

УДК 519.6

## ЗАПАСЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ПЛАСТОВ

П. А. Мазуров<sup>1</sup>, А. Н. Габидуллина<sup>1</sup>, А. В. Елесин<sup>1</sup>, А. Ш. Кадырова<sup>1</sup>

В работе рассматриваются вопросы использования запасов чувствительности при решении обратных коэффициентных задач. Показываются возможности построения новых алгоритмов минимизации функции невязки и новых критериев прерывания минимизационных процессов. Использование запасов чувствительности демонстрируется на численном решении модельной задачи идентификации коэффициента фильтрации трехмерного неоднородного напорного пласта.

**Ключевые слова:** коэффициентные задачи, обратные задачи, минимизация, запасы чувствительности, численные методы, фильтрация, сингулярное разложение матрицы.

**1. Введение.** В работе продолжено рассмотрение использования запасов чувствительности [1–3], характеризующих потенциальную возможность к минимизации функции невязки  $J$  в пространстве параметров по главным направлениям, получаемым SVD-разложением [4–6] матрицы  $H = A^T A$ , где  $A$  — матрица чувствительности [4, 7]. Функция невязки может иметь самую большую чувствительность в одном из этих направлений, но иметь небольшой запас чувствительности относительно других направлений. Такие направления являются одной из причин медленной сходимости метода наискорейшего спуска. С учетом последнего построен новый алгоритм квазиградиентного типа с лучшими минимизационными свойствами в сравнении с методами наискорейшего спуска и сопряженных градиентов, в котором минимизация функции невязки проводится преимущественно в направлениях с большими запасами чувствительности.

Одним из основных вопросов решения обратных коэффициентных задач [8–11] остается разработка критериев прерывания процесса минимизации. С использованием распределения запасов чувствительности проведен анализ поведения функции невязки в окрестности точки минимума и предложен новый критерий прерывания [3]. На отдельных примерах решения модельной задачи идентификации коэффициента фильтрации трехмерного пласта [7, 12–14] показано улучшение результатов идентификации с прерыванием по предложенному критерию. Критерий использован для прерывания метода Левенберга–Марквардта [4, 7, 13, 15] при минимизации функции невязки.

**2. Запасы чувствительности.** В различных задачах значения коэффициента фильтрации определяются из минимизации функции невязки [7, 12–14]

$$J = J(\mathbf{K}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{R}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R} = [(h_1 - h_1^*), \dots, (h_N - h_N^*)]^T$  — вектор невязки,  $\mathbf{h}^* = \{h_j^*\}_{j=1}^N$ ,  $\mathbf{h} = \{h_j\}_{j=1}^N = \{h_j(\mathbf{K})\}_{j=1}^N$  — заданные и вычисленные значения напоров в наблюдательных точках  $j$ ,  $\mathbf{K} = \{K_i\}_{i=1}^M$  — значения логарифмов коэффициента фильтрации в зонах однородности,  $N$  — число наблюдательных точек,  $M$  — число идентифицируемых значений коэффициента фильтрации ( $N \geq M$ ).

В основе большинства квазиньютоновских методов минимизации функции невязки (1) лежит уравнение [4, 7]

$$H \mathbf{s} = \mathbf{g}, \quad (2)$$

где  $H = A^T A$  — аппроксимация матрицы Гессе,  $A = \{\partial h_j / \partial K_i\}$  — матрица чувствительности,  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_M]^T$  — вектор отклонений Гаусса–Ньютона,  $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_M]^T = A^T \mathbf{R}$ ,  $g_i$  — чувствительности функции  $J$  к параметрам  $K_i$  (компоненты вектора градиента  $\mathbf{g}$ ).

Каждому параметру  $K_i$  поставим в соответствие запас чувствительности  $P_i = s_i g_i$  [1–3]. Покажем, что если матрица  $A$  квадратная ( $N = M$ ) и невырожденная, то сумма запасов чувствительности всех параметров равна квадрату вектора невязки. Из (2) имеем  $\mathbf{s} = H^{-1} \mathbf{g} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{R} = A^{-1} \mathbf{R}$ ; тогда

$$P = \sum_{i=1}^M P_i = \sum_{i=1}^M s_i g_i = \mathbf{s}^T \mathbf{g} = (A^{-1} \mathbf{R})^T (A^T \mathbf{R}) = \mathbf{R}^T \mathbf{R}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, г. Казань; e-mail: mazurov@mail.knc.ru, gabidullina@mail.knc.ru, elesin@mail.knc.ru, kadyirova@mail.knc.ru

Далее будем использовать распределение запасов чувствительности в пространстве параметров по главным направлениям, получаемым SVD-разложением [4–6] матрицы  $H = V\Sigma V^T$ , где  $V$  — ортогональная матрица,  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  — диагональная матрица,  $\sigma_i$  — сингулярные числа,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N > 0$ . Тогда уравнение (2) может быть записано в виде

$$\sigma_i s_{V_i} = g_{V_i}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (4)$$

где  $s_{V_i}$  — компоненты вектора отклонений  $\mathbf{s}_V = V^T \mathbf{s}$ ,  $g_{V_i}$  — чувствительности функции  $J$  в направлении осей главной системы координат (компоненты вектора градиента  $\mathbf{g}_V = V^T \mathbf{g}$ ). Запас чувствительности в направлении  $i$ -й оси преобразованной системы координат будет равен

$$P_{V_i} = s_{V_i} g_{V_i} = \frac{g_{V_i}^2}{\sigma_i} = s_{V_i}^2 \sigma_i \geq 0, \quad (5)$$

а полный запас чувствительности

$$P_V = \sum_{i=1}^M P_{V_i} = \sum_{i=1}^M s_{V_i} g_{V_i} = \mathbf{s}_V^T \mathbf{g}_V = (V^T \mathbf{s})^T (V^T \mathbf{g}) = \mathbf{s}^T \mathbf{g} = P. \quad (6)$$

Таким образом, полный запас чувствительности есть инвариантная величина относительно данного преобразования матрицы  $H$ . Заметим, что  $P_{V_i} \geq 0$ ; указанное неравенство для  $P_i$  в общем случае не выполняется.

Покажем, что в случае  $N > M$  и матрицы  $A$  ранга  $M$  сумма запасов чувствительности всех параметров не больше квадрата вектора невязки  $P_V \leq \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ . Возьмем матрицу  $A_\epsilon$  ранга  $N - M$ , столбцы которой образуют фундаментальную систему решений системы однородных линейных уравнений с матрицей  $A^T$  ( $A^T A_\epsilon = 0$ ) [17]. Образует квадратную матрицу  $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A^T \\ A_\epsilon^T \end{pmatrix}$  размерности  $N \times N$ . Тогда

$$\tilde{H} = \tilde{A}^T \tilde{A} = \begin{pmatrix} A^T A & 0 \\ 0 & A_\epsilon^T A_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\Sigma V^T & 0 \\ 0 & V_\epsilon \Sigma_\epsilon V_\epsilon^T \end{pmatrix} = \tilde{V} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^T, \quad (7)$$

где  $V\Sigma V^T$  и  $V_\epsilon \Sigma_\epsilon V_\epsilon^T$  — сингулярные разложения матриц  $H = A^T A$  и  $H_\epsilon = A_\epsilon^T A_\epsilon$ ,  $\tilde{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V_\epsilon \end{pmatrix}$  — ортогональная матрица,  $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma_\epsilon \end{pmatrix}$  — диагональная матрица. Разложение  $\tilde{H} = \tilde{V} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^T$  является сингулярным разложением с точностью до перестановки сингулярных чисел и соответствующих им столбцов матрицы  $\tilde{V}$ . Определим вектор  $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{A}^T \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_\epsilon \end{pmatrix}$ , где  $\mathbf{g}_\epsilon = A_\epsilon^T \mathbf{R}$ . Для матрицы  $\tilde{H}$  и вектора  $\tilde{\mathbf{g}}$  выполняются соотношения (3)–(6); следовательно

$$P_{\tilde{V}} = P_V + P_{V_\epsilon} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}. \quad (8)$$

Так как  $P_{V_\epsilon} \geq 0$ , то из (8) следует  $P_V \leq \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ .

**3. Распределение запасов чувствительности в процессе минимизации функции невязки методом наискорейшего спуска.** Рассмотрим распределение запасов чувствительности  $P_{V_i}$  и чувствительностей  $g_{V_i}$  начального и конечного состояний функции невязки  $J$  при минимизации методом наискорейшего спуска на примере модельной задачи идентификации коэффициента фильтрации трехмерного напорного пятислойного пласта реальной конфигурации  $\Omega$  ( $\approx 40$  км  $\times$  30 км  $\times$  200 м) в конечноэлементной аппроксимации (рис. 1–4) при однофазной фильтрации, описываемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0, \quad (9)$$

где  $K_{xy}$ ,  $K_z$  — коэффициенты фильтрации,  $h = h(x, y, z)$  — напор,  $N = M = 142$ . На кровле пласта заданы граничные условия 2-го рода (от  $-9.2 \cdot 10^{-3}$  до  $2 \cdot 10^{-3}$  м  $\cdot$  сут $^{-1}$ ).

Подошва и боковая поверхность непроницаемы, за исключением участка боковой поверхности 5-го слоя, где задано граничное условие 1-го рода  $h = 80$  м (рис. 4). Наблюдательные точки показаны на рис. 2–4. Слой разделены на зоны однородности  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 71$  (рис. 2–4). В каждой зоне заданы значения  $K_{xyk}^{tr}$ ,  $K_{zk}^{tr}$ . Задача заключается в восстановлении заданных значений  $K_{xyk}^{tr}$  (меняются в пределах от 0.1 до 100 м  $\cdot$  сут $^{-1}$ ) и  $K_{zk}^{tr}$  (меняются в пределах от 0.0001 до 0.02 м  $\cdot$  сут $^{-1}$ ) по значениям напоров в

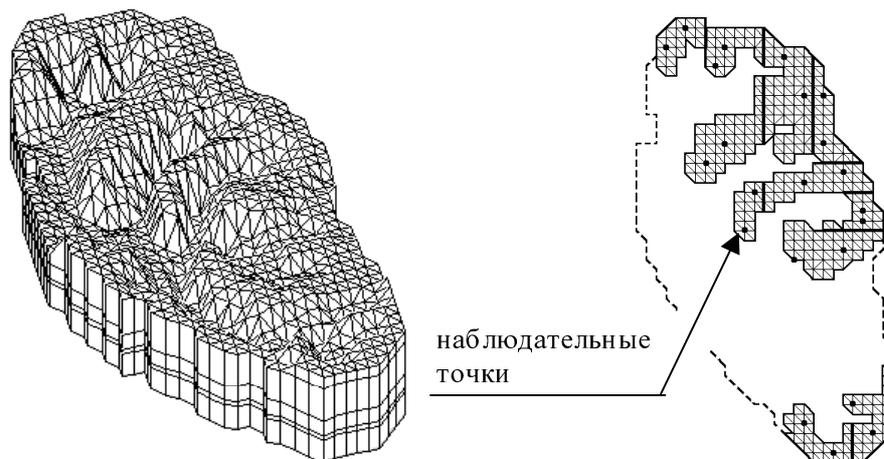


Рис. 1, 2. Пласт (слева), слой 1 (справа)

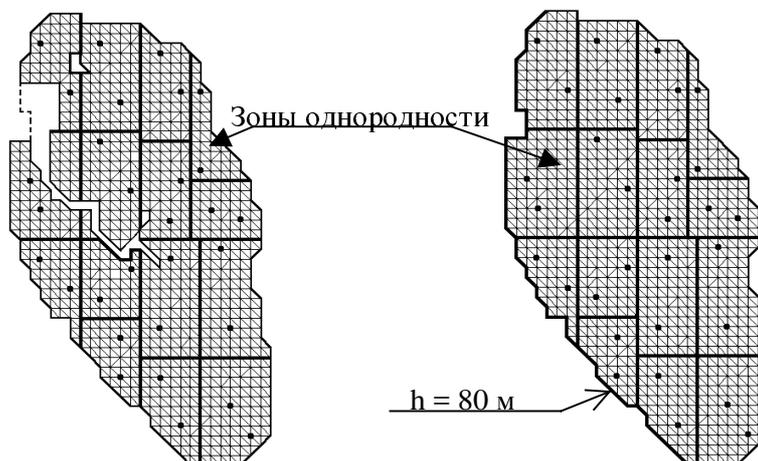


Рис. 3, 4. Слой 2 (слева), слои 3-5 (справа)

наблюдательных точках  $h_j^* = h_j^{tr} + \delta_j$  ( $j = 1, \dots, 142$ ), где  $\delta_j$  — погрешности,  $h_j^{tr}$  — значения напоров (меняются от 79.96 до 98.34 м), полученные из решения (9) при значениях  $K_{xyk}^{tr}$ ,  $K_{zk}^{tr}$ . Начальные значения коэффициента фильтрации определялись из минимума функции (1) при условии однородности пласта по  $K_{xy}$  и  $K_z$  ( $K_{xyk}^o = K_{xy}^o = 24.17 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$ ,  $K_{zk}^o = K_z^o = 0.0023 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$  при  $\delta_j = 0$ ).

Далее приводятся результаты минимизации функции невязки  $J(\mathbf{K})$ , полученные методом наискорейшего спуска без погрешностей ( $\delta_j = 0$ ), где  $\mathbf{K} = \{K_i\}_{i=1}^{142} = \{\ln K_{xyk}, \ln K_{zk}\}_{k=1}^{71}$ . Итерационный процесс минимизации функции невязки в методе наискорейшего спуска строился в виде [16]

$$\mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{K}^n - \rho \mathbf{g}^n, \quad (10)$$

где  $\rho$  — величина шага, определяемая из условия минимума функции  $J(\mathbf{K}^n - \rho \mathbf{g}^n)$ ,  $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_M]^T$ ,  $g_i = \partial J / \partial K_i = \sum_{j=1}^N (h_j - h_j^*) (\partial h_j / \partial K_i)$ . Производные  $\partial J / \partial K_i$  определялись по формулам [7, 12, 13]

$$\partial J / \partial \ln K_{xyk} = K_{xyk} \int_{\Omega_k} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega, \quad \partial J / \partial \ln K_{zk} = K_{zk} \int_{\Omega_k} \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} d\Omega, \quad k = 1, \dots, 71, \quad (11)$$

где  $h$  — решение задачи (9),  $\psi$  — решение сопряженной задачи для уравнения (9)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \sum_{j=1}^N (h_j - h_j^*) \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \delta(z - z_j), \quad (12)$$

$\delta(\cdot)$  — функция Дирака,  $(x_j, y_j, z_j)$  — координаты наблюдательных точек. Для сопряженной задачи (12) участки поверхностей, на которых заданы граничные условия 1-го и 2-го рода, совпадают с соответствующими участками поверхностей задачи (9). На участке граничных условий 1-го рода  $\psi = 0$ , участки граничных условий 2-го рода непроницаемы.

Для демонстрации сходимости итерационного процесса приведены графики изменения по итерациям функции невязки  $J$  (рис. 5) и среднеквадратического отклонения логарифмов значений коэффициента фильтрации (рис. 6)

$$\Delta \ln K_{xyz}^n = \left[ \sum_{k=1}^{71} \frac{(\ln K_{xyk}^{tr} - \ln K_{xyk}^n)^2 + (\ln K_{zk}^{tr} - \ln K_{zk}^n)^2}{142} \right]^{1/2}.$$

Процесс минимизации прерывался при выполнении одного из двух критериев:

- 1) медленная сходимость итерационного процесса

$$J(\mathbf{K}^n) - J(\mathbf{K}^{n+1}) < 0.01 J(\mathbf{K}^n) \quad \text{в течение 10 итераций,} \quad (13)$$

- 2) достижение заданной точности по напору в наблюдательных точках

$$\Delta h^m = \max_j |h_j^* - h_j(\mathbf{K}^n)| < 10^{-6} \text{ м,} \quad (14)$$

где  $\Delta h^m$  — значение максимальной невязки.

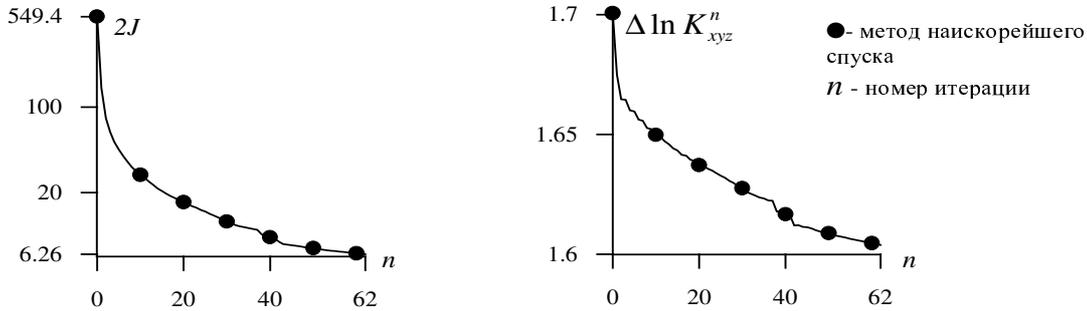


Рис. 5, 6. Функция невязки  $J$  (слева), среднеквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz}^n$  (справа)

Минимизация функции невязки методом наискорейшего спуска была остановлена после 62-ой итерации по критерию медленной сходимости (13). Конечное значение максимальной невязки  $\Delta h^m$  составило 0.86 м.

При определении чувствительностей  $g_{V_i}$  и запасов чувствительности  $P_{V_i}$  элементы  $\partial h_j / \partial K_i$  матрицы  $A$  определялись из решения уравнений, полученных прямым дифференцированием [7] уравнения (9). Коэффициенты  $\partial h_i / \partial \ln K_{xyk}$  определялись из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xy} \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{xy} \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h_{xy}^k}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xyk} \varphi_k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{xyk} \varphi_k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad k = 1, \dots, 71, \end{aligned} \quad (15)$$

коэффициенты  $\partial h_i / \partial \ln K_{zk}$  — из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xy} \frac{\partial h_z^k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{xy} \frac{\partial h_z^k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h_z^k}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zk} \varphi_k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial z} \right), \quad k = 1, \dots, 71, \quad (16)$$

где  $h_{xy}^k = \frac{\partial h}{\partial \ln K_{xyk}}$ ,  $h_z^k = \frac{\partial h}{\partial \ln K_{zk}}$ ,  $\varphi_k(x, y, z) = 1$  при  $(x, y, z) \in \Omega_k$  и  $\varphi_k(x, y, z) = 0$  при  $(x, y, z) \notin \Omega_k$ .

Для задач (15), (16) граничные условия соответствуют граничным условиям сопряженной задачи (12). Распределение чувствительностей и запасов чувствительности по направлениям в главной системе координат для начального состояния показаны на рис. 7, 8, для конечного состояния — на рис. 9, 10. Ниже порядковых номеров направлений приведены значения сингулярных чисел  $\sigma_i$ .

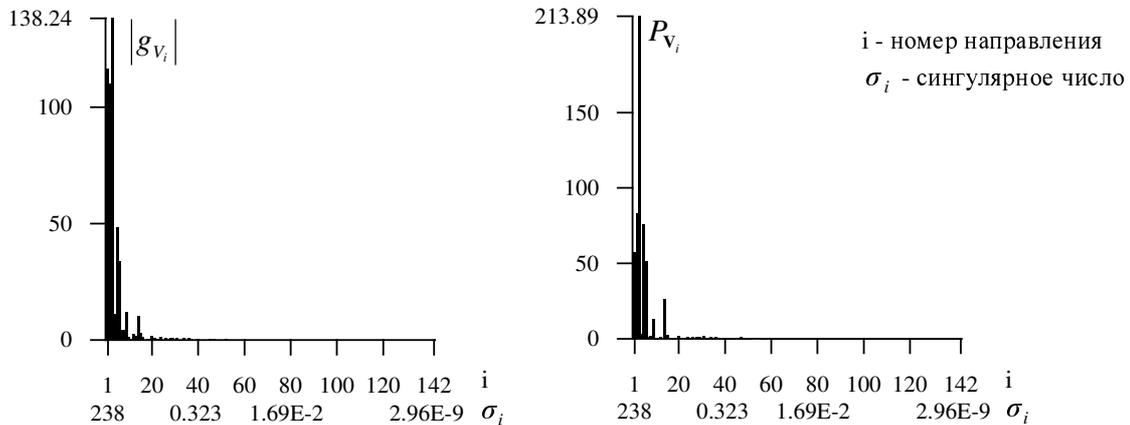


Рис. 7, 8. Значения чувствительностей начального состояния в методе наискорейшего спуска (слева), запасы чувствительности  $P_{V_i}$  начального состояния в методе наискорейшего спуска (справа)

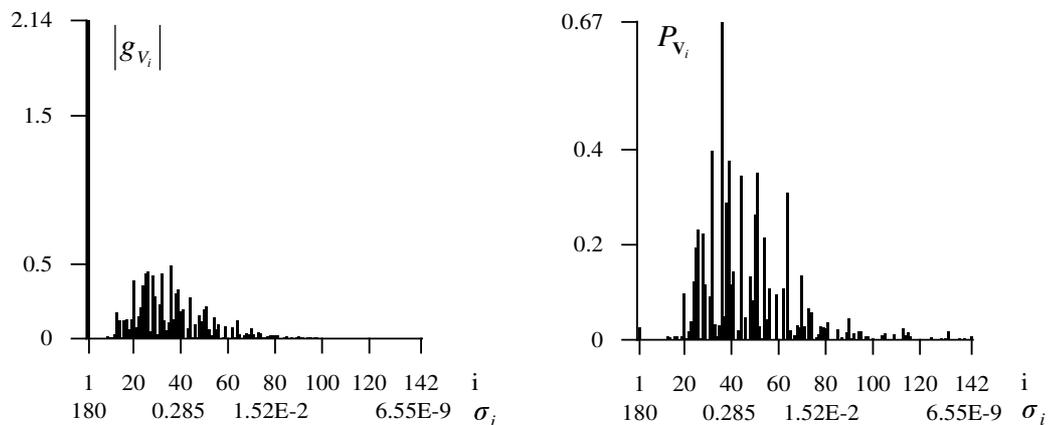


Рис. 9, 10. Значения чувствительностей конечного состояния в методе наискорейшего спуска (слева), запасы чувствительности  $P_{V_i}$  конечного состояния в методе наискорейшего спуска (справа)

В начальном состоянии (рис. 7, 8) видно соответствие между значениями чувствительностей и запасами чувствительности. Сравнение распределений чувствительностей и запасов чувствительности конечного состояния (рис. 9, 10) показывает одну из причин медленной сходимости метода наискорейшего спуска. Максимальной чувствительности в направлении первой оси  $g_{V_1} = 2.14$  м · сут соответствует очень маленькое значение запаса чувствительности  $P_{V_1} = 0.025$  м<sup>2</sup> (максимальное значение  $P_{V_{36}} = 0.67$  м<sup>2</sup>). Направление минимизации в методе наискорейшего спуска определяется вектором градиента и для конечного состояния данной задачи определяется в основном чувствительностью в направлении первой оси  $g_{V_1}$  (рис. 9). Небольшой запас чувствительности, соответствующий  $g_{V_1}$  (рис. 10), приводит к малому изменению функции невязки и медленной сходимости итерационного процесса. Приведенные результаты полностью согласуются с объяснением медленной сходимости метода наискорейшего спуска на языке овражных функций [16].

**4. Построение алгоритма минимизации функции невязки квазиградиентного типа.** Рассмотрим алгоритм минимизации функции невязки, учитывающий соотношения между величинами чув-

ствительностей и запасов чувствительности в главной системе координат. При минимизации использовались чувствительности, уменьшенные таким образом, чтобы чувствительность в направлении с меньшим запасом не превосходила чувствительности в направлении с большим запасом. Каждая итерация минимизации данного метода строилась в виде

$$\mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{K}^n - \rho V \mathbf{g}_{V_q}, \tag{17}$$

где  $\mathbf{g}_{V_q} = \{g_{V_{q_1}}, \dots, g_{V_{q_M}}\}$  — вектор уменьшенных чувствительностей,  $\rho$  — величина шага, определяемая из условия минимума функции  $J(\mathbf{K}^n - \rho V \mathbf{g}_{V_q})$ .

Величины  $g_{V_{q_i}}$  получаются уменьшением первоначальных чувствительностей  $g_{V_i}$  по следующим правилам:

- 1) каждому направлению  $i$  ставится в соответствие величина  $r_i = \min_k |g_{V_k}|$ , вычисляемая среди множества направлений  $k$ , таких, что  $P_{V_k} > P_{V_i}$ ;
- 2) если  $|g_{V_i}| \leq r_i$ , то  $g_{V_{q_i}} = g_{V_i}$  (чувствительность не уменьшается);
- 3) если  $|g_{V_i}| > r_i$ , то  $g_{V_{q_i}} = g_{V_i} \frac{r_i}{|g_{V_i}|}$  (чувствительность уменьшается).

Отметим, что без уменьшения чувствительностей ( $g_{V_{q_i}} = g_{V_i}$ ) алгоритм (17) представляет собой метод наискорейшего спуска (10). Минимизация функции невязки по предложенному квазиградиентному алгоритму была остановлена после 129 итерации по критерию (13), и конечное значение максимальной невязки  $\Delta h^m$  составило  $2.23 \cdot 10^{-3}$  м.

На рис. 11, 12 показаны сравнительные результаты минимизации квазиградиентным методом, методами наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

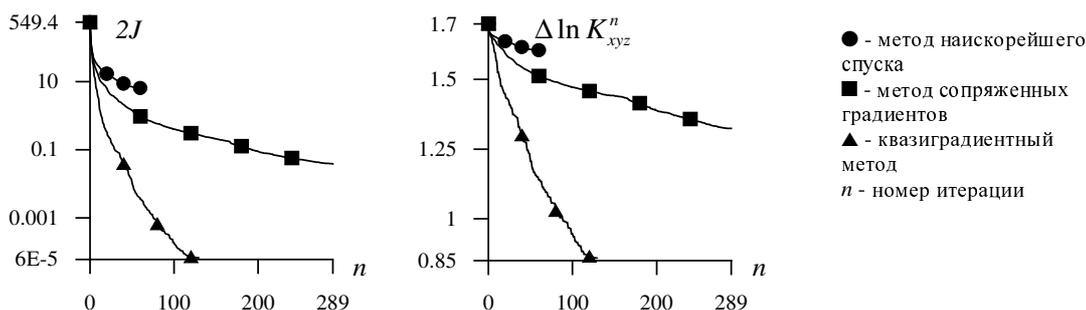


Рис. 11, 12. Функция невязки  $J$  (слева), среднеквадратическое отклонение  $\Delta \ln K^m_{xyz}$  (справа)

В методе сопряженных градиентов последовательные приближения коэффициента фильтрации вычислялись по формуле [16]

$$\mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{K}^n - \rho \mathbf{p}^n, \tag{18}$$

где  $\mathbf{p}^0 = \mathbf{g}^0$ ,  $\mathbf{p}^n = \mathbf{g}^n - \beta^n \mathbf{p}^{n-1}$ ,  $\beta^n = -\frac{|\mathbf{g}^n|^2}{|\mathbf{g}^{n-1}|^2}$ ,  $\rho$  — величина шага, определяемая из условия минимума функции  $J(\mathbf{K}^n - \rho \mathbf{p}^n)$ . Сравнение результатов (рис. 11, 12) показывает, что уменьшение чувствительностей в направлениях с малыми запасами чувствительности по алгоритму (17) существенно улучшает скорость сходимости итерационного процесса в сравнении с методами наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Далее приведены результаты сравнения квазиградиентного метода с методом Левенберга–Марквардта [4, 7, 13, 15], широко используемым в задачах идентификации коэффициента фильтрации. Алгоритм метода Левенберга–Марквардта строился в следующем виде [15]:

$$\mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{K}^n - (\mathbf{H} + \mu^n \mathbf{E})^{-1} \mathbf{g}, \quad \mu^{n+1} = \frac{\mu^n}{2}, \tag{19}$$

где  $\mu^n$  — параметр Марквардта,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица. На каждой итерации при нарушении условия

$$J(\mathbf{K}^n - (\mathbf{H} + \mu^n \mathbf{E})^{-1} \mathbf{g}) < J(\mathbf{K}^n) \tag{20}$$

коэффициент  $\mu^n$  увеличивался в два раза до тех пор, пока данное условие не выполнялось. Начальное значение параметра  $\mu^0$  задавалось на порядок больше максимального диагонального элемента матрицы  $\mathbf{H}$ .

Результаты минимизации функции невязки квазиградиентным методом и методом Левенберга–Марквардта без погрешностей в напорах ( $h_j^* = h_j^{tr} + \sigma_j$ ,  $\sigma_j = 0$ ) приведены на рис. 13, 14, с погрешностями ( $h_j^* = h_j^{tr} + \sigma_j$ ,  $\sigma_j = \pm 0.01$  м,  $\sigma_j = \pm 0.1$  м) – на рис. 15–18.

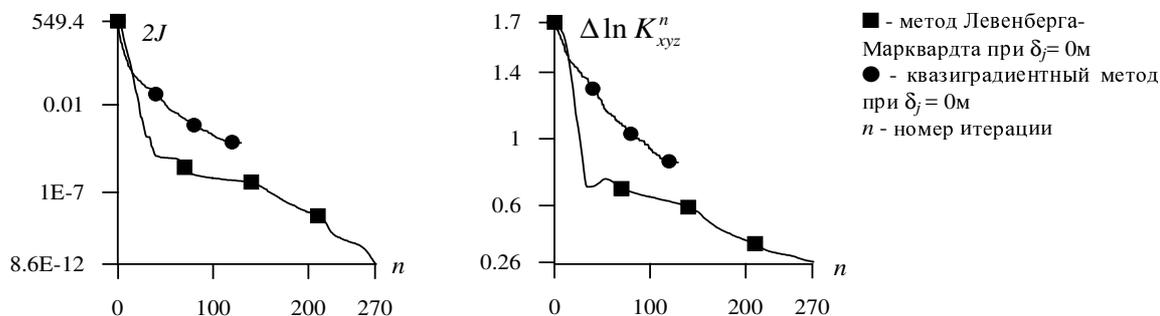


Рис. 13, 14. Функция невязки  $J$  (слева), средноквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz}^n$  (справа)

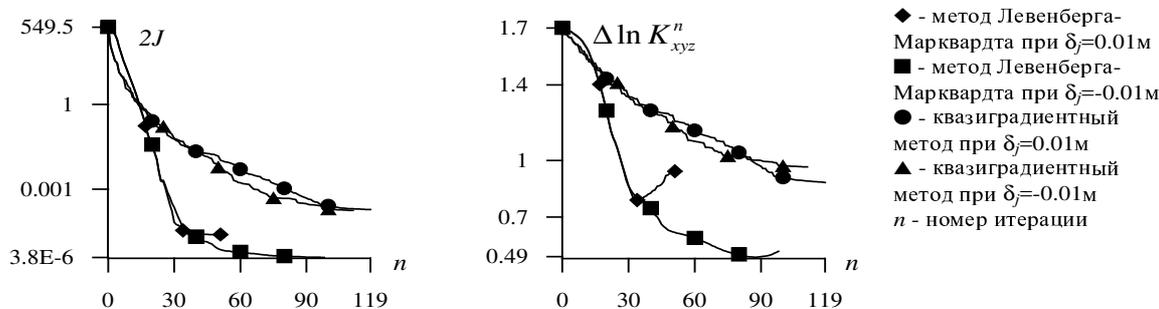


Рис. 15, 16. Функция невязки  $J$  (слева), средноквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz}^n$  (справа)

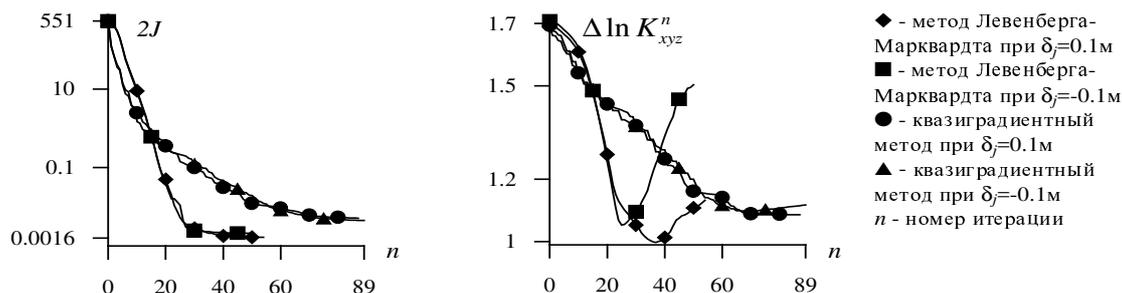


Рис. 17, 18. Функция невязки  $J$  (слева), средноквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz}^n$  (справа)

Процесс минимизации методом Левенберга–Марквардта без погрешностей был прерван по критерию (14), в остальных случаях минимизация прервана по критерию медленной сходимости (13). Для приведенных погрешностей квазиградиентный метод минимизации ведет себя более устойчиво по сравнению с методом Левенберга–Марквардта. Метод Левенберга–Марквардта имеет более высокую скорость сходимости, но при наличии погрешностей, начиная с некоторой итерации, параметры начинают удаляться от своих истинных значений, хотя функция невязки продолжает уменьшаться.

**5. Использование запасов чувствительности при построении критерия прерывания процесса минимизации функции невязки.** Удаление параметров от своих истинных значений, начиная с некоторой итерации, является характерным при решении некорректно поставленных задач и, в частности, обратных коэффициентных задач [8]. Специальные правила останова процесса минимизации функции

невязки являются одним из регуляризирующих элементов решения таких задач [8–11]. Правила останова обычно согласуются с погрешностями задачи. Ниже приведено построение с использованием запасов чувствительности нового критерия останова минимизационного процесса при отсутствии информации о погрешностях. Критерий основан на анализе поведения функции невязки в окрестности точки минимума.

Рассмотрим асимптотические свойства решений в окрестности точки минимума функции невязки при различных заданных напорах  $h_j^*$ . Все множество решений  $\{\mathbf{K}^\infty\} = \{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}^n\}$  разделим на два класса:  $\{\mathbf{K}_{tr}^\infty\}$  и  $\{\mathbf{K}_\delta^\infty\}$ . Для решений  $\mathbf{K}_{tr}^\infty$  из первого класса  $\{\mathbf{K}_{tr}^\infty\}$  функция невязки равна нулю:

$$J(\mathbf{K}_{tr}^\infty) = 0. \tag{21}$$

Для решений  $\mathbf{K}_\delta^\infty$  из второго класса  $\{\mathbf{K}_\delta^\infty\}$  имеет место неравенство

$$J(\mathbf{K}_\delta^\infty) > 0. \tag{22}$$

Первый класс решений кроме решения  $\mathbf{K}_{tr}$ , соответствующего  $h_j^* = h_j^{tr}$ , включает решения  $\mathbf{K}_{tr} + \delta\mathbf{K}_{tr}$ , соответствующие напорам  $h_j^* = h_j^{tr} + \delta h_j^{tr}$ , которые определяются в наблюдательных точках решением прямой задачи (1) при возмущенных параметрах  $\mathbf{K}_{tr} + \delta\mathbf{K}_{tr}$ , т.е.  $\{\mathbf{K}_{tr}^\infty\} = \{\mathbf{K}_{tr} + \delta\mathbf{K}_{tr}\}$ . Основным свойством таких решений является стремление к нулю отклонений  $s_{V_i} \rightarrow 0$  при  $\mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}_{tr}^\infty$  в случае невырожденной матрицы  $H = A^T A$  при  $\mathbf{K}_{tr}^\infty$ . Рассмотрим асимптотические свойства отклонений  $s_{V_i}$  для решений  $\mathbf{K}_\delta^\infty$  из второго класса, где функция невязки сходится к некоторой конечной величине  $J(\mathbf{K}_\delta^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(\mathbf{K}^n) = J^\infty > 0$ . Введем следующие обозначения:

$$d_g = \sqrt{\sum_{i=1}^M g_{V_i}^2}, \quad d_s = \sqrt{\sum_{i=1}^M s_{V_i}^2}, \quad d_\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

Пусть, далее, число наблюдательных точек равно числу параметров ( $N = M$ ), в точке  $\mathbf{K}_\delta^\infty$  имеется локальный минимум и

$$d_g \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \tag{23}$$

Тогда на каждой итерации из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$2J^\infty < P_V = \sum_{i=1}^M s_{V_i} g_{V_i} \leq d_s d_g, \tag{24}$$

$$2J^\infty < P_V = \sum_{i=1}^M \frac{g_{V_i}^2}{\sigma_i} \leq d_\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^M g_{V_i}^4}. \tag{25}$$

Из (23), (24), (25) следует  $d_s \rightarrow \infty$ ,  $d_\sigma \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Необходимо заметить, что (23) приведено как предположение главным образом для того, чтобы показать тенденцию изменения величины  $d_s$ . В случае  $N > M$  (число наблюдательных точек больше числа параметров) при условии  $P_V \rightarrow P_V^\infty > 0$ , как и в случае  $N = M$ ,  $d_s \rightarrow \infty$ ,  $d_\sigma \rightarrow \infty$  при  $d_g \rightarrow 0$ . Величину  $d_s$  назовем псевдорасстоянием, в окрестности решения  $\mathbf{K}_{tr}^\infty$  она характеризует расстояние между  $\mathbf{K}^n$  и  $\mathbf{K}_{tr}^\infty$ . Увеличение величины  $d_s$  в окрестности минимума функции невязки указывает на удаление  $\mathbf{K}^n$  от  $\{\mathbf{K}_{tr} + \delta\mathbf{K}_{tr}\}$ , что лежит в основе предлагаемого критерия выбора номера итерации прерывания процесса минимизации. В отличие от правил прерывания минимизационного процесса на некотором номере итерации, здесь номер итерации прерывания выбирается после завершения процесса минимизации из анализа поведения величины  $d_s$ .

Учитывая высокие минимизационные свойства метода Левенберга–Марквардта, будем считать начало медленной сходимости достаточным для попадания в окрестность минимума функции невязки в случае  $J^\infty > 0$ . Исходя из вышесказанного, номер итерации прерывания процесса минимизации будем выбирать с наименьшим значением  $d_s$  из множества номеров  $s = \{n_k\}$ , где множество  $s$  определим по следующим правилам:

- 1) определяется номер итерации  $k$ , с которого начинается медленная сходимость процесса минимизации, и включается в множество  $s$ ,
- 2) к множеству  $s$  добавляются номера  $n > k$ ,
- 3) к множеству  $s$  последовательно добавляются номера  $n = k - i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) до тех пор, пока выполняется условие  $d_s^{k-i} < (1 + \alpha) \min_{j=k-i+1, k} d_s^j$ , где  $\alpha \geq 0$ .

При отсутствии медленной сходимости множество  $s$  включает в себя последний номер итерации. С увеличением  $\alpha$  множество номеров  $s$  расширяется и начиная с некоторого значения включает все номера итераций. Ниже приведены расчеты при  $\alpha = 1$ . Данный критерий прерывания процесса минимизации функции невязки может быть использован как независимо, так и совместно с другими критериями прерывания.

На рис. 19–33 приведены графики изменения по итерациям значений

$$\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n = \left[ \sum_{i=1}^{71} \left( \int_{\Omega_i} ((\ln K_{xyi}^{tr} - \ln K_{xyi}^n)^2 + (\ln K_{zi}^{tr} - \ln K_{zi}^n)^2) d\Omega \right) / \int_{\Omega} d\Omega \right]^{1/2},$$

полученных без прерывания и с прерыванием по функции  $d_s$  при минимизации функции невязки методом Левенберга–Марквардта приведенной выше задачи идентификации без погрешностей  $\delta_j = 0$  и с погрешностями  $\delta_j = \pm 0.01$  м,  $\delta_j = \pm 0.1$  м.

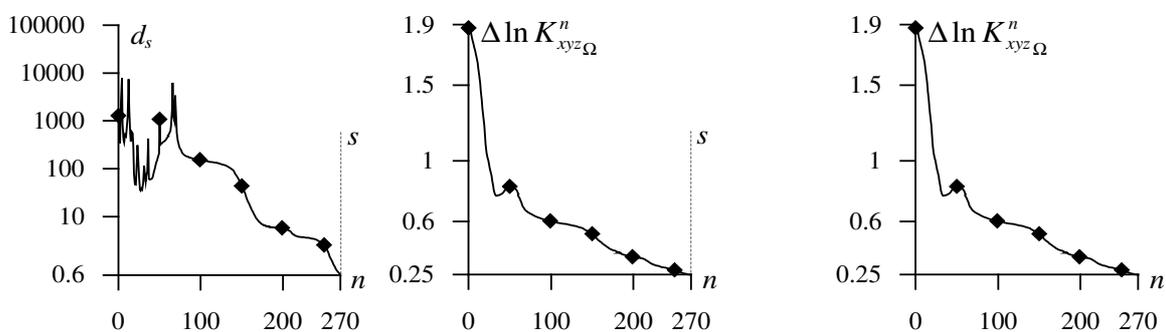


Рис. 19, 20, 21. Функция  $d_s$  (слева), средноквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  (в центре), средноквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  с прерыванием по функции  $d_s$  (справа).

На рисунках:  $\blacklozenge$  — метод Левенберга–Марквардта без погрешностей  $\delta_j = 0$  м,  $s = \{270\}$  — множество номеров для выбора минимальной величины  $d_s$

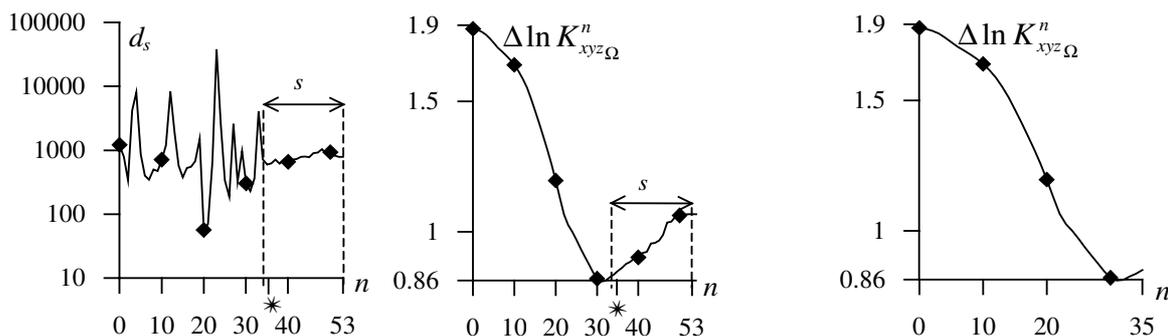


Рис. 22, 23, 24. Функция  $d_s$  (слева), средноквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  (в центре), средноквадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  с прерыванием по функции  $d_s$  (справа).

На рисунках:  $\blacklozenge$  — метод Левенберга–Марквардта при погрешностях  $\delta_j = 0.01$  м, \* — итерация с минимальной величиной  $d_s$  среди множества номеров  $s = \{34 - 53\}$

В табл. 1–5 приведены начальные и конечные значения средноквадратических отклонений  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$ ,  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$ , максимальной невязки  $\Delta h_m = \max_j |h_j|$  по наблюдательным точкам и максимальной невязки  $\Delta H_m = \max_{\Omega} |h(K^{tr}) - h(K^n)|$  по всему пласту. Начальные значения коэффициента фильтрации во всех случаях определялись из минимизации функции невязки по двум параметрам  $K_{xy}^{\circ}$  и  $K_z^{\circ}$  при условии однородности пласта по  $K_{xy}$  и  $K_z$  ( $K_{xyk} = K_{xy}^{\circ}$ ,  $K_{zk} = K_z^{\circ}$ ,  $k = 1, \dots, 71$ ). Минимизация функции невязки  $J$  при решении задач методами наискорейшего спуска, сопряженных градиентов, квазиградиентным

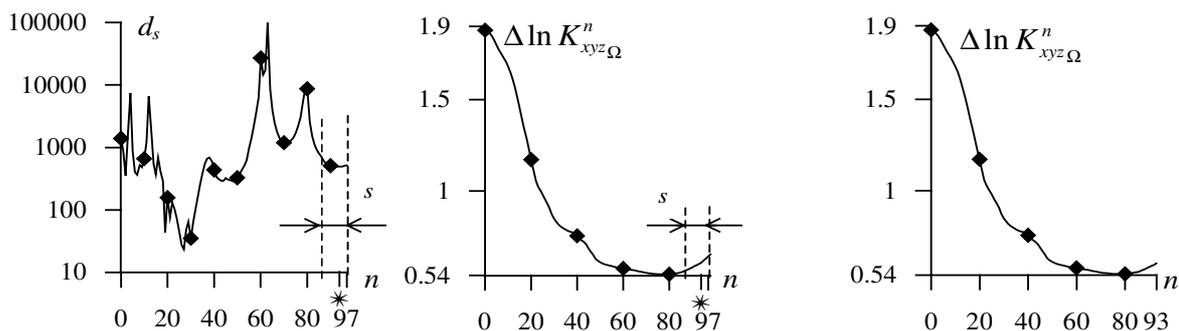


Рис. 25, 26, 27. Функция  $d_s$  (слева), среднее квадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  (в центре), среднее квадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  с прерыванием по функции  $d_s$  (справа).  
 На рисунках:  $\blacklozenge$  — метод Левенберга–Марквардта при погрешностях  $\delta_j = -0.01$  м,  
 \* — итерация с минимальной величиной  $d_s$  среди множества номеров  $s = \{84 - 97\}$

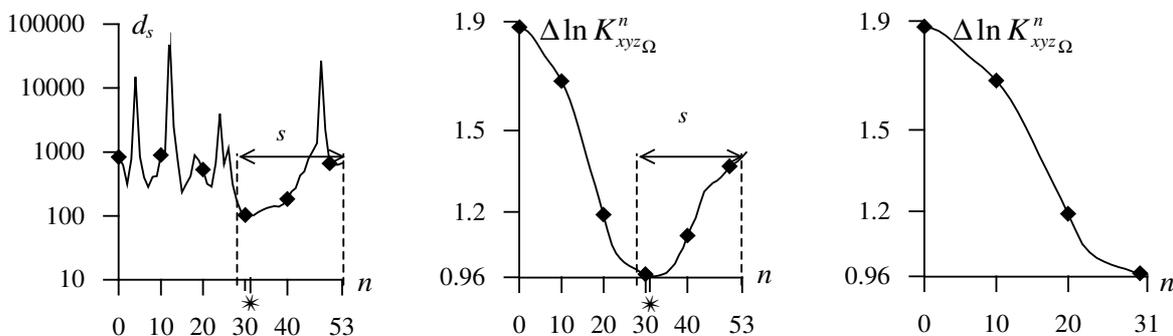


Рис. 28, 29, 30. Функция  $d_s$  (слева), среднее квадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  (в центре), среднее квадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  с прерыванием по функции  $d_s$  (справа).  
 На рисунках:  $\blacklozenge$  — метод Левенберга–Марквардта при погрешностях  $\delta_j = 0.1$  м,  
 \* — итерация с минимальной величиной  $d_s$  среди множества номеров  $s = \{28 - 53\}$

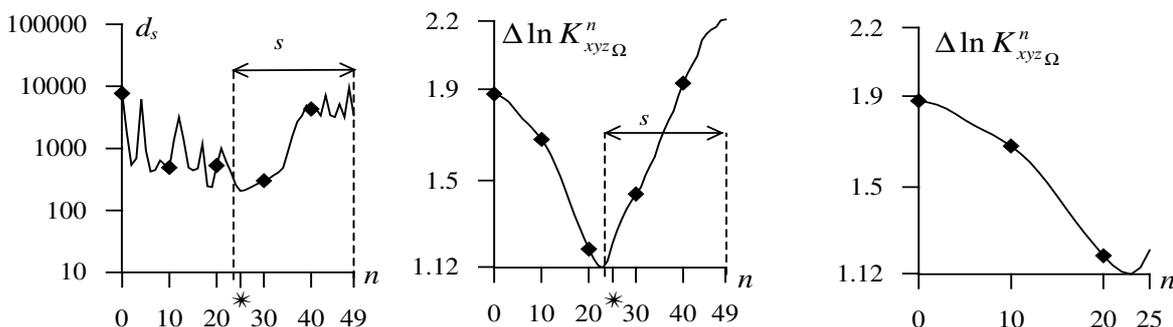


Рис. 31, 32, 33. Функция  $d_s$  (слева), среднее квадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  (в центре), среднее квадратическое отклонение  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$  с прерыванием по функции  $d_s$  (справа).  
 На рисунках:  $\blacklozenge$  — метод Левенберга–Марквардта при погрешностях  $\delta_j = -0.1$  м,  
 \* — итерация с минимальной величиной  $d_s$  среди множества номеров  $s = \{23 - 49\}$

методом и методом Левенберга–Марквардта прервана по критерию медленной сходимости (13), за исключением метода Левенберга–Марквардта без погрешностей в заданных напорах ( $\delta_j = 0$ ), прерванного по достижении точности  $\Delta h_m < 10^{-6}$  м.

Таблица 1

Начальные значения  $\Delta \ln K_{xyz}^n$ ,  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$ ,  $\Delta h_m$ ,  $\Delta H_m$  модельной задачи идентификации

Погрешность	$\delta_j = 0$	$\delta_j = 0.01$	$\delta_j = -0.01$	$\delta_j = 0.1$	$\delta_j = -0.1$
$\Delta \ln K_{xyz}^n$	1.70	1.70	1.70	1.69	1.71
$\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88
$\Delta h_m$	7.18	7.19	7.18	7.25	7.12
$\Delta H_m$	16.48	16.46	16.51	16.21	16.76

Таблица 2

Конечные значения максимальной невязки  $\Delta h_m$  по наблюдательным точкам

Погрешность	$\delta_j = 0$	$\delta_j = 0.01$	$\delta_j = -0.01$	$\delta_j = 0.1$	$\delta_j = -0.1$
Метод наискорейшего спуска	0.856	0.861	0.859	0.906	0.874
Метод сопряженных градиентов	$0.546 \cdot 10^{-1}$	$0.551 \cdot 10^{-1}$	$0.573 \cdot 10^{-1}$	$0.753 \cdot 10^{-1}$	$0.540 \cdot 10^{-1}$
Квазиградиентный метод	$0.223 \cdot 10^{-2}$	$0.323 \cdot 10^{-2}$	$0.337 \cdot 10^{-2}$	$0.235 \cdot 10^{-2}$	$0.383 \cdot 10^{-2}$
Метод Левенберга–Марквардта	$0.996 \cdot 10^{-6}$	$0.172 \cdot 10^{-2}$	$0.717 \cdot 10^{-3}$	$0.211 \cdot 10^{-1}$	$0.301 \cdot 10^{-1}$
Метод Левенберга–Марквардта с прерыванием по $d_s$	$0.996 \cdot 10^{-6}$	$0.185 \cdot 10^{-2}$	$0.717 \cdot 10^{-3}$	$0.259 \cdot 10^{-1}$	$0.376 \cdot 10^{-1}$

Таблица 3

Конечные значения максимальной невязки  $\Delta H_m$  по всему пласту

Погрешность	$\delta_j = 0$	$\delta_j = 0.01$	$\delta_j = -0.01$	$\delta_j = 0.1$	$\delta_j = -0.1$
Метод наискорейшего спуска	8.589	8.616	8.634	8.56	8.758
Метод сопряженных градиентов	6.088	6.048	6.202	6.379	5.949
Квазиградиентный метод	0.881	1.027	0.817	2.564	1.031
Метод Левенберга–Марквардта	0.137	1.539	0.093	4.619	0.934
Метод Левенберга–Марквардта с прерыванием по $d_s$	0.137	1.535	0.095	4.296	0.990

Таблица 4

Конечные значения среднеквадратического отклонения  $\Delta \ln K_{xyz}^n$ 

Погрешность	$\delta_j = 0$	$\delta_j = 0.01$	$\delta_j = -0.01$	$\delta_j = 0.1$	$\delta_j = -0.1$
Метод наискорейшего спуска	1.604	1.605	1.607	1.598	1.616
Метод сопряженных градиентов	1.325	1.324	1.328	1.356	1.323
Квазиградиентный метод	0.859	0.884	0.966	1.086	1.118
Метод Левенберга–Марквардта	0.264	0.941	0.519	1.133	1.504
Метод Левенберга–Марквардта с прерыванием по $d_s$	0.264	0.794	0.496	1.043	1.053

Таблица 5

Конечные значения среднеквадратического отклонения  $\Delta \ln K_{xyz\Omega}^n$ 

Погрешность	$\delta_j = 0$	$\delta_j = 0.01$	$\delta_j = -0.01$	$\delta_j = 0.1$	$\delta_j = -0.1$
Метод наискорейшего спуска	1.661	1.664	1.664	1.664	1.667
Метод сопряженных градиентов	1.241	1.239	1.245	1.28	1.259
Квазиградиентный метод	0.836	0.854	0.923	0.974	1.408
Метод Левенберга–Марквардта	0.247	1.056	0.655	1.42	2.221
Метод Левенберга–Марквардта с прерыванием по $d_s$	0.247	0.886	0.603	0.967	1.222

По результатам табл. 1–5 отметим: 1) устойчивость начальных данных, полученных минимизацией функции невязки; 2) возрастание неустойчивости процесса минимизации с улучшением минимизирующих свойств метода; 3) улучшение конечных результатов идентификации в методе Левенберга–Марквардта при использовании критерия прерывания.

**6. Заключение.** В работе показаны возможности использования распределения запасов чувствительности по главным направлениям, получаемым сингулярным разложением  $A^T A$ , где  $A$  — матрица чувствительности для анализа существующих и построения новых алгоритмов минимизации. Использование распределения запасов чувствительности продемонстрировано при решении модельной задачи

идентификации коэффициента фильтрации трехмерного напорного анизотропного пласта при стационарной однофазной фильтрации жидкости. Проведен анализ метода наискорейшего спуска; показано, что одной из причин медленной сходимости являются направления с большой чувствительностью, но небольшим запасом чувствительности относительно других направлений. Данный результат согласуется с объяснением медленной сходимости метода наискорейшего спуска на языке овражных функций. Построен новый алгоритм минимизации функции невязки квазиградиентного типа с преимущественной минимизацией в направлениях с большими запасами чувствительности, обладающий лучшими минимизирующими свойствами в сравнении с методами наискорейшего спуска и сопряженных градиентов, и большей устойчивостью в сравнении с методом Левенберга–Марквардта. Метод Левенберга–Марквардта показал наиболее высокую скорость сходимости, но при наличии погрешностей параметры удаляются от истинных значений начиная с некоторой итерации, хотя функция невязки продолжает уменьшаться. На основе анализа решения задачи в окрестности минимума функции невязки с использованием запасов чувствительности предложена новая процедура прерывания процесса минимизации. Данная процедура применена для прерывания метода Левенберга–Марквардта при минимизации функции невязки модельной задачи. Прерывание метода Левенберга–Марквардта привело к существенному улучшению значений идентифицируемых параметров  $K_{xy}$  и  $K_z$ . Приведенные результаты по использованию запасов чувствительности при минимизации функции невязки далеко не полные и исчерпывающие. Авторы надеются, что эти результаты привлекут внимание других исследователей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазуров П.А., Елесин А.В., Габидуллина А.Н., Кадырова А.Ш. Определение параметров водоносных пластов с использованием анализа чувствительности // Современные проблемы гидрогеологии и гидромеханики. Сб. докл. конференции. СПб., 2002. 462–471.
2. Mazurov P.A., Elesin A.V., Gabidullina A.N., Kadyrova A.Sh. Use of minimization along the slope for estimation of aquifer parameters // 4th International Conference on Calibration and Reliability in Groundwater Modeling. Prague, Czech Republic. 17–20 June 2002. 1. 278–281.
3. Мазуров П.А., Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш. Новый метод минимизации функции невязки при идентификации параметров водоносных слоев // Труды II Международной конференции “Идентификация систем и задачи управления”. Москва, 29–31 января 2003. 714–727.
4. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
5. Weiss R., Smith L. Parameter space methods in joint parameter estimation for groundwater flow models // Water Resour. Res. 1998. 34, N 4. 647–661.
6. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
7. Sun N.-Z. Inverse problems in groundwater modeling. Norwell: Kluwer Acad., 1994.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1986.
9. Морозов В.А. Алгоритмические основы методов решения некорректно поставленных задач // Вычислительные методы и программирование. 2003. 4, № 1. 134–145.
10. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
11. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1998.
12. Yeh W.W-G. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: the inverse problem // Water Resour. Res. 1986. 22, N 2. 95–108.
13. Carrera J., Neuman S.P. Estimation of aquifer parameters under transient and steady state conditions: 1. Maximum likelihood method incorporating prior information // Water Resour. Res. 1986. 22, N 2. 199–210.
14. McLaughlin D., Townley L.R. A reassessment of the groundwater inverse problem // Water Resour. Res. 1996. 32, N 5. 1131–1161.
15. Летова Т.А., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 1998.
16. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
17. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию  
31.12.2003