



## Моделирование и визуализация формирования вихревого кольца, его распространения и переноса им пассивной примеси

**К. Н. Волков**

*Балтийский государственный технический университет “Военмех”  
им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Российская Федерация  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3797-4645>, e-mail: [dsci@mail.ru](mailto:dsci@mail.ru)*

**В. Н. Емельянов**

*Балтийский государственный технический университет “Военмех”  
им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Российская Федерация  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9750-3488>, e-mail: [vlademelyanov@gmail.com](mailto:vlademelyanov@gmail.com)*

**И. Е. Капранов**

*АО ЦКБ МТ “Рубин”, Санкт-Петербург, Российская Федерация  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4839-8137>, e-mail: [mrkap@yandex.ru](mailto:mrkap@yandex.ru)*

**Аннотация:** Рассматривается численное моделирование газодинамических процессов, сопровождающих формирование и распространение вихревых колец, получаемых при помощи поршневого генератора. Обсуждается влияние характеристик вихревого кольца на перенос пассивной примеси (под пассивной примесью понимаются любые частицы, движение которых не оказывает влияния на несущий поток). Для численных расчетов используются нестационарные уравнения Навье–Стокса, для дискретизации которых применяется метод конечных объемов. Результаты численного моделирования позволяют получить геометрические и динамические характеристики вихревого кольца, которые соответствуют автомодельной теории вихревого кольца и экспериментальным данным. Помимо традиционных подходов к визуализации вихревых течений, основанных на построении линий уровня различных характеристик потока, для визуализации вихревых структур используются инварианты тензора градиента скорости и метод показателей Ляпунова на конечном промежутке времени.

**Ключевые слова:** вычислительная газовая динамика, вихревая динамика, вихревое кольцо, завихренность, визуализация, метод показателей Ляпунова, метод конечных объемов.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта 21-19-00657.

**Для цитирования:** Волков К.Н., Емельянов В.Н., Капранов И.Е. Моделирование и визуализация формирования вихревого кольца, его распространения и переноса им пассивной примеси // Вычислительные методы и программирование. 2021. **22**, 183–200. doi 10.26089/NumMet.v22r311.

## Simulation and visualization of formation of vortex ring, its propagation and transportation of passive scalar

**K. N. Volkov**

*Baltic State Technical University, St. Petersburg, Russia*  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3797-4645>, e-mail: [dsci@mail.ru](mailto:dsci@mail.ru)

**V. N. Emelyanov**

*Baltic State Technical University, St. Petersburg, Russia*  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9750-3488>, e-mail: [vlademelyanov@gmail.com](mailto:vlademelyanov@gmail.com)

**I. E. Kapranov**

*AO TsKB Rubin, St. Petersburg, Russia*  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4839-8137>, e-mail: [mrkap@yandex.ru](mailto:mrkap@yandex.ru)

**Abstract:** Numerical simulation of gas-dynamic processes accompanying the formation and propagation of vortex rings obtained using a piston generator is considered. The influence of the characteristics of the vortex ring on the transfer of the passive particles is discussed (a passive scalar is any particles whose motion does not affect the flow). Unsteady Navier–Stokes equations are used for numerical calculations, and finite volume method is applied to their discretization. The results of numerical simulation make it possible to obtain the geometric and dynamic characteristics of the vortex ring, which correspond to the self-similar theory of the vortex ring and experimental data. In addition to traditional approaches to visualization of vortex flows based on the construction of contours of various flow quantities, invariants of the velocity gradient tensor and the method of Lyapunov exponents over a finite time interval are used to visualize vortex structures.

**Keywords:** computational fluid dynamics, vortex dynamics, vortex ring, vorticity, visualization, finite Lyapunov exponent method, finite volume method.

**Acknowledgements:** The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation in the framework of scientific project No. 21–19–00657.

**For citation:** K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, and I. E. Kapranov, “Simulation and visualization of formation of vortex ring, its propagation and transportation of passive scalar,” *Numerical Methods and Programming*. 22 (3), 183–200 (2021). doi 10.26089/NumMet.v22r311.

**1. Введение.** Выявление основных динамических особенностей формирования вихревых образований, а также их энергетических характеристик и способности переносить примеси является важным направлением исследований [1–4]. Исследования процессов формирования и движения вихревых колец привели к выяснению многих закономерностей вихревых движений жидкости и газа и послужили основой для разработки высокоэффективных технологических процессов [5, 6]. В течение длительного времени представления о структуре и законах движения вихревых колец основывались на математических моделях, разработанных с использованием схемы идеальной жидкости. Экспериментальные исследования позволили получить более достоверную информацию о структуре и процессах формирования реальных вихревых колец. Различные теории вихревых колец, а также взаимодействие вихревых колец обсуждаются в работах [7, 8]. Современные представления о структуре вихревых колец рассматриваются в работе [9].

В работах [10, 11] на основе обработки экспериментальных данных получены структура линий тока и распределение завихренности внутри вихревого кольца. В работах [12, 13] изложены результаты экспериментальных исследований свойств вихревых колец и предложена математическая модель их формирования, основанная на законах сохранения. Вихревые кольца формируются при импульсном истечении затопленной струи из цилиндрического сопла. В работе [14] представлены результаты экспериментального исследования вихревых колец, а визуализация структуры вихревого кольца проводится в работе [15].

При движении вихревого кольца с критической скоростью, находящейся между ламинарным и турбулентным режимами, наблюдается азимутальная лучистая симметричная структура [16]. Собственные колебания вихревого кольца в идеальной несжимаемой жидкости рассматриваются в работе [17]. Турбулентность вихревого кольца является следствием нелинейного развития множественной неустойчивости



колебаний вихревого кольца и особенностей пространственной структуры собственных колебаний. Взаимодействие двух вихревых колец и их устойчивость исследуются в работе [18]. Периодические изменения циркуляции, обусловленные нарастанием неустойчивых волн азимутальных возмущений вдоль вихревого кольца, и периодическая перестройка кольца по мере разрушения этих волн приводят к генерации мелкомасштабной турбулентности и усилению диффузионного переноса.

Распространение эллиптического вихревого кольца в вязкой среде исследуется в работе [19] в широком интервале геометрических параметров и чисел Рейнольдса. Вихревое кольцо распространяется как в неподвижной среде, так и в среде с линейным распределением скорости. Эллиптическое вихревое кольцо совершает колебания, при которых имеет место его растяжение в вертикальном направлении и сжатие в горизонтальном направлении. Затем кольцо проходит через промежуточное состояние, где оно круглое, после чего наблюдаются его деформации в обратном порядке (растяжение в горизонтальном направлении и сжатие в вертикальном).

Прямое численное моделирование динамики турбулентного вихревого кольца проводится в работе [20]. Исследуется внутренняя структура вихревого кольца и формирование вторичных вихрей из-за развития неустойчивости. Результаты расчетов соответствуют данным физического эксперимента, приведенным в работе [14]. Прямое численное моделирование распространения тонких и толстых вихревых колец при различных числах Рейнольдса обсуждается в работе [21]. На основе результатов численных расчетов предлагается поправка для скорости движения вихревого кольца, определяемой по автотельной теории.

Моделирование крупных вихрей взаимодействия двух вихревых колец, движущихся навстречу друг другу, проводится в работе [22]. Для расчетов используется динамический подход к вычислению вихревой вязкости. Метод частиц применяется в работе [23] для исследования как распространения изолированного вихревого кольца, так и для изучения взаимодействия двух вихревых колец. Взаимодействие вихревых колец с телами различной формы, а также влияние формы выходного сечения сопла на распространение вихревого кольца обсуждаются в работах [24–26] на основе данных физического эксперимента и обработки теневых картин течения.

Влияние взаимодействия вихревого кольца с препятствиями различной формы на перенос пассивной примеси исследуется в работе [27]. Обнаружены эффекты увеличения потерь примеси, наблюдаемые при определенных соотношениях геометрических размеров вихревого кольца и препятствия, а также при определенной ориентации препятствий по отношению к направлению движения вихря. Возможности применения вихревых колец, оказывающих акустическое, ударно-импульсное и химическое (осуществляется посредством примеси, переносимой кольцом) воздействия, в устройствах специального назначения рассматриваются в работах [28, 29]. При этом предполагается применение тонкодисперсных неоседающих аэрозолей, имеющих радиус частицы  $10^{-6}$ – $10^{-3}$  см, что гарантирует их перенос в разреженной области в качестве пассивной примеси.

Одной из основных характеристик вихревого кольца, движущегося в однородной среде, является пройденное им расстояние до своего распада. Значительный интерес представляет выяснение характеристик вихревых колец в зависимости от параметров, определяющих условия их формирования. Вихревые кольца обладают высокой устойчивостью и транспортирующей способностью, являясь долгоживущими образованиями. Эти свойства определяют возможность практического использования вихревых колец для транспортировки газообразных или мелкодисперсных сред в заранее определенное место (доставка горючей примеси в рабочую зону, удаление продуктов сгорания), когда другие способы доставки оказываются невозможными по каким-то причинам. Вихревые кольца возникают в головной части импульсной струи, истекающей из канала, при отрыве пограничного слоя от стенок на краях выходного отверстия. При взаимодействии движущегося кольцевого вихря с преградой на преграде возникают касательные напряжения трения, в то время как затраты энергии на образование кольцевого вихря являются незначительными. Исходя из способности вихревого кольца сохранять устойчивость после взаимодействия с препятствием, его можно использовать для транспортировки и доставки частиц в труднодоступные места для направленного воздействия на эти объекты. Вихревые кольца способны выступать в роли транспортного средства, захватывая при формировании в свой объем взвешенные частицы и унося их на большие высоты. Дальнейшее рассеивание частиц происходит благодаря воздушным течениям и интенсивной турбулентной диффузии в атмосфере. Интересное практическое использование вихревых колец, образованных взрывом, связано с тушением пожаров на фонтанирующих нефтяных и газовых скважинах. Факел гасится пускаемым по оси фонтана вихревым кольцом, которое отрывает горящую массу от устья скважины.

В данной работе разрабатывается подход к численному определению газодинамических характеристик вихревых колец, для формирования которых используется поршневой генератор. Проводится визуализация течения в вихревом кольце, основанная на использовании как традиционных подходов (построении линий уровня скорости и давления), так и подходов, в которых применяются инварианты тензора градиента скорости и показатели Ляпунова на конечном промежутке времени. Результаты расчетов сравниваются с известными экспериментальными и расчетными данными. Для верификации разработанной математической модели применяются экспериментальные данные и автомодельная теория вихревого кольца. Проведенные численные расчеты позволяют воспроизвести различные этапы распространения вихревого кольца и найти, каким образом изменяется радиус вихревого кольца и расстояние, пройденное им, от времени. Такие характеристики определяют способность вихревого кольца к переносу пассивной примеси и ее доставке в интересующие области. Разработанный подход к моделированию распространения вихревого кольца позволяет определить его основные параметры на любом расстоянии от генератора и сделать вывод о возможности применения вихревых колец в устройствах различного назначения.

**2. Геометрическая модель.** Рассмотрим осесимметричное вихревое кольцо в виде тонкого тора радиуса  $R_0$ , движущееся в безграничной массе жидкости, спокойной на бесконечности (рис. 1). Завихренность распределена равномерно внутри вихревого ядра (без азимутальной закрутки) радиуса  $a$  ( $a/R_0 \ll 1$ ) с интенсивностью (циркуляцией)  $\Gamma$ . Внутри атмосферы вихря жидкость циркулирует по замкнутым линиям тока, охватывающим тороидальное ядро вихря. Такое изолированное вихревое кольцо (кольцо Дайсона, Dyson ring) движется в идеальной жидкости стационарно (без изменения размеров и формы) в соответствии с самоиндуцированной скоростью, направленной нормально к плоскости кольца.

Генератор вихревых колец представляет собой полый цилиндр (рис. 2). Внутри цилиндра свободно движется поршень с последующей внезапной остановкой, импульсно выталкивающий порцию газа через выходное отверстие. Далее происходит отрыв образовавшейся вихревой структуры и ее перемещение на расстояние  $x_\Gamma$  в пространстве вдоль оси  $x$ , совпадающей с осью поршня. Такие генераторы позволяют получать достаточно интенсивные вихревые кольца с начальной скоростью более 30 м/с и тонким ядром, обладая сравнительно низким уровнем собственного структурного шума. Кроме этого, поршневые генераторы вихревых колец обеспечивают хорошую повторяемость параметров вихря от запуска к запуску.

Геометрическая модель представляет собой внутреннюю область генератора и область внешнего пространства за срезом сопла, в которой происходит формирование и движение вихревого кольца (рис. 3). Генерация вихревого кольца осуществляется на открытом торце трубы диаметром 75 мм и толщиной стенки 1 мм. Стенки канала считаются непроницаемыми, нетеплопроводными и гладкими. Принимается, что все выступы элементов шероховатости лежат внутри пограничного слоя. Поршень мгновенно разгоняется до постоянной скорости и мгновенно останавливается. Характерным параметром, влияющим на формирование вихревого кольца, является отношение  $L/D$ , где  $L$  — расстояние, проходимое поршнем,  $D$  — диаметр отверстия. При  $L/D > 4$  образуется вихревое кольцо и концевая струя с вторичными вихрями, а при  $L/D < 4$  — одиночное вихревое кольцо [5].

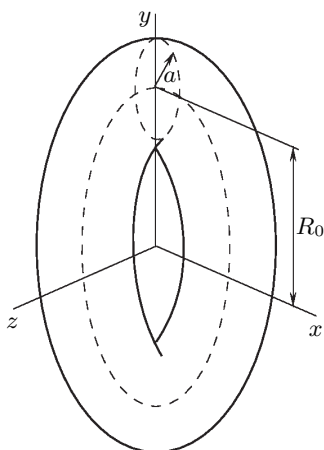


Рис. 1. Вихревое кольцо  
 Fig. 1. Vortex ring

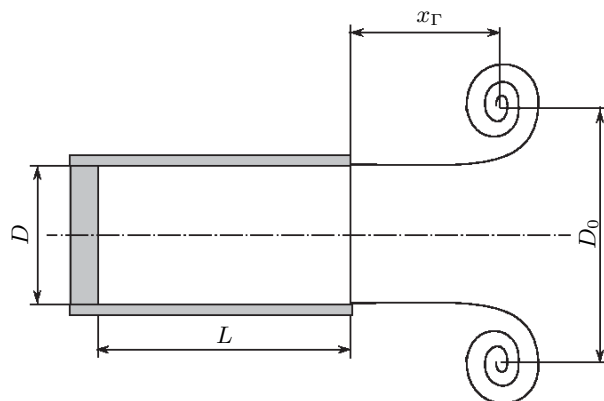


Рис. 2. Генератор вихревого кольца  
 Fig. 2. Generator of vortex ring

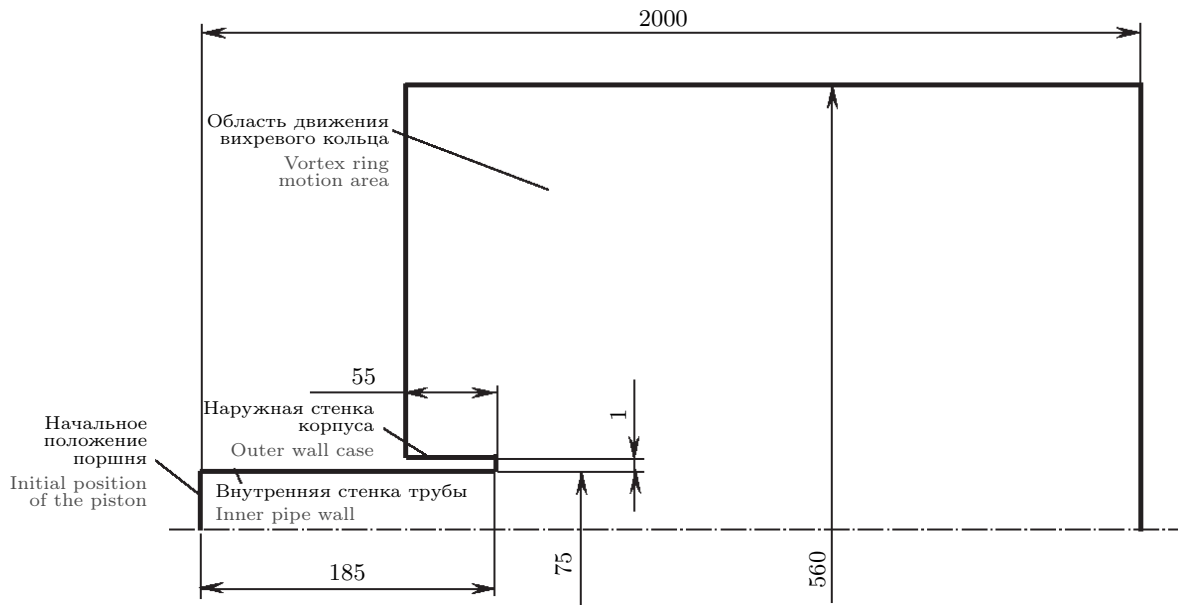


Рис. 3. Геометрия расчетной области (размеры приводятся в миллиметрах)

Fig. 3. Geometry of computational domain (dimensions are given in millimeters)

Для моделирования течения, образующегося при движении поршня в трубе, на левом торце генерирующей трубки используются нестационарные граничные условия. При их задании учитываются результаты исследований при создании реальных устройств генерации вихревых колец. На левой границе задается равномерное распределение массового расхода, зависящего от времени. В качестве выходного граничного условия задается статическое давление. На наружной и внутренней стенках трубы используются граничные условия прилипания и непротекания для скорости. Стенки корпуса полагаются теплоизолированными.

Для генерации вихревого кольца используется полусинусоидальный импульс потока массы газобразной среды. Амплитуда и полупериод импульса подбираются из условия обеспечения процесса оптимальной генерации вихревого кольца. Под генерацией подразумевается процесс гидродинамического развития вихревой структуры, наполнение вихревого кольца транспортируемой газобразной или дисперсной примесью. Слишком короткий и малоинтенсивный импульс для рассматриваемой геометрической конфигурации и свойств среды приводит к формированию вихря с низкой скоростью из-за недостаточного периода набора кинетической энергии вращательного движения вихрем. Такой вихрь имеет меньшую несущую способность и быстро диссипирует в окружающем пространстве. Напротив, продолжительный и слишком интенсивный импульс приводит к растягиванию образующегося вихревого кольца, что снижает его энергетический потенциал. Излишне затянутый генерирующий импульс также сильно возмущает среду, располагающуюся на пути кольца, что плохо сказывается на его дальнейшем распространении.

**3. Математическая модель.** Система координат выбирается таким образом, что ось  $x$  совпадает с направлением движения вихревого кольца, а оси  $y$  и  $z$  связываются с его поперечным сечением. В декартовой системе координат  $(x, y, z)$  нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается следующим уравнением, записанным в консервативных переменных:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) дополняется соотношением

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[ e - \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right].$$

Вектор консервативных переменных  $Q$  и векторы потоков  $F_x, F_y, F_z$  имеют следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix};$$

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix};$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix};$$

$$F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений

$$\tau_{ij} = \mu_e \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Здесь  $t$  — время;  $\rho$  — плотность;  $r$  — радиус;  $v_x, v_y, v_z$  — составляющие скорости в координатных направлениях  $x, y, z$  соответственно;  $p$  — давление;  $e$  — полная энергия единицы массы;  $T$  — температура;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Под  $i, j, k$  понимаются тензорные индексы; по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

В качестве рабочей среды используется воздух. Молекулярной вязкости присваивается постоянное значение  $\mu = 1.68 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с). Коэффициент молекулярной теплопроводности выражается через вязкость и число Прандтля ( $\lambda = c_p \mu / \text{Pr}$ ). Молекулярному числу Прандтля присваивается постоянное значение (для воздуха  $\text{Pr} = 0.72$ ).

Уравнения, записанные в виде (1), пригодны для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений молекулярные коэффициенты переноса заменяются на их эффективные значения. При этом эффективная вязкость  $\mu_e$  вычисляется как сумма молекулярной  $\mu$  и подсеточной  $\mu_s$  вязкости, а эффективная теплопроводность  $\lambda_e$  выражается через вязкость и число Прандтля:

$$\mu_e = \mu + \mu_s, \quad \lambda_e = c_p \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_s}{\text{Pr}_s} \right).$$

Подсеточному числу Прандтля присваивается постоянное значение (для воздуха  $\text{Pr}_s = 0.9$ ). Для расчета вихревой вязкости имеются полуэмпирические модели различной степени сложности. Учет сжимаемости в подсеточной модели оказывает довольно слабое влияние на результаты численного моделирования.

В модели Смагоринского подсеточная вихревая вязкость вычисляется по формуле

$$\mu_s = \rho (C_S \Delta)^2 |S|,$$



где

$$|S| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

В расчетах полагается, что  $C_S = 0.22$ . Под  $\Delta$  понимается ширина фильтра, которая находится как  $\Delta = V^{1/3}$ , где  $V$  — объем ячейки сетки.

**4. Численный метод.** В сечении расчетная сетка содержит 428773 четырехугольные ячейки. Проводится сгущение узлов сетки вблизи кромки выходного отверстия генерирующей камеры и осуществляется динамическая адаптация сетки в зависимости от положения вихревого кольца. Расчеты проводятся на интервале времени порядка 10–15 секунд. За этот интервал кольцо успевает сформироваться, начать движение и достичь противоположной периферийной границы расчетной области.

Расчеты проводились на сетках различной разрешающей способности. Для сравнения были выбраны сетки, число узлов которых в 2 раза меньше и в 2 раза больше числа узлов выбранной сетки. Основные результаты получены на сетке с минимальным числом расчетных ячеек, которая позволяет добиться хорошего совпадения с данными физического эксперимента. Уменьшение числа узлов приводит к существенному расхождению расчетных и экспериментальных данных (ошибка составляла порядка 10%). В то же время, использование более подробной сетки не приводит к существенному улучшению результатов численного моделирования. Несмотря на то что сетка с около 0.5 млн узлов является достаточно грубой, она с хорошей степенью точности позволяет воспроизвести распределения скорости и вихревую структуру потока.

Дискретизация основных уравнений осуществляется при помощи метода конечных объемов и метода поправки давления PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators). Для дискретизации конвективных и диффузионных потоков используются противопоточные разностные схемы третьего порядка точности (схема MUSCL, Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) и центрированные разностные схемы второго порядка точности с расщеплением вектора потока по методу Рое, а для дискретизации по времени — неявная схема второго порядка точности. Для интерполяции давления используется неявная схема второго порядка точности. Система разностных уравнений решается методом LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss–Seidel). Число Куранта варьируется в интервале от 2 до 7. Детали вычислительной процедуры приводятся в работе [30].

Определение примеси как пассивной означает, что ее наличие не оказывает влияния на поле плотности и движение несущего потока. В программный код модели добавлена переменная, изменение которой описывается теми же уравнениями, что и изменение поля температуры. Физический смысл новой переменной — концентрация пассивной (безынерционной) примеси, в роли которой могут выступать различные химические элементы или вещества, присутствующие в среде.

Для моделирования процесса переноса пассивной примеси вихревым кольцом задается среда, состоящая из двух компонентов, оба из которых представляют собой воздух. Преобладающим выбирается компонент (индекс 2), который значительно превышает остальные по доле от общей массы среды, наполняющей расчетную область. Переносимая примесь выбирается как второстепенный компонент (индекс 1), поскольку ее доля от всей массы среды значительно меньше доли компонента, в которой происходит перемещение вихревого кольца. Среды 1 и 2, используемые в расчетах, отличаются по физическим свойствам. Свойства среды 1 соответствуют параметрам вихревого кольца, а свойства среды 2 — неподвижной воздушной среде, в которой происходит распространение вихревого кольца.

В начальный момент времени задаются распределения компонентов среды. В области генерирующей трубки пространство заполняется воздухом с индексом 1, а остальная часть расчетной области заполняется воздухом с индексом 2. Положение границы раздела определяется неявным образом с помощью функции-идентификатора среды, описываемой уравнением переноса. В качестве функции-идентификатора выступает объемная доля среды. При этом в областях, занятых разными средами, функция-идентификатор имеет постоянные различающиеся значения.

В начальный момент времени функция-идентификатор имеет ступенчатый профиль на границе контакта. В ходе расчетов вследствие численной диффузии этот профиль постепенно размывается, и точное положение контактной границы становится неопределенным и находится из соответствующего уравнения переноса. В случае необходимости (например, для визуализации) граница контакта определяется либо как область больших градиентов функции-идентификатора, либо как изоповерхность ее среднего значения.

**5. Результаты расчетов.** Вихревое кольцо представляет собой тороидальный объем завихренной жидкости, который движется в окружающей среде перпендикулярно плоскости кольца. Движение жидкости является осесимметричным, а вектор завихренности (ротор скорости) в торе направлен вдоль окружностей, соосных круговой оси тора. Поперечное сечение тонких вихревых колец по форме близко к кругу. Вместе с тороидальным вихревым кольцом движется некоторый объем жидкости, охватывающий кольцо и имеющий форму, близкую к форме сплюснутого в направлении движения кольца эллипсоида вращения.

**5.1. Распространение кольца.** Движение кольца разделяется на три этапа, каждый из которых характеризуется своими распределениями скорости и завихренности.

На первом этапе при входе в вихрь струя сжимается, а ее граница, представляющая собой оторвавшийся от кромки сопла пограничный слой, сворачивается внутри вихря в спиральную поверхность, которая впоследствии трансформируется в ядро вихря (рис. 4). В области выходного торца трубки происходит формирование течения. Отрезок пути, соответствующий первому этапу, мал по сравнению с полным расстоянием, проходимым вихревым кольцом. При образовании вихревой структуры диаметр круговой оси превышает диаметр генерирующей трубки.

При переходе ко второму этапу диаметр круговой оси уменьшается, а скорость вихревого кольца увеличивается (рис. 5). Происходит отрыв от кромки сопла образовавшейся вихревой структуры с постепенным увеличением ее диаметра. При этом происходит увеличение поступательной скорости вихревого кольца, а его радиус практически не изменяется. Движение вихря характеризуется отсутствием каких-либо визуально наблюдаемых изменений.

Третий этап соответствует движению с явно выраженными колебаниями всей конфигурации в целом и интенсивным перемешиванием масс во внутренней и внешней областях (рис. 6). Наряду с падением скорости и давления, вихревая структура растягивается вдоль оси симметрии. При остановке течение теряет осевую симметрию вследствие сложной трехмерной деформации круговой оси. Моделирование в рамках осесимметричной постановки является корректным только на первых двух этапах развития вихревой структуры.

**5.2. Распределения скорости.** Для изучения внутренней структуры вихревого кольца вдоль образующих цилиндрических сечений в расчетной области и сравнения распределений осевой и радиальной скоростей с данными физического эксперимента используется ряд контрольных сечений, параллельных оси симметрии. Расчетные распределения осевой и радиальной скоростей (сплошные линии), обработанные в безразмерном виде  $\bar{v}_x = (v_x - U_0)/U_0$  и  $\bar{v}_r = v_r/U_0$ , приводятся на рис. 7–10 в сравнении с данными физического эксперимента [3] (значки  $\bullet$  и  $\circ$ ). В качестве характерного масштаба для осевой координаты используется диаметр вихревого кольца ( $\bar{x} = x/D_0$ ). Система координат, в

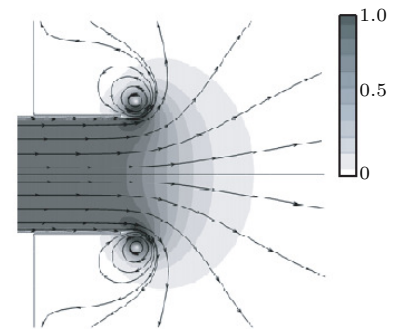


Рис. 4. Формирование вихревого кольца. Линии тока и линии уровня скорости при  $t = 0.07$  с

Fig. 4. Formation of vortex ring. Streamlines and velocity contours for  $t = 0.07$  s

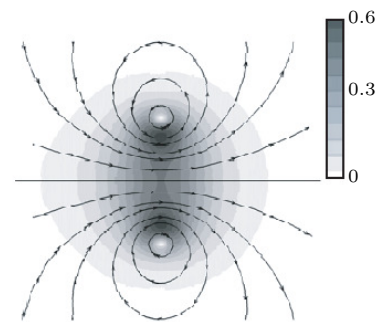


Рис. 5. Перемещение вихревого кольца. Линии тока и линии уровня скорости при  $t = 1$  с

Fig. 5. Movement of vortex ring. Streamlines and velocity contours for  $t = 1$  s

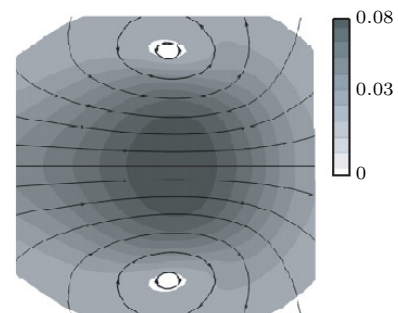


Рис. 6. Разрушение вихревого кольца. Линии тока и линии уровня скорости при  $t = 15$  с

Fig. 6. Breakdown of vortex ring. Streamlines and velocity contours for  $t = 15$  s



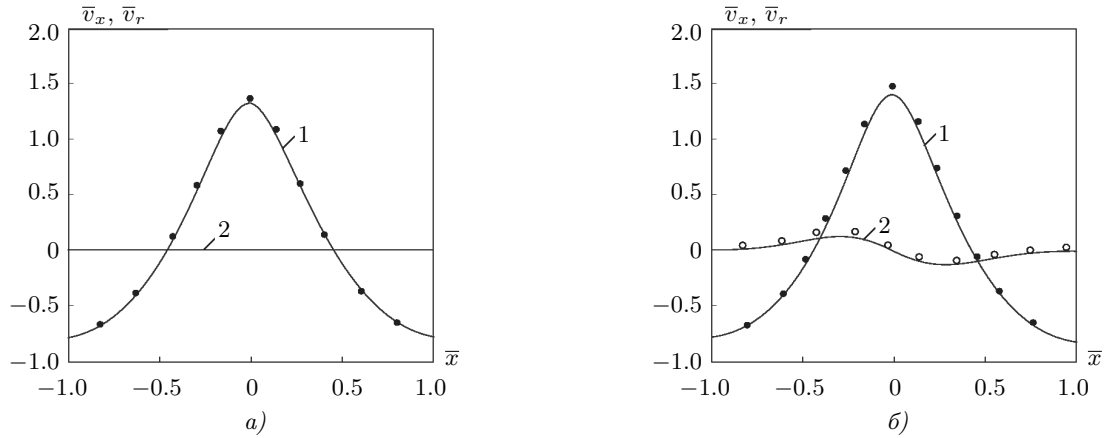


Рис. 7. Распределения осевой (линии 1) и радиальной (линии 2) скоростей в сечениях  $r = 0$  (а) и  $r = 0.107$  (б)  
 Fig. 7. Distributions of axial (line 1) and radial (line 2) velocities for  $r = 0$  (a) and  $r = 0.107$  (б)

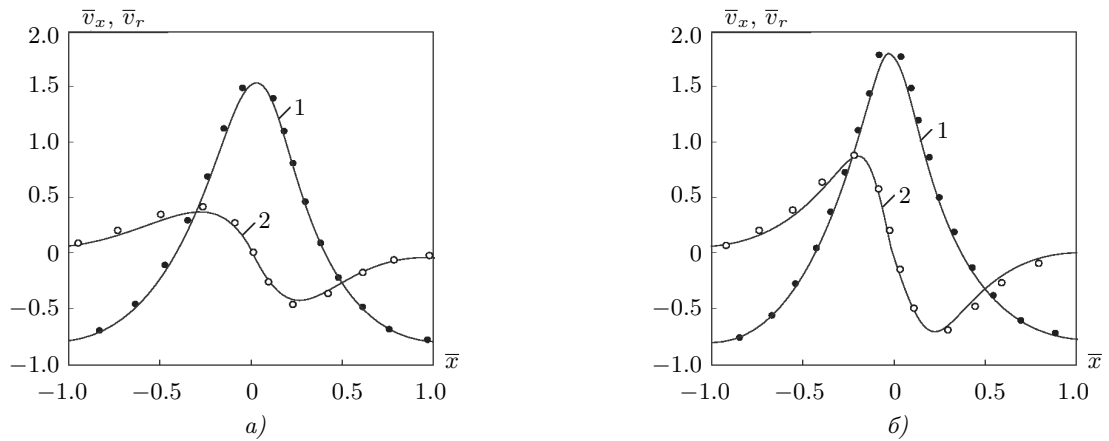


Рис. 8. Распределения осевой (линии 1) и радиальной (линии 2) скоростей в сечениях  $r = 0.215$  (а) и  $r = 0.322$  (б)  
 Fig. 8. Distributions of axial (line 1) and radial (line 2) velocities for  $r = 0.215$  (a) and  $r = 0.322$  (б)

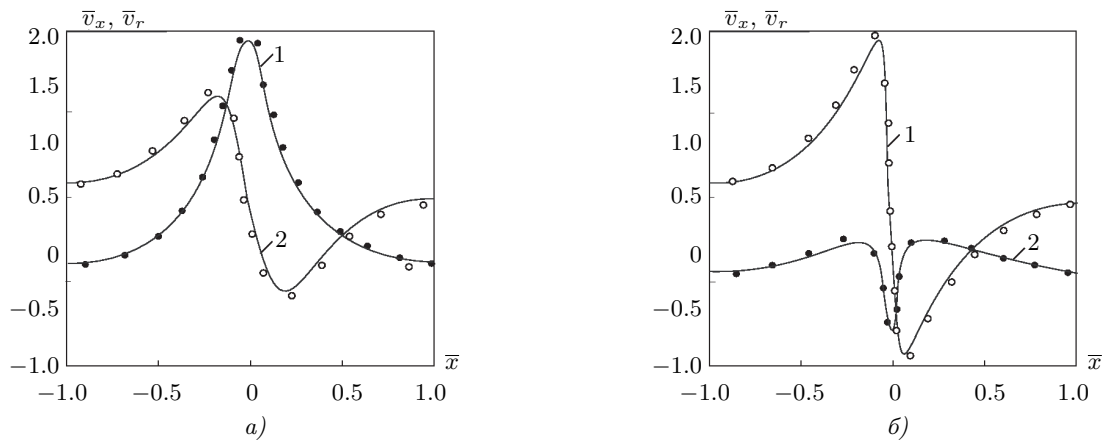


Рис. 9. Распределения осевой (линии 1) и радиальной (линии 2) скоростей в сечениях  $r = 0.430$  (а) и  $r = 0.538$  (б)  
 Fig. 9. Distributions of axial (line 1) and radial (line 2) velocities for  $r = 0.430$  (a) and  $r = 0.538$  (б)

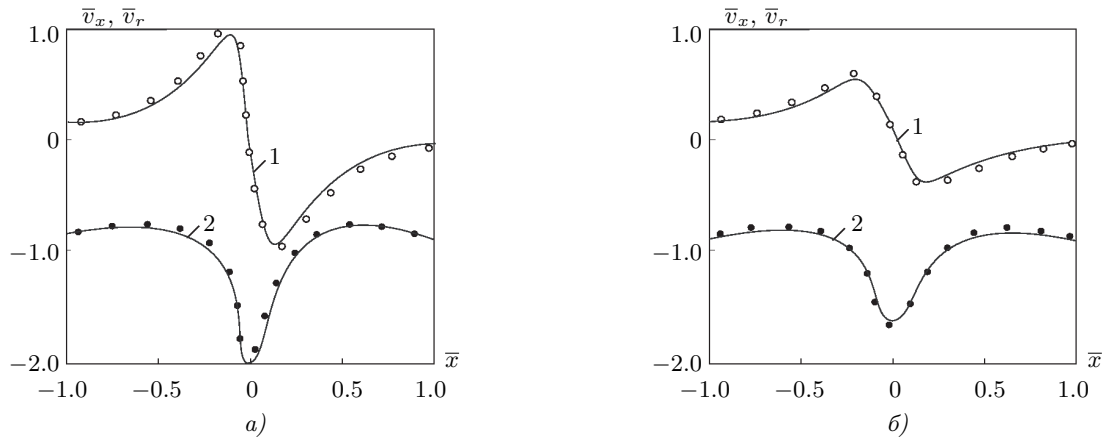


Рис. 10. Распределения осевой (линии 1) и радиальной (линии 2) скоростей в сечениях  $r = 0.645$  (а) и  $r = 0.753$  (б)

Fig. 10. Distributions of axial (line 1) and radial (line 2) velocities for  $r = 0.645$  (а) and  $r = 0.753$  (б)

которой исследуются зависимости, связана с круговой осью вихревого кольца, а ее центр находится в точке пересечения оси симметрии кольца и поперечного сечения, проходящего через круговую ось. Диаметр круговой оси полагается равным  $D_0 = 0.098$  м, а скорость круговой оси вихревого кольца —  $U_0 = 0.177$  м/с. Исследуемый момент времени соответствует второму этапу эволюции вихревого кольца (ось кольца с момента генерации перемещается на расстояние, равное пяти диаметрам генерирующей трубки).

На распределении осевой компоненты скорости  $v_x(0, r)$  точка пересечения кривой с прямой  $v_x = U_0$  соответствует центру ядра вихря и определяет его радиус  $R_0$ . В ядре осевая скорость изменяется практически по линейной зависимости. Расстояние между максимумом и минимумом на концах линейного участка кривой  $v_x(r)$  равняется удвоенному радиусу ядра вихря. Более точно радиус ядра определяется по распределению радиальной скорости при  $r = R_0$ , поскольку локальные минимум и максимум на таком графике выражены более четко.

Сравнение результатов численного моделирования с данными физического эксперимента показывает, что хорошее совпадение имеется в той области течения, которая располагается ближе к оси, в частности, при  $r = 0$  и  $r = 0.107$  (рис. 7),  $r = 0.215$  и  $r = 0.322$  (рис. 8). При  $r = 0.430$  и  $r = 0.538$  (рис. 9),  $r = 0.645$  и  $r = 0.753$  (рис. 10) расчеты дают несколько заниженные значения компонент скорости по сравнению с данными измерений, что объясняется различием структуры течения в области круговой оси вихревого кольца. Максимальные значения осевой скорости в каждом из сечений лежат в плоскости  $x = 0$ , проходящей через круговую ось вихря (в этой плоскости  $|v_x| > U_0$ ).

Поступательная скорость вихревого кольца определяется путем визуализации вихря и регистрации его движения в зависимости от времени. Геометрические параметры определяются по распределению скорости в плоскости вихревого кольца ( $x = 0$ ). Для определения начальной скорости используются две контрольные точки на некотором расстоянии от выходного сечения генерирующей трубки. Скорость оценивается исходя из выражения  $U = \Delta x / \Delta t$ , где  $\Delta x$  — расстояние между контрольными точками ( $\Delta x = x_2 - x_1$ ),  $\Delta t$  — разность времени прихода вихревого кольца во вторую и первую контрольные точки соответственно ( $\Delta t = t_2 - t_1$ ). Начальный радиус вихревого кольца оценивается по первой контрольной точке.

Каждое вихревое кольцо обладает самоиндуцированной скоростью, направленной перпендикулярно к плоскости кольца. Теоретические исследования движения одиночного кольца тороидальной формы с радиусом ядра  $a$  и радиусом  $R_0$  центральной линии тора ( $a \ll R_0$ ) приводят к следующей формуле для скорости движения вихревого кольца:

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left( \ln \frac{8R_0}{a} - C \right),$$

где  $\Gamma$  — интенсивность вихревого кольца, равная циркуляции наведенного поля скорости вдоль произвольного замкнутого контура, охватывающего вихревое ядро (циркуляция скорости во внешнем поле около кольца). Значение  $C = 1/4$  соответствует случаю, при котором отношение завихренности к расстоянию до центральной линии тора внутри ядра кольца  $\omega/r$  остается неизменной величиной (для однородного рас-



пределения модуль завихренности пропорционален расстоянию от оси симметрии кольца). Значение  $C = 1$  получено для однородного распределения завихренности внутри ядра. Значение  $C = 0.558$  соответствует гауссовскому распределению завихренности внутри ядра [4].

Интенсивное вращение вихревым кольцом окружающей жидкости приводит к тому, что одиночное вихревое кольцо образует вихревое облако, движущееся совместно с вихрем. Для вихревых колец форма вихревого облака существенно зависит от относительной толщины ядра вихря. Для тонких колец эта область представляет собой тор с поперечным сечением, незначительно отличающимся от кругового, а для толстых колец — деформированную сферу.

Расстояние, проходимое вихревым кольцом, находится из соотношения [16]

$$L(t) = \frac{D_0}{2\alpha} \left\{ \left[ 1 + 2\alpha(C_D + 4) \frac{U_0}{D_0} t \right]^{1/(C_D+4)} - 1 \right\},$$

где  $C_D$  — коэффициент сопротивления движению вихревого кольца, который находится на основе обработки экспериментальных данных. Для идеальной жидкости  $C_D = 0$  [10]. Под  $D_0$  и  $U_0$  понимаются начальный диаметр и начальная скорость вихревого кольца. Коэффициент расширения вихревого кольца в процессе его перемещения в турбулентной атмосфере определяется соотношением

$$\alpha = \frac{D(t) - D_0}{L(t)}.$$

На практике коэффициент  $\alpha$  задается исходя из экспериментальных данных.

На рис. 11 представлены безразмерные зависимости расстояния, пройденного вихревым кольцом, и радиуса вихревого кольца от времени. Имеет место хорошее совпадение результатов расчетов (символы ●) с автомодельной теорией (сплошные линии). В качестве характерных параметров используется начальный диаметр вихревого кольца и его скорость. Различие расчетных данных и результатов, полученных по полуэмпирической автомодельной теории, не превышает 5%. Расстояние, проходимое вихревым кольцом исходя из параметров расчетной области, составляет 1.8 м.

**5.3. Перенос примеси.** Процесс переноса пассивной примеси вихревым кольцом изучается при помощи моделирования двухкомпонентной среды.

Распределения массовой доли переносимого компонента, соответствующие трем моментам времени на этапе формирования вихревого кольца, показывает рис. 12 (фрагменты *a*, *в*, *д*). Для качественного сравнения на рис. 12 приводятся экспериментальные фотоснимки вихревого кольца, взятые из работы [3] (фрагменты *б*, *з*, *е*). В эксперименте вихревое кольцо визуализируется с помощью дыма.

При образовании вихревого кольца в его объем захватывается определенная часть окружающей генерирующую трубку среды. Это приводит к тому, что при переходе ко второму этапу концентрация переносимой кольцом примеси является достаточно малой. Транспортировка примеси оказывается более эффективной, если в начальный момент времени она заполняет также и пространство, окружающее генерирующую трубку.

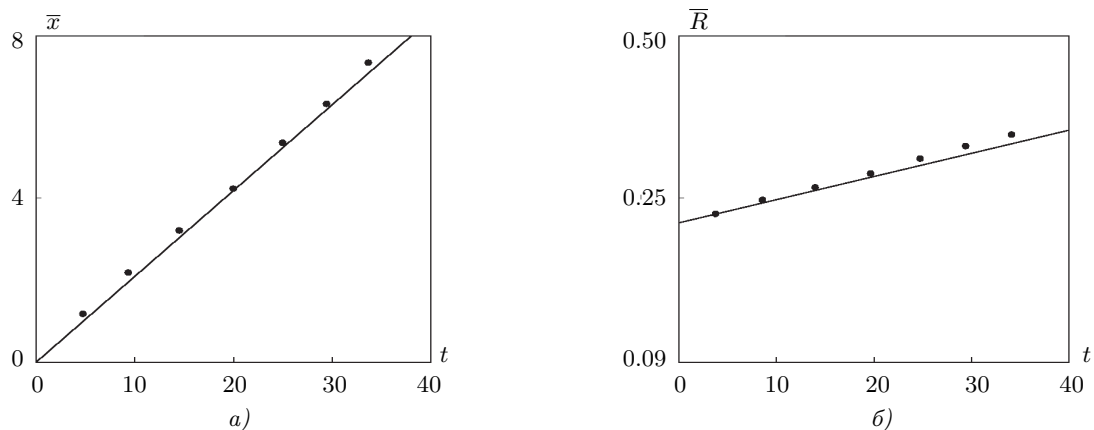


Рис. 11. Зависимости расстояния, пройденного вихревым кольцом (*a*), и радиуса вихревого кольца (*б*) от времени

Fig. 11. Dependencies of distance travelled by vortex ring (*a*) and radius of vortex ring (*b*) on time

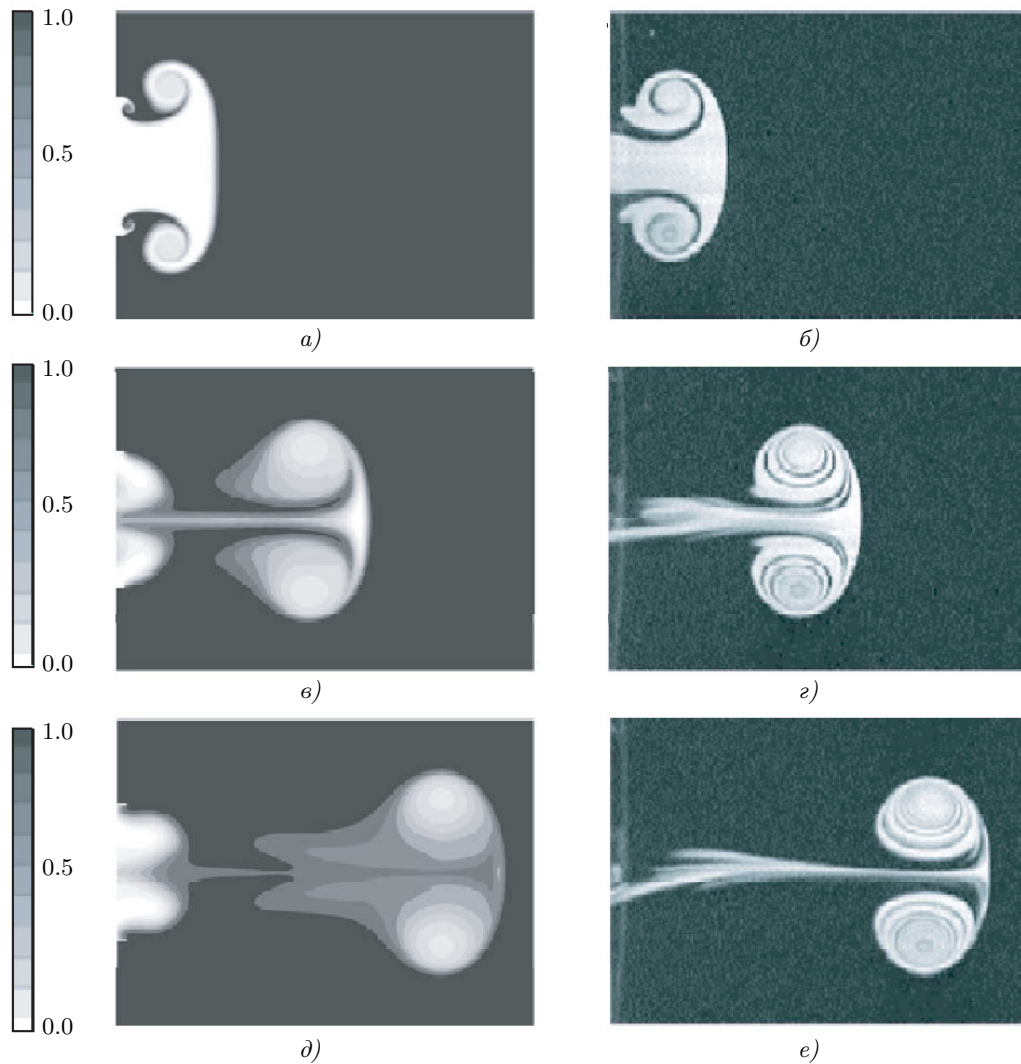


Рис. 12. Распределения массовой доли пассивной примеси в расчете (*a, в, д*) и эксперименте (*б, з, е*) в моменты времени  $t = 0.12$  с (*a, б*),  $0.41$  с (*в, з*),  $0.69$  с (*д, е*)

Fig. 12. Distributions of mass fraction of passive particles in calculations (*a, в, д*) and experiment (*б, з, е*) at times  $t = 0.12$  s (*a, б*),  $0.41$  s (*в, з*),  $0.69$  s (*д, е*)

Сравнение результатов расчета и экспериментов, приведенных в работе [2], показывает рис. 13. Некоторая несимметричность экспериментальной картины относительно оси трубы вызвана неравномерностью начального распределения плотности дыма, подаваемого в трубу для визуализации течения. При входе в вихрь струя сжимается, а ее граница, представляющая собой оторвавшийся от кромки трубы пограничный слой, сворачивается внутри вихря в спиральную поверхность, которая в дальнейшем трансформируется в ядро вихря. Спиральное сворачивание вихревой пелены (формирование вихря) начинается в момент появления фронта струи из отверстия (фрагмент *a*). По мере подачи струи вихрь отходит от среза отверстия. Передний фронт грибообразной поверхности вихря представляет собой границу жидкости, находившейся до начала процесса истечения струи в трубе. Струя, подпитывающая вихрь, сохраняет цилиндрическую форму и после выхода из отверстия, и только при входе в вихрь ее сечение уменьшается (фрагмент *б*). Ядро вихревого кольца образуется из слоя перемешивания границы струи, сворачивающегося при входе в вихрь в спиральную поверхность. В вихрь попадает также жидкость, вовлекаемая вдоль границы струи из окружающего пространства (фрагмент *в*). В дальнейшем вихрь заполняется жидкостью из хвостовой части струи, находящейся между выходным сечением трубы и вихрем. Следует отметить, что из хвостовой части струи сворачивается вторичное вихревое кольцо, которое в течение некоторого времени движется за основным и вскоре диссипирует. Практически вся масса выброшенной струи попадает в объем вихревого

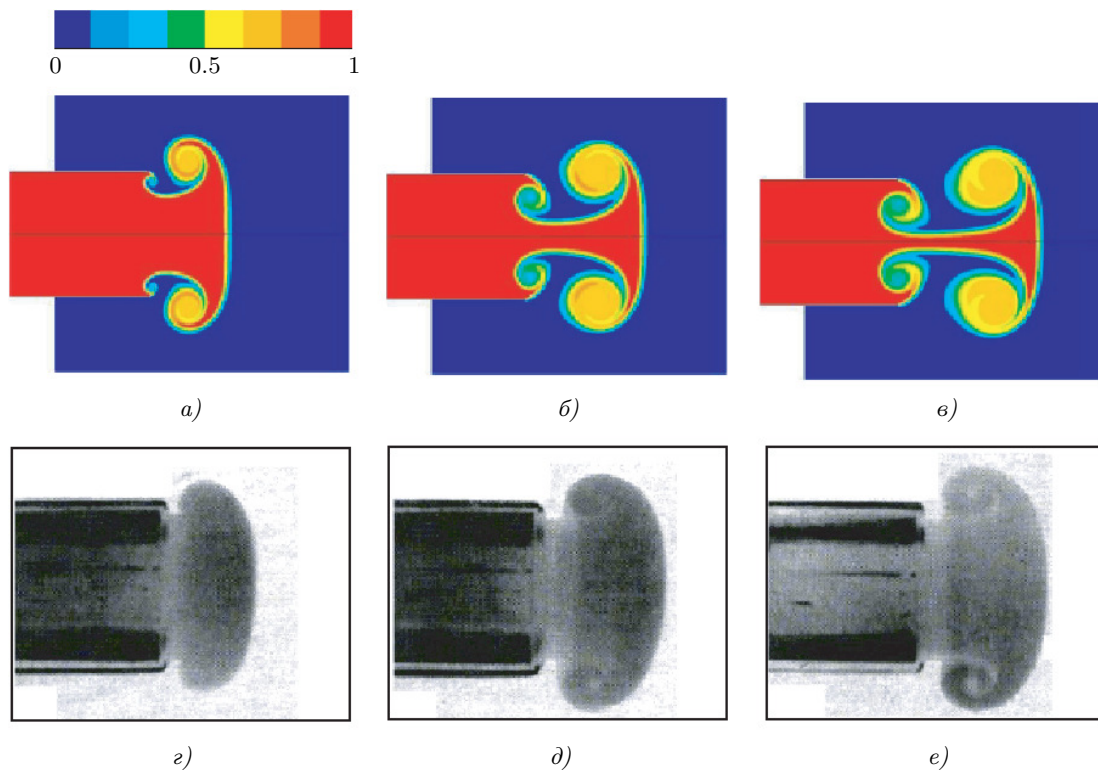


Рис. 13. Распределения массовой доли пассивной примеси в расчете (а, б, в) и эксперименте (z, d, e) в моменты времени  $t = 0.12$  с (а, z),  $0.2$  с (б, d),  $0.25$  с (в, e)

Fig. 13. Distributions of mass fraction of passive particles in calculations (a, b, v) and experiment (z, d, e) at times  $t = 0.12$  s (a, z),  $0.2$  s (б, d),  $0.25$  s (в, e)

кольца, а из окружающего пространства вихрь забирает сравнительно небольшое количество жидкости (темные витки спирали).

При образовании вихревого кольца в его объем захватывается определенная часть среды, окружающей генерирующую вихревое кольцо трубку. Это приводит к тому, что при переходе ко второму этапу концентрация переносимой кольцом примеси снижается. Вихревое кольцо как средство транспортировки активной примеси обладает большей эффективностью, если обеспечить его заполнение примесью в начальный момент формирования. Проблема решается в рамках предложенной расчетной модели применением специальных геометрических и расходных воздействий на процесс формирования вихревого кольца.

**5.4. Структура вихревого кольца.** Результаты трехмерного численного моделирования формирования и распространения вихревого кольца используются для визуализации его структуры в различные моменты времени. Для визуализации структуры вихревого кольца применяются инварианты тензора градиента скорости и их различные комбинации, а также метод локальных показателей Ляпунова [31].

Одним из критериев, используемых для идентификации вихревых течений, является  $Q$ -критерий ( $Q$ -criterion)

$$Q = \frac{1}{2} (|\mathbf{\Omega}|^2 - |\mathbf{S}|^2),$$

где  $|\mathbf{S}| = [\text{trace}(\mathbf{S}\mathbf{S}')]^{1/2}$ ,  $|\mathbf{\Omega}| = [\text{trace}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}')]^{1/2}$ . Под  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{\Omega}$  понимаются тензор скоростей деформаций и тензор вращения. Вихрь определяется как область течения, в которой выполняется неравенство  $Q > 0$  (область течения, в которой норма тензора завихренности превышает норму тензора скоростей деформаций).

Визуализацию вихревого кольца показывает рис. 14 (цветовая палитра соответствует критерию  $Q$ ). Радиус вихревого кольца составляет  $R_0 = 22.1$  мм, а радиус ядра —  $a = 8.25$  мм. Начальная циркуляция скорости составляет  $\Gamma = 0.0058$  м<sup>2</sup>/с. Приводятся фрагменты, соответствующие различным режимам

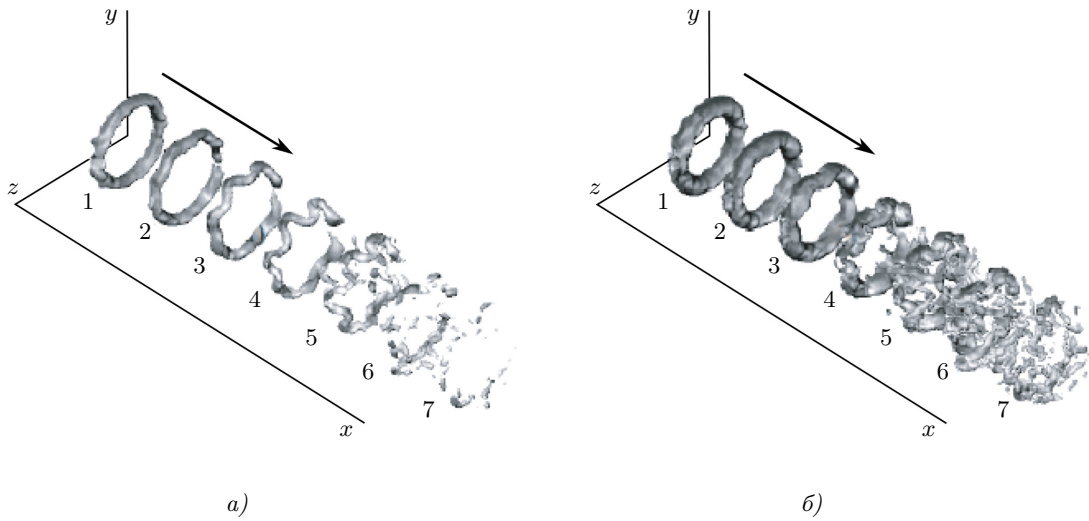


Рис. 14. Визуализация структуры вихревого кольца при  $Q = 160$  (а) и  $Q = 80$  (б) в моменты времени  $t = 0.8$  с (1), 1.6 с (2), 2.4 с (3), 3.2 с (4), 4 с (5), 4.8 с (6), 5.6 с (7)

Fig. 14. Visualization of structure of vortex ring for  $Q = 160$  (a) and  $Q = 80$  (b) at times  $t = 0.8$  s (1), 1.6 s (2), 2.4 s (3), 3.2 s (4), 4 s (5), 4.8 s (6), 5.6 s (7)

распространения вихревого кольца: ламинарный (кадры 1 и 2), переходный (кадры 3–5) и турбулентный (кадры 6 и 7). Визуализация течения проводится на интервале времени, равном 6.4 с, с шагом 8 мс.

В ламинарном режиме тор, соответствующий вихревому ядру, остается гладким (кадры 1 и 2 на фрагменте а). Возмущения формы вихревого кольца наблюдаются в переходном режиме (кадр 3 на фрагменте а), которые состоят в формировании 6 волн, амплитуда которых увеличивается по мере распространения вихревого кольца (кадры 4 и 5 на фрагменте а). В турбулентном режиме вихревое кольцо теряет форму тора и распадается на ряд вторичных вихрей (кадры 6 и 7 на фрагменте а). Для визуализации вторичных вихревых структур используется меньшее значение критерия  $Q$  (фрагмент б). Изменение предельного значения критерия  $Q$  не приводит к качественной перестройке картины течения (в этом случае визуальная толщина вихревого ядра становится больше). В целом, кадры 1–7 на фрагменте б соответствуют структурным изменениям вихревого кольца, приведенным на фрагменте а.

Основные недостатки методов визуализации связаны с необходимостью задания порогового значения того или иного критерия, используемого для идентификации вихрей, а также с их зависимостью от выбора системы отсчета [31]. Необходимость расчета производных скорости и возникающие в связи с этим погрешности вычислений также снижают привлекательность таких подходов. Другая группа методов визуализации вихревых течений основана на анализе траекторий жидких или меченых частиц. Границы вихревых структур определяются как линии максимальных или минимальных значений локальных показателей Ляпунова, вычисленных на конечном интервале времени. При этом некоторые погрешности в распределении скорости незначительно сказываются на качестве визуализации вихревых структур. Дополнительное преимущество таких подходов состоит в их инвариантности по отношению к вращению системы координат. Увеличение промежутка времени для нахождения локальных показателей Ляпунова обычно приводит к выявлению более мелких деталей течений, но размеры и форма вихревых образований практически не зависят от выбранного промежутка времени.

Визуализацию вихревых структур показывает рис. 15. Для визуализации применяется метод показателей Ляпунова, накопленных за конечный интервал времени. Интегрирование проводится на промежутке времени  $\tau = 1.5$  с, за который вихревое кольцо проходит примерно 10% длины вычислительной области. Для визуализации течения используется около 40000 меченых частиц. Шаг интегрирования по времени полагается равным  $\Delta t = \tau/2400$ . Разрешение по времени составляет  $h = \tau/12$ . Фрагменты а, в, д и ж соответствуют интегрированию назад, а фрагменты б, г, е и з — интегрированию вперед.

Вычисление наибольшего показателя Ляпунова позволяет оценить степень расходимости или сходимости двух близлежащих траекторий жидких частиц. Интегрирование в различных направлениях предо-

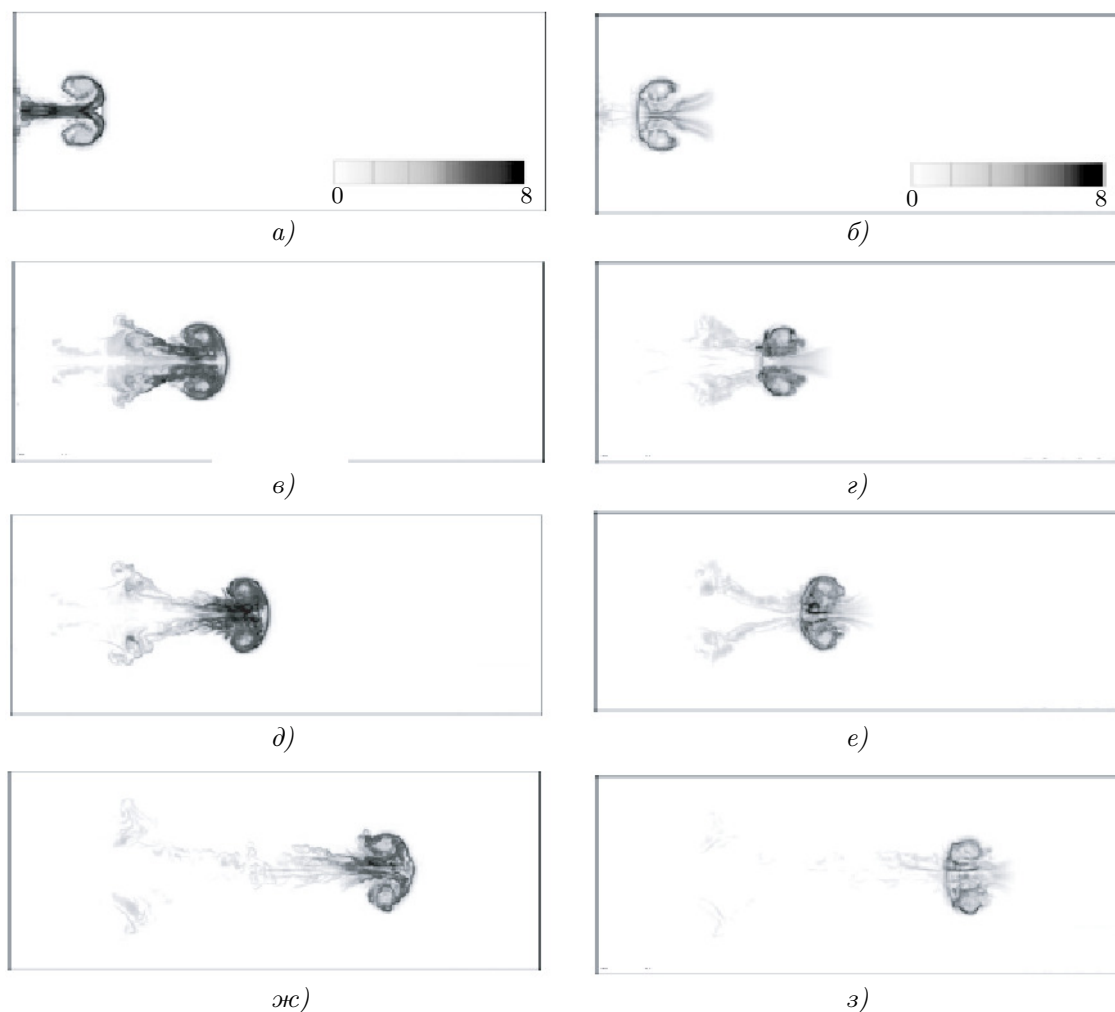


Рис. 15. Визуализация структуры вихревого кольца при помощи метода локальных показателей Ляпунова в моменты времени  $t = 0.3$  с (а, б), 0.6 с (в, г), 0.9 с (д, е) и 1.2 с (ж, з)

Fig. 15. Visualization of structure of vortex ring using local Lyapunov exponent method at times  $t = 0.3$  s (а, б), 0.6 s (в, г), 0.9 s (д, е) and 1.2 s (ж, з)

ставляет различную информацию о поле течения [32]. Интегрирование назад позволяет обнаружить сближение траекторий частиц, что соответствует центрам вихревых образований, а интегрирование вперед — их расхождение, что позволяет найти периферийные области вихрей.

**6. Заключение.** Разработана численная модель, описывающая формирование и развитие вихревого кольца в пространстве и времени. Проведено численное моделирование процессов переноса примеси вихревым кольцом. Результаты численного моделирования позволяют исследовать свойства вихревого кольца в различные моменты времени с учетом его формирования и процессов внутри поршневого генератора. При этом удается наблюдать сворачивание оторвавшегося от стенки трубы пограничного слоя в спиралевидную структуру, ее дальнейшее искривление, постепенное сглаживание контуров вихревого кольца и образование ядра. Результаты численного моделирования соотносятся с автомодельным законом динамики вихревого кольца, а характеристики вихревого кольца соответствуют экспериментальным результатам. Помимо традиционных подходов к визуализации вихревых течений, основанных на построении линий уровня различных характеристик потока, для повышения наглядности результирующего образа применяется метод показателей Ляпунова на конечном интервале времени.

Полученные результаты представляют интерес для визуализации течений жидкости и газа, а средства численного моделирования являются частью более общей модели и кода, предназначенных для расчета переноса пассивной примеси в течениях, характеризуемых случайным полем скорости.

## Список литературы

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
3. Eisenga A.H.M. Dynamics of a vortex ring in a rotating fluid. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1997.
4. Сэффмэн Ф. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000.
5. Xiang Y., Qin S., Liu H. Patterns for efficient propulsion during the energy evolution of vortex rings // European Journal of Mechanics B Fluids. 2018. **71**. 47–58.
6. Qin L., Xiang Y., Lin H., Liu H. Formation and dynamics of compressible vortex rings generated by a shock tube // Experiments in Fluids. 2020. **61**. doi 10.1007/s00348-020-2920-1.
7. Shariff K., Leonard A. Vortex rings // Annual Review of Fluid Mechanics. 1992. **24**. 235–279.
8. Мелешко В.В., Гуржий А.А., Краснопольская Т.С. Вихревые кольца: история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2011. **54**, № 4. 184–214.
9. McGavin P., Pontin D.I. Vortex line topology during vortex tube reconnection // Physical Review Fluids. 2018. **3**. doi 10.1103/PhysRevFluids.3.054701.
10. Ахметов Д.Г., Кисаров О.П. Гидродинамическая структура кольцевого вихря // Прикладная механика и техническая физика. 1966. **7**, № 4. 120–123.
11. Sullivan J.P., Widnall S.E., Ezekiel S. Study of vortex rings using a laser doppler velocimeter // AIAA Journal. 1973. **11**, N 10. 1384–1389.
12. Ахметов Д.Г. Формирование и основные параметры вихревых колец // Прикладная механика и техническая физика. 2001. **42**, № 5. 70–83.
13. Ахметов Д.Г. Модель формирования вихревого кольца // Прикладная механика и техническая физика. 2008. **49**, № 6. 909–918.
14. Weigand A., Garib M. On the evolution of laminar vortex rings // Experiments in Fluids. 1997. **22**, N 6. doi 10.1007/s003480050071.
15. Sun Z., Pointz B., Bruecker C. Transition of a vortex ring visualized by 3D scanning TomoPIV // Proceedings of 18th International Symposium on the Application of Laser and Imaging Techniques to Fluid Mechanics, 4–7 July 2016, Lisbon, Portugal. 2016. <https://openaccess.city.ac.uk/id/eprint/15664/>
16. Maxworthy T. Some experimental studies of vortex rings // Journal of Fluid Mechanics. 1977. **81**, N 3. 465–495.
17. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука // Успехи физических наук. 2000. **170**, № 7. 713–742.
18. Shariff K., Leonard A., Ferziger J.H. Dynamical systems analysis of fluid transport in time-periodic vortex ring flows // Physics of Fluids. 2006. **18**, N 4. doi 10.1063/1.2189867.
19. Cheng M., Lou J., Lim T.T. Evolution of an elliptic vortex ring in a viscous fluid // Physics of Fluids. 2016. **28**. doi 10.1063/1.4944059.
20. Bergdorf M., Koumoutsakos P., Leonard A. Direct numerical simulations of vortex rings at  $Re_\Gamma = 7500$  // Journal of Fluid Mechanics. 2007. **581**. 495–505.
21. Archer P.J., Thomas T.G., Coleman G.N. Direct numerical simulation of vortex ring evolution from the laminar to the early turbulent regime // Journal of Fluid Mechanics. 2008. **598**. 201–226.
22. Mansfield J.R., Knio O.M., Meneveau C. Dynamic LES of colliding vortex rings using a 3D vortex method // Journal of Computational Physics. 1999. **152**, N 1. 305–345.
23. Lindsay K., Krasny R. A particle method and adaptive treecode for vortex sheet motion in three-dimensional flow // Journal of Computational Physics. 2001. **172**, N 2. 879–907.
24. Kontis K., An R., Edwards J.A. Compressible vortex-ring interaction studies with a number of generic body configurations // AIAA Journal. 2006. **44**, N 12. 2962–2978.
25. Zare-Behtash H., Kontis K., Gongora-Orozco N., Takayama K. Compressible vortex loops: effect of nozzle geometry // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2009. **30**, N 3. 561–576.
26. Нижулин В.В., Котельникова М.С. Численное моделирование взаимодействия вихревого кольца с плоской стенкой при его движении по нормали к поверхности // Вестник НГУ. Математика, механика, информатика. 2015. **15**, № 4. 79–84.
27. Стручаев А.И. Перенос пассивной примеси вихревым кольцом при его взаимодействии с препятствием // Физика аэродисперсных систем. Вып. 39. Одесса: Одесский ун-т, 2002. 195–205.
28. Селиванов В.В., Левин Д.П. Возможности применения акустических средств нелетального действия в операциях по правопринуждению // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. 2009. № 2. 102–114.
29. Селиванов В.В., Левин Д.П. Оружие нелетального действия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
30. Volkov K. Multigrid and preconditioning techniques in CFD applications // CFD Techniques and Thermo-Mechanics Applications. Cham: Springer, 2018. 83–149.





31. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Тетерина И.В., Яковчук М.С. Методы и концепции визуализации вихревых течений в задачах вычислительной газовой динамики // Вычислительные методы и программирование. 2016. 17, № 1. 81–100.
32. Green M.A., Rowley C.W., Haller G. Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 2007. 572. 111–120.

Поступила в редакцию  
 26 апреля 2021

Принята к публикации  
 17 августа 2021

### Информация об авторах

Константин Николаевич Волков — д.ф.-м.н., вед. научн. сотр., Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, 1-ая Красноармейская ул., 1, 190005, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

Владислав Николаевич Емельянов — д.т.н., профессор, Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, 1-ая Красноармейская ул., 1, 190005, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

Илья Евгеньевич Капранов — к.т.н., научн. сотр., АО ЦКБ МТ “Рубин”, Марата ул., 90, 191119, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

### References

1. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Hydrodynamics Problems and Their Mathematical Models* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
2. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012; Mir, Moscow, 1973).
3. A. H. M. Eisenga, *Dynamics of a Vortex Ring in a Rotating Fluid* (Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 1997).
4. P. G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992; Nauch. Mir, Moscow, 2000).
5. Y. Xiang, S. Qin, and H. Liu, “Patterns for Efficient Propulsion during the Energy Evolution of Vortex Rings,” *Eur. J. Mech. B Fluids* **71**, 47–58 (2018).
6. L. Qin, Y. Xiang, H. Lin, and H. Liu, “Formation and Dynamics of Compressible Vortex Rings Generated by a Shock Tube,” *Exp. Fluids* **61** (2020). doi 10.1007/s00348-020-2920-1.
7. K. Shariff and A. Leonard, “Vortex Rings,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **24**, 235–279 (1992).
8. V. V. Meleshko, A. A. Gourjii, and T. S. Krasnopolskaya, “Vortex Rings: History and State of the Art,” *J. Math. Sci.* **187** (6), 772–808 (2012).
9. P. McGavin and D. I. Pontin, “Vortex Line Topology during Vortex Tube Reconnection,” *Phys. Rev. Fluids* **3** (2018). doi 10.1103/PhysRevFluids.3.054701.
10. D. G. Akhmetov and O. P. Kisarov, “Hydrodynamic Structure of a Vortex Ring,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **7** (4), 120–124 (1966) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **7** (4), 87–90 (1966)].
11. J. P. Sullivan, S. E. Widnall, and S. Ezekiel, “Study of Vortex Rings Using a Laser Doppler Velocimeter,” *AIAA J.* **11** (10), 1384–1389 (1973).
12. D. G. Akhmetov, “Formation and Basic Parameters of Vortex Rings,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **42** (5), 70–83 (2001) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **42** (5), 794–805 (2001)].
13. D. G. Akhmetov, “Model of Vortex Ring Formation,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **49** (6), 25–36 (2008) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **49** (6), 909–918 (2008)].
14. A. Weigand and M. Gharib, “On the Evolution of Laminar Vortex Rings,” *Exp. Fluids* **22** (1997). doi 10.1007/s003480050071.
15. Z. Sun, B. Pointz, and C. Bruecker, “Transition of a Vortex Ring Visualized by 3D Scanning TomoPIV,” in *Proc. 18th Int. Symposium on the Application of Laser and Imaging Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, July 4–7, 2016*, <https://openaccess.city.ac.uk/id/eprint/15664/>
16. T. Maxworthy, “Some Experimental Studies of Vortex Rings,” *J. Fluid Mech.* **81** (3), 465–495 (1977).
17. V. F. Kop'ev and S. A. Chernyshev, “Vortex Ring Oscillations, the Development of Turbulence in Vortex Rings and Generation of Sound,” *Usp. Fiz. Nauk* **170** (7), 713–742 (2000) [*Phys. Usp.* **43** (7), 663–690 (2000)].

18. K. Shariff, A. Leonard, and J. H. Ferziger, “Dynamical Systems Analysis of Fluid Transport in Time-Periodic Vortex Ring Flows,” *Phys. Fluids* **18** (2006). doi 10.1063/1.2189867.
19. M. Cheng, J. Lou, and T. T. Lim, “Evolution of an Elliptic Vortex Ring in a Viscous Fluid,” *Phys. Fluids* **28** (2016). doi 10.1063/1.4944059.
20. M. Bergdorf, P. Koumoutsakos, and A. Leonard, “Direct Numerical Simulations of Vortex Rings at  $Re_\Gamma = 7500$ ,” *J. Fluid Mech.* **581**, 495–505 (2007).
21. P. J. Archer, T. G. Thomas, and G. N. Coleman, “Direct Numerical Simulation of Vortex Ring Evolution from the Laminar to the Early Turbulent Regime,” *J. Fluid Mech.* **598**, 201–226 (2008).
22. J. R. Mansfield, O. M. Knio, and C. Meneveau, “Dynamic LES of Colliding Vortex Rings Using a 3D Vortex Method,” *J. Comput. Phys.* **152** (1), 305–345 (1999).
23. K. Lindsay and R. Krasny, “A Particle Method and Adaptive Treecode for Vortex Sheet Motion in Three-Dimensional Flow,” *J. Comput. Phys.* **172** (2), 879–907 (2001).
24. K. Kontis, R. An, and J. A. Edwards, “Compressible Vortex-Ring Interaction Studies with a Number of Generic Body Configurations,” *AIAA J.* **44** (12), 2962–2978 (2006).
25. H. Zare-Behtash, K. Kontis, N. Gongora-Orozco, and K. Takayama, “Compressible Vortex Loops: Effect of Nozzle Geometry,” *Int. J. Heat Fluid Fl.* **30** (3), 561–576 (2009).
26. V. V. Nikulin and M. S. Kotel’nikova, “Numerical Investigation of an Interaction between a Surface and a Vortex Ring Moving Normally to It,” *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.* **15** (4), 79–84 (2015).
27. A. I. Stroutchayev, “Carry of a Passive Impurity by a Vortex Ring at Interaction with an Obstacle,” in *Physics of Aerodisperse Systems* (Odessa Univ., Odessa, 2002), Issue 39, pp. 195–205.
28. V. V. Selivanov and D. P. Levin, “Possibilities of Using Acoustic Means of Non-Lethal Action in Law Enforcement Operations,” *Vestn. Bauman Mosk. Gos. Tekh. Univ., Ser. Mech. Eng. No. 2*, 102–114 (2009).
29. V. V. Selivanov and D. P. Levin, *Non-Lethal Weapon* (Bauman Gos. Tekh. Univ., Moscow, 2017) [in Russian].
30. K. Volkov, “Multigrid and Preconditioning Techniques in CFD Applications,” in *CFD Techniques and Thermo-Mechanics Applications* (Springer, Cham, 2018), pp. 83–149.
31. K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, I. V. Teterina, and M. S. Yakovchuk, “Methods and Concepts of Vortex Flow Visualization in the Problems of Computational Fluid Dynamics,” *Vychisl. Metody Programm.* **17** (1), 81–100 (2016).
32. M. A. Green, C. W. Rowley, and G. Haller, “Detection of Lagrangian Coherent Structures in Three-Dimensional Turbulence,” *J. Fluid Mech.* **572**, 111–120 (2007).

Received  
April 26, 2021

Accepted for publication  
August 17, 2021

#### Information about the authors

*Konstantin N. Volkov* — Dr. Sci., Leading Scientist, Baltic State Technical University, ul. 1-ya Krasnoarmeyskaya, 1, 190005, St. Petersburg, Russia.

*Vladislav N. Emelyanov* — Dr. Sci., Professor, Baltic State Technical University, ul. 1-ya Krasnoarmeyskaya, 1, 190005, St. Petersburg, Russia.

*Ilya E. Kapranov* — PhD., Scientist, AO TsKB Rubin, ul. Marata, 90, 191119, St. Petersburg, Russia.