2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

doi 10.26089/NumMet.v22r417 УДК 517.9

О граничном оптимальном управлении коэффициентом в нелинейном параболическом уравнении

Н. Л. Гольдман
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр,
Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0523-4629, *e-mail:* nlgold40@yandex.ru

Аннотация: Работа связана с изучением нелинейных параболических систем, возникающих при моделировании и управлении физико-химическими процессами, в которых происходят изменения внутренних свойств материалов. Исследовано оптимальное управление одной из таких систем, которая включает в себя краевую задачу третьего рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, а также уравнение изменения по времени этого коэффициента. Обоснована постановка оптимальной задачи с финальным наблюдением искомого коэффициента, в которой управлением является граничный режим на одной из границ области. Получено явное представление дифференциала минимизируемого функционала через решение сопряженной задачи. Доказаны условия ее однозначной разрешимости в классе гладких функций. Полученные результаты имеют практическое значение для приложений в различных технических областях, медицине, геологии и т.п. Приведены некоторые примеры таких приложений.

Ключевые слова: параболические уравнения, оптимальное управление с финальным наблюдением, сопряженная задача, приложения для физико-химических процессов.

Для цитирования: Гольдман Н.Л. О граничном оптимальном управлении коэффициентом в нелинейном параболическом уравнении // Вычислительные методы и программирование. 2021. **22**, № 4. 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417.

On boundary optimal control of a coefficient in a nonlinear parabolic equation

Nataliya L. Gol'dman
Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0523-4629, *e-mail:* nlgold40@yandex.ru

Abstract: The work is connected with investigation of nonlinear parabolic systems arising in the mathematical modelling and control of physical-chemical processes in which inner properties of materials are subjected to changes. We consider optimal control in one of such systems that involves a boundary value problem of the third kind for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient at the time derivative and, moreover, an additional equation for a time dependence of this coefficient. The optimal problem with a boundary control regime is justified for the given final observation of the sought coefficient. The exact representation for the differential of the minimization functional in terms of the solutions of the conjugate problem is obtained. The form of this conjugate problem and conditions of unique solvability in a class of smooth functions are shown. The obtained results are important for applications in various technical fields, medicine, geology, etc. Some examples of such applications are discussed.

Keywords: parabolic equations, optimal control with final observation, conjugate problem, applications for physical-chemical processes.

For citation: N. L. Gol'dman, "On Boundary Optimal Control of a Coefficient in a Nonlinear Parabolic Equation," Numerical Methods and Programming. **22** (4), 263–280 (2021). doi 10.26089/NumMet.v22r417.

---

1. Введение. Математические модели, описывающие целый ряд физико-химических процессов с изменяющимися внутренними свойствами материалов, представляют собой нелинейную систему для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом. Сложность такой системы и ее существенное отличие от обычных постановок краевых задач с заданными коэффициентами в параболическом уравнении (см. [1, 2]) вызывает значительный теоретический интерес к обоснованию ее постановки. В работах [3, 4] исследована одна из таких систем, которая состоит из краевой задачи третьего рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, а также из уравнения, описывающего изменения по времени этого коэффициента. Доказанные условия существования и единственности ее гладкого решения позволяют перейти к изучению проблемы оптимального управления этой системой.

В данной статье рассматривается управляющее воздействие граничного режима на достижение искомым коэффициентом уравнения заданного значения в конечный момент времени. Следуя принятой терминологии [5], соответствующая вариационная задача относится к задачам граничного управления с финальным наблюдением. Однако ее отличие в том, что обычные постановки таких задач управления связаны с уравнениями с известными коэффициентами. Исходя из определения оптимального управления, данного в [5], применительно к этой вариационной задаче, назовем оптимальным управлением граничный режим из множества допустимых граничных управлений, который доставляет минимум соответствующему функционалу невязки на этом множестве. Для обоснования такого подхода в статье проводится выбор компактного множества допустимых граничных управлений и доказана непрерывность минимизируемого функционала. Для этого использованы результаты из [3, 4], полученные для исследуемой нелинейной параболической системы. Значительное внимание в статье уделено условиям дифференцируемости функционала невязки и получению явного представления дифференциала через решение сопряженной задачи. Данная сопряженная задача является системой, которая включает в себя краевую задачу третьего рода для линейного параболического уравнения с неизвестной функцией в правой части, а также уравнение изменения по времени этой функции. Доказаны условия ее однозначной разрешимости в классе гладких функций на основе метода Ротэ и соответствующих априорных оценок.

Полученное явное представление дифференциала функционала невязки через решение сопряженной задачи позволяет эффективно применять численные методы минимизации в задачах управления физико-химическими процессами в самых разнообразных приложениях, связанных с современными технологиями. В статье приведены некоторые примеры таких приложений.

Используемые в данном исследовании функциональные пространства определяются стандартным образом как и в [1], в частности, классы Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ $(0<\lambda<1)$. Как и в [1] класс $O^1[0,T]$ — пространство непрерывных при $t\in[0,T]$ функций, имеющих ограниченные производные первого порядка; класс $W_2^{3/2}[0,T]$ — гильбертово пространство функций, чьи обобщенные производные первого порядка удовлетворяют обобщенному условию Гельдера (в метрике $L_2[0,T]$) с показателем $1/2$.

Для удобства изложения будет также использовано обозначение:

$H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ — пространство функций, непрерывных при $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times[-M_0,M_0]$, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ производные по x и u и удовлетворяющих условию Гельдера по t с показателем $\lambda/2$.

Кроме того, в связи с применением метода Ротэ используются аналоги классов Гельдера для сеточных функций $\hat{u}=(u_0,\dots,u_n,\dots,u_N)$, заданных в узлах сетки $\overline{\omega}_\tau=\{t_n\}=\{n\tau, n=\overline{0,N}, \tau=TN^{-1}\}$, и для сеточно-непрерывных функций $\hat{u}(x)=(u_0(x),\dots,u_n(x),\dots,u_N(x))$, заданных в области $\overline{Q}_\tau=\{0\leqslant x\leqslant l,\ t_n\in\overline{\omega}_\tau\}$.

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

Как и в [6, 7] эти аналоги определяются следующим образом.

$H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ (см. [1]) для функций $\hat{u}(x)$, непрерывных по x при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\begin{aligned}
\big|\hat{u}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} &= \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big| + \langle\hat{u}(x)\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_\tau} + \langle\hat{u}(x)\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau},\\
\langle\hat{u}(x)\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_\tau} &= \sup_{(x,t_n),(x',t_n)\in\overline{Q}_\tau}\Big\{\big|u_n(x)-u_n(x')\big|\,\big|x-x'\big|^{-\lambda}\Big\},\\
\langle\hat{u}(x)\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau} &= \sup_{(x,t_n),(x,t_{n'})\in\overline{Q}_\tau}\Big\{\big|u_n(x)-u_{n'}(x)\big|\,\big|t_n-t_{n'}\big|^{-\lambda/2}\Big\}.
\end{aligned}$$

$H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ (см. [1]) для функций $\hat{u}(x)$, непрерывных по x вместе со своими производными $\hat{u}_{xx}(x)$ и $\hat{u}_{\bar{t}}(x)$ при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\hat{u}(x)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} = \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big| + \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_{nx}(x)\big| + \big|\hat{u}_{xx}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} + \big|\hat{u}_{\bar{t}}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau},$$

где

$$\hat{u}_x(x) = \big(u_{0x}(x),\dots,u_{nx}(x),\dots,u_{Nx}(x)\big),\quad \hat{u}_{xx}(x) = \big(u_{0xx}(x),\dots,u_{nxx}(x),\dots,u_{Nxx}(x)\big),$$

$$\hat{u}_{\bar{t}}(x) = \big(u_{1\bar{t}}(x),\dots,u_{n\bar{t}}(x),\dots,u_{N\bar{t}}(x)\big),\quad u_{n\bar{t}}(x) = \big(u_n(x)-u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1},\quad n=\overline{1,N}.$$

Будет также использоваться сеточный аналог $O^1_\tau(\overline{\omega}_\tau)$ пространства $O^1[0,T]$ для функций $\hat{u}$, имеющих конечную норму

$$\big|\,\hat{u}\,\big|^1_{\overline{\omega}_\tau} = \max_{0\leqslant n\leqslant N}\big|u_n\big| + \max_{1\leqslant n\leqslant N}\big|u_{n\bar{t}}\big|.$$

2. Нелинейная параболическая задача с заданным граничным режимом. В области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ требуется найти решение $\{u(x,t),\rho(x,t)\}$ системы, задаваемой условиями

$$c(x,t,u)\rho(x,t)u_t - Lu = f(x,t),\quad (x,t)\in Q=\{0<x<l,\ 0<t\leqslant T\}, \tag{1}$$

$$a(x,t,u)u_x - h(t,u)u\big|_{x=0} = p(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{2}$$

$$a(x,t,u)u_x + e(t,u)u\big|_{x=l} = q(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

$$\rho_t(x,t) = \gamma(x,t,u),\quad (x,t)\in Q,\quad \rho(x,t)\big|_{t=0} = \rho^0(x), \tag{5}$$

в которых равномерно эллиптический оператор L имеет вид

$$Lu \equiv (a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)u,$$

a, b, c, d, f, а также h, e, p, q, φ, γ и ρ^0 — известные функции своих аргументов, $a\geqslant a_{\min}>0$, $c\geqslant c_{\min}>0$, $\rho^0\geqslant\rho^0_{\min}>0$, $h\geqslant 0$, $e\geqslant 0$, $|\gamma|\leqslant\gamma_{\max}$ при $(x,t)\in\overline{Q}$, $|u|<\infty$, $a_{\min}$, $c_{\min}$, $\rho^0_{\min}$, $\gamma_{\max}=\mathrm{const}>0$.

В зависимости от знака функции $\gamma(x,t,u)$, которая предполагается знакопостоянной, требование параболичности уравнения (1) приводит к ограничениям на искомое решение

$$0<\rho^0_{\min}<\rho(x,t)\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}\rho^0(x)+T\gamma_{\max}\ \text{ при } \gamma(x,t,u)>0, \tag{6}$$

$$0<\rho^0_{\min}-T\gamma_{\max}\leqslant\rho(x,t)\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}\rho^0(x)\ \text{ при } \gamma(x,t,u)\leqslant 0. \tag{7}$$

Если $\gamma(x,t,u)\leqslant 0$, то условие (7) накладывает ограничение на отрезок времени $[0,T]$, на котором ищется решение системы (1)–(5): $0<T<\rho^0_{\min}(\gamma_{\max})^{-1}$.

Заметим, что постановка (1)–(5), включающая квазилинейное параболическое уравнение, важна в математическом моделировании высокотемпературных процессов, так как она позволяет учитывать зависимость теплофизических коэффициентов от температуры. Условия однозначной разрешимости в классе гладких функций для этой постановки устанавливает следующая теорема (см. [3, 4]).

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) *при* $(x,t) \in \overline{Q}$ *и любых* u, $|u| < \infty$, *все входные данные в соотношениях* (1)–(5) *являются равномерно ограниченными функциями своих аргументов, причем коэффициент* $a(x,t,u)$ *ограничен вместе со своими производными* $a_x(x,t,u)$ *и* $a_u(x,t,u)$, *кроме того, функция* $f(x,t)$ *имеет ограниченную производную по* x *и непрерывна в смысле Гельдера по* t *с показателем* $\lambda/2$,

$$0 < a_{\min} \leqslant a(x,t,u) \leqslant a_{\max}, \quad 0 < c_{\min} \leqslant c(x,t,u) \leqslant c_{\max}, \quad h(t,u) \geqslant 0, \quad e(t,u) \geqslant 0;$$

2) *при* $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ (M_0 — *постоянная из принципа максимума для краевой задачи* (1)–(4): $M_0 \geqslant \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|$) *функция* $a(x,t,u)$ *удовлетворяет условию Гельдера по* t *с показателем* $1/2 + \lambda/2$, *ее производные* $a_x(x,t,u)$ *и* $a_u(x,t,u)$, *а также функции* $b(x,t,u)$, $c(x,t,u)$ *и* $d(x,t,u)$ *принадлежат* $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ $(0 < \lambda < 1)$; *функции* $h(t,u)$ *и* $e(t,u)$ *имеют ограниченные производные по* t *и* u;

3) *функции* $\gamma(x,t,u)$ *и* $\rho^0(x)$ *в условии* (5) *принадлежат соответственно пространствам* $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ *и* $H^{\lambda}[0,l]$ $(0 < \lambda < 1)$, $\gamma(x,t,u)$ *знакопостоянна при* $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, $0 < \rho^0_{\min} \leqslant \rho^0(x) \leqslant \rho^0_{\max}$, $\rho^0_{\min}$, $\rho^0_{\max} = \mathrm{const} > 0$;

4) *функции* $\varphi(x)$, $p(t)$ *и* $q(t)$ *принадлежат соответственно пространствам* $H^{2+\lambda}[0,l]$ *и* $O^1[0,T]$ *и удовлетворяют условиям согласования при* $t = 0$:

$$a(x,0,\varphi)\varphi_x\big|_{x=0} - h(0,\varphi)\varphi\big|_{x=0} = p(0), \quad a(x,0,\varphi)\varphi_x\big|_{x=l} + e(0,\varphi)\varphi\big|_{x=l} = q(0).$$

Тогда нелинейная система (1)–(5) *имеет хотя бы одно гладкое решение* $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$, *обладающее свойствами*

$$u(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad u_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q),$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}} \big|u(x,t)\big| \leqslant M_0, \quad \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \big|u_x(x,t)\big| \leqslant M_1, \quad \big|u(x,t)\big|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M,$$

$$\rho(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_t(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}} \big|\rho_x(x,t)\big| + \big|\rho_t(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \mathcal{M}, \quad M_0, M_1, M, \mathcal{M} = \mathrm{const} > 0,$$

и удовлетворяющее ограничениям (6), (7) *в зависимости от знака функции* $\gamma(x,t,u)$.

При выполнении входными данными условий

$$h_{u\max} M_0 + a_{u\max} M_1 \leqslant h_{\min}, \quad e_{u\max} M_0 + a_{u\max} M_1 \leqslant e_{\min}, \tag{8}$$

решение $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ *является единственным в этом классе функций.*

3. Нелинейная параболическая задача с управляющим граничным режимом. Рассмотрим оптимальное управление системой (1)–(5) с граничной функцией $q(t)$ при $x = l$ в качестве управляющего воздействия на искомый коэффициент для достижения им заданного значения в конечный момент времени. Теорема 1 позволяет задать множество допустимых граничных управлений:

$$\Theta_R = \Big\{ q(t) \in W_2^{3/2}[0,T], \quad q(0) = a(x,0,\varphi)\varphi_x\big|_{x=l} + e(0,\varphi)\varphi\big|_{x=l}, \quad \|q\|_{W_2^{3/2}[0,T]} \leqslant R \Big\}, \quad R = \mathrm{const} > 0. \tag{9}$$

При каждом фиксированном управлении $q(t)$ из этого множества однозначно определяется соответствующее решение $\{u(x,t;q), \rho(x,t;q)\}$ системы (1)–(5) в силу вложения пространства $W_2^{3/2}[0,T]$ в пространство $O^1[0,T]$ (см. [8]).

Сформулируем следующую вариационную задачу — требуется минимизировать на Θ_R функционал

$$\inf_{q\in\Theta_R} J_g(q), \quad J_g(q) = \int\limits_0^l \big(\rho(x,T;q) - g(x)\big)^2\, dx, \tag{10}$$

где $g(x)$ — заданная функция такая, что $g(x) \in H^{\lambda}[0,l]$ $(0 < \lambda < 1)$, $g(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$.

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

Следуя терминологии, принятой в [5], назовем вариационную задачу (10) задачей о граничном управлении с финальным наблюдением. Следуя этой же терминологии [5], назовем оптимальным управлением множество

$$\Theta_R^* = \Big\{ q_R \in \Theta_R,\ \ J_g(q_R) = \inf_{q \in \Theta_R} J_g(q) \Big\}. \tag{11}$$

Обоснованием постановки (10) является следующая теорема.

Теорема 2. *В задаче минимизации функционала $J_g(q)$ на множестве допустимых граничных управлений Θ_R множество Θ_R^* не пусто и для любой минимизирующей последовательности $\{q^s\} \subset \Theta_R$ имеет место соотношение*

$$\inf_{q_R \in \Theta_R^*} \|q^s - q_R\|_{O^1[0,T]} \to 0 \ \text{\textit{при}}\ s \to \infty. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 2 основано на теореме Вейерштрасса. Прежде всего заметим, что множество допустимых граничных управлений (9) является компактным в $O^1[0,T]$, так как оператор вложения из $W_2^{3/2}[0,T]$ в $O^1[0,T]$ вполне непрерывен [8]. Кроме того, возможность применения теоремы Вейерштрасса опирается на следующее свойство функционала $J_g(q)$.

Теорема 3. *При выполнении входными данными системы* (1)–(5) *требований теоремы* 1 *функционал $J_g(q)$ является непрерывным в $O^1[0,T]$ на множестве Θ_R.*

Доказательство. Пусть $\{q^s(t)\} \subset \Theta_R$ — произвольная последовательность, сходящаяся в $O^1[0,T]$ к некоторой функции $q(t) \in \Theta_R$:

$$\|q^s(t) - q(t)\|_{O^1[0,T]} \to 0 \ \text{при}\ s \to \infty. \tag{13}$$

Введем обозначение

$$\Delta q(t) = q^s(t) - q(t),\ \Delta u(x,t) = u^s(x,t) - u(x,t),\ \Delta\rho(x,t) = \rho^s(x,t) - \rho(x,t),$$

где $\{u^s(x,t), \rho^s(x,t)\}$ и $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ — решения нелинейной системы (1)–(5), соответствующие граничным функциям $q^s(t)$ и $q(t)$. Рассматривая минимизируемый функционал в виде $J_g(q) = \|\rho(x,T;q) - g(x)\|_{L_2[0,l]}$, можем заключить, что

$$|J_g(q^s) - J_g(q)| = \big| \|\rho^s(x,T) - g(x)\|_{L_2[0,l]} - \|\rho(x,T) - g(x)\|_{L_2[0,l]} \big| \leqslant \|\Delta\rho(x,T)\|_{L_2[0,l]}. \tag{14}$$

Покажем, что в области $\overline{Q}$ имеют место оценки

$$\begin{gathered} \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \big|\Delta u(x,t)\big| \leqslant K_1 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \big|\Delta q(t)\big|, \quad K_1 = \mathrm{const} > 0, \\ \max_{(x,t)\in\overline{Q}} \big|\Delta \rho(x,t)\big| \leqslant K_2 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \big|\Delta q(t)\big|, \quad K_2 = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Предположим, что при $t \in [0, t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, эти оценки уже установлены:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l,\, 0\leqslant t\leqslant t^0} \big|\Delta u(x,t)\big| \leqslant K_1 \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \big|\Delta q(t)\big|, \qquad \max_{0\leqslant x\leqslant l,\, 0\leqslant t\leqslant t^0} \big|\Delta \rho(x,t)\big| \leqslant K_2 \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \big|\Delta q(t)\big|. \tag{16}$$

Докажем, что аналогичные оценки имеют место и при $t \in [t^0,\ t^0 + \Delta t]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина. В области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l,\ t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\}$ для $\Delta u(x,t)$ и $\Delta\rho(x,t)$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} c(x,t,u)\rho(x,t)\Delta u_t - (a(x,t,u)\Delta u_x)_x + \mathcal{A}_0 \Delta u_x + \mathcal{A}_1 \Delta u = c(x,t,u^s)\, u_t^s \Delta\rho(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t^0}, \\ a(x,t,u)\Delta u_x - \mathcal{A}_2 \Delta u\big|_{x=0} = 0, \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t, \\ a(x,t,u)\Delta u_x + \mathcal{A}_3 \Delta u\big|_{x=l} = \Delta q, \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\Delta\rho(x,t) = \int\limits_{t^0}^{t} \gamma_u(x,\tau,u)\Delta u(x,\tau)\, d\tau + \Delta\rho(x,t^0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{18}$$

в которых коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят соответствующим образом от производных a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u и d_u в точке $(x, t, \sigma u + (1-\sigma)u^s)$ $(0 < \sigma < 1)$, а также от $\rho(x,t)$, $u(x,t)$ и производных $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

$u_t(x,t)$. Коэффициенты $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ в граничных условиях зависят соответствующим образом от производных по u функций $a(x,t,u)$, $h(t,u)$ и $e(t,u)$, а также от $u(x,t)$ и $u_x(x,t)$ при $x=0$ и $x=l$.

Все входные данные линейной краевой задачи (17) равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t) в силу справедливости оценок теоремы 1 для $\{u^s(x,t),\rho^s(x,t)\}$ и $\{u(x,t),\rho(x,t)\}$. Причем выполнение входными данными условия (8) приводит к неотрицательности коэффициентов $\mathcal{A}_2\geqslant 0$, $\mathcal{A}_3\geqslant 0$. Это позволяет примененить принцип максимума и получить оценку [1]

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big|\leqslant K_3\Big\{\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big|+\max_{0\leqslant t\leqslant t^0}\big|\Delta q(t)\big|+\max_{0\leqslant x\leqslant l}\big|\Delta u(x,t^0)\big|\Big\}\exp(K_4\Delta t),\qquad(19)$$

в которой $K_3,K_4=\mathrm{const}>0$. Кроме того, из (18) следует, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big|\leqslant\Delta t\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big|+\max_{0\leqslant x\leqslant l}\big|\Delta\rho(x,t^0)\big|.$$

Выбирая величину Δt из условия $\Delta t\max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|K_3\exp(K_4T)<1$ и учитывая оценки (19) и (16), устанавливаем справедливость неравенства

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big|\leqslant K_2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta q(t)\big|.$$

Но тогда из оценки принципа максимума (19) следует справедливость оценки и для $\Delta u(x,t)$:

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big|\leqslant K_1\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta q(t)\big|.$$

Проводя подобные рассуждения последовательно для $t\in[t^1,t^1+\Delta t]$ $(t^1=t^0+\Delta t)$, $t\in[t^2,t^2+\Delta t]$ $(t^2=t^1+\Delta t)$ и т.д., устанавливаем оценки (15) на всем отрезке времени $[0,T]$. Это позволяет заключить из (14), что

$$\big|J_g(v^s)-J_g(v)\big|\leqslant K_5\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta q(t)\big|,\quad K_5=\mathrm{const}>0,$$

т.е. в силу (13) имеет место равенство $\lim\limits_{s\to\infty}J_g(q^s)=J_g(q)$, которое доказывает утверждение теоремы 3.

Как было отмечено выше (см. теорему 2), обоснование постановки вариационной задачи (10) опирается на доказанное утверждение теоремы 3. Соотношение (12) имеет место в силу компактности минимизирующей последовательности $\{q^s\}\subset\Theta_R$.

4. Дифференцируемость минимизируемого функционала. Исследуем условия, при которых $J_g(q)$ дифференцируем на множестве допустимых управлений Θ_R (см. (9)), и получим способ представления его дифференциала.

Теорема 4. *Пусть входные данные системы* (1)–(5) *удовлетворяют требованиям теоремы* 1 *и пусть, кроме того, выполнены следующие условия:*

1) *при* $(x,t,u)\in\overline{D}$ *производные коэффициентов уравнения* (1) a_{xu}, a_{uu}, b_x, b_u, c_t, c_u *и* d_u *непрерывны в смысле Гельдера по* x, t, u *с показателями* λ, $\lambda/2$, λ *соответственно, кроме того, производная* b_t *ограничена;*

2) *производные коэффициентов граничных условий* h_{ut}, h_{uu}, e_{ut} *и* e_{uu} *ограничены при* $t\in[0,T]$, $|u|\leqslant M_0$*;*

3) *при* $(x,t,u)\in\overline{D}$ *производная по* u *функции* $\gamma(x,t,u)$ *в условии* (5) *знакопостоянна и непрерывна в смысле Гельдера по* x, t *с показателями* λ, $\lambda/2$ *соответственно, производная* $\gamma_{uu}(x,t,u)$ *ограничена при* $(x,t,u)\in\overline{D}$*;*

4) *функция финального наблюдения* $g(x)$ *принадлежит* $H^\lambda[0,l]$ $(0<\lambda<1)$ *и* $g(x)>0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$.

Тогда функционал $J_g(q)$ *дифференцируем в смысле Фреше в* $W_2^{3/2}[0,T]$ *в каждой точке* q *множества* Θ_R *и его дифференциал можно представить в виде*

$$d\,J_g(q)=\int\limits_0^T\psi(x,t)\big|_{x=l}\Delta q(t)\,dt,\quad\Delta q\in\Theta_R,\qquad(20)$$

где $\{\psi(x,t),\vartheta(x,t)\}$ *— решение сопряженной задачи, являющейся системой вида*

$$\big(c(x,t,u)\rho(x,t)\psi\big)_t+\big(a(x,t,u)\psi_x\big)_x+\mathcal{B}_0(x,t,u)\psi_x+\big(\mathcal{B}_{0x}(x,t,u)-\mathcal{B}_1(x,t,u)\big)\psi=$$

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

$$= -\gamma_u(x,t,u)\vartheta(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{21}$$

$$a(x,t,u)\psi_x + \big(b(x,t,u) - h(t,u) - h_u(t,u)u\big)\psi\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{22}$$

$$a(x,t,u)\psi_x + \big(b(x,t,u) + e(t,u) + e_u(t,u)u\big)\psi\big|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{23}$$

$$\psi(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{24}$$

$$\vartheta_t(x,t) = c(x,t,u)\,u_t(x,t)\,\psi(x,t), \quad 0 < x < l, 0 \leqslant t < T, \tag{25}$$

$$\vartheta(x,t)\big|_{t=T} = 2\big(\rho(x,T) - g(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{26}$$

в которой

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(x,t,u) &= b(x,t,u) - a_u(x,t,u)u_x, \\ \mathcal{B}_1(x,t,u) &= -a_u(x,t,u)u_{xx} - a_{uu}(x,t,u)u_x^2 + \big(b_u(x,t,u) - a_{xu}(x,t,u)\big)u_x + \\ &\quad + d(x,t,u) + d_u(x,t,u)u, \end{aligned} \tag{27}$$

и где $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ *— решение нелинейной системы* (1)–(5), *соответствующее граничному управлению* $q(t) \in \Theta_R$.

Для доказательства теоремы 4 рассмотрим произвольные граничные функции q и $q+\Delta q$ из множества допустимых управлений Θ_R. Пусть $\{u,\rho\}$ и $\{u+\Delta u, \rho+\Delta\rho\}$ — решения системы (1)–(5), соответствующие этим граничным функциям. Приращение функционала $J_g(q)$ (см. (10)) относительно приращения Δq имеет вид

$$\Delta J_g(q) = J_g(q+\Delta q) - J_g(q) = 2\int\limits_0^l \big(\rho(x,T) - g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx + \int\limits_0^l \big(\Delta\rho(x,T)\big)^2\,dx. \tag{28}$$

Функционал $J_g(q)$ дифференцируем в смысле Фреше в каждой точке q множества Θ_R, если его приращение можно представить в виде (см. [9, 10])

$$\Delta J_g(q) = d\,J_g(q) + o(\Delta q, q), \tag{29}$$

где $d\,J_g(q)$ — линейный функционал относительно Δq, называемый дифференциалом функционала $J_g(q)$ в точке q множества Θ_R, причем $d\,J_g(q)$ является главной линейной частью приращения, в то время как $|o(\Delta q,q)|\Big(\|\Delta q\|_{W_2^{3/2}[0,T]}\Big)^{-1} \to 0$ при $\|\Delta q\|_{W_2^{3/2}[0,T]} \to 0$. Покажем, что приращение $\Delta J_g(q)$ вида (28) можно привести к виду (29) — это цель дальнейшего доказательства теоремы 4.

Заметим прежде всего, что при выполнении условий теоремы 4 имеют место оценки устойчивости в классах Гельдера для решений $\{u,\rho\}$ и $\{u+\Delta u, \rho+\Delta\rho\}$ системы (1)–(5):

$$\big|\Delta u(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_6\|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]}, \quad \big|\Delta\rho(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant K_7\|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]}, \quad K_6, K_7 = \text{const} > 0. \tag{30}$$

Вывод таких оценок (как и ранее вывод оценок (15) в теореме 3) проводится последовательно для конечных интервалов времени, начиная с момента $t \in [0, t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, и вплоть до момента $t = T$. Изложим кратко схему их получения в области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\}$. Оценки в классах Гельдера для $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ (см. теорему 1), а также требования теоремы 4 к входным данным позволяют заключить, что все коэффициенты линейной краевой задачи вида (17) удовлетворяют условию Гельдера как функции (x,t) с показателями λ, $\lambda/2$. Следовательно, для $\Delta u(x,t)$ как для решения такой задачи в области $\overline{Q}_{t^0}$ справедлива оценка [1]

$$\big|\Delta u(x,t)\big|_{\overline{Q}_{t^0}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_8\left(\big|\Delta\rho(x,t)\big|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2} + \|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]} + \big|\Delta u(x,t^0)\big|_{[0,l]}^{2+\lambda}\right), \quad K_8 = \text{const} > 0. \tag{31}$$

Чтобы оценить $|\Delta\rho(x,t)|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2}$ в (31) заметим, что по определению нормы в классе Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_{t^0})$

$$\big|\Delta\rho(x,t)\big|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2} = \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big| + \langle\rho(x,t)\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} + \langle\rho(x,t)\rangle_{t,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda/2}.$$

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

Из соотношения (18) следует, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big|\leqslant\Delta t\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big|+\max_{0\leqslant x\leqslant l}\big|\Delta\rho(x,t^0)\big|,$$

$$\langle\rho(x,t)\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_{t^0}}\leqslant\Delta t\left\{\langle\gamma_u\rangle^{\lambda}_{x,\overline{D}}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big|+\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|\langle\Delta u(x,t)\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_{t^0}}+\right.$$

$$\left.+\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_{uu}(x,t,u)\big|\langle u(x,t)\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_{t^0}}\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big|\right\}+\langle\rho(x,t^0)\rangle^{\lambda}_{x,[0,l]},$$

$$\langle\rho(x,t)\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_{t^0}}\leqslant\Delta t^{1-\lambda/2}\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big|.$$

Полученные оценки для $\big|\Delta\rho(x,t)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_{t^0}}$ позволяют заключить из (31) (с учетом определения нормы в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_{t^0})$ для $\Delta u(x,t)$), что при достаточно малом, но фиксированном Δt имеет место неравенство

$$\big|\Delta u(x,t)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_{t^0}}\leqslant K_9\left(\|\Delta q(t)\|_{O^1[0,T]}+\big|\Delta u(x,t^0)\big|^{2+\lambda}_{[0,l]}+\big|\Delta\rho(x,t)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{0\leqslant x\leqslant l,\,0\leqslant t\leqslant t^0}\right),\quad K_9=\mathrm{const}>0.$$

По предположению, при $0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0$ оценки устойчивости уже установлены. Следовательно, полученное неравенство означает выполнение аналогичных оценок и в области $\overline{Q}_{t^0}$, в том числе и для $\big|\Delta\rho(x,t)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_{t^0}}$. Повторение подобных рассуждений для последующих интервалов времени позволяет установить оценки (30) для $\big|\Delta u(x,t)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}}$ и $\big|\Delta\rho(x,t)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}}$ уже во всей области. С учетом вложения пространства $W_2^{3/2}[0,T]$ в $O^1[0,T]$ (см. [8]) эти оценки принимают вид

$$\big|\Delta u(x,t)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}}\leqslant K_{10}\|\Delta q(t)\|_{W_2^{3/2}[0,T]},\ \big|\Delta\rho(x,t)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}}\leqslant K_{11}\|\Delta q(t)\|_{W_2^{3/2}[0,T]},\ K_{10},K_{11}=\mathrm{const}>0. \tag{32}$$

В силу (32) приращения $\Delta u(x,t)$ и $\Delta\rho(x,t)$ удовлетворяют следующим соотношениям с точностью до членов второго порядка относительно $\|\Delta q(t)\|_{W_2^{3/2}[0,T]}$:

$$c(x,t,u)\rho(x,t)\Delta u_t+c(x,t,u)u_t\Delta\rho(x,t)-\mathcal{L}\Delta u=\mathcal{F}(x,t),\quad (x,t)\in Q=\{0<x<l,0<t\leqslant T\}, \tag{33}$$

$$a(x,t,u)\Delta u_x-\mathcal{A}_2\Delta u\big|_{x=0}=\mathcal{F}_0(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{34}$$

$$a(x,t,u)\Delta u_x+\mathcal{A}_3\Delta u\big|_{x=l}=\Delta q+\mathcal{F}_1(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{35}$$

$$\Delta u\big|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{36}$$

$$\Delta\rho_t(x,t)=\gamma_u(x,t,u)\Delta u(x,t),\ (x,t)\in Q,\ \Delta\rho(x,t)\big|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{37}$$

в которых оператор $\mathcal{L}$ определен как

$$\mathcal{L}\Delta u\equiv(a(x,t,u)\Delta u_x)_x-\mathcal{B}_0(x,t,u)\Delta u_x-\mathcal{B}_1(x,t,u)\Delta u$$

с коэффициентами $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$ вида (27) и в которых коэффициенты в граничных условиях (34), (35) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(t,u)&=\big(h(t,u)+h_u(t,u)-a_u(x,t,u)u_x\big)\big|_{x=0},\\ \mathcal{A}_3(t,u)&=\big(e(t,u)+e_u(t,u)+a_u(x,t,u)u_x\big)\big|_{x=l}.\end{aligned} \tag{38}$$

Для функций $\mathcal{F}(x,t)$, $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$ справедливо неравенство

$$\left(\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\mathcal{F}(x,t)\big|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\mathcal{F}_0(t)\big|,\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\mathcal{F}_1(t)\big|\right)\leqslant K_{12}\|\Delta q(t)\|^2_{W_2^{3/2}[0,T]},\quad K_{12}=\mathrm{const}>0. \tag{39}$$

Это утверждение основано на оценках устойчивости (32), так как функция $\mathcal{F}(x,t)$ зависит от $(\Delta u)^2$, $\Delta u\Delta u_x$, $\Delta u\Delta u_t$, $\Delta u\Delta u_{xx}$, $\Delta\rho\Delta u$, $\Delta\rho\Delta u_t$; функции $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$ зависят от $\big(\Delta u\big|_{x=0}\big)^2$, $\Delta u\Delta u_x\big|_{x=0}$ и от $\big(\Delta u\big|_{x=l}\big)^2$, $\Delta u\Delta u_x\big|_{x=l}$ соответственно.

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

5. Сопряженная задача. Дальнейшее доказательство теоремы 4 связано с исследованием сопряженной задачи (21)–(26), которая является системой относительно функций $\psi(x,t)$, $\vartheta(x,t)$. Она включает в себя линейную краевую задачу третьего рода для неоднородного параболического уравнения (21) с неизвестной функцией $\vartheta(x,t)$ в правой части, а также содержит условия (25), (26), описывающие изменение по времени этой функции. Прежде чем перейти к доказательству разрешимости системы (21)–(26) в классе гладких функций, введем переменную $t' = T - t$ и представим эту систему в виде

$$(c\rho\psi)_{t'} - (a\psi_x)_x - \mathcal{B}_0\psi_x + \big\{\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{0x}\big\}\psi = \gamma_u\vartheta(x,t'), \quad 0 < x < l,\ 0 < t' \leqslant T, \tag{40}$$

$$a\psi_x(x,t') - \big(\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_0\big)\psi(x,t')\big|_{x=0} = 0, \quad 0 < t' \leqslant T, \tag{41}$$

$$a\psi_x(x,t') + \big(\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_0\big)\psi(x,t')\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t' \leqslant T, \tag{42}$$

$$\psi(x,t')\big|_{t'=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{43}$$

$$\vartheta_{t'}(x,t') = cu_{t'}\psi(x,t'), \quad 0 < x < l, 0 < t' \leqslant T, \tag{44}$$

$$\vartheta(x,t')\big|_{t'=0} = 2\left(\rho(x,t')\big|_{t'=0} - g(x)\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{45}$$

Замечание 1. В уравнении (40) и в граничных условиях (41), (42) соответствующие коэффициенты при $\psi(x,t')$ имеют следующий вид (с учетом определений (27) и (38)):

$$\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{0x} = b_x(x,t',u) - d(x,t',u) - d_u(x,t',u)u,$$

$$\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_0 = h(t',u) + h_u(t',u)u - b(x,t',u)\big|_{x=0},$$

$$\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_0 = e(t',u) + e_u(t',u)u + b(x,t',u)\big|_{x=l}.$$

5.1. Аппроксимация системы (40)–(45) методом Ротэ. Для доказательства разрешимости сопряженной задачи (40)–(45) в классе гладких функций воспользуемся методом прямых Ротэ, заменяя ее дифференциально-разностной системой определения $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$ — приближенных значений функций $\psi(x,t')$ и $\vartheta(x,t')$ в области $\overline{Q}_\tau = \{0 \leqslant x \leqslant l, t_n \in \overline{\omega}_\tau\}$ (t_n — узлы равномерной сетки $\overline{\omega}_\tau = \{t_n\} \in [0,T]$ с шагом $\tau = TN^{-1}$):

$$c_n\rho_n\psi_{n\bar t} - (a_n\psi_{nx})_x - \mathcal{B}_{0n}\psi_{nx} + \big\{(c_n\rho_n)_{\bar t} + \mathcal{B}_{1n} - (\mathcal{B}_{0n})_x\big\}\psi_n = \gamma_{un}\vartheta_n, \tag{46}$$

$$(x,t_n) \in Q_\tau = \{0 < x < l,\ 0 < t_n \leqslant T\},$$

$$a_n\psi_{nx} - \big(\mathcal{A}_{2n} - \mathcal{B}_{0n}\big)\psi_n\big|_{x=0} = 0, \quad 0 < t_n \leqslant T, \tag{47}$$

$$a_n\psi_{nx} + \big(\mathcal{A}_{3n} + \mathcal{B}_{0n}\big)\psi_n\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t_n \leqslant T, \tag{48}$$

$$\psi_0(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{49}$$

$$\vartheta_{n\bar t}(x) = c_nu_{n\bar t}\psi_{n-1}, \quad (x,t_n) \in Q_\tau, \tag{50}$$

$$\vartheta_0(x) = 2\left(\rho_n(x)\big|_{n=0} - g(x)\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{51}$$

В этих соотношениях a_n, c_n, $\mathcal{B}_{0n}$, $\mathcal{B}_{1n}$, γ_{un} и т.д. — значения соответствующих функций в точке (x,t_n,u_n); кроме того, $u_n(x)$ и $\rho_n(x)$ — известные решения исходной системы (1)–(5), т.е. функции $u(x,t')$ и $\rho(x,t')$ на временном слое $t' = t_n$,

$$u_{n\bar t} = \big(u_n(x) - u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad u_{nx} = du_n(x)/dx, \quad \rho_{n\bar t} = \big(\rho_n(x) - \rho_{n-1}(x)\big)\tau^{-1},$$

$$\psi_{n-1} = \psi(x,t_{n-1},u_{n-1}), \quad \psi_{n\bar t} = \big(\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad \psi_{nx} = d\psi_n(x)/dx, \quad \vartheta_{n\bar t} = \big(\vartheta_n(x) - \vartheta_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}.$$

Доказательство разрешимости сопряженной задачи (40)–(45) методом Ротэ включает в себя несколько основных этапов.

Этап 1. Исследование дифференциально-разностной краевой задачи (46)–(49) в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ в предположении, что $\vartheta_n(x)$ — известная функция. Цель этого этапа — доказать однозначную разрешимость такой задачи и получить соответствующие априорные оценки для ее решения $\psi_n(x)$, не зависящие от x, τ, n.

Этап 2. Доказательство существования и единственности решения $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$ дифференциально-разностной системы (46)–(51) в соответствующих функциональных пространствах на основе результатов этапа 1.

Этап 3. Предельный переход при $n \to \infty$ в условиях (46)–(51) в силу компактности семейства $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$ на основе априорных оценок, полученных на этапе 2. Завершение доказательства однозначной разрешимости сопряженной задачи (40)–(45) в классе гладких функций.

5.2. Дифференциально-разностная краевая задача (46)–(49). Следующая лемма устанавливает однозначную разрешимость в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ линейной дифференциально-разностной краевой задачи (46)–(49) в предположении, что функция $\vartheta_n(x)$ в правой части уравнения (46) равномерно ограничена в $\overline{Q}_\tau$ и принадлежит $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$:

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|\vartheta_n(x)\bigr| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0, \quad \bigl|\hat{\vartheta}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \overline{\mathcal{M}}_1, \quad \overline{\mathcal{M}}_0, \overline{\mathcal{M}}_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Лемма 1. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 4 *и пусть* $\vartheta_n(x)$ *— известная функция с указанными выше свойствами.*

Тогда линейная дифференциально-разностная краевая задача (46)–(49) *разрешима в* $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ *при любом достаточно малом шаге* τ *сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *и для ее решения* $\psi_n(x)$ *справедливы оценки*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|\psi_n(x)\bigr| \leqslant \overline{M}_0, \quad \bigl|\hat{\psi}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant \overline{M}, \tag{52}$$

в которых $\overline{M}_0$ *и* $\overline{M}$ *— положительные постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Это решение является единственным при выполнении условий

$$b_{\max} + h_{u\,\max} M_0 \leqslant h_{\min}, \quad b_{\max} + e_{u\,\max} M_0 \leqslant e_{\min}, \tag{53}$$

где $M_0 > 0$ *— постоянная из принципа максимума для краевой задачи* (1)–(4): $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}}\bigl|u(x,t)\bigr| \leqslant M_0$.

Доказательство. Утверждение леммы 1 основано на результатах теоремы 4.2.9 из [6, 7] об однозначной разрешимости в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ краевой задачи третьего рода для линейного дифференциально-разностного уравнения. Эти результаты являются аналогами известных результатов [1] для линейных параболических уравнений. Возможность применения теоремы 4.2.9 обеспечивается принадлежностью коэффициентов уравнения (46) классу $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ в силу требований теоремы 4 к входным данным, а также в силу оценок теоремы 1 для решения $\{u(x,t),\ \rho(x,t)\}$ исходной задачи (1)–(5) (см. вид коэффициентов $\mathcal{B}_{0x}$ и $\mathcal{B}_1$ в (27)). Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что соответствующие коэффициенты в граничных условиях (47), (48) принадлежат классу $O_\tau^1(\overline{\omega}_\tau)$ как сеточные функции, определенные на сетке $\overline{\omega}_\tau$ (см. вид коэффициентов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ в (38) и замечание 1).

Применительно к задаче (46)–(49) постоянная $\overline{M}_0$ из оценки принципа максимума для $\psi_n(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\overline{M}_0 &= c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\,\max}\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|\vartheta_n(x)\bigr| T\exp(K_{13}T),\\
K_{13} &\geqslant (1+\varepsilon)\Bigl\{c_{\max}\rho_{t\,\max} + (c_{t\,\max} + c_{u\,\max}u_{t\,\max})\rho_{\max} + \max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_1| + \max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_{0x}|\Bigr\}c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1},\\
&\varepsilon > 0 \text{ любое}, \quad \tau \leqslant \tau_0 = \varepsilon K_{13}^{-1}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Оценка для $\bigl|\hat{\psi}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2}$ следует из соответствующей оценки теоремы 4.2.9 из [6, 7], которая применительно к задаче (46)–(49) принимает вид

$$\bigl|\hat{\psi}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{14}\bigl|\hat{\vartheta}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}, \tag{55}$$

где $K_{14} > 0$ — постоянная, зависящая от норм в $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ коэффициентов уравнения (46), а следовательно, и от норм в соответствующих сеточно-непрерывных классах Гельдера функций $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ (см. вид коэффициентов $\mathcal{B}_{0x}$ и $\mathcal{B}_1$ в (27)).

5.3. Дифференциально-разностная система (46)–(51). Переходя к этапу 2, заметим, что сеточно-непрерывная функция $\vartheta_n(x)$ заранее не известна и ищется одновременно с $\psi_n(x)$ из системы (46)–(51). Существование решения $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$ этой системы устанавливает

Лемма 2. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 4 *и пусть шаг сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \tau \leqslant \min(\tau_0, \tau_{00}), \quad 0 < \tau_0 = \varepsilon K_{13}^{-1}, \quad 0 < \tau_{00} = \varepsilon K_{15}^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \textit{ любое},$$

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

где $K_{13} > 0$ — постоянная, определенная в (54), $K_{15} > 0$ *— постоянная вида*

$$K_{15} = c_{\max}\, u_{t\,\max}\, c_{\min}^{-1}\, \rho_{\min}^{-1}\, \gamma_{u\,\max}\, T \exp(K_{13}T).$$

Тогда при выполнении условия (53) *дифференциально-разностная система* (46)–(51) *имеет в области* $\overline{Q}_\tau$ *единственное решение* $\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\}$, *обладающее свойствами*

$$\psi_n(x) \in H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau), \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\psi_n(x)\bigr| \leqslant \overline{M}_0, \quad \bigl|\hat{\psi}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \overline{M}_1, \quad \bigl|\hat{\psi}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant \overline{M},$$

$$\vartheta_n(x) \in H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau), \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\vartheta_n(x)\bigr| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0, \quad \bigl|\hat{\vartheta}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \overline{\mathcal{M}}_1, \tag{56}$$

где $\overline{M}_0$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}$, $\overline{\mathcal{M}}_0$ *и* $\overline{\mathcal{M}}_1$ *— положительные постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Доказательство. Исходя из начального момента времени $t_0 = 0$, предположим, что вплоть до момента $t' = t_{n-1}$ решения $\{\psi_j(x), \vartheta_j(x)\}$ $(j = \overline{1, n-1})$ уже найдены и соответствующие оценки для них уже установлены, в частности, $\max\limits_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\vartheta_{n-1}(x)\bigr| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0$, $\overline{\mathcal{M}}_0 = (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max})$.

Из соотношения (50) следует, что

$$\bigl|\vartheta_n(x)\bigr| \leqslant \max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\vartheta_{n-1}(x)\bigr| + \tau c_{\max} u_{t\,\max} \max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\psi_{n-1}(x)\bigr|.$$

Применение принципа максимума с учетом граничных и начальных условий для $\psi_{n-1}(x)$ позволяет установить, что

$$\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\psi_{n-1}(x)\bigr| \leqslant c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\,\max} T \exp(K_{13}T) \max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\vartheta_{n-1}(x)\bigr|.$$

Учитывая эту оценку и выбирая величину шага сетки $\overline{\omega}_\tau$ из условия

$$\tau \leqslant \varepsilon \bigl\{c_{\max}\, u_{t\,\max}\, c_{\min}^{-1}\, \rho_{\min}^{-1}\, \gamma_{u\,\max}\, T \exp(K_{13}T)\bigr\}^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое},$$

получаем неравенства

$$\bigl|\vartheta_n(x)\bigr| \leqslant (1+\varepsilon) \max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\vartheta_{n-1}(x)\bigr| \leqslant (1+\varepsilon)\overline{\mathcal{M}}_0,$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\vartheta_n(x)\bigr| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0, \quad \overline{\mathcal{M}}_0 = (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max}).$$

Наличие оценки для $\bigl|\vartheta_n(x)\bigr|$ позволяет применить принцип максимума уже для $\psi_n(x)$ и установить, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\psi_n(x)\bigr| \leqslant c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\,\max} T \exp(K_{13}T) \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\vartheta_n(x)\bigr|,$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \bigl|\psi_n(x)\bigr| \leqslant \overline{M}_0, \quad \overline{M}_0 = (1+\varepsilon) c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\,\max}(\rho_{\max} + g_{\max}) T \exp(K_{13}T). \tag{57}$$

Дальнейшее доказательство леммы 2 связано с оценкой нормы $\psi_n(x)$ в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$. Ее вывод основан на принадлежности $\psi_n(x)$ (как решения дифференциально-разностного уравнения (46) с установленной оценкой (57)) некоторому специальному классу $\mathcal{B}_{2\tau}$ сеточно-непрерывных функций, вложимому в $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$. Это утверждение следует из соответствующих теорем 4.3.1 и 4.3.2 из [6,7] для $\mathcal{B}_{2\tau}$, который является дискретным аналогом известного класса $\mathcal{B}_2$ из [1]. Применительно к $\psi_n(x)$ искомая оценка имеет вид

$$\bigl|\hat{\psi}(x)\bigr|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \overline{M}_1,$$

где постоянная $\overline{M}_1 > 0$ зависит лишь от параметров класса $\mathcal{B}_{2\tau}$, в частности от $\overline{M}_0$, $\overline{Q}_\tau$ и от равномерных оценок коэффициентов уравнения. Заметим, что оценка принципа максимума (57) позволяет установить из граничных условий (47), (48) оценки для приграничных производных $\psi_{nx}(x)$ при $x = 0$, $x = l$. Это означает ограниченность в замкнутой области величины $\langle\hat{\psi}(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$, входящей в определение нормы в классе $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}$.

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

Переходя к получению оценки $\left|\hat{\psi}(x)\right|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant \overline{M}$, заметим, что эта оценка связана в силу (55) с получением оценки $\left|\hat{\vartheta}(x)\right|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$. Из соотношения (50) сразу следует, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \left|\vartheta_{n\bar{t}}(x)\right| \leqslant c_{\max}\, u_{t\,\max}\, \overline{M}_0.$$

Кроме того, в силу (50) справедливо представление

$$\vartheta_n(x) = \vartheta_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \tau c_j u_{j\bar{t}}(x)\psi_{j-1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Это представление позволяет оценить величину $\langle\hat{\vartheta}(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$, исходя из ее определения и учитывая условие (51) для $\vartheta_0(x)$, а также соответствующую гладкость функции $\rho(x,t)$ и принадлежность финальной функции $g(x)$ пространству $H^\lambda[0,l]$. Кроме того, оценка $\langle\hat{\vartheta}(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$ связана с требованиями теоремы 4 к гладкости коэффициента $c(x,t,u)$, с принадлежностью производных $u_{j\bar{t}}(x)$ $(j=\overline{1,n})$ классу $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ (см. теорему 1), а также с указанной выше ограниченностью величины $\langle\hat{\psi}(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$ (при $j=\overline{1,n}$).

Полученные оценки для $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_n(x)\right|$, $\langle\hat{\vartheta}(x)\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}$ и для $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_{n\bar{t}}(x)\right|$ позволяют в силу определения нормы в классе $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ установить искомую оценку для $\left|\hat{\vartheta}(x)\right|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}$ в (56).

Таким образом, сеточно-непрерывная функция $\vartheta_n(x)$, найденная из соотношения (50) по известным $\vartheta_{n-1}(x)$ и $\psi_{n-1}(x)$, удовлетворяет требованиям, при которых в силу леммы 1 дифференциально-разностная краевая задача третьего рода (46)–(49) имеет единственное решение $\psi_n(x)$ в классе $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ с соответствующими оценками (52). Лемма 2 доказана.

5.4. Однозначная разрешимость сопряженной задачи. Результаты леммы 2 позволяют перейти к этапу 3.

Лемма 3. *При выполнении требований теоремы* 4 *сопряженная задача* (40)–(45) *имеет гладкое решение* $\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\}$ *такое, что*

$$\psi(x,t') \in C(\overline{Q}), \quad \psi(x,t') \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \left|\psi(x,t')\right|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant \overline{M},$$

$$\vartheta_t(x,t') \in C(\overline{Q}), \quad \vartheta(x,t') \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \left|\vartheta(x,t')\right|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \overline{\mathcal{M}}.$$

При выполнении условий (53) *это решение является единственным и его можно получить как предел решения* $\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\}$ *дифференциально-разностной системы* (46)–(51) *при стремлении шага сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *к нулю.*

Доказательство. Равномерные оценки (56) (не зависящие от x, τ, n) означают компактность семейства $\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\}$ в соответствующих функциональных пространствах. Это позволяет, проводя обычные рассуждения при совершении предельного перехода в условиях (46)–(51) при $\tau\to 0$ (т.е. при $n\to\infty$), установить, что сопряженная задача (40)–(45) (в переменных (x,t'), $t'=T-t$) имеет по крайней мере одно гладкое решение $\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\}$ в указанных классах функций. Используя понятия согласования начальных и граничных данных [1] применительно к сопряженной задаче (40)–(45), отметим, что для нее выполнены условия согласования первого порядка (см. (41), (42) и (43)). Следовательно, решение $\psi(x,t')$ принадлежит классу Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}$ во всей замкнутой области $\overline{Q}$.

Покажем теперь, что решение $\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\}$ единственно в классе гладких функций таких, что

$$\sup_{(x,t')\in\overline{Q}} |\psi,\psi_x,\psi_{xx},\psi_t| < \infty, \qquad \sup_{(x,t')\in\overline{Q}} |\vartheta,\vartheta_t| < \infty.$$

Предположим, что при $t'\in[0,t^0]$, $0\leqslant t^0<T$, единственность решения $\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\}$ уже установлена. Докажем, что тогда единственность имеет место и для $t'\in[t^0,t^0+\Delta t]$, где $\Delta t>0$ — достаточно малая, но фиксированная величина, что позволяет за конечное число шагов исчерпать весь отрезок $[0,T]$.

Допустим противное, т.е. что при $t'\in[t^0,t^0+\Delta t]$ существуют два решения сопряженной задачи (40)–(45): $\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\}$ и $\{\overline{\psi}(x,t'),\overline{\vartheta}(x,t')\}$. Выражения для $\vartheta(x,t')$ и $\overline{\vartheta}(x,t')$ при таком t' имеют вид (см. (44))

$$\vartheta(x,t') = \int_{t^0}^{t'} c(x,\tau,u)u_{t'}(x,\tau)\psi(x,\tau)\,d\tau + \vartheta(x,t^0), \quad \overline{\vartheta}(x,t') = \int_{t^0}^{t'} c(x,\tau,u)u_{t'}(x,\tau)\overline{\psi}(x,\tau)\,d\tau + \overline{\vartheta}(x,t^0).$$

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

Так как по предположению $\vartheta(x,t^0)=\overline{\vartheta}(x,t^0)$, то для разностей

$$\eta(x,t')=\psi(x,t')-\overline{\psi}(x,t'),\quad \zeta(x,t')=\vartheta(x,t')-\overline{\vartheta}(x,t')$$

в области $\overline{Q}_{t^0}=\{0\leqslant x\leqslant l,\ t^0\leqslant t'\leqslant t^0+\Delta t\}$ следует оценка

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\zeta(x,t')\big|\leqslant \Delta t c_{\max}u_{t\max}\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\eta(x,t')\big|. \tag{58}$$

Кроме того, для $\eta(x,t')$ имеет место линейная краевая задача вида (40)–(43) с соответствующей правой частью уравнения:

$$\begin{gathered}
c\rho\eta_{t'}-(a\eta_x)_x-\mathcal{B}_0\eta_x+\big\{(c\rho)_{t'}+\mathcal{B}_1-\mathcal{B}_{0x}\big\}\eta=\gamma_u\zeta(x,t'),\quad (x,t')\in Q_{t^0},\\
a\eta_x(x,t')-(\mathcal{A}_2-\mathcal{B}_0)\eta(x,t')\big|_{x=0}=0,\quad t^0<t'\leqslant t^0+\Delta t,\\
a\eta_x(x,t')+(\mathcal{A}_3+\mathcal{B}_0)\eta(x,t')\big|_{x=l}=0,\quad t^0<t'\leqslant t^0+\Delta t,\\
\eta(x,t^0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,
\end{gathered}$$

и с коэффициентами $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, определенными в (27) и (38) (см. также замечание 1).

Применение принципа максимума в области $\overline{Q}_{t^0}$ позволяет получить оценку

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\eta(x,t')\big|\leqslant \Delta t\exp(K_{13}\Delta t)\,c_{\min}^{-1}\,\rho_{\min}^{-1}\,\gamma_{u\max}\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\zeta(x,t')\big|,$$

где $K_{13}>0$ — постоянная, определенная в (54). Отсюда и из (58) следует, что

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\eta(x,t')\big|\leqslant \Delta t\exp(K_{13}\Delta t)c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}c_{\max}u_{t\max}T\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\eta(x,t')\big|.$$

Выбирая затем величину $\Delta t>0$ из условия

$$\Delta t\leqslant(1-\mu)\big\{c_{\max}u_{t\max}c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}T\exp(K_{13}T)\big\}^{-1},\quad 0<\mu<1 \text{ любое},$$

приходим к соотношению

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\eta(x,t')\big|\leqslant(1-\mu)\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\eta(x,t')\big|,\quad 0<\mu<1 \text{ любое}.$$

Это означает, что $\max\limits_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\eta(x,t')\big|=0$, а следовательно, и $\max\limits_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\zeta(x,t')\big|=0$ в силу (58).

Таким образом, предположение о неединственности решения сопряженной задачи (40)–(45) при $t'\in[t^0,t^0+\Delta t]$ приводит к противоречию. Повторение подобных рассуждений для последующих отрезков времени вплоть до конечного момента T позволяет установить единственность решения $\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\}$ на всем отрезке $[0,T]$. Лемма 3 доказана.

6. Представление дифференциала с помощью сопряженной задачи. Для завершения доказательства теоремы 4 возвращаемся к сопряженной задаче (21)–(26) в переменных (x,t) и установим справедливость представления (20) для дифференциала минимизируемого функционала $J_g(q)$.

Покажем, что приращение функционала $J_g(q)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\Delta J_g(q) \;=\;& \int_0^T\psi(x,t)\big|_{x=l}\Delta q(t)\,dt+\int_0^T\!\!\int_0^l\mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt+\int_0^T\mathcal{F}_1(t)\psi(x,t)\big|_{x=l}\,dt-\\
&-\int_0^T\mathcal{F}_0(t)\psi(x,t)\big|_{x=0}\,dt+\int_0^l\big(\Delta\rho(x,T)\big)^2\,dx,
\end{aligned}\tag{59}$$

где $\mathcal{F}(x,t)$ — правая часть уравнения (33), $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$ — правые части граничных условий (34) и (35) при $x=0$ и $x=l$, для которых справедливо неравенство (39).

Рассмотрим вспомогательное выражение

$$I=\int_0^T\!\!\int_0^l\psi\big\{c\rho\Delta u_t-\mathcal{L}\Delta u+cu_t\Delta\rho\big\}\,dx\,dt+\int_0^T\!\!\int_0^l\Delta u\big\{(c\rho\psi)_t+\mathcal{L}^*\psi+\gamma_u\vartheta\big\}\,dx\,dt-\int_0^T\!\!\int_0^l(\vartheta\Delta\rho)_t\,dx\,dt,$$

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

в котором операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$ имеют соответственно вид

$$\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(x,t,u)\Delta u_x)_x - \mathcal{B}_0(x,t,u)\Delta u_x - \mathcal{B}_1(x,t,u)\Delta u,$$

$$\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x,t,u)\psi_x)_x + \big(\mathcal{B}_0(x,t,u)\psi\big)_x - \mathcal{B}_1(x,t,u)\psi$$

с коэффициентами $\mathcal{B}_0(x,t,u)$ и $\mathcal{B}_1(x,t,u)$, определенными в (27).

С одной стороны, в силу уравнения (21) для $\psi(x,t)$ и уравнения (33) для $\Delta u(x,t)$ и с учетом условий (26) для $\vartheta(x,t)$ и (37) для $\Delta\rho(x,t)$ имеем

$$I = \int_0^T\int_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt - 2\int_0^l \big(\rho(x,T)-g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx.$$

С другой стороны, представим I в виде $I = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = \int_0^T\int_0^l \big\{\psi c\rho\Delta u_t + \Delta u(c\rho\psi)_t\big\}\,dx\,dt, \quad I_2 = \int_0^T\int_0^l \big\{-\psi\mathcal{L}\Delta u + \Delta u\mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt,$$

$$I_3 = \int_0^T\int_0^l \psi c u_t\Delta\rho\,dx\,dt + \int_0^T\int_0^l \Delta u\gamma_u\vartheta\,dx\,dt - \int_0^T\int_0^l (\vartheta\Delta\rho)_t\,dx\,dt.$$

Учитывая соотношения (21)–(24) для $\psi(x,t)$, (33)–(36) для $\Delta u(x,t)$, а также уравнения (25) для $\vartheta(x,t)$ и (37) для $\Delta\rho(x,t)$, заключаем, что

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^l \big[\psi c\rho\Delta u\big]_{t=0}^{t=T}\,dx = 0,\\
I_2 &= -\int_0^T \big[\psi a\Delta u_x\big]_{x=0}^{x=l}\,dt + \int_0^T \big[\psi\mathcal{B}_0\Delta u\big]_{x=0}^{x=l}\,dt + \int_0^T \big[\Delta u a\psi_x\big]_{x=0}^{x=l}\,dt =\\
&= \int_0^T \psi\big|_{x=l}\left(\mathcal{A}_3\Delta u\big|_{x=l} - \Delta q - \mathcal{F}_1\right)\,dt + \int_0^T \psi\big|_{x=0}\left(\mathcal{A}_2\Delta u\big|_{x=0} + \mathcal{F}_0\right)\,dt+\\
&\quad + \int_0^T \Delta u\big|_{x=l}\left(a\psi_x + \mathcal{B}_0\psi\right)\big|_{x=l}\,dt - \int_0^T \Delta u\big|_{x=0}\left(a\psi_x + \mathcal{B}_0\psi\right)\big|_{x=0}\,dt =\\
&= -\int_0^T \psi\big|_{x=l}\Delta q\,dt - \int_0^T \psi\big|_{x=l}\mathcal{F}_1\,dt + \int_0^T \psi\big|_{x=0}\mathcal{F}_0\,dt,\\
I_3 &= \int_0^T\int_0^l \psi c u_t\Delta\rho\,dx\,dt + \int_0^T\int_0^l \Delta u\gamma_u\vartheta\,dx\,dt - \int_0^T\int_0^l \vartheta_t\Delta\rho\,dx\,dt - \int_0^T\int_0^l \vartheta\Delta\rho_t\,dx\,dt =\\
&= \int_0^T\int_0^l \big(\psi c u_t - \vartheta_t\big)\Delta\rho\,dx\,dt - \int_0^T\int_0^l \vartheta\big(\Delta\rho_t - \gamma_u\Delta u\big)\,dx\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, используя вспомогательное выражение I, получаем:

$$\begin{aligned}
2\int_0^l \big(\rho(x,T)-g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx = \; & \int_0^T \psi(x,t)\big|_{x=l}\Delta q(t)\,dt + \int_0^T\int_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt +\\
& + \int_0^T \mathcal{F}_1(t)\psi(x,t)\big|_{x=l}\,dt - \int_0^T \mathcal{F}_0(t)\psi(x,t)\big|_{x=0}\,dt.
\end{aligned}$$

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

Это означает с учетом (28), что представление (59) действительно имеет место. Из этого представления на основании оценок леммы 3 для $\psi(x,t)$, оценок (30) для $\Delta\rho(x,t)$ и оценок (39) для функций $\mathcal{F}(x,t)$, $\mathcal{F}_0(t)$ и $\mathcal{F}_1(t)$, заключаем, что справедливо равенство

$$\Delta J_g(q) = \int\limits_0^T \psi(x,t)\big|_{x=l}\Delta q(t)\,dt + o\left(\|\Delta q\|_{W_2^{3/2}[0,T]}\right).$$

Интеграл в этом равенстве является линейным функционалом в $W_2^{3/2}[0,T]$ относительно Δq, т.е. приращение функционала $\Delta J_g(q)$ вида (28) приведено к виду (29), что и требовалось. Следовательно, функционал $J_g(q)$ дифференцируем на множестве Θ_R и его дифференциал $d\,J_g(q)$ в точке $q \in \Theta_R$ представим в виде (20). Этим утверждением доказательство теоремы 4 завершено.

Замечание 2. Множество допустимых граничных управлений Θ_R кроме требований гладкости и согласования (см. (9)) может включать априорные представления о качественной структуре искомых управляющих режимов (знание участков знакоопределенности, монотонности, выпуклости, расположения точек экстремумов и перегибов и т.п.). Такие ограничения качественного характера позволяют сузить множество Θ_R, в частности они могут привести к единственности оптимального управления — в общем случае любой граничный режим из множества $\Theta_R^* \in \Theta_R$ (см. (11)) является оптимальным управляющим воздействием. Кроме того, такого рода ограничения обладают стабилизирующими свойствами (см., например, [11, 12]), что позволяет использовать их для приближенного решения широкого круга задач, в том числе задач минимизации. Так в [12, глава 6] априорная информация о качественном поведении допустимых управляющих воздействий использована для численного решения методом проекции сопряженных градиентов различных вариационных задач. Возможность эффективного применения этого метода для минимизации функционала $J_g(q)$ основана на полученном в теореме 4 явном представлении $d\,J_g(q)$ через решение сопряженной задачи.

7. Математические модели физико-химического процесса с изменяющимися внутренними свойствами. Различные постановки нелинейной параболической задачи (1)–(5) возникают при моделировании физико-химических процессов, в которых внутренние характеристики материалов подвергаются изменениям. Вариационная задача вида (10) с управляющим воздействием в граничном условии связана с возможностью управлять такими процессами в самых разнообразных приложениях. В качестве одного из приложений можно привести изменение фильтрационных свойств пластов при современных способах разработки нефтегазовых месторождений. Еще одно из возможных приложений связано с современными методами диагностики и лечения в медицине. Следует отметить также использование такого вариационного подхода в задачах восстановления истории теплового воздействия по конечному состоянию образца материала. Соответствующие задачи имеют самый широкий круг применения — от исследования тепловой истории массива пород в геологии до восстановления условий на поверхности спускаемого аппарата в аэрокосмической технике.

Остановимся на приложениях, рассмотренных в [3, 4] и связанных с использованием композиционных материалов в системах теплозащиты технических объектов, подвергающихся воздействию высоких температур (аэрокосмические аппараты, энергоустановки и т.п.). При высокотемпературном нагреве теплозащитный композиционный материал испытывает разнообразные физико-химические превращения и подвергается деструкции — необратимым изменениям внутренних параметров (таких как плотность, концентрация компонентов композита и т.п.).

Приведем математическую модель процесса разложения термодеструктирующего материала пластины конечной толщины под воздействием теплового потока. В основе модели — представление этого процесса с помощью аппроксимации суммой нескольких стадий (реакций) с различными кинетическими параметрами [13]. Соответствующая задача термодеструкции состоит в нахождении функций $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ — температуры и концентрации компонентов композита из условий

$$c(u)\,\rho(x,t)\,u_t(x,t) - (\lambda(u)\,u_x)_x = 0, \quad (x,t) \in Q = \{0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}, \tag{60}$$

$$\lambda(u)\,u_x\big|_{x=0} = 0, \quad \lambda(u)\,u_x + \epsilon\sigma u^4\big|_{x=l} = q(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{61}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{62}$$

2021, **22** (4), 263–280. doi 10.26089/NumMet.v22r417

$$\rho(x,t) = \sum_{s=1}^{S} \rho^s(x,t), \quad \rho^s(x,t) = \rho_0^s(x) \exp\left(-A^s \int_0^t \exp\left(-\frac{E^s}{u(x,\tau)} \right) d\tau \right), \tag{63}$$

в которых $c(u)$ и $\lambda(u)$ — теплофизические характеристики пластины (коэффициенты теплоемкости и теплопроводности), $q(t)$ — плотность теплового потока, σ —константа Стефана–Больцмана, ϵ — степень черноты, S — число стадий (реакций) композита, A^s и E^s — кинетические параметры s-ой стадии, $\rho^s(x,t)$ — концентрация s-ой стадии, $\varphi(x) > 0$ и $\rho_0^s(x) > 0$ — начальные распределения температуры и концентраций стадий, l — толщина пластины, T — время теплового воздействия.

Математические модели, описывающие процесс разложения других параметров композиционного материала, отличаются видом условия (63). Например, если $\rho(x,t)$ — распределение плотности этого материала, то условие (63) принимает вид

$$\rho(x,t) = \rho_0(x) \exp\left(-A \int_0^t \exp\left(-\frac{E}{u(x,\tau)} \right) d\tau \right), \quad \rho_0(x) > 0,$$

где $\rho_0(x)$ —начальная плотность композиционного материала (до теплового воздействия).

На примере модели (60)–(63) приведем постановку вариационной задачи — найти граничный режим $q(t)$, действующий на поверхность образца $x = l$, при котором значения концентраций стадий ρ^s близки в конечный момент времени $t = T$ к заданным значениям g^s:

$$\inf_{q \in \Theta_R} J_g(q), \quad J_g(q) = \sum_{s=1}^{S} \sum_{k=1}^{K} \left(\rho^s(l_k, T) - g_k^s \right)^2. \tag{64}$$

Здесь g_k^s — значения концентраций при $t = T$, заданные для каждой s-ой стадии в точках $x = l_k$, $0 \leqslant l_k \leqslant l$, K — число таких точек вдоль толщины пластины; Θ_R — множество температурных режимов на поверхности образца $x = l$.

Если модель (60)–(63) описывает управляемый процесс термодеструкции с управляющим воздействием граничного потока $q(t)$ (например, для совершенствования системы теплозащиты технического объекта), то g_k^s представляют собой желаемые значения концентраций. Соответственно, множество Θ_R в постановке (64) — множество допустимых граничных управлений. При его задании могут учитываться требования как количественного, так и качественного характера к граничному температурному режиму.

Возникновение вариационной задачи (64) может быть связано также с необходимостью восстановить историю теплового воздействия на термочувствительный образец, анализируя его конечное состояние. Применительно к аэрокосмической технике постановка (64) позволяет исследовать состояние системы теплозащиты спускаемого аппарата — требуется определить граничный поток $q(t)$, под воздействием которого произошли необратимые изменения термодеструктирующего композиционного материала. В данной постановке g_k^s — значения концентраций стадий при $t = T$ (т.е. после окончания теплового воздействия), полученные при микроструктурном анализе. Множество Θ_R содержит априорную информацию об искомом граничном потоке (данные об участках его монотонного возрастания и убывания и т.п., а также данные количественного характера). Сужение множества Θ_R за счет такой информации особенно важно из-за наличия локальных минимумов функционала $J_g(q)$. Некоторые результаты численного восстановления граничных режимов по конечному состоянию теплозащитного композиционного материала для модели типа (60)–(63) представлены в [12, глава 6].

8. Заключение. Исследована проблема оптимального управления системой, которая состоит из краевой задачи третьего рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, а также из уравнения изменения по времени этого коэффициента. Под управляющим воздействием граничного режима искомый коэффициент должен достичь в конечный момент времени заданного значения. Обоснована постановка соответствующей вариационной задачи о граничном управлении с финальным наблюдением. Выбор компактного множества допустимых граничных управлений и доказательство непрерывности минимизируемого функционала основаны на оценках в классах Гельдера, полученных для решения исходной нелинейной параболической системы. Установлены условия дифференцируемости этого функционала на выбранном множестве допустимых граничных управлений и получено явное представление его дифференциала через решение сопряженной задачи. Значительное место в исследовании занимает доказательство однозначной разрешимости этой сопряженной задачи в классе гладких функций. Данная задача является системой, которая включает в себя краевую задачу третьего рода для линейного параболического уравнения с неизвестной функцией в правой части, а также уравнение изменения по времени этой функции. Доказательство основано на методе Ротэ и соответствующих априорных оценках в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера. Полученные результаты позволяют обосновать указанное представление дифференциала минимизируемого функционала, что имеет важное значение при численном нахождении оптимального управления. Наличие такого явного представления обеспечивает существенную экономию вычислительных затрат при определении градиента в применяемых численных методах минимизации.

Постановка исследованной в статье задачи о граничном управлении с финальным наблюдением существенно отличается от обычных постановок задач управления, которые относятся к уравнениям с заданными коэффициентами. Полученные результаты имеют и практическое значение для самых разных приложений, связанных с моделированием и управлением физико-химическими процессами с изменяющимися внутренними свойствами материалов (современные технологии в технических областях, медицине, геологии и т.п.). В статье приведены примеры использования конечного состояния термодеструктирующего композиционного материала для анализа системы теплозащиты объекта, подвергающегося воздействию высоких температур.

Список литературы

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
3. *Гольдман Н.Л.* Нелинейная задача для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени и ее приложения в математических моделях физико-химических процессов // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 247–266.
4. *Gol'dman N.L.* Boundary value problems for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient // J. Differential Equations. 2019. **266**, N 8. 4925–4952.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
6. *Gol'dman N.L.* Inverse Stefan problems. Dordrecht: Kluwer, 1997.
7. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
8. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
10. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации (в 2-х томах). М.: МЦНМО, 2011.
11. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
12. *Gilyazov S.F., Gol'dman N.L.* Regularization of ill-posed problems by iteration methods. Dordrecht: Kluwer, 2000.
13. *Алексеев А.К.* О восстановлении истории нагрева пластины из термодеструктирующего материала по профилю плотности в конечном состоянии // Теплофизика высоких температур. 1993. **31**, № 6. 975–979.

Поступила в редакцию
1 июня 2021 г.

Принята к публикации
13 октября 2021 г.

Информация об авторе

Наталия Львовна Гольдман — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр., Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 1, стр. 4, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; AMS Press, Providence, 1968).
2. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964; Mir, Moscow, 1968).

3. N. L. Gol'dman, "A Nonlinear Problem for a Parabolic Equation with an Unknown Coefficient at the Time Derivative and Its Applications in Mathematical Models of Physical-Chemical Processes," Vychisl. Metody Programm. **18**, 247–266 (2017).
4. N. L. Gol'dman, "Boundary Value Problems for a Quasilinear Parabolic Equation with an Unknown Coefficient," J. Differ. Equations **266** (8), 4925–4952 (2019).
5. J.-L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations.* (Springer, Berlin, 1971; Mir, Moscow, 1972).
6. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
7. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems. Theory and Methods of Solutions* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1999) [in Russian].
8. S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems* (Nauka, Moscow, 1969; Springer, New York, 1975).
9. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1977; Pergamon Press, New York, 1982).
10. F. P. Vasil'ev, *Optimization Methods*, Vols. 1, 2 (MTsNMO, Moscow, 2011) [in Russian].
11. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Regularizing Algorithms and a Priori Information* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
12. S. F. Gilyazov and N. L. Gol'dman, *Regularization of Ill-Posed Problems by Iteration Methods* (Kluwer, Dordrecht, 2000).
13. A. K. Alekseev, "On the Restoration of the Heating History of a Plate Made of a Thermodestructible Material from the Density Profile in the Final State," Teplofiz. Vysok. Temp. **31** (6), 975–979 (1993) [High Temp. **31** (6), 897–901 (1993)].

Received
June 1, 2021

Accepted for publication
October 13, 2021

Information about the author

Nataliya L. Gol'dman — Dr. Sci., Leading Scientist, Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Leninskie Gory, 1, building 4, 119991, Moscow, Russia.