

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v22r106

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЧИСЛЕННОЙ ДИАГНОСТИКИ МГНОВЕННОГО РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МЕДЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ

И. В. Пригорный<sup>1</sup>, А. А. Панин<sup>2</sup>, Д. В. Лукьяненко<sup>3,4</sup>

В работе демонстрируется, как метод апостериорной оценки порядка точности разностной схемы по Ричардсону позволяет сделать вывод о некорректности постановки (в смысле отсутствия решения) решаемой численно начально-краевой задачи для уравнения в частных производных. Это актуально в ситуации, когда аналитическое доказательство некорректности постановки еще не получено или принципиально невозможно.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения в частных производных, численная диагностика разрушения решения, мгновенное разрушение, некорректно поставленные задачи.

**1. Введение.** В последние десятилетия активно развивается тематика режимов с обострениями, для которых используется термин “разрушение решения” (что в англоязычной литературе принято называть “blow-up regimes”). Несколько обобщая, можно сказать, что режим “blow-up” — это обращение решения в бесконечность за конечное время. В современной научной литературе по этой теме все работы можно разделить на несколько направлений.

Первое посвящено исследованию условий глобальной и/или локальной разрешимости нелинейных уравнений математической физики. Здесь в основном рассматриваются задачи, локально разрешимые по временной переменной. Приводящие к таким уравнениям физические проблемы описывают взрывы, развитие неустойчивости и др. К настоящему времени существуют три основных группы методов аналитического исследования явлений разрушения решения. Это метод нелинейной емкости (пробных функций) С. И. Похожаева и Э. Митидиери [1] в различных вариантах, энергетический метод Х. А. Левина и его модификации [2–7] и метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [8] (см. также [9]). Важным аспектом является и численная диагностика разрушения решения, которая позволяет уточнить аналитические оценки, полученные с помощью указанных методов, и, более того, диагностировать характер разрушения. Задача численной диагностики разрушения решения сложна, и ей посвящена обширная литература. Так, нередко используются адаптивные подходы, связанные с уменьшением шага сетки (по времени и, возможно, по пространству) [10–12] и с апостериорными оценками [11]. К ним примыкают методы, основанные на переходе от временной переменной к растянутой переменной [13], например к длине дуги графика. В некоторых случаях используется масштабирование решения по мере его роста [14].

Второе направление исследований посвящено так называемому “мгновенному разрушению” решения (в англоязычной литературе — “instantaneous blow-up”) (см. например, [15–17] и цитированную в указанных работах литературу, в т.ч. обзор [18]). Этот термин необходимо пояснить отдельно. Многие начально-краевые задачи для нелинейных уравнений математической физики, описывающие реальные физические процессы, в своей постановке могут содержать такие граничные и/или начальные условия, при которых решения сформулированной математической модели может не существовать вовсе. Гипотетически можно представить себе и случай, когда некорректность внутренне присуща и самому уравнению. Таким образом,

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 119992, Москва; студент, e-mail: igor.prigorniy@gmail.com

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 119992, Москва; доцент, e-mail: a-panin@yandex.ru

<sup>3</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 119992, Москва; доцент, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

<sup>4</sup> Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Ленинские горы, 119234, Москва

соответствующие задачи являются некорректно поставленными (по Адамару — в части отсутствия решения) и, естественно, решать их не имеет смысла. Такую ситуацию в тематике “blow-up” и принято называть “мгновенным разрушением” решения (лишний раз отметим условность этого названия: в рассматриваемом случае термин “решение” уже становится бессмысленным). Таким образом, исследование задачи на наличие “мгновенного разрушения” заключается в решении вопроса об отсутствии решения поставленной задачи. Однако не всегда удается диагностировать факт “мгновенного разрушения” (некорректной постановки задачи) аналитическими методами. Поэтому возникает важный практический вопрос: можно ли диагностировать факт “мгновенного разрушения” численно, чтобы сделать вывод о том, доверять ли полученному численному решению, которое вполне может существовать несмотря на некорректную постановку исходной задачи? Оказывается, что как аналитические (см. уже ранее цитированные работы, а также [19]), так и численные методы, обычно используемые для обнаружения разрушения решения, нередко применимы и в подобной ситуации и способны продемонстрировать отсутствие решения. Нас в данной работе интересует применение (численного) метода, неоднократно использовавшегося нами ранее для численного уточнения момента разрушения решения (см. в частности [20, 21] и названные там наши работы), с целью обнаружения некорректности постановки задачи (отсутствия решения даже локально по времени). Понятно, что подобный метод представляет интерес для тех случаев, где аналитическое доказательство не просматривается.

В данной работе этот вопрос исследуется на примере решения начально-краевой задачи для уравнения медленной диффузии в одной из простейших постановок [22, 23]

$$\begin{cases} u_t = (u^2)_{xx}, & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_{\text{init}}(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (1)$$

Метод, использованный в настоящей работе, основан на идеях апостериорной оценки точности. Его основные идеи изложены в работах [24–26]. Говоря коротко, идея состоит в следующем. По численному решению вычисляется его эффективный порядок точности — величина, приближенно выражающая порядок сходимости численного решения к точному в предположении наличия гладкого точного решения. Поскольку на гладком решении эффективный порядок точности стремится к теоретическому для данной схемы, резкое изменение эффективного порядка точности свидетельствует о разрушении решения. Идейно к нему близок метод работы [27], диагностирующий разрушение по росту невязки численного решения при параметре сетки, стремящемся к нулю (для гладкого решения невязка должна убывать).

Таким образом, основной посыл данной статьи заключается в следующем. Многие прикладные задачи науки и техники решаются исключительно численно. Возможна ситуация, когда при выбранных начальных и/или граничных условиях для рассматриваемой модели задача является некорректно поставленной, однако провести соответствующее теоретическое исследование не представляется возможным. В такой ситуации конструктивным является рассматриваемый в работе подход, позволяющий сделать достаточно обоснованный вывод о наличии или отсутствии так называемого “мгновенного разрушения” решения. Любые результаты, полученные на основе модели, для которой диагностировано “мгновенное разрушение”, должны быть подвергнуты серьезному сомнению.

Содержание работы таково. В разделе 2 подробно описан подход, который позволяет численно диагностировать факт “мгновенного разрушения” решения. В разделе 3 приводятся результаты численных экспериментов, выполненных согласно предлагаемому методу и демонстрирующих эффективность предлагаемого подхода.

**2. Численная диагностика разрушения решения.** Рассуждения в этом разделе ведутся в предположении наличия точного решения. Несоответствие их выводов тому, что наблюдается в реальном расчете, позволяет сделать вывод о ложности такого предположения, т. е. “мгновенном разрушении” (об отсутствии решения).

**2.1. Поиск численного решения.** Для применения указанного метода мы аппроксимируем с помощью жесткого метода прямых (SMOL) [28, 29] исходную задачу (1) для уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого мы сначала введем равномерную сетку  $X_N$  только по пространственной переменной  $x$  с шагом  $h = (\pi - 0)/N$ , содержащую  $N + 1$  узлов (что соответствует  $N$  интервалам):  $X_N = \{x_n, 0 \leq n \leq N : x_n = 0 + nh\}$ . Таким образом, после конечно-разностной аппроксимации пространственных производных со вторым порядком точности мы получим следующую дифференциально-алгебраическую систему, из которой требуется определить  $N + 1$

неизвестных функций  $u_n \equiv u_n(t) \equiv u(x_n, t)$ ,  $n = \overline{1, N+1}$ :

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} = \frac{(u_{n+1})^2 - 2(u_n)^2 + (u_{n-1})^2}{h^2}, & n = \overline{1, N-1}, \quad t \in (0, T], \\ u_0 = u_N = 0, & t \in (0, T], \\ u_n(0) = u_{\text{init}}(x_n), & n = \overline{0, N}. \end{cases}$$

За счет подстановки  $u_0$  и  $u_N$  в первое уравнение при  $n = 1$  и  $n = N - 1$  соответственно, эта дифференциально-алгебраическая система может быть сведена к чисто дифференциальной задаче

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), & t \in (0, T], \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_{\text{init}}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{y} = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})^T$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{N-1})^T$  и  $\mathbf{y}_{\text{init}} = (u_{\text{init}}(x_1), u_{\text{init}}(x_2), \dots, u_{\text{init}}(x_{N-1}))^T$ . Здесь вектор-функция  $\mathbf{f}$  имеет следующую структуру:

$$f_n = \begin{cases} \frac{(y_2)^2 - 2(y_1)^2}{h^2}, & \text{если } n = 1, \\ \frac{(y_{n+1})^2 - 2(y_n)^2 + (y_{n-1})^2}{h^2}, & \text{если } n = \overline{2, N-2}, \\ \frac{-2(y_{N-1})^2 + (y_{N-2})^2}{h^2}, & \text{если } n = N - 1. \end{cases}$$

Для численного решения системы (2) мы будем использовать одностадийную схему Розенброка с комплексным коэффициентом CROS1 [30, 31], которая является наилучшим выбором для решения задач такого рода по той причине, что она не приводит к переполнению даже в том случае, если решение задачи устремляется к бесконечности [24, 26]. Для ее применения мы введем равномерную сетку  $T_M$  по времени  $t$  с шагом  $\tau = (T - 0)/M$ , которая имеет  $M + 1$  узлов (т.е.  $M$  интервалов):  $T_M = \{t_m, 0 \leq m \leq M : t_m = 0 + m\tau\}$ . После этого мы можем применить схему Розенброка CROS1 для решения системы (2):

$$\mathbf{y}(t_{m+1}) = \mathbf{y}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) \text{Re } \mathbf{w},$$

где  $\mathbf{w}$  является решением СЛАУ

$$\left[ E - \frac{1+i}{2}(t_{m+1} - t_m) f_y(\mathbf{y}(t_m)) \right] \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_m)). \quad (3)$$

Здесь  $E$  — единичная матрица, а  $f_y$  — матрица Якоби, которая для рассматриваемой системы имеет следующие ненулевые элементы:

$$\begin{aligned} (f_y)_{n,n-1} &\equiv \frac{\partial f_n}{\partial y_{n-1}} = \frac{2y_{n-1}}{h^2}, & \text{если } n = \overline{2, N-1}, \\ (f_y)_{n,n} &\equiv \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = -\frac{4y_n}{h^2}, & \text{если } n = \overline{1, N-1}, \\ (f_y)_{n,n+1} &\equiv \frac{\partial f_n}{\partial y_{n+1}} = \frac{2y_{n+1}}{h^2}, & \text{если } n = \overline{1, N-2}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица системы (3) является трехдиагональной матрицей размерности  $(N - 1) \times (N - 1)$ . Этот факт дает возможность применить алгоритм решения СЛАУ в (3), который находит решение системы за  $O(N)$  операций.

**2.2. Численная диагностика разрушения решения.** При численных расчетах важно не только получить приближенный численный результат, но также и выполнить некоторую оценку его точности. Метод вычисления апостериорной асимптотически точной оценки погрешности [24] позволяет это сделать. Но этот метод также может помочь и диагностировать факт разрушения точного решения [26]. Основные формулы и утверждения этого раздела впервые были представлены в работах [24–26]. Отметим, что в нашем случае эта техника формально применяется к задаче, существование решения которой

не доказано. Более того, полученные ниже результаты с большой вероятностью говорят о неразрешимости рассматриваемой задачи.

Для начала введем базовую сетку  $X_N \times T_M: \{x_n, t_m\}$ ,  $0 \leq n \leq N$ ,  $0 \leq m \leq M$ . После этого произведем последовательное сгущение сеток, начиная с базовой, и вычислим набор сеточных значений решения

$$u_{(s)}(x, t) \equiv u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x, t) \quad (4)$$

на полученных сетках  $X_{r_x^{s-1}N} \times T_{r_t^{s-1}M}$  ( $s$  — номер сетки из набора  $S$  сеток,  $s = \overline{1, S}$ ). Индексы у  $u$  в (4) обозначают сетки, на которых был получен соответствующий набор сеточных значений.

В связи с тем, что мы аппроксимировали все пространственные производные в (1) с точностью  $O(h^2)$ , а при численном интегрировании системы (2) используем схему CROSI (3), которая имеет точность  $O(\tau^2)$ , построенный метод решения системы (1) имеет точность  $O(\tau^2 + h^2)$  или, другими словами, теоретический порядок точности по времени  $p_t = p_t^{\text{theor}} \equiv 2$ , а по пространству  $p_x = p_x^{\text{theor}} \equiv 2$ . Согласно [25] выполнять последовательное сгущение сеток по времени в целое число раз  $r_t$  и сгущение пространственной сетки в целое число раз  $r_x$  следует так, чтобы выполнялось условие  $r_t^{p_t} = r_x^{p_x}$ , т. е. в нашем случае  $r_t^2 = r_x^2$ . Наиболее удобно для счета выбрать  $r_t = r_x \equiv 2$ . В этом случае каждая последующая сетка  $X_{r_x^{s-1}N} \times T_{r_t^{s-1}M}$  имеет узлы, совпадающие с узлами  $(x_n, t_m)$  базовой сетки. В этих узлах  $(x, t)$  мы можем выполнить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности [25, 26]

$$\Delta_{(s)}(x_n, t_m) = \frac{u_{(s)}(x_n, t_m) - u_{(s-1)}(x_n, t_m)}{r_t^2 - 1} \quad (5)$$

и оценить эффективный порядок точности [25, 26] на всем промежутке времени  $t \in [0, T]$

$$p_{t(s)}^{\text{eff}} = \log_{r_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (u_{(s-1)}(x_n, t_m) - u_{(s-2)}(x_n, t_m))^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (u_{(s)}(x_n, t_m) - u_{(s-1)}(x_n, t_m))^2}}$$

(здесь выбрана наиболее удобная из возможных норм — евклидова). В случае если на всем промежутке времени  $t \in [0, T]$  решение задачи имеет непрерывные производные порядка  $p_x$  по  $x$  и  $p_t$  по  $t$ , имеет место сходимость [26]

$$p_{t(s)}^{\text{eff}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p_t^{\text{theor}} \equiv p_t.$$

Нарушение этой сходимости говорит о потере гладкости точного решения на промежутке времени  $t \in [0, T]$ .

С целью локализации конкретного момента времени, в который произошло разрушение решения, можно оценить эффективный порядок точности и поточно в каждом узле  $t_m \in T_M$ ,  $0 < m \leq M$ ,

$$p_{t(s)}^{\text{eff}}(t_m) = \log_{r_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u_{(s-1)}(x_n, t_m) - u_{(s-2)}(x_n, t_m))^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u_{(s)}(x_n, t_m) - u_{(s-1)}(x_n, t_m))^2}}. \quad (6)$$

В точках  $t$ , в которых решение исходной задачи имеет непрерывные производные порядка  $p_t$  по времени и порядка  $p_x$  по пространству, имеет место сходимость

$$p_{t(s)}^{\text{eff}}(t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p_t^{\text{theor}} \equiv p_t, \quad (7)$$

и соответствующая оценка погрешности (5) является асимптотически точной при  $s \rightarrow \infty$  (или, что то же самое,  $N, M \rightarrow \infty$ ). Нарушение этой сходимости в какой-либо точке  $t$  говорит о потере гладкости точного решения [24–26].

В наших более ранних работах (см., например, [20, 21] и цитированные там) рассмотрены начально-краевые задачи, для которых мы аналитически установили и локальную разрешимость, и разрушение за конечное время. Там же мы проводили вычисление эффективного порядка точности численного решения

в узлах сетки по времени. Типичная ситуация состояла в том, что резкое расхождение эффективного порядка точности с теоретическим происходило во всех узлах временной сетки, начиная с некоторого момента  $t = T_{bl}$  (одинакового для различных сеток, с точностью до шага сетки). Именно его в силу вышеприведенных рассуждений можно считать численной оценкой времени разрушения. Как правило, аналитическая оценка сверху  $T^*$  времени разрушения оказывалась заметно завышенной по сравнению с  $T_{bl}$ , что позволяло говорить о численном уточнении аналитической оценки.

В данной же работе значение  $t = T_{bl}$ , начиная с которого резко нарушается сходимость (7) эффективного порядка точности к теоретическому, уменьшается с увеличением  $s$  и стремится к 0, что позволяет сделать вывод об отсутствии решения задачи вовсе.

**3. Численные эксперименты.** Приведем мотивировку рассмотренных ниже численных примеров.

Прежде всего, в качестве теста построенной нами конкретной численной схемы, а также для наглядного сравнения результатов, мы рассматриваем примеры 1 и 2. В примере 1 используемые нами аналитические методы теории разрушения решений не показывают разрушения решения [7, 21]. Можно сделать правдоподобное предположение о локальной или, вероятно, даже глобальной разрешимости. Описанные ниже численные результаты этому не противоречат. Задача в примере 2, взятом из [8, с. 70–71], заведомо глобально разрешима. Однако начальное условие в этом примере может быть построено лишь численно. Именно эта сложность побудила нас рассмотреть наряду с примером 2 значительно более простой пример 1.

Основной интерес представляет пример 3. Аналитические методы (см. [21]) позволяют в данной ситуации утверждать, что задача не является глобально по времени разрешимой. Более подробно, они дают ту или иную фиксированную оценку сверху на время существования решения. В то же время численные эксперименты демонстрируют разрушение решения уже на очень маленьких временах, причем время разрушения стремится к 0 с уменьшением шага сетки. Таким образом, численные результаты дают принципиально новую информацию по сравнению с аналитическими методами и позволяют высказать гипотезу о том, что на самом деле решения нет ни на каком промежутке времени, т.е. имеет место “мгновенное разрушение”.

**Пример 1.** Рассмотрим пример для следующего набора входных данных:

$$u_{init}(x) = A \sin^3 x, \quad A = 1, \quad T = 1.0. \quad (8)$$

Результат применения аналитических методов [21] позволяет предполагать глобальную разрешимость. Но, к сожалению, точное решение задачи (1) для этого набора параметров не может быть получено аналитически. Применим численный алгоритм диагностики момента разрушения решения. Для численного решения задачи (1) с входными данными (8) мы возьмем следующий набор параметров:

$$N = 50, \quad M = 50, \quad r_x = 2, \quad r_t = 2, \quad S = 7 \quad (9)$$

( $S$  — число последовательно используемых для вычислений сеток, включая начальную). Численное решение  $u_{(S)} \equiv u_{(r_x^{S-1}N, r_t^{S-1}M)}$  представлено на рис. 1.

Получив приближенное численное решение на разных сетках, мы можем проверить сходимость эффективного порядка точности к теоретическому для каждого временного слоя по формуле (6). После вычислений на  $S$  вложенных сетках эффективный порядок точности  $p_t^{eff}$  для каждого временного слоя  $t_m$  сходится к  $p^{theor} = 2$  (рис. 2).

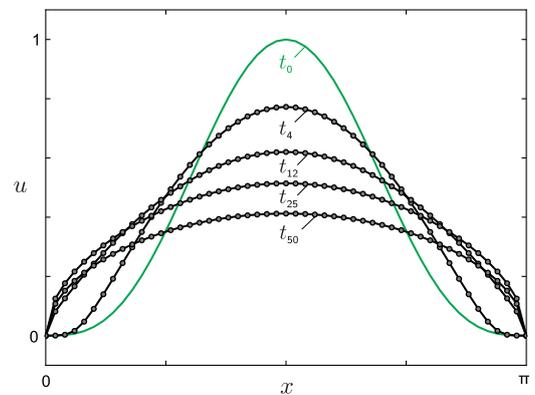


Рис. 1. Пример 1: вид решения. На рисунке отображено несколько наборов сеточных значений функции  $u_{(S)}(x, t_m)$  для отдельных моментов времени  $t_m$  базовой сетки  $T_M$  (отмечены только те узлы по пространственной переменной, которые совпадают с узлами базовой сетки  $X_N$ )

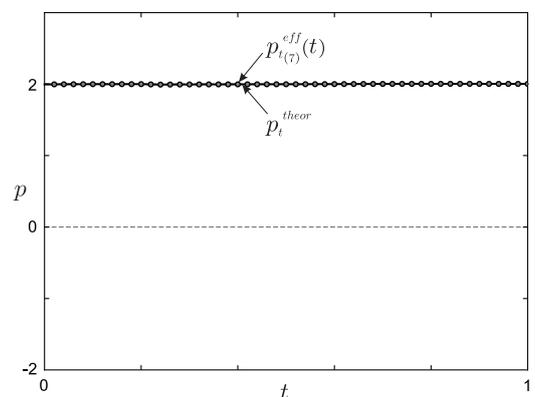


Рис. 2. Пример 1: эффективный порядок точности численной схемы в каждый момент времени

для каждого временного слоя  $t_m$  сходится к  $p_t^{eff}$

Таким образом можно сделать весьма обоснованное предположение о том, что решение существует по крайней мере до момента времени  $t = 1$ .

**Пример 2.** Рассмотрим теперь пример для

$$u_{\text{init}}(x) = f(x), \quad T = 1.0, \quad (10)$$

где  $f(x)$  — решение следующей нелинейной эллиптической краевой задачи:

$$\begin{cases} (f^2)_{xx} + f = 0, & x \in (0, \pi), \\ f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Глобальную разрешимость (при условии разрешимости задачи (11)) можно усмотреть непосредственной подстановкой решения  $u(x, t) = f(x)/(1+t)$  в задачу (1) с учетом (11).

Численное решение, полученное для набора численных параметров (9), представлено на рис. 3.

Применение формулы (6) для исследования сходимости эффективного порядка точности  $p_{t(s)}^{\text{eff}}$  к теоретическому  $p^{\text{theor}} = 2$  для каждого временного слоя  $t_m$  (рис. 4) дает возможность опять сделать вывод о том, что решение существует по крайней мере до момента времени  $t = 1$ .

**Пример 3.** Теперь рассмотрим пример для такой же начальной функции, как и в примере 1, но только поменяв знак коэффициента  $A$  на противоположный:

$$u_{\text{init}}(x) = A \sin^3 x, \quad A = -1, \quad T = 0.005. \quad (12)$$

Наиболее часто применяемые нами аналитические методы (метод 1-й собственной функции и модифицированный метод Левина [21]) показывают, что решение не может существовать на промежутке длиной больше некоторой константы  $T^*$ . Так, метод 1-й собственной функции дает  $T^* = 2/\pi$ . (Что не исключает возможность отсутствия решения или более раннего его разрушения.) На рис. 5 представлены графики эффективных порядков точности в различные моменты времени (параметры счета даны в (9)). Эти эффективные порядки позволяют сделать достаточно обоснованное предположение, что

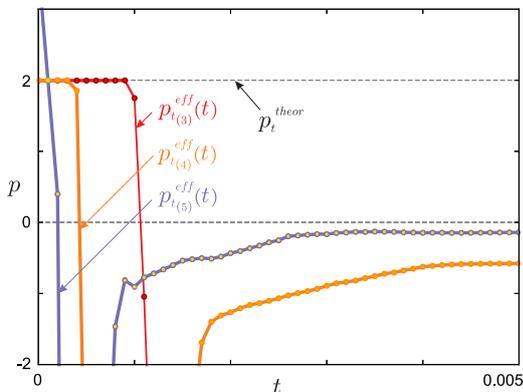


Рис. 5. Пример 3: эффективный порядок точности численной схемы в каждый момент времени

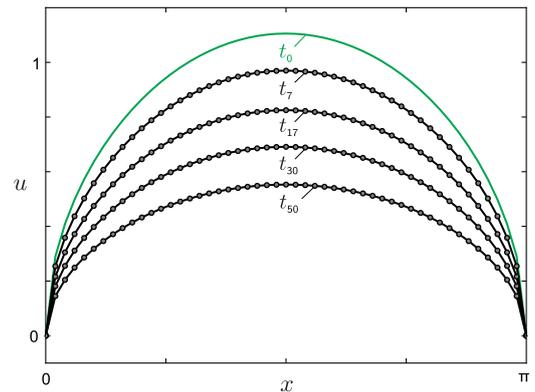


Рис. 3. Пример 2: вид решения. На рисунке отображено несколько наборов сеточных значений функции  $u(x, t_m)$  для отдельных моментов времени  $t_m$  базовой сетки  $T_M$  (отмечены только те узлы по пространственной переменной, которые совпадают с узлами базовой сетки  $X_N$ )

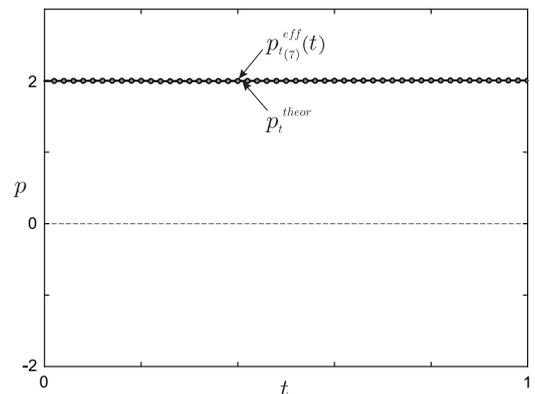


Рис. 4. Пример 2: эффективный порядок точности численной схемы в каждый момент времени

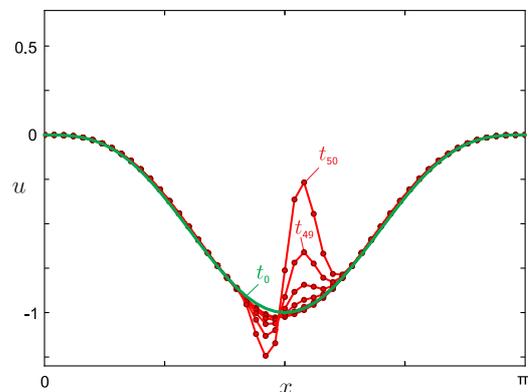


Рис. 6. Пример 3: вид решения. Зеленым цветом показано начальное данное. Красным цветом — численное решение, которому нельзя доверять

решения задачи с начальной функцией, представленной в (12), не существует. На рис. 6 показаны несколько наборов сеточных значений функции  $u_{(S)}(x, t_m)$  для отдельных моментов времени  $t_m$  базовой сетки  $T_M$  (отмечены только те узлы по пространственной переменной, которые совпадают с узлами базовой сетки  $X_N$ ). Как следует из вышесказанного, этому численному решению нельзя доверять (что символизирует красный цвет графиков).

**4. Заключение.** В данной работе продемонстрирована возможность использования метода апостериорной оценки точности решения для выдвижения гипотезы о некорректности постановки (в смысле отсутствия решения) решаемой численно начально-краевой задачи для уравнения в частных производных.

Авторы выражают глубокую признательность Максиму Олеговичу Корпусову за предложенную задачу, на примере которой мы показали возможность применения описанного в работе подхода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2001. **234**. 3–383.
2. Levine H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form  $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$  // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1973. **51**, N 5. 371–386.
3. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1977. **69**. 77–102.
4. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
5. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: Эдиториал УРСС, 2010.
6. Корпусов М.О. О разрушении ионно-звуковых волн в плазме // Математический сборник. 2011. **202**, № 1. 37–64.
7. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Физический факультет МГУ, 2014.
8. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
9. Галактионов В.А., Похожаев С.И. Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. **48**, № 10. 1819–1846.
10. Pelinovsky D.E., Xu C. On numerical modelling and the blow-up behavior of contact lines with a  $180^\circ$  contact angle // Journal of Engineering Mathematics. 2015. **92**. 31–44.
11. Cangiani A., Georgoulis E.H., Kyza I., Metcalfe S. Adaptivity and blow-up detection for nonlinear evolution problems // ArXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/1502.03250>. 2015.
12. Cho C.-H. Numerical detection of blow-up: a new sufficient condition for blow-up // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2016. **33**, N 1. 81–98.
13. Haynes R., Turner C. A numerical and theoretical study of blow-up for a system of ordinary differential equations using the Sundman transformation // Atlantic Electronic Journal of Mathematics. 2007. **2**, N 1. 1–13.
14. Berger M., Kohn R.V. A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1988. **41**, N 6. 841–863.
15. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В. Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in semiconductors // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. **459**, N 1. 159–181.
16. Корпусов М.О. Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Известия РАН. Сер. матем. 2015. **79**, № 5. 103–162.
17. Корпусов М.О., Панин А.А. Мгновенное разрушение versus локальная разрешимость задачи Коши для двумерного уравнения полупроводника с тепловым разогревом // Известия РАН. Сер. матем. 2019. **83**, № 6. 104–132.
18. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. **49**, № 4. 47–74.
19. Корпусов М.О., Овчинников А.В., Панин А.А. Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. **41**, N 17. 8070–8099.
20. Васильченко В.А., Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Панин А.А. Исследование неустойчивости автоколебаний в электрических схемах на основе варикапов: аналитический и численный подходы // Вычислительные методы и программирование. 2019. **20**, № 3. 323–336.
21. Колотов И.И., Панин А.А. О непродолжаемых решениях и разрушении решений псевдопараболических уравнений с коэрцитивной и знакопостоянной нелинейностью: аналитическое и численное исследование // Математические заметки. 2019. **105**, № 5. 708–723.

22. *Le Roux M.-N.* Numerical solution of fast diffusion or slow diffusion equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1998. **97**, N 1–2. 121–136.
23. *Berryman J.G., Holland C.J.* Stability of the separable solution for fast diffusion // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1980. **74**, N 4. 379–388.
24. *Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Коряжин П.В.* Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. **45**, № 10. 1837–1847.
25. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
26. *Al'shin A.B., Al'shina E.A.* Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations // Journal of Mathematical Sciences. 2008. **148**, N 1. 143–162.
27. *Hoffman J., Johnson C.* Blow up of incompressible Euler solutions // BIT Numerical Mathematics. 2008. **48**, N 2. 285–307.
28. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer, 2002.
29. *Калиткин Н.Н.* Численные методы решения жестких систем // Математическое моделирование. 1995. **7**, № 5. 8–11.
30. *Rosenbrock H.H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer Journal. 1963. **5**, N 4. 329–330.
31. *Альшин А.Б., Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корягина А.Б.* Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. **46**, № 8. 1392–1414.

Поступила в редакцию  
25 января 2021

---

## Some Features of Numerical Diagnostics of Instantaneous Blow-up of the Solution by the Example of Solving the Equation of Slow Diffusion

I. V. Prigorniy<sup>1</sup>, A. A. Panin<sup>2</sup>, and D. V. Lukyanenko<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Student, e-mail: igor.prigorniy@gmail.com*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: a-panin@yandex.ru*

<sup>3</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru*

<sup>4</sup> *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119234, Russia*

Received January 25, 2021

**Abstract:** The paper demonstrates how the method of a posteriori estimation of the order of accuracy for the difference scheme according to the Richardson extrapolation method allows one to conclude that the formulation of the numerically solved initial-boundary value problem for a partial differential equation is ill-posed (in the sense of the absence of a solution). This is important in a situation when the ill-posedness of the formulation is not analytically proved yet or cannot be proved in principle.

**Keywords:** partial differential equations, numerical diagnostics of the solution's blow-up, instantaneous blow-up, ill-posed problems.

### References

1. E. Mitidieri and S. I. Pokhozhaev, “A Priori Estimates and Blow-up of Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities,” *Tr. Mat. Inst. Im. V.A. Steklova, Ross. Akad. Nauk* **234**, 3–383 (2001) [*Proc. Steklov Inst. Math.* **234**, 1–362 (2001)].

2. H. A. Levine, “Some Nonexistence and Instability Theorems for Solutions of Formally Parabolic Equations of the Form  $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ ,” *Arch. Rational Mech. Anal.* **51** (5), 371–386 (1973).
3. V. K. Kalantarov and O. A. Ladyzhenskaya, “The Occurrence of Collapse for Quasilinear Equations of Parabolic and Hyperbolic Types,” *Zap. Nauch. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova* **69**, 77–102 (1977) [*J. Math. Sci.* **10** (1), 53–70 (1978)].
4. A. G. Sveshnikov, A. B. Al’shin, M. O. Korpusov, and Yu. D. Pletner, *Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
5. M. O. Korpusov, *Blow-up in Nonclassical Wave Equations* (Editorial, Moscow, 2010) [in Russian].
6. M. O. Korpusov, “Blow-up of Ion Acoustic Waves in a Plasma,” *Mat. Sb.* **202** (1), 37–64 (2011) [*Sb. Math.* **202** (1), 35–60 (2011)].
7. M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, and E. V. Yushkov, *Methods of the Theory of Solution Blow-Up for Nonlinear Equations of Mathematical Physics* (Faculty of Physics, Moscow Univ., Moscow, 2014) [in Russian].
8. A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhailov, *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations* (Nauka, Moscow, 1987; Gruyter, Berlin, 1995).
9. V. A. Galaktionov and S. I. Pohozaev, “Third-Order Nonlinear Dispersive Equations: Shocks, Rarefaction, and Blowup Waves,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (10), 1819–1846 (2008) [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (10), 1784–1810 (2008)].
10. D. E. Pelinovsky and C. Xu, “On Numerical Modelling and the Blow-up Behavior of Contact Lines with a  $180^\circ$  Contact Angle,” *J. Eng. Math.* **92**, 31–44 (2015).
11. A. Cangiani, E. H. Georgoulis, I. Kyza, and S. Metcalfe, “Adaptivity and Blow-up Detection for Nonlinear Evolution Problems,” arXiv preprint: 1502.03250v1 [math.NA] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2015), available at <https://arxiv.org/abs/1502.03250/>.
12. C.-H. Cho, “Numerical Detection of Blow-up: A New Sufficient Condition for Blow-up,” *Japan J. Indust. Appl. Math.* **33** (1), 81–98 (2016).
13. R. Haynes and C. Turner, “A Numerical and Theoretical Study of Blow-up for a System of Ordinary Differential Equations Using the Sundman Transformation,” *Atl. Electron. J. Math.* **2** (1), 1–13 (2007).
14. M. Berger and R. V. Kohn, “A Rescaling Algorithm for the Numerical Calculation of Blowing-up Solutions,” *Commun. Pure Appl. Math.* **41** (6), 841–863 (1988).
15. M. O. Korpusov and D. V. Lukyanenko, “Instantaneous Blow-up Versus Local Solvability for One Problem of Propagation of Nonlinear Waves in Semiconductors,” *J. Math. Anal. Appl.* **459** (1), 159–181 (2018).
16. M. O. Korpusov, “Critical Exponents of Instantaneous Blow-up or Local Solubility of Non-Linear Equations of Sobolev Type,” *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* **79** (5), 103–162 (2015) [*Izv. Math.* **79** (5), 955–1012 (2015)].
17. M. O. Korpusov and A. A. Panin, “Instantaneous Blow-up Versus Local Solubility of the Cauchy Problem for a Two-Dimensional Equation of a Semiconductor with Heating,” *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* **83** (6), 104–132 (2019) [*Izv. Math.* **83** (6), 1174–1200 (2019)].
18. G. A. Sviridyuk, “On the General Theory of Operator Semigroups,” *Usp. Mat. Nauk* **49** (4), 47–74 (1994) [*Russ. Math. Surv.* **49** (4), 45–74 (1994)].
19. M. O. Korpusov, A. V. Ovchinnikov, and A. A. Panin, “Instantaneous Blow-up Versus Local Solvability of Solutions to the Cauchy Problem for the Equation of a Semiconductor in a Magnetic Field,” *Math. Meth. Appl. Sci.* **41** (17), 8070–8099 (2018).
20. V. A. Vasilchenko, M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, and A. A. Panin, “A Study of Self-Oscillation Instability in Varicap-Based Electrical Networks: Analytical and Numerical Approaches,” *Vychisl. Metody Programm.* **20** (3), 323–336 (2019).
21. I. I. Kolotov and A. A. Panin, “On Nonextendable Solutions and Blow-Ups of Solutions of Pseudoparabolic Equations with Coercive and Constant-Sign Nonlinearities: Analytical and Numerical Study,” *Mat. Zametki* **105** (5), 708–723 (2019) [*Math. Notes* **105** (5), 694–706 (2019)].
22. M.-N. Le Roux, “Numerical Solution of Fast Diffusion or Slow Diffusion Equations,” *J. Comput. Appl. Math.* **97** (1–2), 121–136 (1998).
23. J. G. Berryman and C. J. Holland, “Stability of the Separable Solution for Fast Diffusion,” *Arch. Rational Mech. Anal.* **74** (4), 379–388 (1980).
24. E. A. Alshina, N. N. Kalitkin, and P. V. Koryakin, “Diagnostics of Singularities of Exact Solutions in Computations with Error Control,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **45** (10), 1837–1847 (2005) [*Comput. Math. Math. Phys.* **45** (10), 1769–1779 (2005)].

25. N. N. Kalitkin, A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, and B. V. Rogov, *Calculations on Quasi-Uniform Grids* (Fizmatlit, Moscow, 2005) [in Russian].
26. A. B. Al'shin and E. A. Al'shina, "Numerical Diagnosis of Blow-up of Solutions of Pseudoparabolic Equations," *J. Math. Sci.* **148** (1), 143–162 (2008).
27. J. Hoffman and C. Johnson, "Blow up of Incompressible Euler Solutions," *BIT Numer. Math.* **48** (2), 285–307 (2008).
28. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems* (Springer, Berlin, 2002).
29. N. N. Kalitkin, "Numerical Methods of Solution of Stiff Systems," *Mat. Model.* **7** (5), 8–11 (1995).
30. H. H. Rosenbrock, "Some General Implicit Processes for the Numerical Solution of Differential Equations," *Comput. J.* **5** (4), 329–330 (1963).
31. A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, N. N. Kalitkin, and A. B. Koryagina, "Rosenbrock Schemes with Complex Coefficients for Stiff and Differential Algebraic Systems," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **46** (8), 1392–1414 (2006) [*Comput. Math. Math. Phys.* **46** (8), 1320–1340 (2006)].