уже не будут совпадать с биномиальными коэффициентами и аналитические выражения в этом случае не верны. Однако сам алгоритм последовательного получения числа кратчайших путей дает нам инструмент перечисления таких путей и для решеток с дефектами. Аналогично бездефектному случаю, для подсчета числа кратчайших путей через промежуточные клетки (из числа всех кратчайших между (0,0) и (5,3)) перемножаются соответствующие значения (рис. 4).

Приближение к евклидовой метрике. Рассмотрим последовательную эволюцию двумерной решетки [14]. Определим “окрестность” вершины на решетке как множество инцидентных ребер и смежных вершин. Будем обозначать в простейшей плоской решетке окрестность $R_0(x, y) = \{(x, y), (x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1)\}$.

Введем в решетку для каждой вершины диагональные ребра и положим

$$R_1(x, y) = R_0(x, y) \cup \{(x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1)\}.$$

Каждому диагональному ребру припишем евклидово значение длины $\sqrt{2}$. Продолжим введение дополнительных вершин и ребер в решетку с выполнением следующих условий:

- 1) $R_k(x, y) = R_{k-1}(x, y) \cup M_k(x, y)$, где $(x_i, y_i) \in M_k(x, y)$, $|x - x_i| < k$, $|y - y_i| < k$;
- 2) вводимые ребра, инцидентные вершинам из M_k , не должны быть коллинеарны к уже введенным

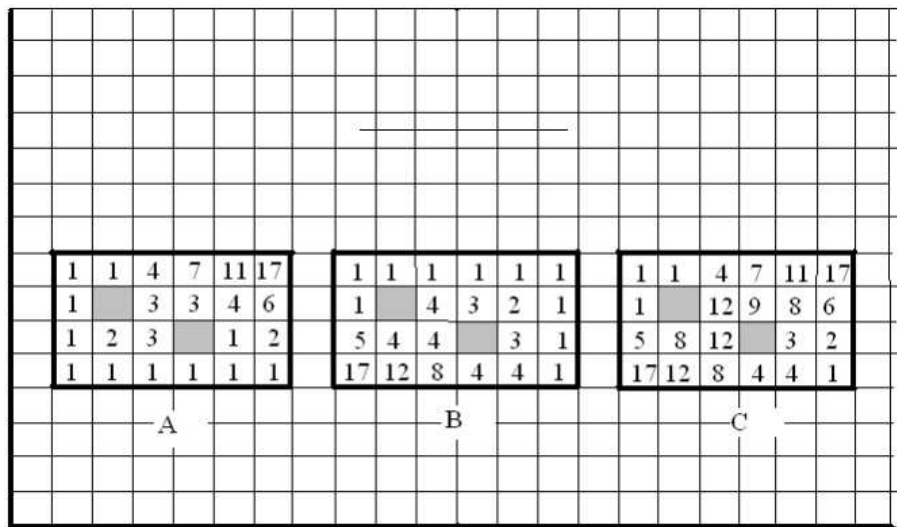


Рис. 4. Перечисление кратчайших путей в клеточной структуре с дефектами (преградами) методом Паскаля: А) пути из левой нижней клетки, В) пути из правой верхней клетки, С) число кратчайших путей через каждую клетку из числа всех кратчайших путей между левой нижней и правой верхней клетками

в R_{k-1} ;

3) каждому вводимому ребру припишем вес, равный евклидовой длине, т.е.

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Графическое представление окрестностей $R_0, \dots, R_5$ для двумерного случая показано на рис. 5.

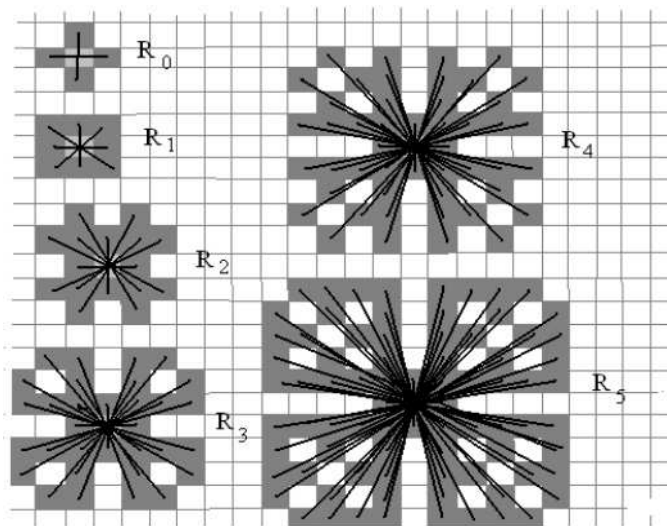


Рис. 5. Двумерные окрестности $R_0, \dots, R_5$

Заметим, что если координаты вершин в последовательности R_k принадлежат области, где $y_i - y > 0$, $x_i - x > 0$, $x_i - x > y_i - y$, то при выполнении условия 2 дробь $(x_i - x)/(y_i - y)$ должна быть несократимой, т.е. числитель и знаменатель должны быть взаимно просты. Поэтому генерация координат вершин в последовательных R_k может быть основана на генерации последовательностей Фарея–Коши перечисления всех несократимых дробей медиантным методом [9] (рис. 5 а).

Если продлить ребра окрестности R_k так, как показано на рис.5 в, то каждый образованный сектор определяется “соседними” ребрами, соответствующими соседним членам k -ой последовательности Фарея–Коши.

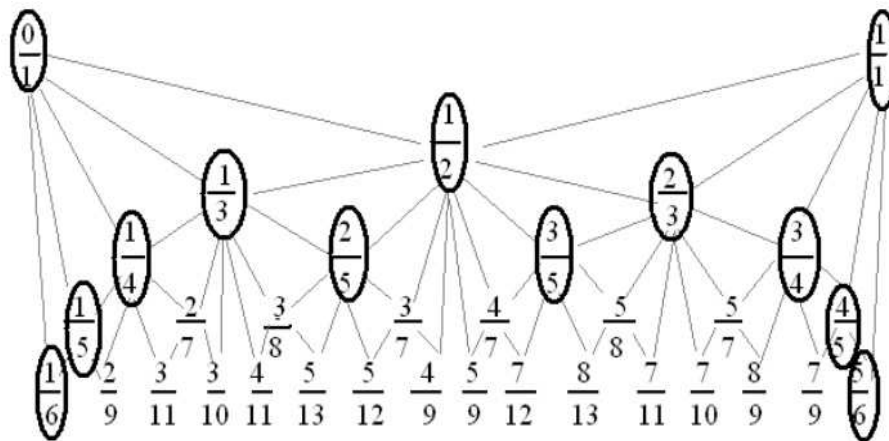


Рис. 5 а. Схема последовательной генерации всех несократимых дробей медиантным методом (сложение числителей и знаменателей) и выделение последовательности Фарея–Коши (в данном случае 6-го порядка). Все члены этой последовательности обведены овалом

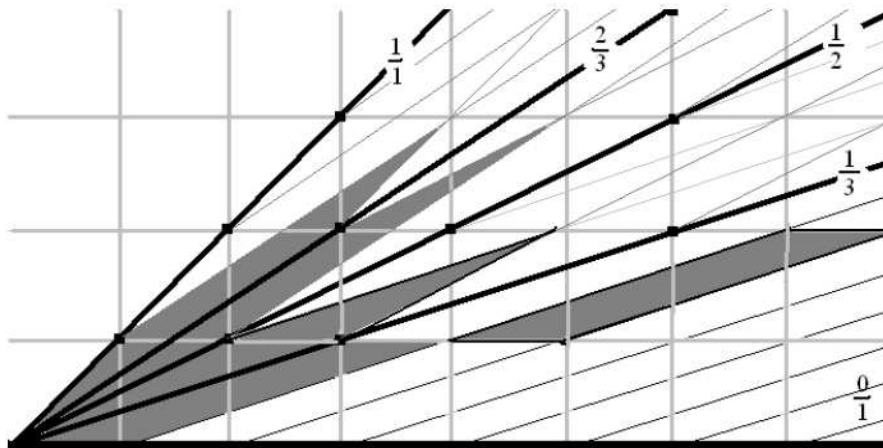


Рис. 5 в. Несократимые дроби, соответствующие им ребра из R_3 и сектора с параллелограммными решетками (некоторые показаны серым цветом). Площади параллелограммов равны 1

Если провести в каждом секторе через целые точки прямые, параллельные образующим ребрам, то получим параллелограммные решетки. Площадь любого из этих параллелограммов равна 1, поскольку фактически реализуется линейное преобразование

$$Ax + By = z_1, \quad Cx + Dy = z_2,$$

где A/B и C/D — соседние члены последовательности Фарея–Коши. Поэтому всегда $AD - BC = 1$, а это значение определителя преобразования, и площадь квадрата 1×1 равна площади соответствующего параллелограмма.

В дальнейшем будем сокращенно называть однородную решетку с взвешенными ребрами из окрестности R_k просто R_k -решеткой.

Рассмотрим кратчайший путь на R_k -решетке между вершинами (x_i, y_i) и (x_j, y_j) . Пусть $x_j > x_i$ и $y_j > y_i$. Если $(x_j, y_j) = R_k(x_i, y_i)$, то $r((x_i, y_i), (x_j, y_j))$ совпадает с евклидовым расстоянием между (x_i, y_i) и (x_j, y_j) по построению R_k .

Если $(x_j, y_j) = R_k(x_i, y_i)$, то эта вершина или лежит внутри, или на сторонах угла, определяемого “соседними” ребрами из R_k . Если (x_j, y_j) лежит на одной из сторон угла, определяемой некоторым ребром с соответствующим r_{kl} из R_k , то

$$r((x_i, y_i), (x_j, y_j)) = sr_{kl},$$

где s — целое число.

Если (x_j, y_j) лежит внутри угла, то

$$r((x_i, y_i)(x_j, y_j)) = s_1 r_{kl1} + s_2 r_{kl2},$$

где r_{kl1}, r_{kl2} — евклидовы длины “соседних” ребер из R_k , а s_1, s_2 — целые числа.

Естественно, что в построенных более “густых” решетках, чем R_0 -решетка, со взвешенными евклидовой длиной ребрами из R_k , длины кратчайших путей будут приближаться к евклидовым. Для оценки такого приближения положим $A = \max((r_k - r_e)/r_e)$, где r_k — длина кратчайшего пути на R_k -решетке, а r_e — соответствующая евклидова длина. Некоторые аналитические оценки погрешностей даны в [12].

Усредненное это отношение для всех пар вершин для трехмерных решеток с $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ приведено ниже в таблице.

R_k	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
A, %	8,2312	2,7397	1,3072	0,7547	0,4819	0,3023

Аналогичные рассуждения можно провести и для трехмерного случая.

Однако представление R_k для трехмерного случая, подобное двумерному (рис. 5), не наглядно. Поэтому представим каждое ребро из $R_k(0,0,0)$ как пересечение продолжения ребра со сферой большого радиуса с центром в $(0,0,0)$ с указанием в точке пересечения координат вершины, инцидентной данному ребру. Вершины с положительными координатами окрестностей R_0, R_1, R_2, R_3 условно спроецированы на первый октант сферы, где и проставлены их значения (рис. 6).

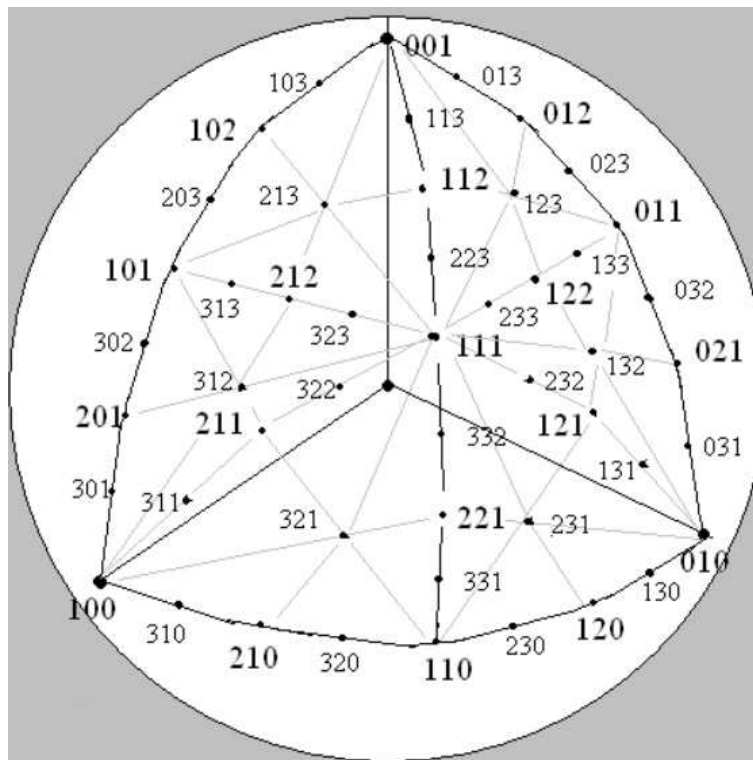


Рис. 6. Трехмерные окрестности R_0, R_1, R_2, R_3 представлены условно проекциями ребер на поверхность первого октанта сферы с указанием координат вершин. Для R_i каждая координата вершины не превышает по модулю i , координаты вершин как целые числа не имеют общего делителя, большего 1

Определим теперь дефект для R_k -решетки как жесткой геометрической структуры. Если в качестве дефекта выступает некоторая вершина в R_k -решетке, то она исключается из решетки вместе с инцидентными ребрами и на ее месте появляется запрещенная для прохождения каких-либо ребер клетка (рис. 7). На рис. 7 зачерненные клетки как бы перерубают пересекающие их ребра (они удалены из решетки). Запретные клетки не имеют ни одной общей точки с “чужими” ребрами. Для удобства в дальнейшем будем пользоваться для двумерной решетки клеточным представлением.

Модификация волнового алгоритма для R_k -решетки с дефектами. Волновой алгоритм для R_0 -решетки с дефектами, как было показано выше, позволяет найти кратчайший путь между множе-

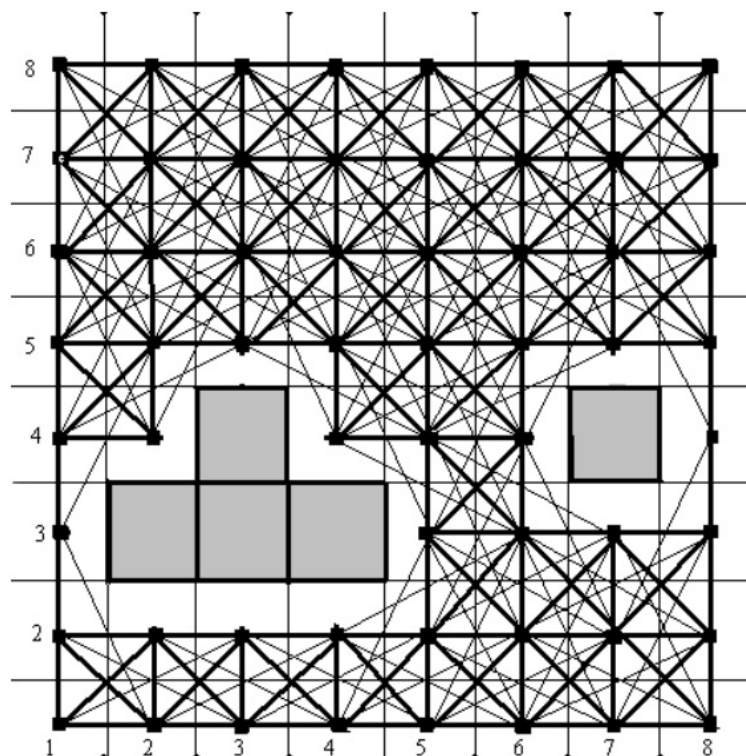


Рис. 7. Дефекты (преграды) на R_2 -решетке (серые клетки) исключают из решетки пересекающие их ребра (в том числе и те, которые их касаются)

ствами вершин, решая по сути задачу лабиринта. При этом вершинам “фронта” волны приписывались целочисленные монотонно возрастающие на 1 веса $q(t)$.

В случае R_k -решеток имеются существенные отличия:

- 1) вес ребра выражается действительными числами;
- 2) удаленные (запретные) вершины вместе с инцидентными ребрами приводят к удалению и ряда других ребер, как показано выше.

Поэтому “волновой” алгоритм должен быть существенно модифицирован [14]. Для простоты рассмотрим двумерный случай.

Прежде всего, отметим, что вершинам будут приписываться две пометки — длина кратчайшего пути и координаты смежной (предыдущей) вершины, через которую реализуется этот путь. Пусть $\Phi(t)$ — множество вершин фронта, которым были приписаны (изменены) пометки (веса) на шаге t , и $q((x_i, y_i), t)$ — пометка (вес), приписанная к вершине (x_i, y_i) на шаге $t + 1$. Для каждой вершины $(x_i, y_i) \in \Phi(t)$ рассматриваются все вершины $(x_j, y_j) \in R_k(x_i, y_i)$. Если вершина (x_j, y_j) удалена (запретна), то она пропускается. В противном случае проверяется, пересекается ли ребро $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ хотя бы с одной из запретных клеток. Если такое пересечение есть, то вершина (x_j, y_j) также пропускается. Если такого пересечения нет, то рассматриваются два случая.

Первый случай. Вершина (x_j, y_j) не имеет пометки (веса); тогда ей приписывается пометка (вес) $q((x_j, y_j), t + 1) = q((x_i, y_i), t) + r((x_i, y_i)(x_j, y_j))$.

Второй случай. Вершина (x_j, y_j) имеет к шагу t пометку (вес) $q((x_j, y_j), t)$; тогда на шаге $t + 1$ вычисляется $q^*(x_j, y_j) = q((x_i, y_i), t) + r((x_i, y_i)(x_j, y_j))$ и полагается $q((x_j, y_j), t + 1) = q((x_j, y_j), t)$, если $q^* > q((x_j, y_j), t)$ или $q((x_j, y_j), t + 1) = q^*$, если $q^* < q((x_j, y_j), t)$. В этом случае координаты (x_j, y_j) записываются в $\Phi(t + 1)$, а вместе с q вершине (x_j, y_j) приписывается пометка кратчайшего пути в виде указателя на (x_i, y_i) (рис. 8).

Процесс завершается, когда $\Phi(t) = \emptyset$. Пример волны на R_2 -решетке показан на рис. 9. При построении пути осуществляется проход по этим путевым указателям.

Оценки $|R_k|$ для двумерной и трехмерной решеток. При рассмотрении формирования R_k из R_{k-1} было отмечено, что вершины в R_k имеют взаимно простые координаты как целые числа. Поэтому оценка мощности множества R_k в двумерном случае может быть получена с использованием результатов Мер-

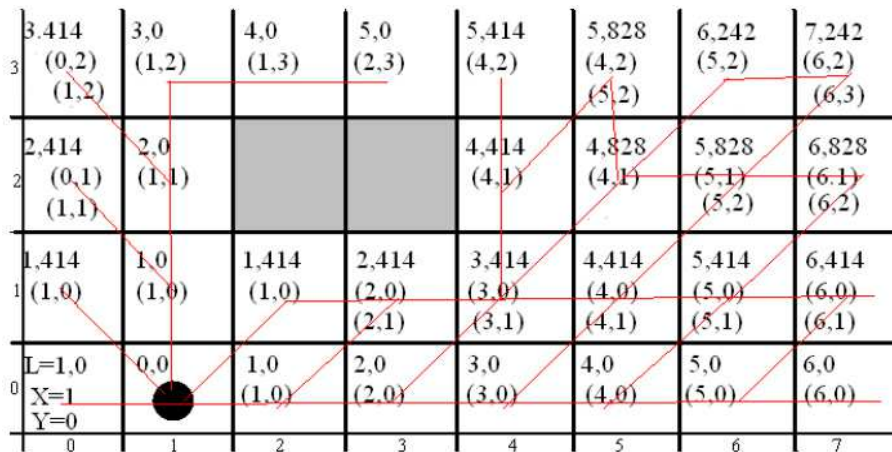


Рис. 8. После прохождения волны на R_1 -решетке из (1,0) каждой вершине (клетке) приписаны: 1) длина кратчайшего пути до (1,0), 2) координаты ближайшей (ближайших) предшествующей вершины (вершин) на этом пути. Вершина-источник помечена черным кругом, дефекты (преграды) — серым цветом, тонкие линии — ребра из M_1

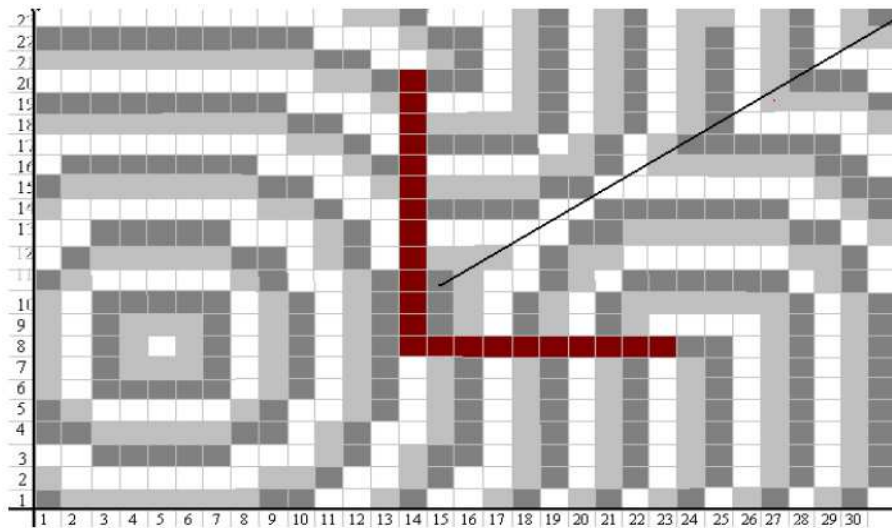


Рис. 9. Пример волны на двумерной R_2 -решетке в условиях дефекта (преграды)

тенса об интегральной оценке количества несократимых правильных дробей, в которых знаменатель не превышает k [9]:

$$F(k) = 3k^2/\pi^2 + O(k \log k).$$

Учитывая, что это — число целых точек с указанным свойством в секторе $(0, \pi/4)$, получим искомую оценку для двумерного случая: $|R_k| = 8F(k)$.

Для трехмерного случая $R_k(x, y, z)$ содержит такие (x_i, y_i, z_i) , для которых выполняется

1) $|x_i - x| \leq k, |y_i - y| \leq k, |z_i - z| \leq k$;

2) целые числа $|x_i - x|, |y_i - y|, |z_i - z|$ не должны содержать общего делителя, а это выполняется, когда, по крайней мере, одна из пар этих чисел взаимно проста.

Из второго условия следует, что $|R_k| = 8kF(k)$. Эти оценки нужны для подсчета необходимых в дальнейшем вычислительных ресурсов при реализации соответствующих алгоритмов.

Построение эквидистантных линий. Связная R_k -решетка с дефектами после этапа распространения волны от некоторого источника имеет в вершинах пометки (веса), равные длинам кратчайших путей до источника, обусловленных R_k . Рассмотрим множество ребер такой решетки. Это множество можно разбить на два подмножества M_1 и M_2 . Подмножество M_1 — это подмножество ребер, “участвующих” в построении поля кратчайших путей, т.е. для которых в инцидентных вершинах выполняется равенство

$r(x_j, y_j, z_j) = r(x_i, y_i, z_i) + r_{kl}$, где $(x_j, y_j, z_j) \in R_k(x_i, y_i, z_i)$.

Другими словами, M_1 — это множество ребер, реализующих волну (рис. 8). К M_2 отнесем остальные ребра.

Практически каждой точке ребра из M_1 можно поставить в соответствие длину кратчайшего пути (разумеется в метрике, определяемой R_k). Например, для случая определения для некоторого фиксированного r_0 точек на ребрах M_1 рассмотрим такие ребра, для инцидентных вершин которых (x_i, y_i, z_i) и (x_j, y_j, z_j) выполняются следующие условия: вершине (x_i, y_i, z_i) приписан вес $r_0 - l_1$, а вершине (x_j, y_j, z_j) — вес $r_0 + l_2$. Тогда на ребре (отрезке) $((x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j))$ координаты точки с весом r_0 будут определяться равенствами

$$x_0 = x_i + a(x_j - x_i), \quad y_0 = y_i + a(y_j - y_i), \quad z_0 = z_i + a(z_j - z_i),$$

где $a = l_1/l_2 + l_2$.

Если определить все такие точки на ребрах из M_1 , а затем соединить близлежащие отрезками, то получим ломаную эквидистантную линию в метрике R_k решетки.

Для простейшего случая R_1 -решетки такие линии в условиях дефектов (зачерненные клетки) для $r_0 = 1, 2, \dots, 9$ показаны на рис. 10.

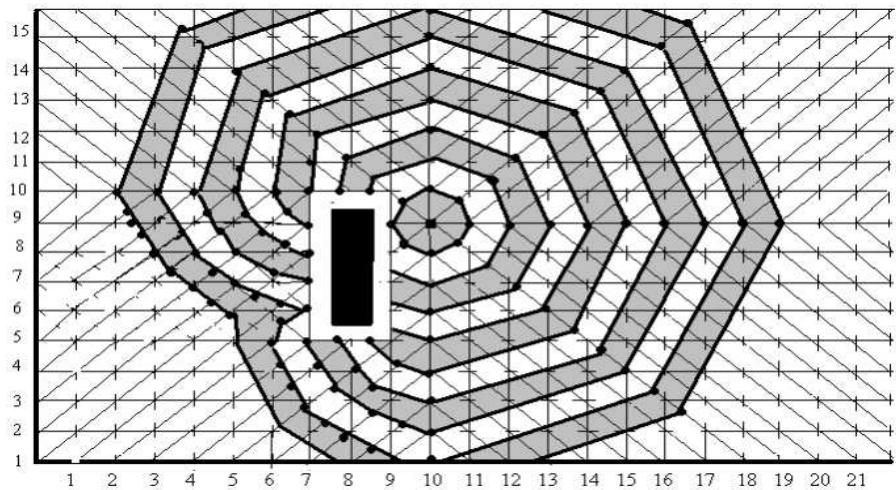


Рис. 10. R_1 -решетка после прохождения волны из (10,9) с ребрами из M_1 и эквидистантными линиями ($r_0 = 1, 2, \dots, 9$) в метрике R_1 . Дефект (преграда) помечен черным цветом

Другими словами, это — псевдоокружности (геометрическое место точек на R_1 , равноудаленных от вершины-источника).

В общем случае может быть задано s таких источников и задана некоторая функция $f(r_1, r_2, \dots, r_s)$, где r_i — кратчайшее расстояние от i -го источника. Требуется определить множество на решетке, для которого эта функция принимает заданное значение. В этом случае необходимо s раз провести на решетке волновую процедуру с последующим рассмотрением объединения этих решеток и отыскания заданного множества.

Таким образом, построенные R_k -решетки с введенной метрикой дают конструктивную возможность решать следующую прикладную задачу: генерация множеств точек на вершинах и ребрах R_k -решетки с заданными соотношениями кратчайших путей от заданных множеств в условиях дефектов (запретов) на решетке.

Для более детального рассмотрения конкретных задач такого класса нужно дать оценку необходимых вычислительных ресурсов в зависимости от размеров решетки и выбора окрестности R_k . В качестве основного режима при такой оценке наиболее показателен режим распространения волны на R_k -решетке.

Рассмотрим трехмерную R_k -решетку размером N^3 . Число проверок на дефекты (запреты) для каждой вершины из R_k не больше k . Если положить, что число машинных операций на проверку и приписывание веса вершине равно p , то при приписывании весов всем вершинам решетки общее количество операций P не превышает $N^3 k^4 p$. Требуемая оперативная память составляет примерно $2N^3$ машинных слов с плавающей запятой. Для решеток в диапазоне от $100 \times 100 \times 100$ до $1000 \times 1000 \times 1000$ соответствующие оценки лежат в диапазоне от 10^{10} до 10^{13} операций и по памяти от 1 Гбайта до 128 Гбайт.

Заключение. Изложенные выше построения во многом можно развить в следующих направлениях:

- более высоких размерностей,
- иных методов приписывания весов ребрам окрестностей $R_1, \dots, R_k$ (т.е. другой метрики, разумеется, с сохранением таких основ, как неравенство треугольника и т.д.),
- иного набора ребер в окрестностях $R_1, \dots, R_k$ (в частности, увеличения числа ребер в “разреженных” секторах с целью улучшения приближения к евклидовой метрике).

На основе предложенных методов была разработана программа для ЭВМ “Волна на решетке”. В таблице приведены данные по машинному времени (PC Intel Pentium IV) этапа распространения волны для различных вариантов трехмерных решеток. Эти данные необходимы при ориентации на интерактивные варианты использования и при вопросе установки программы на кластерные вычислительные системы.

Окрестность	Решетка	Время (сек)
R_1	$10 \times 10 \times 10$	0,03
	$20 \times 20 \times 20$	0,38
	$40 \times 40 \times 40$	7,36
R_2	$10 \times 10 \times 10$	0,16
	$20 \times 20 \times 20$	2,07
	$40 \times 40 \times 40$	37,36
R_3	$10 \times 10 \times 10$	0,66
	$20 \times 20 \times 20$	8,11
	$40 \times 40 \times 40$	169,94
R_4	$10 \times 10 \times 10$	1,91
	$20 \times 20 \times 20$	20,34
	$40 \times 40 \times 40$	440,59
R_5	$10 \times 10 \times 10$	5,70
	$20 \times 20 \times 20$	56,41
	$40 \times 40 \times 40$	1232,58

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Гостехиздат, 1948.
2. Lee C.Y. Algorithm for path connections and its applications // IEEE Trans. 1961. **EC-10**.
3. Зиман З.Ю., Рябов Г.Г. Волновой алгоритм и электрические соединения. М.: Изд-во ИТМ и ВТ, 1965.
4. Рябов Г.Г. Об одном алгоритме решения лабиринта на дискретном поле и его применении // ДАН. 1966. **166**, № 5.
5. Rosenfeld A., Pfaltz J. Distance functions on digital pictures // Pattern Recognition. 1968. N 1.
6. Монтролл Э. Статистика решеток // Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968.
7. Рябов Г.Г. Связность и преобразования дискретных конечных множеств // Труды семинара струк. и лог. схем. 7. М.: Изд-во ИТМ и ВТ, 1969.
8. Gardner M. Mathematical games. New York: Scientific American, 1971.
9. Чандрасекхаран Э. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.
10. Santalo L. Integral geometry and geometric probability. Boston: Addison Wesley, 1979.
11. Wolfram S. Cellular automata as simple selforganizing systems. Shampain: Univ. Illinois Press, 1982.
12. Рябов Г.Г. Научные основы создания комплексных САПР высокопроизводительных ЭВМ. Автореферат докт. дис. М.: ИТМ и ВТ, 1983.
13. Wolfram S. Cellular automation supercomputing. Shampain: Univ. Illinois Press, 1982.
14. Рябов Г.Г. Модели коммутационных свойств конструкций ЭВМ. М.: Изд-во ИТМ и ВТ, 1989.
15. Das P. Lattice of octagonal distances in digital geometry // Pattern Recognition. 1990. N 11.
16. Hadju A. and Hadju L. Velocity and distance of neighbourhood sequences // Acta Cybernetica. 2003. **16**.
16. Y.Boykov Y. and Kolmogorov Y. Computing geodesics and minimal surfaces via graph cut // Trans. Inter. Conf. On Computer Vision. 2003.

Поступила в редакцию
15.03.2004