

Схема КАБАРЕ на подвижных сетках для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости

Н. А. Афанасьев

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Лаборатория индустриальной математики,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-4414-6645, e-mail: vmnaf@cs.msu.ru*

П. А. Майоров

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Лаборатория индустриальной математики,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-1723-6779, e-mail: maiorov.peter@gmail.com*

Аннотация: Схема КАБАРЕ, являющаяся представителем семейства балансно-характеристических методов, широко используется при решении многих задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа в эйлеровых переменных. Возрастающая актуальность задач взаимодействия деформируемых тел с потоками жидкости и газа требует адаптации этого метода на лагранжевы и смешанные эйлерово-лагранжевы переменные. Ранее схема КАБАРЕ была построена для одномерных уравнений газовой динамики в массовых лагранжевых переменных, а также для трехмерных уравнений динамической упругости. В первом случае построенную схему не удалось обобщить на многомерные задачи, а во втором — использовался необратимый по времени алгоритм передвижения сетки. В данной работе представлено обобщение метода КАБАРЕ на двумерные уравнения газовой динамики и динамической упругости в смешанных эйлерово-лагранжевых и лагранжевых переменных. Построенный метод является явным, легко масштабируемым и обладает свойством временной обратимости. Метод тестируется на различных одномерных и двумерных задачах для обеих систем уравнений (соударение упругих тел, поперечные колебания упругой балки, движение свободной границы идеального газа).

Ключевые слова: балансно-характеристические методы, схема КАБАРЕ, смешанные эйлерово-лагранжевы переменные, уравнения гиперболического типа, свободная граница.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20–31–90037, часть работ по разработке схемы КАБАРЕ на подвижных сетках) и РНФ (грант 18–11–00163, часть работ по моделированию движения свободной границы идеального газа).

Для цитирования: Афанасьев Н.А., Майоров П.А. Схема КАБАРЕ на подвижных сетках для двумерных уравнений газовой динамики и динамической упругости // Вычислительные методы и программирование. 2021. 22, № 4. 306–321. doi 10.26089/NumMet.v22r420.



CABARET scheme on moving grids for two-dimensional equations of gas dynamics and dynamic elasticity

Nikita A. Afanasiev

Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Industrial Mathematics, Moscow, Russia
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4414-6645>, e-mail: vmnaf@cs.msu.ru

Petr A. Maiorov

Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Industrial Mathematics, Moscow, Russia
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1723-6779>, e-mail: maiorov.peter@gmail.com

Abstract: The conservative-characteristic CABARET scheme is widely used in solving many problems for systems of differential equations of hyperbolic type in Euler variables. The increasing urgency of the problems of interaction of deformable bodies with liquid and gas flows requires the adaptation of this method to Lagrangian and arbitrary Lagrangian-Eulerian variables. Earlier, the CABARET scheme was constructed for one-dimensional equations of gas dynamics in mass Lagrangian variables, as well as for three-dimensional equations of dynamic elasticity. In the first case, the constructed scheme could not be generalized to multidimensional problems, and in the second, a time-irreversible grid movement algorithm was used. This paper presents a generalization of the CABARET method to two-dimensional equations of gas dynamics and dynamic elasticity in arbitrary Lagrangian-Eulerian and Lagrangian variables. The constructed method is explicit, easily scalable, and has the property of temporal reversibility. The method is tested on various one-dimensional and two-dimensional problems for both systems of equations (collision of elastic bodies, transverse vibrations of an elastic beam, motion of the free boundary of an ideal gas).

Keywords: conservative-characteristic methods, CABARET scheme, arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) variables, hyperbolic type equations, free boundary.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 20–31–90037, part of the work on the development of the CABARET scheme on movable grids) and the Russian Science Foundation (grant 18–11–00163, part of the work on modeling the motion of the free boundary of an ideal gas).

For citation: N. A. Afanasiev, P. A. Maiorov, “CABARET scheme on moving grids for two-dimensional equations of gas dynamics and dynamic elasticity,” *Numerical Methods and Programming*, 22 (4), 306–321 (2021). doi 10.26089/NumMet.v22r420.

1. Введение. С увеличением вычислительных мощностей и все более широким использованием суперкомпьютерных вычислений за последние два десятилетия стало активно развиваться численное моделирование процессов взаимодействия потоков жидкости и газа с деформируемыми объектами (далее задачи FSI — fluid-structure interaction). Основной областью применения FSI до сих пор являлись задачи гемодинамики [1], моделирование раскрытия парашютов [2] и задачи об обтекании воздушным потоком лопастей ветрогенераторов [3]. В последнее время актуальными становятся задачи FSI для атомной энергетики [4, 5].

Основные методы решения задач FSI делятся на два класса: монолитные методы [6] и слабосвязанные методы [7]. В монолитных методах для решения систем уравнений, описывающих течение жидкости и деформацию тел, используются схемы одного типа, что позволяет естественным образом моделировать границу раздела между жидкостью и телами. Так, например, в [8] для обоих процессов используется единый метод конечных элементов (МКЭ), причем для описания деформаций используются уравнения в лагранжевых переменных, а для описания движения жидкости — в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных. Второй подход предполагает последовательное использование схем разных типов для описания течения жидкости и деформации тел, включающее этап “сшивания” решения на подвижной границе. Такой способ моделирования FSI является более простым с точки зрения реализации и отладки, но может приводить к большим ошибкам из-за несогласованности используемых схем на границе раздела.

Одним из перспективных подходов к построению новых монолитных схем для решения задач FSI является использование балансно-характеристических методов [9], комбинирующих консервативные методы конечного объема и характеристические методы. Балансно-характеристические методы позволяют эффективно решать многие задачи для дифференциальных уравнений гиперболического типа. В силу их универсальности и высокой точности балансно-характеристические схемы можно назвать CFD-алгоритмами нового поколения (CFD — Computational Fluid Dynamics) [10].

Прежде чем применять балансно-характеристические схемы к задачам FSI, их следует адаптировать на уравнения газовой динамики в СЭЛ переменных и уравнения динамической упругости в лагранжевых переменных. Явная схема КАБАРЕ [11], являющаяся одним из представителей семейства балансно-характеристических методов, широко используется при решении многих задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа в эйлеровых переменных. Ее применение к уравнениям в СЭЛ и лагранжевых переменных до сих пор было сильно ограничено. Ранее удалось построить схему КАБАРЕ для одномерных уравнений газовой динамики в массовых лагранжевых переменных [9], а также для трехмерных уравнений динамической упругости [12]. В первом случае построенную схему не удалось обобщить на многомерные задачи, а во втором — использовался необратимый по времени алгоритм передвижения сетки.

В данной работе представлено обобщение схемы КАБАРЕ на случай уравнений газовой динамики и динамической упругости в СЭЛ и лагранжевых переменных. Отличительной особенностью предлагаемого алгоритма является то, что он целиком построен на основе идеи сохранения свойства временной обратимости, которое выполняется для систем уравнений гиперболического типа. Такой подход позволяет получить бездиссипативную (или почти бездиссипативную) схему, порядок аппроксимации которой будет близок ко второму. Приведенный метод тестируется на ряде одномерных и двумерных задач: соударении двух упругих тел, поперечном колебании упругой балки, передвижении свободной границы идеального газа.

2. Уравнения газовой динамики. Рассмотрим двумерные уравнения динамики идеального газа в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных:

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J}{dt} + \frac{\partial \rho(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho(v - \dot{y})}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J u}{dt} + \frac{\partial \rho u(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho u(v - \dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho F_x, \quad (2)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J v}{dt} + \frac{\partial \rho v(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho v(v - \dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \rho F_y, \quad (3)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\rho J E}{dt} + \frac{\partial \rho E(u - \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \rho E(v - \dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial P u}{\partial x} + \frac{\partial P v}{\partial y} = F_x \rho u + F_y \rho v, \quad (4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}, \quad (5)$$

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2} + \varepsilon, \quad P = \rho \varepsilon (\gamma - 1), \quad (6)$$

где $x = x(x_0, y_0, t)$, $y = y(x_0, y_0, t)$ — подвижная система координат, $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)}$ — якобиан перехода, ρ — плотность газа, (u, v) — компоненты скорости газа в декартовой системе координат, (\dot{x}, \dot{y}) — компоненты скорости подвижных координат, P — давление газа, E — удельная полная энергия газа, ε — удельная внутренняя энергия газа, γ — показатель адиабаты идеального газа, F_x, F_y — некоторые правые части. При $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ уравнения (1)–(5) переходят в уравнения в эйлеровых переменных, а при $\dot{x} = u, \dot{y} = v$ — в уравнения в лагранжевых переменных.

Пусть уравнения (1)–(6) некоторым образом аппроксимируются на подвижной структурированной четырехугольной кривой сетке. Предположим, что существует некоторое гладкое преобразование координат $\alpha = \alpha(x, y), \beta = \beta(x, y)$, переводящее эту сетку в стационарную и ортогональную. Координаты (α, β) будем называть опорными. Тогда в опорной системе координат уравнения (1)–(4) будут иметь следующий вид:

$$\frac{dM}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\rho(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \beta} - \rho(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\rho(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \rho(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) = 0, \quad (7)$$



$$\frac{dMu}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\rho u(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \beta} - \rho u(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \beta} + P \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\rho u(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \rho u(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} - P \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = MF_x, \quad (8)$$

$$\frac{dMv}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\rho v(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \beta} - \rho v(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \beta} - P \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\rho v(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \rho v(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + P \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) = MF_y, \quad (9)$$

$$\frac{dME}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\rho E(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \beta} - \rho E(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \beta} + Pu \frac{\partial y}{\partial \beta} - Pv \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\rho E(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \rho E(v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} - Pu \frac{\partial y}{\partial \alpha} + Pv \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) = MF_x u + MF_y v, \quad (10)$$

где M — масса газа.

Помимо дивергентной формы уравнений (7)–(10) для построения балансно-характеристической схемы нам понадобится характеристическая форма уравнений газовой динамики. Уравнения (7)–(10) можно представить в так называемом простом виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + A_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} + A_\beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} = \mathbf{f},$$

где $\mathbf{u} = (\rho, u, v, P)^T$. Матрицы A_α и A_β обладают следующими собственными значениями:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\alpha = \Lambda_2^\alpha &= \frac{1}{J} \left((u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \beta} - (v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \beta} \right), & \Lambda_1^\beta = \Lambda_2^\beta &= \frac{1}{J} \left(-(u - \dot{x}) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + (v - \dot{y}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right), \\ \Lambda_3^\alpha &= \Lambda_1^\alpha + \frac{1}{J} \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2}, & \Lambda_3^\beta &= \Lambda_1^\beta + \frac{1}{J} \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2}, \\ \Lambda_4^\alpha &= \Lambda_1^\alpha - \frac{1}{J} \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2}, & \Lambda_4^\beta &= \Lambda_1^\beta - \frac{1}{J} \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдя собственные векторы матриц A_α и A_β , можно найти характеристический вид уравнений газовой динамики в направлениях α и β :

$$\begin{aligned} \frac{dI_k^\bullet}{dt} + \Lambda_k^\bullet \frac{\partial I_k^\bullet}{\partial \bullet} &= G_k^\bullet, \quad k = \overline{1, 4}, \quad \bullet = \{\alpha, \beta\}, \\ I_1^\bullet &= \rho \left(\frac{P\gamma}{\rho} \right)_{\text{loc}} - P, \quad I_2^\bullet = u_s, \\ I_3^\bullet &= u_n + P \left(\frac{1}{\sqrt{\rho p \gamma}} \right)_{\text{loc}}, \quad I_4^\bullet = u_n - P \left(\frac{1}{\sqrt{\rho p \gamma}} \right)_{\text{loc}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где для направления α (u_n, u_s) — компоненты вектора скорости в локальной системе координат (\mathbf{n}, \mathbf{s}), $\mathbf{n} = (\partial y / \partial \beta, -\partial x / \partial \beta) / \sqrt{(\partial x / \partial \beta)^2 + (\partial y / \partial \beta)^2}$, $\mathbf{s} = (\partial x / \partial \beta, \partial y / \partial \beta) / \sqrt{(\partial x / \partial \beta)^2 + (\partial y / \partial \beta)^2}$, а для направления β — $\mathbf{n} = (-\partial y / \partial \alpha, \partial x / \partial \alpha) / \sqrt{(\partial x / \partial \alpha)^2 + (\partial y / \partial \alpha)^2}$, $\mathbf{s} = (\partial x / \partial \alpha, \partial y / \partial \alpha) / \sqrt{(\partial x / \partial \alpha)^2 + (\partial y / \partial \alpha)^2}$. Точный вид правых частей G_k^\bullet при этом нам не важен.

Выражения (12) задают так называемые локальные линейные инварианты Римана I_k^\bullet , которые потребуются в дальнейшем для построения характеристической фазы алгоритма. Отметим, что вместо линейных инвариантов можно использовать, например, изохорные или изоэнтропические локальные инварианты [9], выражения для которых получаются путем более аккуратного внесения различных множителей под производные при выводе характеристической формы уравнений. Использование именно линейных инвариантов продиктовано тем, что в таком случае относительно легко “стыковать” уравнения газовой динамики и динамической упругости при расчете задач FSI.

3. Уравнения динамической упругости. Рассмотрим двумерные уравнения динамики упругого тела в лагранжевых переменных в предположении линейной теории упругости:

$$\frac{dM}{dt} = 0, \tag{13}$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho F_x, \tag{14}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho F_y, \tag{15}$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \tag{16}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial \delta x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \tag{17}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \tag{19}$$

где $x = x(x_0, y_0, t)$, $y = y(x_0, y_0, t)$ — лагранжевы координаты, ρ — плотность тела, M — масса тела, (u, v) — компоненты скорости тела в декартовой системе координат, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ — компоненты тензора напряжений, λ и μ — первый и второй параметры Ламе соответственно, $\delta x, \delta y$ — приращения координат относительно недеформированного состояния тела.

Для получения полной системы дифференциальных уравнений первого порядка гиперболического типа продифференцируем закон Гука (16)–(18) по времени:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dt} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{20}$$

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dt} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{21}$$

$$\frac{d\sigma_{xy}}{dt} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{22}$$

Для построения балансно-характеристического метода будем использовать дифференциальные уравнения (13)–(15), (20)–(22). Как и в случае уравнений газовой динамики, найдем дивергентный вид этих уравнений в опорной системе координат (α, β) :

$$\frac{dM}{dt} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{dMu}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \sigma_{xy} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\sigma_{xx} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \sigma_{xy} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + MF_x, \tag{24}$$

$$\frac{dMv}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sigma_{xy} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \sigma_{yy} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\sigma_{xy} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \sigma_{yy} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) + MF_y, \tag{25}$$

$$\frac{dM\sigma_{xx}}{dt} = \rho(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(u \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(u \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right) + \rho\lambda \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(v \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(v \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right), \tag{26}$$

$$\frac{dM\sigma_{yy}}{dt} = \rho\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(u \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(u \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right) + \rho(\lambda + 2\mu) \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(v \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(v \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right), \tag{27}$$

$$\frac{dM\sigma_{xy}}{dt} = \rho\mu \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(v \frac{\partial y}{\partial \beta} - u \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-v \frac{\partial y}{\partial \alpha} + u \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right). \tag{28}$$

Отметим, что динамические законы Гука (26)–(28) были домножены на плотность, чтобы под производную по времени можно было занести массу.



Для нахождения характеристической формы уравнений представим систему (23)–(28) в простом виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + B_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} + B_\beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} = \mathbf{f}, \quad (29)$$

где $\mathbf{u} = (\rho, u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$. Матрицы B_α и B_β обладают следующими собственными значениями:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\alpha &= \Lambda_2^\alpha = 0, \\ \Lambda_3^\alpha &= \frac{1}{J} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2}, & \Lambda_3^\beta &= \frac{1}{J} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}, \\ \Lambda_4^\alpha &= -\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2}, & \Lambda_4^\beta &= -\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}, \\ \Lambda_5^\alpha &= \frac{1}{J} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2}, & \Lambda_5^\beta &= \frac{1}{J} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}, \\ \Lambda_6^\alpha &= -\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2}, & \Lambda_6^\beta &= -\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь собственные значения с индексами 3 и 4 есть скорости распространения продольных волн упругости, а с индексами 5 и 6 — поперечных волн упругости. Характеристический вид уравнений динамической упругости и локальные линейные инварианты Римана в направлениях α и β тогда имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dI_k^\bullet}{dt} + \Lambda_k^\bullet \frac{\partial I_k^\bullet}{\partial \bullet} &= G_k^\bullet, & k &= \overline{1, 6}, \quad \bullet = \{\alpha, \beta\}, \\ I_1^\bullet &= \rho \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)_{\text{loc}} + \frac{\sigma_{nn} + \sigma_{ss}}{2}, & I_2^\bullet &= \rho \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)_{\text{loc}} + \sigma_{ss}, \\ I_3^\bullet &= u_n - \sigma_{nn} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)}}\right)_{\text{loc}}, & I_4^\bullet &= u_n + \sigma_{nn} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)}}\right)_{\text{loc}}, \\ I_5^\bullet &= u_s - \sigma_{ns} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho\mu}}\right)_{\text{loc}}, & I_6^\bullet &= u_s + \sigma_{ns} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho\mu}}\right)_{\text{loc}}, \end{aligned} \quad (31)$$

где u_n и u_s — координаты вектора скорости в локальных координатах, используемых в (12), а σ_{nn} , σ_{ss} и σ_{ns} — компоненты тензора напряжений в тех же системах координат.

4. Схема КАБАРЕ на подвижных сетках. Пусть имеется некоторая структурированная четырехугольная косая сетка $\omega_h = \{(x_{ij}, y_{ij}) \mid i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}\}$. Пусть также имеется неравномерная сетка по времени $\omega_\tau = \{t_n \mid t_{n+1} - t_n = \tau_n, n = \overline{0, K-1}\}$. Зададим в центрах ячеек сетки $\omega_h \times \omega_\tau$ так называемые консервативные переменные: $\varphi_{i+1/2, j+1/2}^n$ — на целых слоях по времени, $\varphi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}$ — на полуцелых слоях по времени. В центрах ребер сетки зададим так называемые потоковые переменные на целых слоях по времени: $\psi_{i+1/2, j}^n$ и $\psi_{i, j+1/2}^n$. В качестве консервативных и потоковых переменных зададим полный набор неизвестных рассматриваемой системы, т.е. для уравнений газовой динамики (1)–(6) $\{\varphi, \psi\} = \{\rho, u, v, E, P, \varepsilon\}$, а для уравнений динамической упругости (13)–(18) $\{\varphi, \psi\} = \{\rho, u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$.

Опишем общий алгоритм схемы КАБАРЕ на подвижных сетках при переходе со слоя по времени n на слой $n + 1$:

1. Вычисление скоростей узлов сетки $\dot{x}_{ij}^n, \dot{y}_{ij}^n$ на слое n и передвижение узлов сетки на полуцелый слой $n + 1/2$ с помощью уравнений движения (5):

$$x_{ij}^{n+1/2} = x_{ij}^n + \frac{\tau_n}{2} \dot{x}_{ij}^n, \quad y_{ij}^{n+1/2} = y_{ij}^n + \frac{\tau_n}{2} \dot{y}_{ij}^n.$$

По координатам сетки на полуцелом слое вычисляются новые площади ячеек $S_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}$.

2. Первая (консервативная) фаза КАБАРЕ: аппроксимация дивергентных форм уравнений на ячейках сетки на слое n и нахождение консервативных переменных $\varphi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}$ на полуцелом слое.

3. Вторая (характеристическая) фаза КАБАРЕ: вычисление локальных инвариантов Римана по направлениям α и β , их экстраполяция и нахождение потоковых переменных $\psi_{i+1/2,j}^{n+1}$ и $\psi_{i,j+1/2}^{n+1}$ на следующем целом слое по времени.
4. Вычисление скоростей узлов сетки \dot{x}_{ij}^{n+1} , \dot{y}_{ij}^{n+1} на слое $n+1$ и передвижение узлов сетки с помощью уравнений движения (5):

$$x_{ij}^{n+1} = x_{ij}^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} \dot{x}_{ij}^{n+1}, \quad y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} \dot{y}_{ij}^{n+1}.$$

По координатам сетки на следующем слое вычисляются новые площади ячеек $S_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$.

5. Третья (консервативная) фаза КАБАРЕ: аппроксимация дивергентных форм уравнений на ячейках сетки на слое $n+1$ и нахождение консервативных переменных $\varphi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ на следующем слое.
6. Вычисление следующего шага по времени τ_{n+1} по заданному числу Куранта CFL .

В этом разделе мы подробно опишем консервативные и характеристические фазы алгоритма, так как для уравнений газовой динамики и динамической упругости они строятся по одной схеме.

4.1. Первая консервативная фаза КАБАРЕ. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в опорных координатах следующего вида:

$$\frac{dM\mathbf{u}}{dt} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\mathbf{a} \frac{\partial y}{\partial\beta} - \mathbf{b} \frac{\partial x}{\partial\beta} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta} \left(-\mathbf{c} \frac{\partial y}{\partial\alpha} + \mathbf{d} \frac{\partial x}{\partial\alpha} \right) = M\mathbf{F}. \quad (32)$$

Уравнения газовой динамики (7)–(10) представляются в виде (32), где

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (1, u, v, E)^T, \quad \mathbf{F} = (0, F_x, F_y, F_x u + F_y v)^T, \\ \mathbf{a} &= (\rho(u - \dot{x}), \rho u(u - \dot{x}) + P, \rho v(u - \dot{x}), \rho E(u - \dot{x}) + Pu)^T, \\ \mathbf{b} &= (\rho(v - \dot{y}), \rho u(v - \dot{y}), \rho v(v - \dot{y}) + P, \rho E(v - \dot{y}) + Pv)^T, \\ \mathbf{c} &= \mathbf{a}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Законы сохранения массы и импульса (23)–(25) также представимы в виде (32). Для представления динамических законов Гука (26)–(28) вид (32) нужно модифицировать:

$$\frac{dM\mathbf{u}}{dt} + \rho \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\mathbf{a} \frac{\partial y}{\partial\beta} - \mathbf{b} \frac{\partial x}{\partial\beta} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial\beta} \left(-\mathbf{c} \frac{\partial y}{\partial\alpha} + \mathbf{d} \frac{\partial x}{\partial\alpha} \right) = 0 \quad (33)$$

Аппроксимируем уравнения (32) на четырехугольной ячейке на слое по времени n следующим образом (см. шаблон и обозначения на рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{(M\mathbf{u})_c^{n+1/2} - (M\mathbf{u})_c^n}{\tau_n/2} + \mathbf{a}_R^n (y_2^n - y_1^n) - \mathbf{b}_R^n (x_2^n - x_1^n) - \mathbf{a}_L^n (y_3^n - y_4^n) + \mathbf{b}_L^n (x_3^n - x_4^n) - \\ \mathbf{c}_T^n (y_2^n - y_3^n) + \mathbf{d}_T^n (x_2^n - x_3^n) + \mathbf{c}_B^n (y_1^n - y_4^n) - \mathbf{d}_B^n (x_1^n - x_4^n) = (M\mathbf{F})_c^n. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичным образом аппроксимируем уравнения (33):

$$\begin{aligned} \frac{(M\mathbf{u})_c^{n+1/2} - (M\mathbf{u})_c^n}{\tau_n/2} + \rho_c^n [\mathbf{a}_R^n (y_2^n - y_1^n) - \mathbf{b}_R^n (x_2^n - x_1^n) - \mathbf{a}_L^n (y_3^n - y_4^n) + \mathbf{b}_L^n (x_3^n - x_4^n) - \\ \mathbf{c}_T^n (y_2^n - y_3^n) + \mathbf{d}_T^n (x_2^n - x_3^n) + \mathbf{c}_B^n (y_1^n - y_4^n) - \mathbf{d}_B^n (x_1^n - x_4^n)] = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Отдельно отметим, что при использовании СЭЛ-переменных требуется знать скорости передвижения ребер \dot{x}, \dot{y} на слое n . Но так как на момент выполнения первой фазы нам известны скорости узлов сетки $\dot{x}_{ij}^n, \dot{y}_{ij}^n$, то по ним можно найти и скорости ребер. Так, например, для правого ребра в (32):

$$\dot{x}_R^n = \frac{\dot{x}_1^n + \dot{x}_2^n}{2}, \quad \dot{y}_R^n = \frac{\dot{y}_1^n + \dot{y}_2^n}{2}.$$

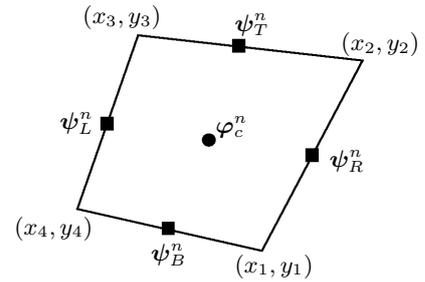


Рис. 1. Шаблон консервативных фаз

Fig. 1. Conservative phases template



В случае уравнений газовой динамики с помощью аппроксимации законов сохранения массы, импульса и энергии через (34) вычисляются консервативные значения на полупцелом слое $M_c^{n+1/2}$, $u_c^{n+1/2}$, $v_c^{n+1/2}$ и $E_c^{n+1/2}$, а затем дополнительно вычисляются $\rho_c^{n+1/2} = M_c^{n+1/2}/S_c^{n+1/2}$ и $\varepsilon_c^{n+1/2}$, $P_c^{n+1/2}$ с помощью уравнения состояния (6). В случае уравнений динамической упругости с помощью аппроксимации законов сохранения массы и импульса через (34) и динамических законов Гука через (35) вычисляются консервативные значения на полупцелом слое $M_c^{n+1/2}$, $u_c^{n+1/2}$, $v_c^{n+1/2}$ и компоненты тензоров напряжений, а плотность затем вычисляется по той же формуле, что и для газовой динамики.

4.2. Вторая характеристическая фаза КАБАРЕ. На момент начала выполнения характеристической фазы у нас есть значения всех консервативных переменных на слоях n и $n + 1/2$, значения всех потоковых переменных на слое n , а также положения узлов сетки на слоях n и $n + 1/2$. Используем их для построения обратимого по времени алгоритма получения потоковых переменных на следующем слое по времени.

Вычислим собственные значения рассматриваемой системы в ячейках на полупцелом слое по времени $(\Lambda_k^\alpha)_c^{n+1/2}$ и $(\Lambda_k^\beta)_c^{n+1/2}$ по формулам (11) для газовой динамики и (30) для динамической упругости, используя значения консервативных переменных на полупцелом слое, полученные в результате выполнения первой фазы (34). Так, например, собственное значение $(\Lambda_3^\alpha)_c^{n+1/2}$ в случае динамической упругости будет вычисляться по следующей формуле (см. обозначения на рис. 1):

$$(\Lambda_3^\alpha)_c^{n+1/2} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_c^{n+1/2}}} \frac{\sqrt{dx_\beta^2 + dy_\beta^2}}{dx_\alpha dy_\beta - dy_\alpha dx_\beta}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} dx_\alpha &= \frac{1}{2} (x_2^{n+1/2} - x_3^{n+1/2} + x_1^{n+1/2} - x_4^{n+1/2}), & dx_\beta &= \frac{1}{2} (x_2^{n+1/2} - x_1^{n+1/2} + x_3^{n+1/2} - x_4^{n+1/2}), \\ dy_\alpha &= \frac{1}{2} (y_2^{n+1/2} - y_3^{n+1/2} + y_1^{n+1/2} - y_4^{n+1/2}), & dy_\beta &= \frac{1}{2} (y_2^{n+1/2} - y_1^{n+1/2} + y_3^{n+1/2} - y_4^{n+1/2}), \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторое внутреннее ребро сетки, являющееся вертикальным в опорной системе координат. Обозначим это ребро $l_f = l_{i,j+1/2}$, а потоковые переменные на этом ребре ψ_f . Отметим, что нормаль и касательный вектор к ребру аппроксимируют локальную систему координат (\mathbf{n}, \mathbf{s}) , используемую в выражениях (12) и (31) для инвариантов Римана. Перейдем от исходных переменных системы к инвариантам Римана и экстраполируем со вторым порядком все инварианты как с одной, так и с другой стороны от ребра (см. шаблон на рис. 2):

$$\begin{aligned} (\tilde{I}_k^{\alpha,+})_f^{n+1} &= 2(I_k^{\alpha})_{cL}^{n+1/2} - (I_k^{\alpha})_{LL}^n, \\ (\tilde{I}_k^{\alpha,-})_f^{n+1} &= 2(I_k^{\alpha})_{cR}^{n+1/2} - (I_k^{\alpha})_{RR}^n. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь инварианты Римана вычисляются по формулам (12) или (31), где величины с индексами loc вычисляются с помощью консервативных значений в ячейках на полупцелом слое с той стороны, с которой ведется экстраполяция, а остальные величины берутся из соответствующей ячейки или ребра. Кроме того, компоненты векторов скорости и тензоров напряжений во всех инвариантах берутся в локальной системе координат, заданной нормалью \mathbf{n}' и касательной \mathbf{s}' к ребру $l_f^{n+1/2}$ на полупцелом слое. Так, например, инвариант $(I_3^\alpha)_{LL}^n$ для газовой динамики вычисляется следующим образом:

$$(I_3^\alpha)_{LL}^n = (u_{n'})_{LL}^n + P_{LL}^n \left(\frac{1}{\sqrt{\rho P \gamma}} \right)_{cL}^{n+1/2}.$$

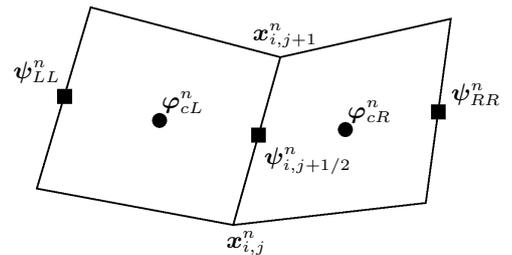


Рис. 2. Шаблон характеристической фазы

Fig. 2. Characteristic phase template

Для сохранения монотонности схемы процедура экстраполяции инвариантов (37) дополняется коррекцией на основе принципа максимума [13]:

$$\begin{aligned}
 (I_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1} &= \begin{cases} (\tilde{I}_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}, & \text{если } \min [(I_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}] \leq (\tilde{I}_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1} \leq \max [(I_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}], \\ \min [(I_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}], & \text{если } (\tilde{I}_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1} < \min [(I_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}], \\ \max [(I_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}], & \text{если } \max [(I_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}] < (\tilde{I}_k^{\alpha, \pm})_f^{n+1}, \end{cases} \\
 \begin{cases} \min [(I_k^{\alpha, +})_f^{n+1}] = \min [(I_k^{\alpha})_{LL}^n, (I_k^{\alpha})_{cL}^n, (I_k^{\alpha})_f^n] + \tau_n Q, \\ \max [(I_k^{\alpha, +})_f^{n+1}] = \max [(I_k^{\alpha})_{LL}^n, (I_k^{\alpha})_{cL}^n, (I_k^{\alpha})_f^n] + \tau_n Q, \\ Q = \frac{(I_k^{\alpha})_{cL}^{n+1/2} - (I_k^{\alpha})_{cL}^n}{\tau_n/2} + (\Lambda_k^{\alpha})_{cL}^{n+1/2} [(I_k^{\alpha})_f^n - (I_k^{\alpha})_{LL}^n], \end{cases} & (38) \\
 \begin{cases} \min [(I_k^{\alpha, -})_f^{n+1}] = \min [(I_k^{\alpha})_{RR}^n, (I_k^{\alpha})_{cR}^n, (I_k^{\alpha})_f^n] + \tau_n Q, \\ \max [(I_k^{\alpha, -})_f^{n+1}] = \max [(I_k^{\alpha})_{RR}^n, (I_k^{\alpha})_{cR}^n, (I_k^{\alpha})_f^n] + \tau_n Q, \\ Q = \frac{(I_k^{\alpha})_{cR}^{n+1/2} - (I_k^{\alpha})_{cR}^n}{\tau_n/2} + (\Lambda_k^{\alpha})_{cR}^{n+1/2} [(I_k^{\alpha})_{RR}^n - (I_k^{\alpha})_f^n]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В двумерном случае, в отличие от одномерного, процедуру монотонизации (38) уже, вообще говоря, отключать нельзя. Это связано с тем, что в характеристических формах уравнений (12) и (31) много слагаемых было перенесено в правую часть, и учет этих слагаемых в алгоритме происходит исключительно в Q в (38). Таким образом, при включенной монотонизации алгоритм уже перестает быть обратимым по времени. Тем не менее, мы все равно строим наш алгоритм на основе принципов обратимости, так как такой подход должен дать схему с порядком аппроксимации, близким ко второму.

Чтобы на ребро сетки пришел полный набор инвариантов, после процедуры монотонизации (38) для каждого из вариантов определяется, с левой или правой стороны от ребра его взять:

$$(I_k^{\alpha})_f^{n+1} = \begin{cases} (I_k^{\alpha, +})_f^{n+1}, & \text{если } (\Lambda_k^{\alpha})_{cL}^{n+1/2} > 0 \text{ и } (\Lambda_k^{\alpha})_{cR}^{n+1/2} > 0, \\ (I_k^{\alpha, -})_f^{n+1}, & \text{если } (\Lambda_k^{\alpha})_{cL}^{n+1/2} < 0 \text{ и } (\Lambda_k^{\alpha})_{cR}^{n+1/2} < 0, \\ 0.5 [(I_k^{\alpha})_{cL}^{n+1/2} + (I_k^{\alpha})_{cR}^{n+1/2}] & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (39)$$

В случае лагранжевых переменных процедуру выбора направления переноса (39) фактически не нужно проводить, так как все собственные значения имеют постоянный знак. Отметим, что когда собственные значения по обе стороны от ребра имеют разные знаки, то возникает так называемая звуковая точка. В алгоритме (39) представлен наиболее простой обратимый способ обработки звуковых точек, более сложные алгоритмы описаны в [14].

После нахождения полного набора инвариантов $(I_k^{\alpha})_f^{n+1}$ совершается переход к исходным неизвестным системы с помощью формул, обратным к (12) или (31). Результатом выполнения характеристической фазы алгоритма является полный набор потоковых переменных ψ_f^{n+1} . Приведенный алгоритм описывает способ получения потоковых переменных на внутренних ребрах сетки, являющихся вертикальными в опорной системе координат. В случае граничных ребер алгоритм отличается тем, что на ребро переносятся только инварианты, приходящие изнутри сетки. Эти инварианты дополняются некоторыми граничными условиями (например, для свободной границы $P = 0$ для газовой динамики и $\sigma_{n'n'} = \sigma_{n's'} = 0$ для динамической упругости), и из системы уравнений (12) или (31) с соответствующими граничными условиями находятся потоковые переменные на граничных ребрах. Алгоритм вычисления потоковых переменных на ребрах сетки, являющихся горизонтальными в опорных координатах, строится аналогичным образом.



Отметим также, что приведенный алгоритм вычисления потоковых переменных применим и для ребер между газом и упругим телом. В этом случае на ребро переносятся газодинамические инварианты (12) со стороны ячейки с газом и упругие инварианты (31) со стороны ячейки с упругим телом. Для нахождения потоковых значений исходных переменных системы ребра дополняются некоторыми граничными условиями [15].

4.3. Третья консервативная фаза КАБАРЕ. Третья фаза КАБАРЕ, которая осуществляет переход консервативных переменных с полуцелого слоя на следующий целый слой по времени, строится по аналогии с первой фазой. Уравнения вида (32) аппроксимируются следующим образом (см. шаблон на рис. 1):

$$\frac{(M\mathbf{u})_c^{n+1} - (M\mathbf{u})_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \hat{\mathbf{a}}_R(\hat{y}_2 - \hat{y}_1) - \hat{\mathbf{b}}_R(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) - \hat{\mathbf{a}}_L(\hat{y}_3 - \hat{y}_4) + \hat{\mathbf{b}}_L(\hat{x}_3 - \hat{x}_4) - \hat{\mathbf{c}}_T(\hat{y}_2 - \hat{y}_3) + \hat{\mathbf{d}}_T(\hat{x}_2 - \hat{x}_3) + \hat{\mathbf{c}}_B(\hat{y}_1 - \hat{y}_4) - \hat{\mathbf{d}}_B(\hat{x}_1 - \hat{x}_4) = (M\mathbf{F})_c^{n+1}, \quad (40)$$

где для сокращения записи обозначено $\hat{\varphi} = \varphi^{n+1}$. Уравнения (33) аппроксимируются по аналогии:

$$\frac{(M\mathbf{u})_c^{n+1} - (M\mathbf{u})_c^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \hat{\rho}_c \left[\hat{\mathbf{a}}_R(\hat{y}_2 - \hat{y}_1) - \hat{\mathbf{b}}_R(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) - \hat{\mathbf{a}}_L(\hat{y}_3 - \hat{y}_4) + \hat{\mathbf{b}}_L(\hat{x}_3 - \hat{x}_4) - \hat{\mathbf{c}}_T(\hat{y}_2 - \hat{y}_3) + \hat{\mathbf{d}}_T(\hat{x}_2 - \hat{x}_3) + \hat{\mathbf{c}}_B(\hat{y}_1 - \hat{y}_4) - \hat{\mathbf{d}}_B(\hat{x}_1 - \hat{x}_4) \right] = 0. \quad (41)$$

Отметим, что для аппроксимации потоков в уравнениях (40), (41) используются потоковые переменные на новом слое по времени, найденные во второй фазе алгоритма, а скорости ребер, аналогично первой фазе, вычисляются по скоростям узлов. После вычислений по приведенным формулам дополнительно находятся $\rho_c^{n+1} = M_c^{n+1}/S_c^{n+1}$, а также консервативные значения удельной внутренней энергии и давления по уравнению состояния (6) для газовой динамики.

Таким образом, первая и третья фазы алгоритма симметричны относительно полуцелого слоя по времени, а значит обратимы по времени. Учитывая, что операция экстраполяции (37) в характеристической фазе алгоритма также обратима по времени (при отключении процедур монотонизации (38)), для получения бездиссипативного метода осталось дополнить его обратимой по времени процедурой переноса узлов сетки.

4.4. Определение следующего шага по времени. После выполнения третьей фазы схемы КАБАРЕ (40) мы имеем координаты узлов сетки и консервативные переменные на $n + 1$ слое. Вычислим с помощью них величину следующего шага по времени по следующей формуле:

$$\tau_{n+1} = CFL / \max_c \left[\max_k \left[\left| (\Lambda_k^\alpha)_c^{n+1} \right|, \left| (\Lambda_k^\beta)_c^{n+1} \right| \right] \right],$$

где CFL — число Куранта, внешний максимум берется по всем ячейкам сетки, внутренний максимум берется по всем собственным значениям рассматриваемой системы уравнений. При этом собственные значения в ячейках вычисляются по формулам, аналогичным (36).

5. Обратимый алгоритм передвижения сетки. Схемы для систем уравнений (1)–(6) и (13)–(18) требуют уже, вообще говоря, разных алгоритмов передвижения сетки. Результаты расчетов показывают, что метод передвижения узлов, устойчивый для одного типа уравнений, может оказаться неустойчивым для другого типа уравнений. В этом разделе мы приводим два разных алгоритма: один для уравнений упругости в лагранжевых переменных, другой для передвижения свободной границы для уравнений газовой динамики в СЭЛ-переменных. Как и базовая часть схемы КАБАРЕ, изложенная в предыдущем разделе, оба алгоритма построены на основе принципа обратимости.

5.1. Передвижение сетки для уравнений динамической упругости. Узлы лагранжевой сетки для уравнений динамической упругости передвигаются по закону (19). Таким образом, перед выполнением первой (34) и третьей (40) фазы алгоритма требуется найти скорости узлов $\dot{x}_{ij}^n = u_{ij}^n$, $\dot{y}_{ij}^n = v_{ij}^n$ и $\dot{x}_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n+1}$, $\dot{y}_{ij}^{n+1} = v_{ij}^{n+1}$ соответственно.

Для обоих передвижений используем один алгоритм нахождения скоростей на целом слое по времени, а именно интерполяцию скорости в узел по известным потоковым значениям скорости (см. шаблон на рис. 3):

$$\mathbf{u}_{ij}^n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \mathbf{u}_{f_k,ij}^n, \quad \mathbf{u} = (u, v). \quad (42)$$

Отметим, что так как перед выполнением третьей фазы (40) координаты узлов сетки на слое $n + 1$ еще неизвестны, то мы можем пользоваться только интерполяцией с постоянными весами (42). В силу того, что потоковые значения скоростей $\mathbf{u}_{f_k,ij}^n$ вычисляются по обратимой (при отключенной монотонизации) процедуре экстраполяции (37), а интерполяция перед первой и третьей фазой проводится симметрично (42), то такой алгоритм не нарушает обратимость схемы.

Приведенный алгоритм нахождения скоростей узлов позволяет получить устойчивую схему в лагранжевых переменных для уравнений динамической упругости. Для уравнений газовой динамики алгоритм (42) может приводить к неустойчивости типа “песочных часов”, когда объем каждой ячейки сетки сохраняется, а узлы сетки передвигаются так, что форма ячеек меняется. Таким образом, требуется разработать другой алгоритм передвижения узлов для уравнений газовой динамики.

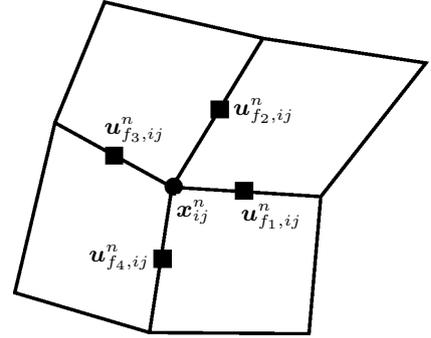


Рис. 3. Шаблон интерполяции скоростей из ребер в узлы сетки

Fig. 3. Template of velocity interpolation from edges to grid points

5.2. Передвижение сетки для уравнений газовой динамики. Рассмотрим следующую задачу для уравнений газовой динамики в СЭЛ-переменных. Пусть дана некоторая прямоугольная область с газом, по вертикали в которой действуют некоторые внешние силы (например, гравитация), на левой, правой и нижней границах задано граничное условие непротекания $u_n = 0$, а верхняя граница свободная (например, там задано условие $P = 0$). Зададим в этой области прямоугольную сетку, в которой узлы на верхней границе лагранжевы по координате y и эйлеровы по координате x , а остальные узлы — полностью эйлеровы. Зададим на верхней границе следующее уравнение перемещения y -координат:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} = v. \quad (43)$$

Уравнение (43) гарантирует равенство нулю конвективных потоков через верхнюю границу области.

Аппроксимируем уравнение (43) по схеме КАБАРЕ:

$$\frac{y_{i+1/2,j}^{n+1/2} - y_{i+1/2,j}^n}{\tau_n/2} + u_{i+1/2,j}^n \frac{y_{i+1,j}^n - y_{i,j}^n}{x_{i+1,j} - x_{i,j}} = v_{i+1/2,j}^n, \quad (44)$$

$$y_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 2y_{i-1/2,j}^{n+1/2} - y_{i-1,j}^n, & \text{если } u_{i-1/2,j}^n > 0 \text{ и } u_{i+1/2,j}^n > 0, \\ 2y_{i+1/2,j}^{n+1/2} - y_{i+1,j}^n, & \text{если } u_{i-1/2,j}^n < 0 \text{ и } u_{i+1/2,j}^n < 0, \\ 0.5 [y_{i-1/2,j}^{n+1/2} + y_{i+1/2,j}^{n+1/2}] & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (45)$$

$$\frac{y_{i+1/2,j}^{n+1} - y_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + u_{i+1/2,j}^{n+1} \frac{y_{i+1,j}^{n+1} - y_{i,j}^{n+1}}{x_{i+1,j} - x_{i,j}} = v_{i+1/2,j}^{n+1}, \quad (46)$$

где $y_{i+1/2,j}^n, y_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ — дополнительно введенные “консервативные” y -координаты середин ребер на верхней границе. Характеристическая фаза (45) по аналогии с (38) дополняется процедурой монотонизации.

Алгоритм (44)–(46) встраивается в общую схему следующим образом: перед первой фазой алгоритма (34) вычисляются y -координаты узлов на верхней границе y_{ij}^{n+1} по формулам (44), (45). Затем вычисляются скорости перемещения узлов на верхней границе

$$\dot{y}_{ij}^{n+1/2} = \frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau_n},$$



и с этими скоростями верхняя граница передвигается как перед первой фазой (34), так и перед третьей фазой (40). Все x -координаты сетки и узлы не на верхней границе при этом остаются неизменными. Дополнительно перед третьей фазой вычисляются консервативные значения y -координат ребер на следующем слое по времени (46). Отметим, что алгоритм (44)–(46) обратим по времени, разве что за исключением выбора направления экстраполяции в (45).

6. Тестовые расчеты. В данном разделе мы покажем, что предложенная схема дает качественно верные результаты как на некоторых двумерных задачах, так и на одномерных задачах, к которым применялась сведенная к одномерному случаю схема. Отметим, что одномерные тесты для уравнений газовой динамики мы не приводим, так как в этом случае указанная схема практически сводится к уже известной схеме КАБАРЕ в массовых переменных [9].

6.1. Одномерные тесты для уравнений динамической упругости. Рассмотрим задачу об ударе движущегося упругого тела о покоящееся упругое тело. Движущееся упругое тело, занимающее в начальный момент времени отрезок $x \in [0, 1]$ и имеющее параметры $\rho_L = 1.0, \sigma_L = 0.0, u_L = 1.0, \lambda_L, \mu_L$, сталкивается с упругим телом, занимающим в начальный момент времени отрезок $x \in [1, 6]$ и имеющее параметры $\rho_R = 1.0, \sigma_R = 0.0, u_R = 0.0, \lambda_R, \mu_R$. На левой границе ставится граничное условие $\sigma = 0$, на правой — свободное граничное условие (задан инвариант, приходящий извне).

Картина столкновения зависит от соотношения импедансов $z = \rho\sqrt{(\lambda + 2\mu)}/\rho$ сталкивающихся тел. При ударе менее жесткого тела о более жесткое (рис. 4а: $\lambda_L = 1.0, \mu_L = 1.0, \lambda_R = 2.0, \mu_R = 2.0$, момент времени $t = 2.3$) давление ($P = -\sigma$) остается положительным, при этом в тело справа распространяется сначала ударная волна, образованная первоначальным ударом, а потом волны разрежения, отразившиеся от левой границы и снова попавшие на границу между двумя телами. При ударе более жесткого тела о менее жесткое (рис. 4б: $\lambda_L = 2.0, \mu_L = 2.0, \lambda_R = 1.0, \mu_R = 1.0$, момент времени $t = 1.387$) образуется отрицательное давление, что говорит об отскоке левого тела от правого. На обеих картинках 1 — ячейки, относящиеся к левому телу, 2 — к правому телу. На оба тела отведено по 100 ячеек, $CFL = 0.3$.

6.2. Колебания двумерной упругой балки. Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях двумерной прямоугольной алюминиевой балки. Пусть задана недеформированная балка $\{(x, y)\} = [0, 40] \times$

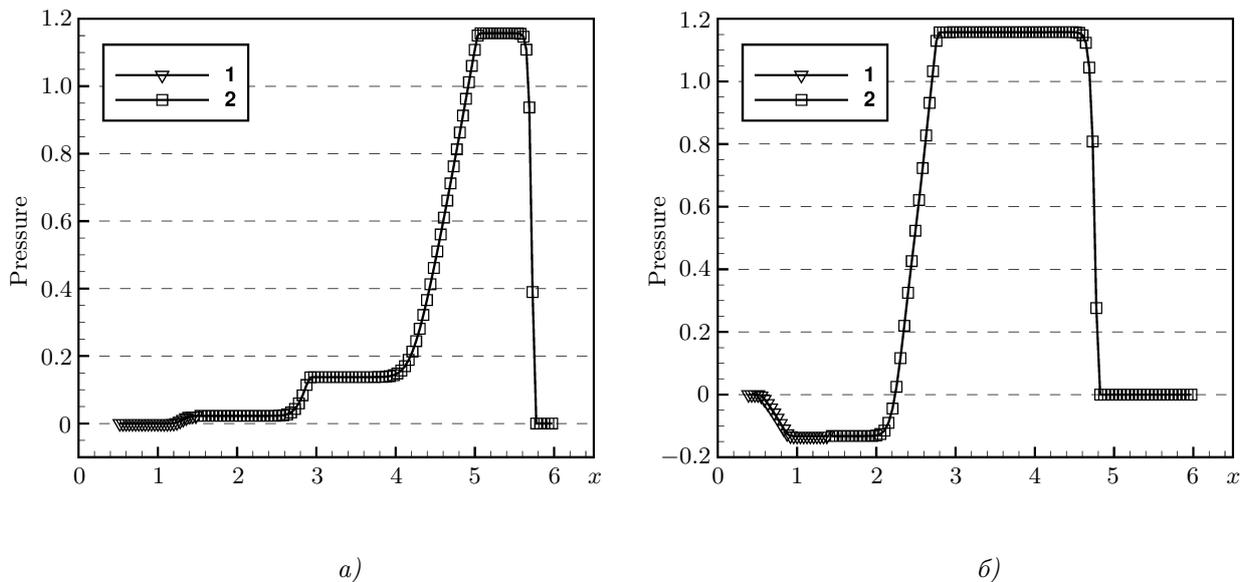


Рис. 4. Удар движущегося упругого тела о покоящееся упругое тело: а) удар менее жесткого тела о более жесткое; б) удар более жесткого тела о менее жесткое; 1 — левое (движущееся) тело; 2 — правое (покоящееся) тело. На каждое тело выделено по 100 ячеек расчетной сетки

Fig. 4. Impact of a moving elastic body against a resting elastic body: а) impact of a less rigid body against a more rigid one; б) impact of a more rigid body against a less rigid one; 1 — left (moving) body; 2 — right (resting) body. For each body, 100 cells of the computational grid are allocated

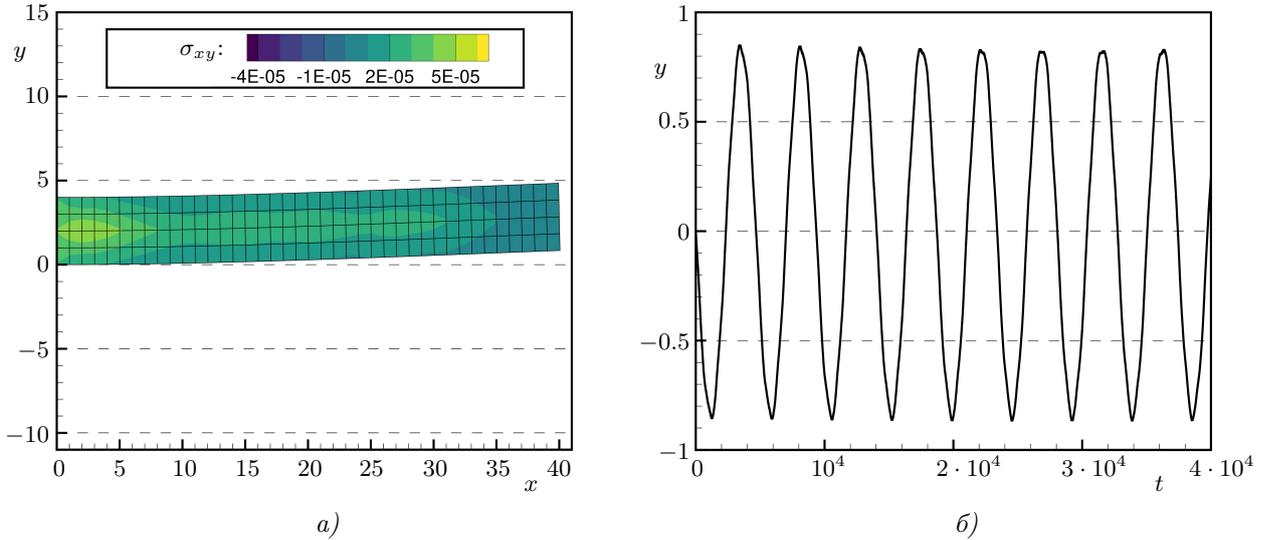


Рис. 5. Поперечные колебания двумерной алюминиевой балки: а) крайнее верхнее положение балки; б) зависимость y -координаты правого нижнего угла балки от времени t

Fig. 5. Transverse vibrations of a two-dimensional aluminum beam: а) extreme upper position of the beam; б) the dependence of the y -coordinate of the lower right corner of the beam on time t

$[0, 4]$, в которой плотность и параметры Ламе соответствуют алюминию. На левой границе балка закреплена ($u = v = 0$), остальные границы — свободные ($\sigma_{nn} = \sigma_{ns} = 0$). В начальный момент зададим балке линейную по x вертикальную скорость.

Результаты расчетов на сетке 40×4 ячеек при $CFL = 0.3$ представлены на рис. 5. На рис. 5 а показано крайнее верхнее положение балки, цветом отмечены значения компонента тензора напряжений σ_{xy} . На рис. 5 б показан график зависимости y -координаты правого нижнего угла балки от времени t . Результаты расчетов показывают, что диссипация (которая есть только из-за включенной процедуры монотонизации (38)) в схеме минимальна. Отметим, что использование при расчетах более грубой сетки не позволяет получить качественно хорошие результаты: количество ячеек по координате y должно быть не менее 4. Это связано с тем, что решение задачи о поперечных колебаниях балки обладает достаточно высокой гладкостью, и сетка из менее, чем 4 ячеек, не позволяет передать эту гладкость в разностном случае.

6.3. Свободная граница в идеальном газе.

Рассмотрим прямоугольную область $\{(x, y)\} = [0, 1] \times [0, 0.25]$, расположенную в гравитационном поле ($F_x = 0$ в (2) и $F_y = -g$ в (3)). Пусть в этой области расположен покоящийся идеальный газ (воздух при атмосферном давлении). Верхнюю границу сделаем свободной ($P = P_0$), а на остальных границах поставим условие непротекания ($u_n = 0$).

Введем в рассматриваемой области равномерную смешанную эйлерово-лагранжеву сетку, в которой y -координаты узлов на верхней границе лагранжевы, а остальные координаты — эйлеровы. Возьмем верхнюю границу по форме косинуса (см. график 0 на рис. 6) и запустим расчет.

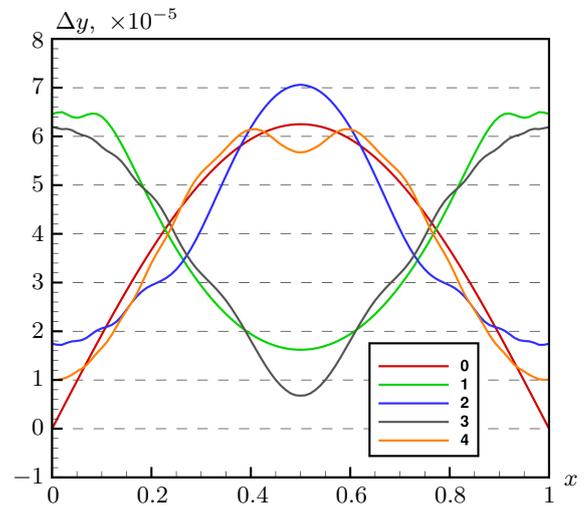


Рис. 6. Приращения y -координат свободной границы $\Delta y_{ij}^n = y_{ij}^n - 0.25$ на разные моменты времени t_n : 0 — $t_0 = 0.0$, 1 — $t_1 = 0.393$, 2 — $t_2 = 0.875$, 3 — $t_3 = 1.228$, 4 — $t_4 = 1.67$

Fig. 6. Increments of the y -coordinates of the free boundary $\Delta y_{ij}^n = y_{ij}^n - 0.25$ at different times t_n : 0 — $t_0 = 0.0$, 1 — $t_1 = 0.393$, 2 — $t_2 = 0.875$, 3 — $t_3 = 1.228$, 4 — $t_4 = 1.67$

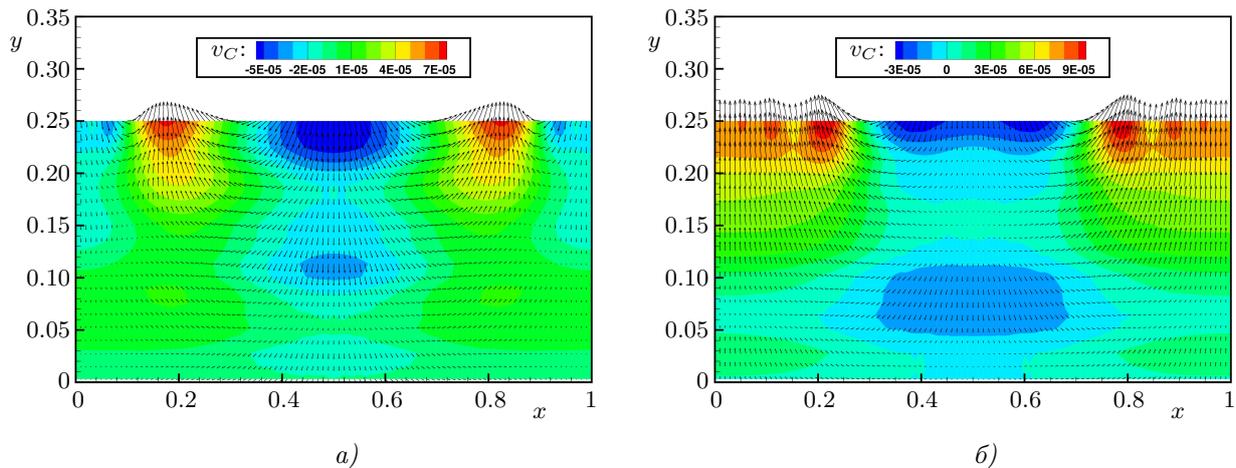


Рис. 7. Поля скорости идеального газа (u^n, v^n) на разные моменты времени t_n : а) $t_1 = 0.393$; б) $t_2 = 0.875$.
 Цветом дополнительно указана y -компонента скорости v

Fig. 7. The ideal gas velocity fields (u^n, v^n) at different times t_n : а) $t_1 = 0.393$; б) $t_2 = 0.875$.
 The color additionally indicates the y -component of the velocity v

Результаты расчетов на сетке 100×25 ячеек при $CFL = 0.3$ и $g = 9.81$ приведены на рис. 6 и рис. 7. На рис. 6 приведены графики приращения y -координат узлов на верхней границе $(\Delta y)_{ij}^n = y_{ij}^n - 0.25$ на некоторые моменты времени (близкие к “минимальным” и “максимальным” положениям свободной границы). На рис. 7 — поля скоростей газа во всей области. Результаты показывают, что предложенный метод позволяет получить устойчивое и гладкое передвижение свободной границы газа, как минимум качественно совпадающее с описываемым физическим процессом. На профилях свободной границы газа (рис. 6) заметны некоторые искажения, вызванные дисперсионными ошибками схемы, которые при расчетах на большое количество шагов начинают значительно влиять на решение. Дисперсионные ошибки можно минимизировать, используя, например, схему КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами [16].

7. Заключение. В работе представлено обобщение балансно-характеристического метода КАБАРЕ на уравнения газовой динамики и динамической упругости в смешанных эйлерово-лагранжевых и лагранжевых переменных. Предложенный алгоритм является явным, легко масштабируемым и обладает свойством временной обратимости (при отключенных процедурах монотонизации) и минимальным вычислительным шаблоном в одну пространственно-временную ячейку. Схема была протестирована на серии одномерных и двумерных расчетов задач о столкновении двух упругих тел, о поперечном колебании упругой балки и о движении свободной границы идеального газа, в которых она показала хорошие качественные результаты.

Модифицированную схему КАБАРЕ можно использовать для монолитного решения задач fluid-structure interaction, так как ее характеристическая фаза позволяет относительно легко обрабатывать ребра сетки на границах между газом и упругим телом [15].

Список литературы

1. Bazilevs Y., Hsu M., Benson D.J., et al. Computational fluid–structure interaction: methods and application to a total cavopulmonary connection // Comput. Mech. 2009. **45**, N 1. 77–89.
2. Takizawa K., Montes D., Fritze M., McIntyre S., Boben J., Tezduyar T.E. Methods for FSI modeling of spacecraft parachute dynamics and cover separation // Math. Models Methods Appl. Sci. 2013. **23**, N 2. 307–338.
3. Korobenko A., Hsu M.-C., Akkerman I., Tippmann J., Bazilevs Y. Structural mechanics modeling and FSI simulation of wind turbines // Math. Models Methods Appl. Sci. 2013. **23**, N 2. 249–272.
4. Sigrist J.F., Broc D., Lainé C. Dynamic analysis of a nuclear reactor with fluid–structure interaction: Part I: Seismic loading, fluid added mass and added stiffness effects // Nuclear Engineering and Design. 2006. **236**, N 23, 2431–2443.
5. Sigrist J.-F., Broc D., Lainé C. Dynamic analysis of a nuclear reactor with fluid–structure interaction: Part II: Shock loading, influence of fluid compressibility // Nuclear Engineering and Design. 2007. **237**, N 3. 289–299.

6. Michler C., Hulshoff S.J., Van Brummelen E.H., De Borst R. A monolithic approach to fluid–structure interaction // *Computers and Fluids*. 2004. **33**, N 5–6. 839–848.
7. Dettmer W.G., Peric D. On the coupling between fluid flow and mesh motion in the modeling of fluid–structure interaction // *Comput. Mech.* 2008. **43**, N 1. 81–90.
8. Bendiksen O.O. Modern developments in computational aeroelasticity // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2004. **218**, N 3. 157–177.
9. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткий И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
10. Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. **58**, № 8. 20–29.
11. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // *Journal of Computational Physics*. 2009. **228**, N 19. 7426–7451.
12. Зайцев М.А., Карабасов С.А. Схема Кабаре для численного решения задач деформирования упругопластических тел // *Матем. моделирование*. 2017. **29**, № 11. 53–70.
13. Головизнин В.М., Карабасов С.А. Нелинейная коррекция схемы Кабаре // *Матем. моделирование*. 1998. **10**, № 12. 107–123.
14. Afanasiev N., Goloviznin V. A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations // *Journal of Computational Physics*. 2021. **434**. doi 10.1016/j.jcp.2021.110220.
15. Головизнин В.М., Афанасьев Н.А. Беспровный балансно-характеристический метод решения задач взаимодействия жидкости и газа с деформируемыми объектами // *Матем. моделирование*. 2021. **33**, № 10, 65–82.
16. Афанасьев Н.А., Головизнин В.М., Соловьев А.В. Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа // *Вычислительные методы и программирование*. 2021. **22**, № 1. 67–76.

Поступила в редакцию
3 ноября 2021 г.

Принята к публикации
27 ноября 2021 г.

Информация об авторах

Никита Александрович Афанасьев — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Лаборатория индустриальной математики, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Петр Александрович Майоров — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Лаборатория индустриальной математики, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, D. J. Benson, et al., “Computational Fluid–Structure Interaction: Methods and Application to a Total Cavopulmonary Connection,” *Comput. Mech.* **45** (1), 77–89 (2009).
2. K. Takizawa, D. Montes, M. Fritze, et al., “Methods for FSI Modeling of Spacecraft Parachute Dynamics and Cover Separation,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **23** (2), 307–338 (2013).
3. A. Korobenko, M.-C. Hsu, I. Akkerman, et al., “Structural Mechanics Modeling and FSI Simulation of Wind Turbines,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **23** (2), 249–272 (2013).
4. J.-F. Sigrist, D. Broc, and C. Lainé, “Dynamic Analysis of a Nuclear Reactor with Fluid–Structure Interaction: Part I: Seismic Loading, Fluid Added Mass and Added Stiffness Effects,” *Nucl. Eng. Des.* **236** (23), 2431–2443 (2006).
5. J.-F. Sigrist, D. Broc, and C. Lainé, “Dynamic Analysis of a Nuclear Reactor with Fluid–Structure Interaction: Part II: Shock Loading, Influence of Fluid Compressibility,” *Nucl. Eng. Des.* **237** (3), 289–299 (2007).
6. C. Michler, S. J. Hulshoff, E. H. van Brummelen, and R. de Borst, “A Monolithic Approach to Fluid–Structure Interaction,” *Comput. Fluids* **33** (5–6), 839–848 (2004).
7. W. G. Dettmer and D. Peric, “On the Coupling between Fluid Flow and Mesh Motion in the Modeling of Fluid–Structure Interaction,” *Comput. Mech.* **43** (1), 81–90 (2008).



8. O. O. Bendiksen, “Modern Developments in Computational Aeroelasticity,” Proc. Inst. Mech. Eng. Part G: J. Aerosp. Eng. **218** (3), 157–177 (2004).
9. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *Novel Algorithms of Computational Hydrodynamics for Multicore Computing* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
10. V. M. Goloviznin and B. N. Chetverushkin, “New Generation Algorithms for Computational Fluid Dynamics,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **58** (8), 20–29 (2018) [Comput. Math. Math. Phys. **58** (8), 1217–1225 (2018)].
11. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, “Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics,” J. Comput. Phys. **228** (19), 7426–7451 (2009).
12. M. A. Zaitsev and S. A. Karabasov, “Cabaret Scheme for Computational Modelling of Linear Elastic Deformation Problems,” Mat. Model. **29** (11), 53–70 (2017).
13. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, “Nonlinear Correction of Cabaret Scheme,” Mat. Model. **10** (12), 107–123 (1998).
14. N. Afanasiev and V. Goloviznin, “A Locally Implicit Time-Reversible Sonic Point Processing Algorithm for One-Dimensional Shallow-Water Equations,” J. Comput. Phys. **434** (2021). doi [10.1016/j.jcp.2021.110220](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110220).
15. V. M. Goloviznin and N. A. Afanasiev, “Monolithic balance-characteristic method for solving problems of interaction of liquid and gas with deformable objects,” Mat. Model. **33** (10), 65–82 (2021).
16. N. A. Afanasiev, V. M. Goloviznin, and A. V. Solovjev, “CABARET Scheme with Improved Dispersion Properties for Systems of Linear Hyperbolic-Type Differential Equations,” Vychisl. Metody Programm. **22** (1), 67–76 (2021).

Received
November 3, 2021

Accepted for publication
November 27, 2021

Information about the authors

Nikita A. Afanasiev — Ph.D. student, Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Industrial Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Petr A. Maiorov — Ph.D. student, Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Industrial Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.