



Аналитическое и полуаналитическое вычисление интегралов от логарифмического и ньютоновского потенциала и их градиентов по прямолинейным отрезкам и треугольным панелям

И. К. Марчевский

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,
Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-4899-4828, e-mail: iliamarchevsky@mail.ru

С. Р. Серафимова

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-0813-2820, e-mail: sophialynx@mail.ru

Аннотация: Рассмотрены интегралы, возникающие при решении граничных интегральных уравнений, ядром в которых является логарифмический или ньютоновский потенциал либо их градиенты, в случае, когда решение представляется кусочно-постоянным по панелям, в качестве которых в плоских задачах выступают прямолинейные отрезки, а в пространственных — плоские треугольники. Рассмотрены интегралы по одной панели, вычисляемые при использовании метода коллокаций, и разработана методика вычисления повторных интегралов по двум панелям, возникающих при использовании метода Галеркина. В плоских задачах для всех интегралов записаны точные аналитические выражения, удобные для практического использования; то же относится к интегралам по одной панели в трехмерных задачах. Для повторных пространственных интегралов предложена численно-аналитическая схема, предполагающая выделение особенностей в подынтегральных выражениях и их аналитическое интегрирование, а также численное интегрирование гладких функций.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, ньютоновский потенциал, градиент потенциала, интегральное уравнение, интеграл по отрезку, интеграл по треугольнику, выделение особенности.

Благодарности: Работа Марчевского И.К. выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-79-20445).

Для цитирования: Марчевский И.К., Серафимова С.Р. Аналитическое и полуаналитическое вычисление интегралов от логарифмического и ньютоновского потенциала и их градиентов по прямолинейным отрезкам и треугольным панелям // Вычислительные методы и программирование. 2022. 23, № 2. 137–152. doi 10.26089/NumMet.v23r209.



Analytic and semi-analytic integration of logarithmic and Newtonian potentials and their gradients over line segments and rectilinear panels

Ilia K. Marchevsky

Bauman Moscow State Technical University,
Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-4899-4828, e-mail: iliamarchevsky@mail.ru

Sophia R. Serafimova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-0813-2820, e-mail: sophialynx@mail.ru

Abstract: The integrals are considered that arise when solving boundary integral equations, which kernels are logarithmic or Newtonian potentials or their gradients, in the case when the solution is considered to be piecewise-constant over panels, which are rectilinear segments in plane problems, and flat triangles in spatial problems. Integrals over one panel are considered which are calculated in the framework of collocations method, and the calculation technique is developed for repeated integrals over two panels arising in the Galerkin method. In plane problems for all the integrals exact analytical expressions suitable for practical usage are presented; the same applies to the integrals over one panel in three-dimensional problems. For repeated integrals in 3D case, a hybrid numerical-analytical scheme is proposed, which involves the extraction of singularities in the integrands and their analytical integration, as well as the numerical integration of smooth functions.

Keywords: logarithmic potential, Newtonian potential, potential gradient, integral equation, integration over line segment, integration over triangle, singularity extraction.

Acknowledgements: The work of Marchevsky I.K. was supported by the Russian Science Foundation (proj. No. 17–79–20445).

For citation: I. K. Marchevsky, S. R. Serafimova, “Analytic and semi-analytic integration of logarithmic and Newtonian potentials and their gradients over line segments and rectilinear panels,” *Numerical Methods and Programming*. 23 (2), 137–152 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r209.

1. Введение. Математическое моделирование многих физических явлений и процессов сводится к решению краевых или начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение Лапласа, которое можно считать одним из простейших уравнений математической физики, привлекает особое внимание, поскольку к его решению сводятся многие представляющие как теоретический, так и практический интерес задачи — в частности, задачи механики твердого тела, гидродинамики, теплопроводности, электростатики и др.

При численном решении уравнений в частных производных в подавляющем большинстве случаев обращаются к классическим сеточным методам — методу конечных разностей, методу контрольных объемов, методу конечных элементов и их многочисленным модификациям. Такой подход, как правило, является весьма эффективным применительно к решению внутренних задач, однако практика решения внешних задач приводит к известным сложностям. В частности, приходится ограничивать расчетную область и сносить тем или иным образом граничные условия с бесконечности на искусственную внешнюю границу, обеспечивая при этом в насколько возможной мере их “неотражающий” характер. Расширение расчетной области обычно делает численное решение все более близким к решению исходной задачи, однако данная процедура “оплачивается” увеличением размерности сеточной задачи и, как следствие, увеличением затрат вычислительных ресурсов на ее решение.

Альтернативой может служить метод граничных интегральных уравнений, часто называемый в инженерных приложениях методом граничных элементов [1–3]. В его основе — представление решения через



интегралы по границе расчетной области, а также, возможно, по внутренним поверхностям раздела: таким образом “пространственная размерность” задачи снижается на единицу. Отметим, что в некоторых постановках требуется также вычисление интегралов по некоторым частям расчетной области. Преимуществами метода интегральных уравнений являются точное удовлетворение получаемого решения исходному уравнению (а следовательно — выполнение соответствующих балансовых соотношений), возможность вычисления частных производных решения с высокой точностью, а также точное удовлетворение граничному условию на бесконечности. Обстоятельный, хотя и несколько устаревший на сегодня обзор методов данного класса содержится в [4].

Дискретными аналогами граничных интегральных уравнений выступают системы линейных алгебраических уравнений относительно граничных значений некоторой величины, обладающие, однако, полностью заполненными матрицами.

2. Постановка задачи. Классическая процедура сведения исходной краевой задачи для уравнения Лапласа к граничному интегральному уравнению подробно освещена в упомянутой выше литературе, а также в большом количестве публикаций, касающихся решения задач из отдельных предметных областей. Вместе с тем, в некоторых приложениях появляются или получают развитие и новые математические модели, в рамках которых решения соответствующих задач также представляются через потенциалы простого или двойного слоя [5, 6], выражаемые интегралами свертки вида

$$\int_S G(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})\mu(\boldsymbol{\xi})dS_{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{и} \quad \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} G(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})\nu(\boldsymbol{\xi})dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

где $\mu(\boldsymbol{\xi})$ и $\nu(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in S$, — функции плотности соответствующих потенциалов; $G(\boldsymbol{\rho})$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа. В двумерных задачах указанные потенциалы часто называют логарифмическими, в трехмерных — ньютоновским (реже кулоновскими), при этом

$$G_{2D}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{h}|}{|\boldsymbol{\rho}|}, \quad G_{3D}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{\rho}|},$$

где \mathbf{h} — произвольный постоянный вектор.

Отметим, что результирующее интегральное уравнение может быть записано как относительно плотности потенциала, так и некоторой ее производной — к примеру, в задачах аэрогидродинамики, решаемых вихревыми методами [6], ясный механический смысл имеет величина интенсивности вихревого слоя $\gamma(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \times \text{Grad } \nu(\boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})$ — орт нормали к поверхности, Grad означает оператор поверхностного градиента. Тем не менее, в наиболее общем виде решаемое уравнение можно представить следующим образом

$$\int_S P(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})\phi(\boldsymbol{\xi})dS_{\boldsymbol{\xi}} + \alpha(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1)$$

где ядро P является скалярной или векторной функцией, с точностью до не зависящего от $\boldsymbol{\xi}$ множителя равной фундаментальному решению или его градиенту; ϕ — скалярная или векторная неизвестная величина; f — скалярная или векторная функция правой части.

Исходная задача в ряде случаев может быть сведена как к уравнению первого рода ($\alpha \equiv 0$, интеграл в нем обычно является сингулярным или гиперсингулярным, и его следует понимать в смысле главного значения по Коши или конечной части по Адамару соответственно [7–9]), так и к уравнению второго рода с несобственным абсолютно сходящимся интегралом [6, 10], а иногда даже и с интегралом от функции, не содержащей особенностей. Не затрагивая весьма актуальных вопросов разрешимости таких уравнений и преимуществ обоих подходов, заметим лишь, что процедура построения их дискретных аналогов оказывается нетривиальной, если иметь в виду обеспечение возможно низкой погрешности аппроксимации. Основная сложность при этом связана с необходимостью вычисления интегралов от неограниченных функций.

Будем считать, что граница области S , на которой рассматривается граничное интегральное уравнение, представляет собой кусочно-гладкую кривую или поверхность, которая аппроксимирована ломаной или многогранной поверхностью соответственно. Каждый ее прямолинейный отрезок или плоский многоугольник будем далее называть *панелью* и без ограничения общности считать, что в трехмерном случае панели являются треугольными. Если рассматривать сравнительно простой случай, когда приближенное

решение считается кусочно-постоянной по панелям функцией, и применять для решения метод коллокаций, то коэффициенты линейной системы — дискретного аналога интегрального уравнения — даются интегралами вида

$$\int_{K_j} G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{или} \quad \int_{K_j} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (2)$$

где интеграл вычисляется по j -й панели, которую назовем *влияющей*, а точку M_i с радиус-вектором \mathbf{r}_i , в качестве которой выступает i -я точка коллокации, будем называть *точкой наблюдения*.

Учитывая, что ядра $G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi})$ и $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi})$ имеют особенности, значения интегралов (2), вычисленных в точках коллокации, в качестве которых обычно берут центры панелей, могут значительно отличаться от средних значений соответствующих величин по панели. Этот эффект проявляется наиболее сильно в случае, когда используемая поверхностная сетка имеет невысокое качество, т. е. соседние панели значительно различаются по размеру (в пространственном случае нежелательны сильно вытянутые треугольники).

Повысить точность решения можно, если использовать вместо метода коллокаций схему Галеркина — фактически обеспечивая выполнение уравнения (1) в среднем на каждой панели. При этом возникает необходимость вычисления повторных интегралов вида

$$\int_{K_i} dS_r \int_{K_j} G(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{или} \quad \int_{K_i} dS_r \int_{K_j} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} G(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (3)$$

Отметим, что в результате применения такого типа численных схем при решении задач гидродинамики в вихревых методах погрешность решения удалось снизить на один или несколько порядков [11, 12].

Целью настоящей работы является построение алгоритмов вычисления с высокой точностью повторных интегралов (3) в плоском и пространственном случаях. Также в работе представлены удобные для практических расчетов формулы для вычисления однократных интегралов (2).

Все однократные, а в плоском случае — и повторные интегралы могут быть вычислены в замкнутой форме в элементарных функциях. При вычислении пространственных повторных интегралов возникает необходимость как интегрирования гладких ограниченных функций (эта задача может быть легко решена приближенно с помощью известных квадратурных формул), так и вычисления несобственных интегралов. Для последнего случая разработаны полуаналитические алгоритмы, предполагающие аддитивное выделение особенности и ее аналитическое интегрирование.

3. Интегралы от логарифмического потенциала и его градиента. В плоском случае, когда панели представляют собой прямолинейные отрезки, интегралы (2) для логарифмического потенциала можно вычислить в замкнутой форме.

Для интегралов (2) в монографии [13, с. 82] приведены аналитические выражения и способ их получения для частного случая, когда панель совпадает с отрезком оси ординат. Ниже представлены формулы, которые можно рассматривать как обобщение формул из [13] на случай произвольного расположения влияющей панели.

Пусть начало и конец прямолинейной панели K_j , имеющей длину L_j и единичный направляющий вектор $\boldsymbol{\tau}_j$, соединены с точкой наблюдения M_i , задаваемой радиус-вектором \mathbf{r}_i , векторами \mathbf{v}_a и \mathbf{v}_b (рис. 1).

Для удобства введем также вектор $\mathbf{v}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b)$, соединяющий центр панели с точкой наблюдения. Тогда

$$\begin{aligned} I_{2D}(M_i, K_j) &= \int_{K_j} G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{K_j} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{h}|}{|\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}|} dS_{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\ln \frac{|\mathbf{v}_b|}{|\mathbf{h}|} \mathbf{v}_b - \ln \frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{h}|} \mathbf{v}_a \right) \cdot \boldsymbol{\tau}_j + L_j + \Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b)(\mathbf{v}_0 \boldsymbol{\tau}_j \mathbf{k}) \right], \end{aligned}$$

где $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b)$ — величина, равная по модулю углу, под которым видна панель из точки наблюдения, и вычисляемая по формуле

$$\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b) = \arctg(\mathbf{v}'_a \mathbf{v}'_b \mathbf{k}, \mathbf{v}'_a \cdot \mathbf{v}'_b),$$

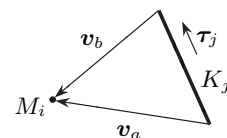


Рис. 1. Точка наблюдения M_i , прямолинейная панель K_j и вспомогательные векторы

Fig. 1. Observation point M_i , rectilinear panel K_j and auxiliary vectors



штрихами обозначены орты соответствующих векторов; вектор \mathbf{k} — единичный вектор нормали к плоскости, задаваемой панелью и точкой наблюдения (направление можно выбрать произвольно); функция $\varphi = \arctg(y, x)$ означает угол в диапазоне $(-\pi, \pi]$, для которого

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

или, что то же самое, главное значение аргумента комплексного числа $z = x + iy$. Данную величину в практических расчетах можно вычислить при помощи функции `atan2`, доступной во всех основных языках программирования (Fortran, C/C++ и др.).

Если точка наблюдения лежит на панели, то исходный интеграл является несобственным, однако приведенная формула остается справедливой, если только точка M_i не совпадает с одним из концов панели. В последнем случае $|\mathbf{v}_a| = 0$ или $|\mathbf{v}_b| = 0$ и

$$I_{2D}(M_i, K_j) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \ln \frac{L_j}{|\mathbf{h}|} \right) L_j, \quad M_i \in \partial K_j.$$

Интеграл от градиента логарифмического потенциала дается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{2D}(M_i, K_j) &= \int_{K_j} \nabla_{\xi} G(\mathbf{r}_i - \xi) dS_{\xi} = \int_{K_j} \frac{\mathbf{r}_i - \xi}{2\pi |\mathbf{r}_i - \xi|^2} dS_{\xi} = \\ &= - \int_{K_j} \nabla_r G(\mathbf{r}_i - \xi) dS_{\xi} = - \nabla_r I_{2D}(M_i, K_j) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{v}_b|} \boldsymbol{\tau}_j - \Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b) (\boldsymbol{\tau}_j \times \mathbf{k}) \right), \quad M_i \notin K_j. \end{aligned}$$

Если точка наблюдения лежит на самой панели, то исходный интеграл нужно понимать как сингулярный, его главное значение по Коши равно

$$\mathbf{J}_{2D}(M_i, K_j) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{v}_b|} \boldsymbol{\tau}_j, \quad M_i \in K_j \setminus \partial K_j.$$

На концах панели интеграл расходится.

На практике могут представлять интерес предельные значения интеграла при приближении точки наблюдения к панели, в этом случае

$$\mathbf{J}_{2D}^{\text{lim}}(M_i, K_j) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{v}_b|} \boldsymbol{\tau}_j + \pi \mathbf{n}_j, \quad M_i \in K_j \setminus \partial K_j,$$

где \mathbf{n}_j — орт нормали к панели, направленный в ту сторону, предельное значение интеграла с которой вычисляется.

4. Повторные интегралы от логарифмического потенциала и его градиента. В плоском случае для двух прямолинейных панелей повторные интегралы от логарифмического потенциала и его градиента (3) могут быть вычислены точно. Проинтегрировав элементарные функции, входящие в выражение для $I_{2D}(M_i, K_j)$, вдоль контрольной панели K_i , после преобразований и введения обозначений, аналогичных использованным ранее, можно записать

$$\begin{aligned} I_{2D}(K_i, K_j) &= \int_{K_i} dS_r \int_{K_j} G(\mathbf{r} - \xi) dS_{\xi} = \int_{K_i} dS_r \int_{K_j} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{h}|}{|\mathbf{r}_i - \xi|} dS_{\xi} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[3L_i L_j + (L_j (\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{w}_a) + \Theta(\mathbf{v}_b, \mathbf{w}_b)) \boldsymbol{\tau}_i - L_i (\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b) + \Theta(\mathbf{w}_a, \mathbf{w}_b)) \boldsymbol{\tau}_j) \mathbf{c} \mathbf{k} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{w}_a) - \Theta(\mathbf{v}_b, \mathbf{w}_b) + \Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b) - \Theta(\mathbf{w}_a, \mathbf{w}_b)) \times \\ &\quad \times \left(((\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \boldsymbol{\tau}_j + (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\tau}_j) \boldsymbol{\tau}_i) \times \mathbf{c} + \frac{1}{4} (L_j^2 - L_i^2) (\boldsymbol{\tau}_i \times \boldsymbol{\tau}_j) \right) \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad \left. + \psi(\mathbf{v}_a) \ln \frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{h}|} - \psi(\mathbf{v}_b) \ln \frac{|\mathbf{v}_b|}{|\mathbf{h}|} - \psi(\mathbf{w}_a) \ln \frac{|\mathbf{w}_a|}{|\mathbf{h}|} + \psi(\mathbf{w}_b) \ln \frac{|\mathbf{w}_b|}{|\mathbf{h}|} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь векторы \mathbf{v}_a и \mathbf{v}_b соединяют начало и конец влияющей панели K_j с началом контрольной панели K_i ; векторы \mathbf{w}_a и \mathbf{w}_b соединяют начало и конец влияющей панели с концом контрольной панели; вектор \mathbf{c} соединяет центр влияющей панели с центром контрольной панели (рис. 2); величина

$$\psi(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_j) - (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\tau}_i) \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\tau}_j)$$

есть квадрат модуля вектора \mathbf{v} , умноженный на косинус суммы углов, которые этот вектор образует с направляющими векторами панелей $\boldsymbol{\tau}_i$ и $\boldsymbol{\tau}_j$.

При получении формулы (4) предполагалось, что панели K_i и K_j не имеют общих точек. В случае, когда конец панели K_j совпадает с началом панели K_i или наоборот, слагаемые, зависящие от \mathbf{v}_b или \mathbf{w}_a соответственно, содержат неопределенности. Раскрывая их путем вычисления соответствующих пределов, получаем, что и при $|\mathbf{v}_b| = 0$, и при $|\mathbf{w}_a| = 0$ вместо всех этих слагаемых \mathbf{c} оставшимся следует прибавить величину

$$\Delta = -\frac{1}{16\pi} (L_i^2 + L_j^2) \Theta(\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j) \sin(\Theta(\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j)).$$

Если же контрольная панель совпадает с влияющей, то

$$I_{2D}(K_j, K_j) = \frac{1}{4\pi} \left(3 - 2 \ln \frac{L_j}{|\mathbf{h}|} \right) L_j^2.$$

Отметим, что формула (4) и ее аналоги для частных случаев, исключая последний, весьма громоздки; при этом результат вычисления внутреннего интеграла — записанная выше функция $I_{2D}(M_i, K_j)$ — гладкая функция координат точки наблюдения M_i , ограниченная вместе со своим градиентом. Следовательно, внешний интеграл можно вычислить приближенно с высокой точностью при помощи любых известных квадратурных формул; такая процедура может быть менее трудоемкой по сравнению с вычислением интеграла по аналитической формуле.

При повторном интегрировании градиента логарифмического потенциала, т. е. при вычислении второго из интегралов (3), оказывается, что внутренний интеграл $\mathbf{J}_{2D}(M_i, K_j)$ является неограниченной функцией при приближении к концам влияющей панели K_j . Следовательно, численное интегрирование является неэффективным, по крайней мере в случае, когда контрольная панель K_i имеет общую точку с влияющей панелью K_j . Тем не менее, данный повторный интеграл можно вычислить в общем виде для произвольного расположения контрольной и влияющей панелей. Используя введенные выше обозначения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{2D}(K_i, K_j) &= \int_{K_i} dS_r \int_{K_j} \nabla_\xi G(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dS_\xi = \int_{K_i} \mathbf{J}_{2D}(M_i, K_j) dS_r = \int_{K_i} dS_r \int_{K_j} \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{2\pi|\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(L_i \Theta(\mathbf{w}_b, \mathbf{v}_a) \boldsymbol{\tau}_j + \Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{w}_a) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{w}_a) + \Theta(\mathbf{w}_b, \mathbf{v}_b) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}_b) \right) \times \mathbf{k} + \right. \\ &\quad \left. + \left(L_i \ln \frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{w}_b|} \boldsymbol{\tau}_j + \ln \frac{|\mathbf{w}_a|}{|\mathbf{v}_a|} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{w}_a) + \ln \frac{|\mathbf{v}_b|}{|\mathbf{w}_b|} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}_b) \right) \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \boldsymbol{\tau}_j + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_j) \boldsymbol{\tau}_i - (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j) \mathbf{v}$.

В случаях, когда панели K_i и K_j имеют общую точку ($|\mathbf{v}_b| = 0$ или $|\mathbf{w}_a| = 0$), внешний интеграл оказывается несобственным, но выражение (5) остается справедливым, если исключить в нем слагаемые, содержащие соответственно \mathbf{v}_b или \mathbf{w}_a .

Если контрольная панель K_i совпадает с влияющей K_j , интеграл становится сингулярным, его главное значение в смысле Коши равно нулю.

5. Интегралы от ньютоновского потенциала и его градиента. Для вычисления интеграла (2) по треугольной пространственной панели K_j известна формула ([13, с. 130]), справедливая для частного случая, когда проекция точки наблюдения M_i на плоскость треугольника K_j совпадает с одной из его вершин. В результате трехкратного применения этой формулы можно вычислить данный интеграл для произвольного расположения точки наблюдения.

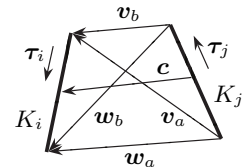


Рис. 2. Прямолинейные панели K_i и K_j и вспомогательные векторы

Fig. 2. Rectilinear panels K_i and K_j and auxiliary vectors



Тем не менее, возможна более компактная форма записи формулы для первого из интегралов (2), справедливая для любого взаимного расположения точки наблюдения и панели:

$$I_{3D}(M_i, K_j) = \int_{K_j} G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{K_j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|} dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4\pi} \left(\Phi(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) - \Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) \mathbf{v}_0 \right) \cdot \mathbf{n}_j, \quad (6)$$

где

$$\Phi(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = \frac{\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b}{L_c} \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{v}_b|} \frac{1 + \cos \varphi_c^a}{1 - \cos \varphi_c^b} \right) + \frac{\mathbf{v}_b \times \mathbf{v}_c}{L_a} \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_b|}{|\mathbf{v}_c|} \frac{1 + \cos \varphi_a^b}{1 - \cos \varphi_a^c} \right) + \frac{\mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_a}{L_b} \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_c|}{|\mathbf{v}_a|} \frac{1 + \cos \varphi_b^c}{1 - \cos \varphi_b^a} \right),$$

$$\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = 2 \arctg(\mathbf{v}'_a \mathbf{v}'_b \mathbf{v}'_c, 1 + (\mathbf{v}'_a \cdot \mathbf{v}'_b) + (\mathbf{v}'_b \cdot \mathbf{v}'_c) + (\mathbf{v}'_c \cdot \mathbf{v}'_a)).$$

Величины, входящие в формулу (6), имеют ясный геометрический смысл (рис. 3): $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c$ — векторы, соединяющие вершины треугольной панели K_j с точкой наблюдения M_i ; штрихи, как и ранее, означают орты соответствующих векторов; $\mathbf{v}_0 = 1/3(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c)$ — вектор, соединяющий центр треугольника с точкой наблюдения; L_a, L_b, L_c — длины сторон треугольника, лежащих против соответствующих векторов; φ_q^p — плоский угол при основании боковой грани получающегося тетраэдра (между вектором \mathbf{v}_p и стороной L_q , изменяется от 0 до π); \mathbf{n}_j — орт нормали к плоскости треугольника, выбранный таким образом, что при взгляде на треугольник против направления этого вектора обход сторон в порядке L_a, L_b, L_c производится против часовой стрелки; $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$ — величина, равная по модулю телесному углу, под которым виден треугольник из точки наблюдения; представленная формула заимствована из [14]. Величина $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$ положительна, если точка наблюдения лежит от панели в направлении вектора нормали \mathbf{n}_j , т.е. при $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_j > 0$, и отрицательна в противном случае.

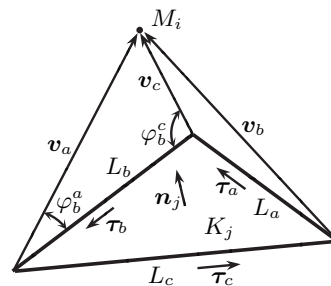


Рис. 3. Точка наблюдения M_i , треугольная панель K_j и вспомогательные векторы

Fig. 3. Observation point M_i , triangular panel K_j and auxiliary vectors

Если точка наблюдения M_i лежит в плоскости треугольника K_j внутри него, то исходный интеграл становится несобственным, однако формула (6) остается справедливой. В этом случае при вычислении величины $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$ возникает неопределенность, однако в данном случае вектор \mathbf{v}_0 ортогонален вектору нормали \mathbf{n}_j , поэтому указанная неопределенность не оказывает влияния на результат расчета.

Похожая ситуация возникает при приближении точки наблюдения к плоскости треугольника: значения величины $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$ получаются близкими к $\pm 2\pi$, однако этот результат впоследствии умножается на скалярное произведение векторов \mathbf{v}_0 и \mathbf{n}_j , которое близко к нулю, и таким образом практически не влияет на итоговый результат.

В случае, когда точка наблюдения M_i лежит в плоскости треугольника K_j на одной из сторон или ее продолжении, формула (6) также остается верной, если исключить из нее слагаемое или слагаемые, в которых векторные произведения обращаются в нуль.

Для интеграла от градиента ньютоновского потенциала также можно записать точное аналитическое выражение, получаемое вычислением градиента предыдущего результата:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{3D}(M_i, K_j) &= \int_{K_j} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{K_j} \frac{\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}}{4\pi|\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}|^3} dS_{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= - \int_{K_j} \nabla_r G(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} = -\nabla_r I_{3D}(M_i, K_j) = \frac{1}{4\pi} (\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) \mathbf{n}_j + \Psi(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) \times \mathbf{n}_j). \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь в дополнение к ранее введенным использовано обозначение

$$\Psi(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{v}_b|} \frac{1 + \cos \varphi_c^a}{1 - \cos \varphi_c^b} \right) \boldsymbol{\tau}_c + \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_b|}{|\mathbf{v}_c|} \frac{1 + \cos \varphi_a^b}{1 - \cos \varphi_a^c} \right) \boldsymbol{\tau}_a + \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_c|}{|\mathbf{v}_a|} \frac{1 + \cos \varphi_b^c}{1 - \cos \varphi_b^a} \right) \boldsymbol{\tau}_b,$$

где $\boldsymbol{\tau}_a, \boldsymbol{\tau}_b$ и $\boldsymbol{\tau}_c$ — орты векторов, направленных вдоль сторон треугольника K_j .

В слагаемых, составляющих выражение $\Psi(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$, возникает неопределенность в том случае, когда точка наблюдения M_i лежит в плоскости панели K_j на продолжении одной из сторон треугольника в направлении, противоположном соответствующему вектору $\boldsymbol{\tau}$. В этом случае логарифм, содержащий неопределенность, следует заменить своим предельным значением:

$$\lim_{\cos \varphi_c^b \rightarrow 1} \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{v}_b|} \frac{1 + \cos \varphi_c^a}{1 - \cos \varphi_c^b} \right) = -\ln \frac{|\mathbf{v}_a|}{|\mathbf{v}_b|}, \quad \lim_{\cos \varphi_a^c \rightarrow 1} \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_b|}{|\mathbf{v}_c|} \frac{1 + \cos \varphi_a^b}{1 - \cos \varphi_a^c} \right) = -\ln \frac{|\mathbf{v}_b|}{|\mathbf{v}_c|},$$

$$\lim_{\cos \varphi_b^a \rightarrow 1} \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_c|}{|\mathbf{v}_a|} \frac{1 + \cos \varphi_b^c}{1 - \cos \varphi_b^a} \right) = -\ln \frac{|\mathbf{v}_c|}{|\mathbf{v}_a|}.$$

Отметим, что поскольку в практических расчетах присутствуют погрешности, вызываемые, по крайней мере, ограниченной точностью представления чисел, то равенство $\cos \varphi_c^b = 1$ и аналогичные для других сторон панели в математическом смысле выполнены не будут (за очень редкими исключениями). В то же время работа со значениями $\cos \varphi_c^b$, близкими к 1, будет приводить к быстрому накоплению погрешностей по причине выполнения вычитания близких по модулю чисел. Поэтому следует задаться малой величиной “углового допуска” $\varepsilon > 0$ и проверять выполнение условий

$$1 - \cos \varphi_c^b < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 - \cos \varphi_a^c < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 - \cos \varphi_b^a < \frac{\varepsilon^2}{2},$$

означающих, что углы φ_c^b , φ_a^c и φ_b^a соответственно по абсолютной величине не превосходят ε .

Если одно из выписанных условий оказывается выполненным, то случай следует считать предельным и нужно пользоваться соответствующей формулой.

Конкретное значение величины ε зависит от точности, которой требуется достичь при вычислении интегралов, а также используемого типа данных. При расчетах с двойной точностью (типы данных `real8` в Fortran и `double` в C/C++) представляется оправданным принять ε порядка 10^{-6} .

Указанное замечание относится ко всем рассматриваемым частным случаям, возникающим при вычислении интегралов.

Если точка наблюдения M_i принадлежит внутренности влияющей панели K_j , что в практических расчетах в зависимости от ситуации может как постулироваться явно, так и требовать проверки условия малости расстояния от точки до панели по сравнению с характерным размером панели, то формула (7) остается справедливой, если считать, что $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = 0$. Предельные значения интеграла $\mathbf{J}_{3D}^{\text{lim}}(M_i, K_j)$ получаются при $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = \pm 2\pi$; знак определяется стороной, с которой приближается точка наблюдения к панели по отношению к вектору нормали \mathbf{n}_j . На сторонах панели интеграл $\mathbf{J}_{3D}(M_i, K_j)$ расходится.

В заключение данного раздела отметим, что интегралы от ньютоновского потенциала и его градиента по треугольной панели могут быть также вычислены с использованием методики, описанной в [15], которая является более универсальной и применима также к вычислению интегралов с весами, в качестве которых могут выступать, к примеру, функции формы треугольного конечного элемента. Тем не менее, формулы (6) и (7) представляются более простыми и удобными для практического применения, чем формулы [15].

6. Повторные интегралы от ньютоновского потенциала и его градиента. Заметим сразу, что получить точные аналитические выражения в замкнутой форме для повторных интегралов от ньютоновского потенциала и его градиента по двум треугольным панелям не представляется возможным.

Численное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса [16] (или каких-либо других) возможно для случаев, когда панели K_i и K_j не имеют общих точек. В этом случае внутренние интегралы в (3) являются ограниченными функциями вместе со своими производными по пространственным координатам, поэтому высокая точность вычисления интегралов достигается, как правило, при сравнительно небольшом числе узлов:

$$I_{3D}(K_i, K_j) = \int_{K_i} I_{3D}(M_i, K_j) dS_r \approx S_i \sum_{s=1}^{N_{GP}} \omega_s I_{3D}(P_s, K_j), \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_{3D}(K_i, K_j) = \int_{K_i} \mathbf{J}_{3D}(M_i, K_j) dS_r \approx S_i \sum_{s=1}^{N_{GP}} \omega_s \mathbf{J}_{3D}(P_s, K_j).$$



Здесь $N_{\text{ГР}}$ — число узлов квадратурной формулы; ω_s — их веса; P_s — положения узлов на треугольной панели K_i ; S_i — площадь i -й панели. В [16] приведены все необходимые параметры семейства квадратурных формул Гаусса для различного количества узлов $N_{\text{ГР}}$; положения узлов указаны в барицентрических координатах (L -координатах), что позволяет без труда применить их к треугольнику произвольной формы, произвольно ориентированному в пространстве.

Если же панели K_i и K_j имеют общее ребро или общую вершину, то внутренний интеграл при вычислении $\mathbf{J}_{3\text{D}}(K_i, K_j)$, т. е. функция $\mathbf{J}_{3\text{D}}(M_i, K_j)$, оказывается неограниченным при приближении к общим точкам двух треугольников и внешний интеграл становится несобственным. Для вычисления подобных интегралов можно использовать подход Тейлора–Даффи (Taylor–Duffy) [17], который весьма универсален, однако соответствующая вычислительная процедура оказывается достаточно трудоемкой.

Для решения этой проблемы при вычислении интеграла $\mathbf{J}_{3\text{D}}(K_i, K_j)$ возможно выделение особенности в подынтегральных выражениях, т. е. его представление в виде суммы

$$\mathbf{J}_{3\text{D}}(M_i, K_j) = \mathbf{J}_{3\text{D}}^{\text{reg}}(M_i, K_j) + \mathbf{J}_{3\text{D}}^{\text{sing}}(M_i, K_j),$$

где сингулярную часть будем представлять в виде

$$\mathbf{J}_{3\text{D}}^{\text{sing}}(M_i, K_j) = \frac{1}{4\pi} (\Theta^{\text{sing}}(M_i, K_j)\mathbf{n}_j + \Psi^{\text{sing}}(M_i, K_j) \times \mathbf{n}_j).$$

В результате регулярная часть подынтегрального выражения (зависимости от положения точки M_i и панели K_j для краткости опущены)

$$\mathbf{J}_{3\text{D}}^{\text{reg}} = \frac{1}{4\pi} ((\Theta - \Theta^{\text{sing}})\mathbf{n}_j + (\Psi - \Psi^{\text{sing}}) \times \mathbf{n}_j),$$

а также ее производные по пространственным координатам оказываются гладкими ограниченными функциями, поэтому численное интегрирование с высокой точностью производится без сложностей, если только узлы квадратурных формул не оказываются совпадающими с общими точками двух панелей. Это накладывает необременительное ограничение на выбор квадратурной формулы; формулы Гаусса 2–7 порядков точности, приведенные в [16], этому ограничению удовлетворяют (за исключением одной).

В то же время для сингулярных частей соответствующих функций можно получить выражения в замкнутой форме для интегралов

$$\int_{K_i} \Theta^{\text{sing}} dS_r, \quad \int_{K_i} \Psi^{\text{sing}} dS_r.$$

Далее рассмотрим отдельно случаи общего ребра и общей вершины у контрольной и влияющей панелей и представим все необходимые расчетные формулы.

Отметим, что функция $I_{3\text{D}}(M_i, K_j)$, выражающая внутренний интеграл при вычислении $I_{3\text{D}}(K_i, K_j)$, является ограниченной, но не является гладкой. В частности, она “наследует” от функции $\Phi(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$ слабую (логарифмическую) особенность пространственной производной при приближении точки наблюдения M_i к панели K_j . Такой тип особенности позволяет использовать квадратурные формулы для численного интегрирования, однако их порядок точности будет ограничен вторым.

Функция $\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$, равная по модулю телесному углу, под которым видна панель из точки наблюдения, также является ограниченной, но негладкой; ее пространственная производная имеет при приближении к общим точкам панелей более сильную (степенную) особенность. Последнее, собственно, и требует аналитического ее выделения при вычислении интеграла $\mathbf{J}_{3\text{D}}(K_i, K_j)$. Тем не менее, производные произведения $(\Theta(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}_j$, входящего в выражение для интеграла $I_{3\text{D}}(M_i, K_j)$, уже являются ограниченными, что позволяет интегрировать его численно. В результате вычисление значений повторных интегралов $I_{3\text{D}}(K_i, K_j)$ с достаточно высокой точностью при помощи квадратурных формул не представляет сложностей и в случае панелей, имеющих общие точки.

Если контрольная и влияющая панели совпадают ($i = j$), то значение $I_{3\text{D}}(K_j, K_j)$ получается численным интегрированием по формуле (8), так же как и в общем случае, а интеграл в выражении для $\mathbf{J}_{3\text{D}}(K_j, K_j)$ становится сингулярным; его главное значение в смысле Коши равно нулю.

6.1. Случай панелей с общим ребром. В том случае, когда панели K_i и K_j имеют общее ребро, направляющим вектором которого для определенности будем считать орт $\boldsymbol{\tau}_c$ стороны L_c влияющей панели

K_j , как указано на рис. 4, сингулярные составляющие интеграла $\mathbf{J}_{3D}(K_i, K_j)$ принимают вид

$$\Theta^{\text{sing}}(M_i, K_j) = 2 \left(\arctg(\mathbf{v}'_a \boldsymbol{\tau}_b \boldsymbol{\tau}_c, (\boldsymbol{\tau}_b - \boldsymbol{\tau}_c) \cdot (\boldsymbol{\tau}_b + \mathbf{v}'_a)) - \arctg(\mathbf{v}'_b \boldsymbol{\tau}_a \boldsymbol{\tau}_c, (\boldsymbol{\tau}_a - \boldsymbol{\tau}_c) \cdot (\boldsymbol{\tau}_a - \mathbf{v}'_b)) \right),$$

$$\Psi^{\text{sing}}(M_i, K_j) = \boldsymbol{\tau}_c \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_b| \boldsymbol{\tau}_c \cdot (\boldsymbol{\tau}_c - \mathbf{v}'_b)}{|\mathbf{v}_a| \boldsymbol{\tau}_c \cdot (\boldsymbol{\tau}_c - \mathbf{v}'_a)} \right) - \boldsymbol{\tau}_b \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_a|}{L_c} \boldsymbol{\tau}_b \cdot (\boldsymbol{\tau}_b + \mathbf{v}'_a) \right) - \boldsymbol{\tau}_a \ln \left(\frac{|\mathbf{v}_b|}{L_c} \boldsymbol{\tau}_a \cdot (\boldsymbol{\tau}_a - \mathbf{v}'_b) \right).$$

Выражение для сингулярной части Θ^{sing} , также как и скалярные множители при векторах $\boldsymbol{\tau}_p$ в выражении для сингулярной части Ψ^{sing} , могут быть проинтегрированы аналитически в элементарных функциях по треугольной контрольной панели K_i :

$$\int_{K_i} \Theta^{\text{sing}}(M_i, K_j) dS_r = S_i (q_\Theta(\xi, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \lambda) + q_\Theta(\xi, \beta, \alpha, \delta, \sigma, \theta)),$$

$$\int_{K_i} \Psi^{\text{sing}}(M_i, K_j) dS_r = S_i (q_\Psi(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma, \lambda) \boldsymbol{\tau}_b + q_\Psi(\xi, \beta, \alpha, \sigma, \delta, \theta) \boldsymbol{\tau}_a - q_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \boldsymbol{\tau}_c).$$

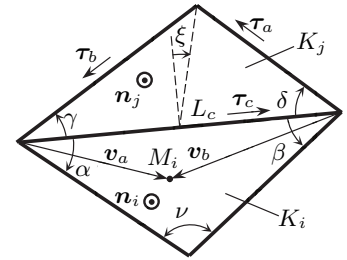


Рис. 4. Панели K_i и K_j с общим ребром

Fig. 4. Panels K_i and K_j with a common edge

Здесь α и β — углы контрольной панели K_i , прилежащие к общему ребру; $\nu = \pi - \alpha - \beta$ — противоположный ему угол; γ и δ — углы влияющей панели K_i , прилежащие к общему ребру; ξ — угол между плоскостями панелей K_i и K_j , который может принимать как положительные, так и отрицательные значения (отсчитываемый так, как показано на рис. 4):

$$\xi = \arctg(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \boldsymbol{\tau}_c, \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j),$$

остальные углы задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi - \arccos(\cos \alpha \cos \delta + \cos \xi \sin \alpha \sin \delta), \\ \mu &= \pi - \arccos(\cos \beta \cos \gamma + \cos \xi \sin \beta \sin \gamma), \\ \lambda &= \pi - \arccos(\cos \alpha \cos \gamma - \cos \xi \sin \alpha \sin \gamma), \\ \theta &= \pi - \arccos(\cos \beta \cos \delta - \cos \xi \sin \beta \sin \delta), \end{aligned}$$

которые можно интерпретировать как выражения теоремы косинусов для трехгранных углов с соответствующими плоскими и двугранными углами. Вспомогательные функции q_Θ , q_Ψ и $q_{\alpha\beta}$, зависящие только от величины углов, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} q_\Theta(\xi, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \lambda) &= \\ &= \phi(\xi, \alpha, \gamma, \lambda) + \frac{\sin \gamma \sin \nu}{\sin \alpha (1 - \cos^2 \mu)} \left[(\cos \beta \sin \gamma - \cos \xi \sin \beta \cos \gamma) \phi(\xi, \pi - \alpha, \pi - \gamma, \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \xi \sin \beta \left((1 + \cos \mu) \ln \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \nu} + (1 - \cos \mu) \ln \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \nu} + 2 \ln \frac{1 + \cos \lambda}{1 - \cos \gamma} \right) \right], \\ q_\Psi(\xi, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \lambda) &= \frac{3}{2} - \frac{1}{\sin \alpha (1 - \cos^2 \mu)} \left[\sin \beta (\cos \nu + \cos \mu \cos \lambda) \ln(1 + \cos \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \nu (\cos \beta + \cos \mu \cos \gamma) \ln(1 - \cos \gamma) + \sin \beta (1 - \cos \mu) (\cos \nu - \cos \lambda) \ln \frac{\sin \beta}{\sin \nu} + \right. \\ &\quad \left. + \sin \nu \sin \beta (\sin \beta \cos \gamma - \cos \xi \sin \gamma \cos \beta) \ln \frac{1 - \cos \nu}{1 + \cos \beta} + \phi(\xi, \pi - \alpha, \pi - \gamma, \lambda) \sin \xi \sin \gamma \sin \nu \sin \beta \right], \end{aligned}$$



$$q_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\sin \nu}{\sin \beta} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \right) + \frac{\sin \nu}{\sin \alpha} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \right) + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right),$$

где введено обозначение

$$\phi(\xi, \alpha, \gamma, \lambda) = 2 \operatorname{arctg}(\sin \xi \sin \alpha \sin \gamma, 1 - \cos \alpha + \cos \gamma + \cos \lambda).$$

Приведенные формулы справедливы для любого взаимного расположения панелей K_i и K_j , за исключением случая, когда они лежат в одной плоскости (при $\xi = 0$) и одновременно $\beta = \gamma$ или $\alpha = \delta$, что приводит к появлению неопределенностей типа $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ в предыдущих формулах для q_{Θ} и q_{Ψ} . Для ее раскрытия следует рассмотреть случай малого угла между панелями и перейти к пределу при $\xi \rightarrow 0$. Вычисляя соответствующие пределы, получаем для рассматриваемого случая более простые выражения:

$$q_{\Theta}(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma, \lambda) = 0,$$

$$q_{\Psi}(\xi, \alpha, \beta, \mu, \gamma, \lambda) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sin \alpha} \left(\cos \nu \sin \beta \ln(1 + \cos \nu) + \sin \nu \cos \beta \ln(1 - \cos \beta) + \sin \alpha - \sin \beta + \sin \nu + \sin \beta \cos \nu \ln \frac{\sin \beta}{\sin \nu} \right).$$

При практических расчетах вместо выполнения условий $\xi = \beta - \gamma = 0$ или $\xi = \alpha - \delta = 0$ следует проверять более “мягкие” условия

$$|\xi| < \varepsilon \wedge |\beta - \gamma| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |\xi| < \varepsilon \wedge |\alpha - \delta| < \varepsilon,$$

или аналогичные им для $\sin \xi$ и $\sin(\beta - \gamma)$ или $\sin(\alpha - \delta)$, при выполнении которых рассматриваемый случай следует считать предельным и пользоваться для него указанными формулами.

6.2. Случай панелей с общей вершиной. Схема, иллюстрирующая конфигурацию соседних панелей с общей вершиной с введенными на ней обозначениями для необходимых векторов и углов, показана на рис. 5.

В общем случае панели K_i и K_j лежат в разных плоскостях, линия пересечения которых проходит через их общую вершину. Ее единичный направляющий вектор, который обозначим \mathbf{e} , выберем сонаправленным векторному произведению векторов нормалей к панелям $\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j$.

В случае, если панели K_i и K_j лежат в одной плоскости, т. е. при $\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j = \mathbf{0}$ (на практике — при $\|\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j\| < \varepsilon$), направление единичного вектора \mathbf{e} можно выбрать произвольно; для определенности положим $\mathbf{e} = \boldsymbol{\tau}_b$.

Как видно из рис. 5, после введения орта \mathbf{e} ориентация влияющей панели K_j полностью определяется единичными векторами $\boldsymbol{\tau}_a$ и $\boldsymbol{\tau}_b$ сторон, примыкающих к общей вершине, или, что то же, величинами углов δ_a и δ_b , которые образуют эти стороны с направлением вектора \mathbf{e} :

$$\delta_a = \operatorname{arctg}(-\mathbf{e}\boldsymbol{\tau}_a\mathbf{n}_j, -\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_a), \quad \delta_b = \operatorname{arctg}(\mathbf{e}\boldsymbol{\tau}_b\mathbf{n}_j, \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_b).$$

Для упрощения расчетных формул в случаях, когда хотя бы один из углов δ_a или δ_b оказывается близким к $\pm\pi$, что на практике означает проверку условия

$$\pi - |\delta_a| < \varepsilon \quad \vee \quad \pi - |\delta_b| < \varepsilon,$$

или, что то же,

$$1 + \cos \delta_a < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \vee \quad 1 + \cos \delta_b < \frac{\varepsilon^2}{2},$$

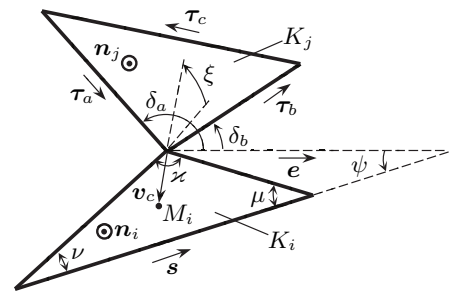


Рис. 5. Панели K_i и K_j с общей вершиной
 Fig. 5. Panels K_i and K_j with common vertex

направление единичного вектора \mathbf{e} удобно изменить на противоположное, тогда угол станет близким к нулю; величина второго угла должна быть при этом соответствующим образом пересчитана. Эту же операцию целесообразно выполнять в случае, когда выполнено условие

$$\delta_a \delta_b < 0 \quad \wedge \quad |\delta_a - \delta_b| > \pi,$$

пересчитав затем величины обоих углов δ_a и δ_b .

Как только направление вектора \mathbf{e} окончательно определено, величина угла ξ между плоскостями панелей K_i и K_j может быть вычислена следующим образом:

$$\xi = \arctg(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{e}, \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j);$$

знак величины ξ определяет взаимную ориентацию панелей.

Тогда сингулярные составляющие интеграла \mathbf{J}_{3D} можно записать в виде

$$\Theta^{\text{sing}}(M_i, K_j) = 2 \left[\arctg(\mathbf{v}'_c \boldsymbol{\tau}_a \mathbf{e}, (\mathbf{e} - \mathbf{v}'_c) \cdot (\mathbf{e} - \boldsymbol{\tau}_a)) + \arctg(\mathbf{v}'_c \boldsymbol{\tau}_b \mathbf{e}, (\mathbf{e} - \mathbf{v}'_c) \cdot (\mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_b)) \right],$$

$$\Psi^{\text{sing}}(M_i, K_j) = - \left[\boldsymbol{\tau}_a \ln \left(\frac{|\mathbf{v}'_c|}{\sqrt{S_i}} (1 + \boldsymbol{\tau}_a \cdot \mathbf{v}'_c) \right) + \boldsymbol{\tau}_b \ln \left(\frac{|\mathbf{v}'_c|}{\sqrt{S_i}} (1 - \boldsymbol{\tau}_b \cdot \mathbf{v}'_c) \right) \right],$$

где S_i — площадь панели K_i ; штрих, как и ранее, означает орг соответствующего вектора.

Выражение для сингулярной части Θ^{sing} и множители при векторах $\boldsymbol{\tau}_a, \boldsymbol{\tau}_b$ в выражении для сингулярной части Ψ^{sing} можно проинтегрировать точно по треугольной контрольной панели K_i :

$$\int_{K_i} \Theta^{\text{sing}}(M_i, K_j) dS_r = S_i (q^\Theta(\delta_a) - q^\Theta(\delta_b) + 4\pi p),$$

$$\int_{K_i} \Psi^{\text{sing}}(M_i, K_j) dS_r = S_i (q^\Psi(\delta_a) \boldsymbol{\tau}_a + q^\Psi(\delta_b) \boldsymbol{\tau}_b).$$

Здесь p — целое число, смысл которого будет пояснен ниже, и введены следующие обозначения:

$$q^\Theta(\delta) = \frac{2}{\sin \varkappa \sin \psi} \left[A_\nu \sin \mu \sin(\nu + \psi) - A_\mu \sin \nu \sin(\mu - \psi) - \right. \\ \left. - D \sin \mu \sin \nu \sin \delta \left(W \cos \eta + \frac{\sin \psi \sin \xi}{2} (\Lambda_1 - \Lambda_2 \cos \sigma) \right) \right],$$

$$q^\Psi(\delta) = \frac{3 - \ln 2}{2} + \frac{\sin \mu \sin \nu}{\sin \varkappa} \left[\ln \frac{1 + \cos \lambda}{1 + \cos \theta} \text{ctg} \psi + D \left(\Lambda_1 \frac{\sin \delta \cos \eta}{\sin \psi} + \Lambda_2 \cos \chi - 2W \sin \delta \sin \xi - G \ln \frac{\sin \nu}{\sin \mu} \right) \right] - \\ - \frac{1}{\sin \varkappa} \left(\sin \mu \cos \nu \ln \frac{1 + \cos \theta}{\sin \nu} + \cos \mu \sin \nu \ln \frac{1 + \cos \lambda}{\sin \mu} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\sin \mu \sin \nu}{\sin \varkappa}$$

и дополнительно для упрощения записей обозначено

$$A_\mu = \arctg \left(\text{tg} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\mu - \psi}{2} \sin \xi, \text{tg} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\mu - \psi}{2} \cos \xi + \sin \frac{\mu - \psi}{2} \right),$$

$$A_\nu = \arctg \left(\text{tg} \frac{\delta}{2} \sin \frac{\nu + \psi}{2} \sin \xi, \text{tg} \frac{\delta}{2} \sin \frac{\nu + \psi}{2} \cos \xi + \cos \frac{\nu + \psi}{2} \right),$$

$$W = \arctg \left(\sin \delta \sin \frac{\varkappa}{2} \sin \xi, \cos \frac{\varkappa}{2} + \sin \delta \cos \left(\frac{\mu - \psi}{2} - \frac{\nu + \psi}{2} \right) \cos \xi + \cos \delta \sin \left(\frac{\mu - \psi}{2} - \frac{\nu + \psi}{2} \right) \right),$$

$$D = \left(\sin^2(\delta - \psi) + \sin \delta \sin \psi (1 - \cos \xi) (\cos(\delta - \psi) + \cos \sigma) \right)^{-1},$$

$$G = \cos \psi \left(\sin \delta \cos \sigma \cos \xi + \cos \delta \cos \chi - \frac{\sin^2 \delta}{\sin \psi} \right),$$

$$\Lambda_1 = \ln \left(\frac{1 + \cos \lambda}{1 + \cos \theta} \frac{\sin \nu}{\sin \mu} \right), \quad \Lambda_2 = \ln \left(\text{tg} \frac{\nu}{2} \text{tg} \frac{\mu}{2} \right).$$



В приведенных формулах параметр \varkappa означает величину угла контрольной панели K_i при общей с влияющей панелью K_j вершине; μ и ν суть величины двух других углов панели K_i (рис. 5); ψ — угол между вектором \mathbf{e} и направляющим вектором \mathbf{s} стороны панели K_i , противоположащей общей вершине:

$$\psi = \operatorname{arctg}(\varepsilon s n_i, \mathbf{e} \cdot \mathbf{s});$$

для $\cos \sigma, \cos \chi, \cos \eta, \cos \theta, \cos \lambda$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= \sin \delta \sin \psi \cos \xi + \cos \delta \cos \psi, \\ \cos \chi &= \sin \delta \cos \psi \cos \xi - \cos \delta \sin \psi, \\ \cos \eta &= \cos \delta \sin \psi \cos \xi - \sin \delta \cos \psi, \\ \cos \theta &= \sin \delta \sin(\nu + \psi) \cos \xi + \cos \delta \cos(\nu + \psi), \\ \cos \lambda &= \sin \delta \sin(\mu - \psi) \cos \xi - \cos \delta \cos(\mu - \psi). \end{aligned}$$

При аналитическом интегрировании функции $\Theta^{\text{sing}}(M_i, K_j)$, задаваемой суммой двух арктангенсов, нужно следить за непрерывностью их ветвей, подходящим образом выбирая величину целочисленного параметра p . Соответствующие условия весьма громоздки и неудобны для практических расчетов; вместо их проверки можно воспользоваться сравнительно простым приемом, в основе которого — геометрический смысл функции $\Theta(M_i, K_j)$: напомним, ее модуль означает телесный угол, под которым из точки M_i видна панель K_j , значит ее величина не может превышать по модулю 2π . Поэтому после вычисления суммы двух интегралов

$$\int_{K_i} \Theta^{\text{sing}} dS_r + \int_{K_i} (\Theta - \Theta^{\text{sing}}) dS_r,$$

где первое слагаемое вычисляется по полученным аналитическим формулам, а второе численно (подынтегральное выражение — гладкая функция), необходимо выбрать такое значение p , чтобы обеспечить выполнение условия

$$-2\pi S_i \leq \int_{K_i} \Theta(M_i, K_j) dS_r \leq 2\pi S_i.$$

Последнее можно сделать единственным образом, когда контрольная и влияющая панели не имеют общих внутренних точек.

Записанные формулы для интегралов от сингулярных частей $\Theta^{\text{sing}}(M_i, K_j)$ и $\Psi^{\text{sing}}(M_i, K_j)$ остаются справедливыми для произвольного взаимного расположения панелей с общей вершиной, исключая несколько частных случаев, имеющих место при нулевых или близких к нулевым значениях величин $\sin \psi$, $\sin \delta$, $\sin \xi$ и некоторых других, приводящих к появлению неопределенностей вида $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ или $[\infty - \infty]$.

Отметим, что условие $\sin \delta = 0$ здесь эквивалентно условию $\delta = 0$ в силу приведенного выше правила выбора направления вектора \mathbf{e} , исключающего возможность появления значений $\delta = \pm\pi$; в то же время $\sin \psi$ и $\sin \xi$ обращаются в нуль как при нулевых значениях углов, так и в случаях, когда они равны $\pm\pi$.

Раскрывая упомянутые неопределенности и вводя для удобства обозначения

$$\varsigma_\psi = \operatorname{sign}(\sin \xi \sin \psi), \quad \varsigma_\delta = \operatorname{sign}(\sin \xi \sin \delta),$$

можно вычислить предельные значения соответствующих величин; возможные случаи необходимо проверить в том порядке, как они перечислены ниже.

1. При одновременном выполнении условий $\sin \xi = 0, |\cos \sigma| = 1$ и $\sin \psi \neq 0$ (в расчетах необходимо контролировать более слабые условия: $|\sin \xi| < \varepsilon, 1 - |\cos \sigma| < \varepsilon^2/2$ и $|\sin \psi| \geq \varepsilon$) следует принять

$$q^\Theta(\delta) = \frac{2\varsigma_\psi \cos \sigma \cos \xi}{\sin \varkappa \sin \psi} \left[\sin \mu \sin(\nu + \psi) \arg \left(\sin \frac{\nu + \psi}{2} \cos \sigma \right) - \sin \nu \sin(\mu - \psi) \arg \left(\cos \frac{\mu - \psi}{2} \cos \sigma \right) \right],$$

$$q^\Psi(\delta) = \frac{1 - \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \cos \sigma \cos \mu)(1 + \cos \sigma \cos \nu)}{\sin \varkappa} + \frac{\cos \sigma}{\sin \varkappa} \left(\sin \mu - \sin \nu + \frac{1}{2} \sin(\mu - \nu) \Lambda_2 \right);$$

здесь и далее $\arg x = \operatorname{arctg}(0, x)$ принимает одно из двух значений: 0 при $x > 0$, и π при $x < 0$.

2. Если $\sin \xi = 0$ и $\sin \psi \neq 0$ (на практике — при $|\sin \xi| < \varepsilon$ и $|\sin \psi| \geq \varepsilon$), то

$$q^{\Theta}(\delta) = \frac{2\zeta\delta}{\sin \varkappa \sin \psi} \left[\frac{\sin \delta \sin \mu \sin \nu \cos \xi}{\cos \chi} \arg \left(\sin \frac{\mu + \nu}{2} + \sin \left(\frac{\mu - \nu}{2} - \psi + \delta \cos \xi \right) \right) + \right. \\ \left. + \sin \mu \sin(\nu + \psi) \arg \left(\operatorname{ctg} \frac{\nu + \psi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cos \xi \right) - \sin \nu \sin(\mu - \psi) \arg \left(\operatorname{tg} \frac{\mu - \psi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cos \xi \right) \right],$$

величину $q^{\Psi}(\delta)$ следует вычислять по общей формуле.

3. При $\sin \psi = 0$ и $\sin \delta \neq 0$ (в расчетах — при $|\sin \psi| < \varepsilon$ и $|\sin \delta| \geq \varepsilon$) следует принять

$$q^{\Theta}(\delta) = \frac{2}{\sin \varkappa} \left[\frac{\sin \mu \sin \nu}{\sin \delta} \left(W \cos \delta \cos \xi - \frac{1}{2}(\Lambda_1 - \Lambda_2 \cos \sigma) \sin \xi \right) + \right. \\ \left. + \left(A_{\nu} + \zeta\delta \arg \left(\sin \frac{\nu + \psi}{2} \right) \right) \sin \mu \cos \nu + \left(A_{\mu} + \zeta\delta \arg \left(\cos \frac{\mu - \psi}{2} \right) \right) \cos \mu \sin \nu \right],$$

$$q^{\Psi}(\delta) = \frac{3 - \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{(1 + \cos \lambda)(1 + \cos \theta)}{\sin \varkappa} - \frac{\sin(\mu - \nu)}{\sin \varkappa} \Lambda_1 \right) - \\ - \frac{\sin \mu \sin \nu}{\sin \delta \sin \varkappa} \left((\Lambda_1 \cos \delta - \Lambda_2 \cos \psi) \cos \xi + 2W \sin \xi \right).$$

4. Если, наконец, $\sin \psi = 0$ и $\sin \delta = 0$ (при вычислениях — в случае $|\sin \psi| < \varepsilon$ и $|\sin \delta| < \varepsilon$), то

$$q^{\Theta}(\delta) = 2 \arg(\cos \psi), \\ q^{\Psi}(\delta) = \frac{1 - \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \cos \psi \cos \mu)(1 + \cos \psi \cos \nu)}{\sin \varkappa} + \frac{1}{\sin \varkappa} \left(\frac{1}{2} \sin(\mu - \nu) \Lambda_1 + (\sin \mu - \sin \nu) \cos \psi \right).$$

7. Заключение. В работе рассмотрены интегралы, которые возникают при численном решении методом коллокаций или методом Галеркина граничных интегральных уравнений, ядром в которых выступает фундаментальное решение уравнение Лапласа (логарифмический или ньютоновский потенциал) либо его градиент; при этом решение представляется кусочно-постоянным по панелям — участкам дискретизации границ. Интегрирование производится по отрезку в двумерных задачах и по плоскому треугольнику в трехмерных. Для однократных интегралов от фундаментального решения уравнения Лапласа и его градиента представлены удобные для практических расчетов формулы; то же относится к повторным интегралам от логарифмического потенциала и его градиента в плоском случае.

Для повторных интегралов от ньютоновского потенциала и его градиента в трехмерных задачах разработаны полуаналитические алгоритмы, основанные на аддитивном выделении особенности подынтегрального выражения и ее точном интегрировании; интегрирование гладких функций производится численно. Это позволяет обеспечивать высокую точность вычисления повторных интегралов и необходимо для реализации метода Галеркина при решении граничных интегральных уравнений.

Список литературы

1. Бенерджи П.К., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
3. Кацикаделис Дж.Т. Граничные элементы: теория и приложения. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007.
4. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. 1988. **27**. 131–228.
5. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.-Л.: ГИТТЛ, 1946.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: Янус, 1995.
7. Коши Г.А.Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном изчислении. СПб.: Изд-во при Императорской Академии Наукъ, 1831.
8. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.



9. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков: Изд-во. Харьк. нац. ун-та, 2001.
10. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations. SANDIA Report SAND96-0583 UC-700. Albuquerque: Sandia Labs, 1996. doi 10.2172/242701.
11. Кузьмина К.С., Марчевский И.К., Морева В.С. Определение интенсивности вихревого слоя при моделировании вихревыми методами обтекания профиля потоком несжимаемой среды // Матем. моделирование. 2017. 29, № 10. 20–34. <http://mi.mathnet.ru/rus/mm/v29/i10/p20>. Cited May 23, 2022.
12. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Процедура определения интенсивности вихревого слоя при моделировании обтекания тела пространственным потоком несжимаемой среды // Матем. моделирование. 2019. 31, № 11. 21–35. <http://mi.mathnet.ru/rus/mm/v31/i11/p21>. Cited May 23, 2022.
13. Антонов В.А., Нукифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб.: СПбГУ, 2008.
14. van Oosterom A., Strackee J. The solid angle of a plane triangle // IEEE Trans. on Biomedical Eng. 1983. 30, N 2. 125–126. doi 10.1109/TBME.1983.325207.
15. Dodig H., Cvetković M., Poljak D. On the computation of singular integrals over triangular surfaces in R^3 // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. 122. 95–105. doi 10.2495/BE410091.
16. Cowper G.R. Gaussian quadrature formulas for triangles // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1973. 7, N 3. 405–408. doi 10.1002/nme.1620070316.
17. Reid M.T.H., White J.K., Johnson S.G. Generalized Taylor — duffy method for efficient evaluation of Galerkin integrals in boundary element method computations // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2015. 63, N 1. 195–209. doi 10.1109/TAP.2014.2367492.

Поступила в редакцию
 21 марта 2022 г.

Принята к публикации
 12 мая 2022 г.

Информация об авторах

Илья Константинович Марчевский — д.ф.-м.н., доцент, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, ул. 2-я Бауманская, д. 5, к. 1, 105005, Москва, Российская Федерация.

София Романовна Серафимова — студент, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская, д. 5, к. 1, 105005, Москва, Российская Федерация.

References

1. P. K. Banerjee and R. Butterfield, *Boundary Element Methods in Engineering Science* (McGraw-Hill, London, 1981; Mir, Moscow, 1984).
2. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering* (Springer, Berlin, 1984; Mir, Moscow, 1987).
3. J. T. Katsikadelis, *Boundary elements: Theory and Applications* (Elsevier, New York, 2002; ASV, Moscow, 2007).
4. V. G. Maz'ya, "Boundary Integral Equations," in *Analysis-4* (VINITI, Moscow, 1988), Itogi Nauki Tekh., Ser.: Sovr. Probl. Mat., Fundam. Napr., Vol. 27, pp. 131–228.
5. L. N. Sretenskii, *The Theory of Newtonian Potential* (Gostekhizdat, Moscow, 1946) [in Russian].
6. I. K. Lifanov, *The Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment in Mathematical Physics, Aerodynamics, Elasticity Theory and Wave Diffraction* (Janus, Moscow, 1995) [in Russian].
7. A. L. Cauchy, *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, Tome 2: *Calcul Intégral* (De L'École Polytechnique, Paris, 1844).
8. J. Hadamard, *Le Problème de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques* (Hermann, Paris, 1932).
9. Yu. V. Gandel', *Introduction to Methods for Calculating Singular and Hypersingular Integrals* (Kharkov National University, Kharkov, 2001) [in Russian].

10. S. N. Kempka, M. W. Glass, J. S. Peery, et al., *Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations*, SANDIA Report SAND96-0583 UC-700 (Sandia Labs, Albuquerque, 1996). doi [10.2172/242701](https://doi.org/10.2172/242701).
11. K. S. Kuzmina, I. K. Marchevskii, and V. S. Moreva, “Vortex Sheet Intensity Computation in Incompressible Flow Simulation Around an Airfoil by Using Vortex Methods,” *Mat. Model.* **29** (10), 20–34 (2017) [*Math. Models Comput. Simul.* **10** (3), 276–287 (2018).] doi [10.1134/S2070048218030092](https://doi.org/10.1134/S2070048218030092).
12. I. K. Marchevskii and G. A. Shcheglov, “The Algorithm of the Vortex Sheet Intensity Determining in 3D Incompressible Flow Simulation around a Body,” *Mat. Model.* **31** (11), 21–35 (2019) [*Math. Models Comput. Simul.* **12** (4), 464–473 (2020).] doi [10.1134/S2070048220040122](https://doi.org/10.1134/S2070048220040122).
13. V. A. Antonov, I. I. Nikiforov, and K. V. Kholshevnikov, *Elements of Gravitational Potential Theory and Some Cases of Its Explicit Expression* (St. Petersburg State University, St. Petersburg, 2008) [in Russian].
14. A. van Oosterom and J. Strackee, “The Solid Angle of a Plane Triangle,” *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **30** (2), 125–126 (1983). doi [10.1109/TBME.1983.325207](https://doi.org/10.1109/TBME.1983.325207).
15. H. Dodig, M. Cvetković, and D. Poljak, “On the Computation of Singular Integrals over Triangular Surfaces in R^3 ,” *WIT Trans. Eng. Sci.* **122**, 95–105 (2019). doi [10.2495/BE410091](https://doi.org/10.2495/BE410091).
16. G. R. Cowper, “Gaussian Quadrature Formulas for Triangles,” *Int. J. Numer. Methods Eng.* **7** (3), 405–408 (1973). doi [10.1002/nme.1620070316](https://doi.org/10.1002/nme.1620070316).
17. M. T. H. Reid, J. K. White, and S. G. Johnson, “Generalized Taylor — Duffy Method for Efficient Evaluation of Galerkin Integrals in Boundary Element Method Computations,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **63** (1), 195–209 (2015). doi [10.1109/TAP.2014.2367492](https://doi.org/10.1109/TAP.2014.2367492).

Received
March 21, 2022

Accepted for publication
May 12, 2022

Information about the authors

Iliia K. Marchevsky — Dr. Sci., Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Vtoraya Baumanskaya ulitsa, 5, building 1, 105005, Moscow, Russia.

Sophia R. Serafimova — student, Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ulitsa, 5, building 1, 105005, Moscow, Russia.