

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v22r105

## СХЕМА КАБАРЕ С УЛУЧШЕННЫМИ ДИСПЕРСИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Н. А. Афанасьев<sup>1</sup>, В. М. Головизнин<sup>2</sup>, А. В. Соловьев<sup>3</sup>

Предложен балансно-характеристический метод решения систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, обладающий четвертым порядком аппроксимации на равномерных сетках и вторым порядком и улучшенными дисперсионными свойствами на неравномерных сетках. Метод основан на известной схеме КАБАРЕ, балансные фазы которой модифицированы путем добавления антидисперсионных членов особого вида. Ранее метод, обладающий схожими свойствами, предлагался только для простейшего одномерного линейного уравнения переноса. Приведенная модификация схемы позволяет улучшить дисперсионные свойства переноса сразу всех инвариантов Римана рассматриваемой системы уравнений. Схема бездиссипативна при отключенных процедурах монотонизации и устойчива при числах Куранта  $CFL \leq 1$ . Точность метода и его порядок сходимости продемонстрированы на серии расчетов задачи о переносе волны, промодулированной гауссианом, на последовательности сгущающихся сеток. Предложенный метод планируется использовать в качестве основы для построения схемы КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем нелинейных дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** балансно-характеристические методы, схема КАБАРЕ, вычислительная гидродинамика (CFD), схемы высокого порядка точности, уравнения гиперболического типа.

**1. Введение.** Численное решение систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа является одной из основных задач математического моделирования физических процессов. Этим видом уравнений описываются задачи гидродинамики, аэроакустики, океанологии, ядерной энергетики и другие задачи индустриальной математики. Фундаментом многих методов решения уравнений гиперболического типа является решение линейных уравнений переноса. Даже в случае таких относительно простых уравнений разностные схемы зачастую сталкиваются с проблемами сохранения фазы и амплитуды распространяющихся волн, искажающихся из-за схемной дисперсии и диссипации.

Современные подходы к решению уравнений гиперболического типа включают в себя множество различных методов, начиная с методов типа TVD/B (Total Variation Diminishing / Bounded), комбинирующих методы коррекции потоков с высокополиномиальными реконструкциями переменных для более точного моделирования распространяющихся волн (например, методы WENO и разрывный метод Галлеркина [1–4]), и заканчивая псевдоспектральными методами, использующими сложные вычислительные шаблоны для улучшения дисперсионных и диссипативных свойств схем [5].

Одним из наиболее динамично развивающихся сейчас подходов к решению систем гиперболического типа является использование балансно-характеристических методов, учитывающих как консервативность таких уравнений, так и перенос инвариантов Римана по соответствующим характеристикам этих систем [6]. Представителем класса таких методов является схема КАБАРЕ [7, 8], обладающая вторым порядком аппроксимации по времени и пространству, свойством бездиссипативности (временной обратимости) при отключении процедур монотонизации инвариантов, а также минимальным вычислительным шаблоном в одну пространственно-временную ячейку. Последнее свойство позволило эффективно масштабировать

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, лаборатория индустриальной математики, Ленинские горы, 119991, Москва; аспирант, e-mail: vmnaf@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, лаборатория индустриальной математики, Ленинские горы, 119991, Москва; зав. лаб., профессор, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

<sup>3</sup> Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

алгоритм метода на системы с распределенной памятью и провести расчеты для многих “тяжелых” задач гидродинамики [9], аэроакустики [10, 11] и динамической упругости [12].

Стандартная схема КАБАРЕ второго порядка аппроксимации является устойчивой при числах Куранта  $CFL \leq 1$ . Монотонность схемы достигается введением в нее процедуры нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума [13]. Дисперсионные качества схемы ухудшаются при стремлении числа Куранта к нулю. В случае применения схемы к системам нелинейных уравнений или к системам линейных уравнений, но на неравномерной сетке, число Куранта является локальным для каждой ячейки сетки и определяется исходя из локальных собственных значений (скоростей распространения инвариантов Римана) рассматриваемой системы в ячейке на данном шаге по времени. Таким образом, на участках, где решение распространяется наиболее медленно, возникают малые локальные числа Куранта и, соответственно, большая дисперсионная ошибка. Эта проблема делает задачу об улучшении дисперсионных качеств схемы КАБАРЕ актуальной.

Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для простейшего одномерного линейного уравнения переноса была предложена в работе [14]. Основная идея работы заключалась в повышении порядка аппроксимации схемы до четвертого путем введения в схему антидисперсионной поправки в виде третьей разностной производной с некоторым коэффициентом. Долгое время результаты этой работы носили исключительно теоретический характер в силу сложности обобщения предложенного метода на случай системы нелинейных дифференциальных уравнений. Только недавно в работе [15] было предложено такое обобщение, основанное на добавлении в балансные фазы алгоритма третьих разностных производных от потоков. Такой подход позволяет повысить точность метода, но, как будет показано в настоящей работе, улучшает дисперсионные свойства лишь для наиболее быстро переносимого инварианта Римана рассматриваемой системы.

В настоящей работе предлагается новый явный балансно-характеристический метод решения систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, обладающий четвертым порядком аппроксимации на равномерных сетках и вторым — на неравномерных. Метод основан на добавлении в консервативные фазы стандартной схемы КАБАРЕ антидисперсионных членов таким образом, чтобы улучшались дисперсионные свойства переноса каждого инварианта Римана системы. Как и схема КАБАРЕ второго порядка, предлагаемый метод является бездиссипативным (при отключенных процедурах монотонизации) и устойчивым при числах Куранта  $CFL \leq 1.0$ . При этом вычислительный шаблон метода увеличивается с одной расчетной ячейки до трех, что не так сильно усложняет процесс масштабирования алгоритма на системы с распределенной памятью. Данная схема является новым шагом к улучшению дисперсионных свойств схемы КАБАРЕ и будет в дальнейшем обобщаться на более сложные случаи систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Предлагаемый балансно-характеристический метод тестируется на задаче о переносе промодулированной гауссианом волны. Результаты расчетов сравниваются с расчетами по стандартной схеме КАБАРЕ и схеме, предложенной в [15]. На последовательности сгущающихся равномерных сеток демонстрируется сходимость всех трех методов, а также четвертый порядок точности первого метода и второй порядок остальных методов.

**2. Одномерное линейное уравнение переноса.** Рассмотрим скалярное линейное одномерное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $x$  — пространственная переменная,  $t$  — время,  $u$  — переносимая величина,  $c = const$  — скорость переноса. Уравнение (1) является простейшим представителем класса систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, то есть систем, обладающих полным набором инвариантов Римана. В случае уравнения (1) единственный инвариант Римана  $R$  совпадает с переносимой величиной:  $R = u$ .

**2.1. Трехслойная схема КАБАРЕ и ее дисперсионное улучшение.** Разностная схема КАБАРЕ первоначально была предложена именно для уравнения (1) в ее трехслойной форме [7]:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (2)$$

где  $\tau = t_{n+1} - t_n = const$  — шаг сетки по времени,  $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$  — шаги сетки по пространству. Отметим, что в таком виде схема КАБАРЕ совпадает со схемой Urwind LeapFrog [16], полученной А. Айзерлисом за несколько лет до публикации [7].

Схема (2) обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространству, устойчива при числах Куранта  $CFL \leq 1$  ( $CFL = c\tau/h$ ), точна на равномерных сетках при  $CFL = 0.5$  и  $CFL = 1$ , а также является бездиссипативной, то есть обратимой по времени. Воспользовавшись методом дифференциального приближения [17], можно показать, что схема (2) на равномерной сетке приближает уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{ch^2}{12}(1 - CFL)(1 - 2CFL) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots = 0. \quad (3)$$

Исходя из дифференциального приближения (3) можно заключить, что для повышения порядка аппроксимации схемы (2) до четвертого уравнение схемы следует дополнить третьей разностной производной с определенным коэффициентом. Такое улучшение трехслойной схемы КАБАРЕ на равномерных сетках было предложено в работе [14], а затем обобщено на случай неравномерных сеток в [15]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} + \\ & + \frac{c}{h_{i+1/2}} \left[ \frac{\mu_{i+1}(c, \tau)}{h_{i+1}} \left( \frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h_{i+3/2}} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} \right) - \frac{\mu_i(c, \tau)}{h_i} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_{i-1/2}} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $h_i = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$ ,  $\mu_i(c, \tau) = ([h_{i+1/2}]^2 - 3c\tau h_i + 2c^2\tau^2)/12$ . В работе [15] было показано, что схема (4) имеет второй порядок аппроксимации и улучшенные дисперсионные свойства на неравномерных сетках и четвертый порядок аппроксимации на равномерных сетках. Кроме того, на равномерных сетках при числах Куранта  $CFL = 0.5$  и  $CFL = 1$  она совпадает со схемой (2) и, соответственно, является точной.

**2.2. Балансно-характеристическая форма схемы КАБАРЕ и ее дисперсионное улучшение.** При обобщении схем (2) и (4) на случай систем нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа трехслойное представление схемы при помощи введения дополнительной переменной в ячейке было преобразовано к двухслойному (балансно-характеристическому), состоящему из трех фаз [18]. Для схемы (2) это представление имеет следующий вид:

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^n}{\tau_n/2} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (5)$$

$$u_i^{n+1} = 2u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1}^n, \quad \text{если } c > 0, \quad (6)$$

$$u_i^{n+1} = 2u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1}^n, \quad \text{если } c < 0, \quad (7)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$  — шаги сетки по времени,  $u_i^\bullet$  — заданные в узлах сетки “потокосые” значения  $u$ ,  $u_{i+1/2}^\bullet$  — заданные в центрах ячеек сетки “консервативные” значения  $u$ . Первая (5) и третья (8) фазы называются балансными и представляют собой сеточные законы сохранения величины  $u$ . Вторая фаза (6) — характеристическая, осуществляющая экстраполяцию значения инварианта Римана  $R = u$  в направлении соответствующей ему характеристики  $x - ct = const$ . В случае постоянного шага по времени схема (5)–(8) сводится к схеме (2) путем исключения из нее консервативных переменных  $u_{i+1/2}^\bullet$ .

Схема (5)–(8), как и ее трехслойный аналог (2), обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространству, а также свойством временной обратимости. Отдельно стоит отметить минимальность ее шаблона, составляющего всего одну пространственно-временную ячейку. При распараллеливании схемы на системы с распределенной памятью соседним партициям требуется обмениваться на каждом шаге по времени лишь значениями инвариантов Римана, приходящих на их границы, что значительно упрощает масштабирование алгоритмов.

Аналогичным образом можно получить балансно-характеристическое представление схемы (4):

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^n}{\tau_n/2} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} + c \langle \mu(c, \tau_n) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \rangle_{i+1/2}^n = 0, \quad (9)$$

$$u_i^{n+1} = 2u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1}^n, \quad \text{если } c > 0, \quad (10)$$

$$u_i^{n+1} = 2u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1}^n, \quad \text{если } c < 0, \quad (11)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} + c \langle \mu(c, \tau_n) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \rangle_{i+1/2}^{n+1} = 0, \quad (10)$$

$$\langle \mu(c, \tau) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \rangle_{i+1/2}^n = \frac{1}{h_{i+1/2}} \left[ \frac{\mu_{i+1}(c, \tau)}{h_{i+1}} \left( \frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h_{i+3/2}} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} \right) - \frac{\mu_i(c, \tau)}{h_i} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_{i-1/2}} \right) \right]. \quad (11)$$

Схема (8)–(11) также сводится к схеме (4) путем исключения консервативных переменных  $u_{i+1/2}^\bullet$  и наследует все ее свойства. Приведенные формулы показывают, что для улучшения дисперсионных свойств схемы (5)–(7) требуется внести изменения лишь в первую (8) и третью (10) фазы схемы. При этом при масштабировании алгоритма на системы с распределенной памятью соседним партициям приходится обмениваться уже не только значениями инвариантов Римана, но и значениями потоковых переменных  $u_i^{n+1}$  (по одному слою потоковых переменных с каждой стороны).

**3. Системы линейных одномерных дифференциальных уравнений гиперболического типа.** Рассмотрим систему одномерных линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, разрешенную относительно производных по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u} = \{u^{(j)}\} \in \mathbb{R}^k, \quad A \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad A = \text{const}. \quad (12)$$

Будем считать, что система (12) является гиперболической, т.е. матрица  $A$  обладает полным набором действительных собственных значений  $\{\lambda^{(j)}\} \in \mathbb{R}$  и полным набором собственных векторов. Тогда система (12) распадается на  $k$  независимых уравнений переноса:

$$\frac{\partial R^{(j)}}{\partial t} + \lambda^{(j)} \frac{\partial R^{(j)}}{\partial x} = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{R} = \{R^{(j)}\} \in \mathbb{R}^k$ ,  $R^{(j)} = (\mathbf{l}^{(j)}, \mathbf{u})$  — инварианты Римана,  $\mathbf{l}^{(j)} \in \mathbb{R}^k$  — левые собственные векторы-строки матрицы  $A$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda^{(j)}$ .

**3.1. Стандартная схема КАБАРЕ для систем уравнений.** Балансно-характеристическая схема КАБАРЕ для системы (12) имеет следующий вид [19]:

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} [R^{(j)}]_i^{n+1} &= 2[R^{(j)}]_{i-1/2}^{n+1/2} - [R^{(j)}]_{i-1}^n, & \text{если } \lambda^{(j)} > 0, \\ [R^{(j)}]_i^{n+1} &= 2[R^{(j)}]_{i+1/2}^{n+1/2} - [R^{(j)}]_{i+1}^n, & \text{если } \lambda^{(j)} < 0, \end{aligned} \quad j = \overline{1, k}, \quad (15)$$

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{u}_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0. \quad (16)$$

Здесь после выполнения первой фазы (14) совершается переход к инвариантам Римана  $\mathbf{R}_\star^\bullet = L\mathbf{u}_\star^\bullet$ , а после второй фазы (15) — возвращение к исходным переменным:  $\mathbf{u}_\star^\bullet = L^{-1}\mathbf{R}_\star^\bullet$ , где  $L \in \mathbb{R}^{k \times k}$  — матрица из левых собственных векторов  $\mathbf{l}^{(j)}$ . Число Куранта в данном случае определяется следующим образом:  $\text{CFL} = \max(|\lambda^{(j)}| \cdot \tau_n/h_{i+1/2})$ .

Схема (14)–(16) обладает теми же свойствами, что и схема для уравнения переноса (5)–(7): вторым порядком аппроксимации и временной обратимостью. Действительно, домножив уравнения первой (14) и третьей (16) фаз слева на собственный вектор  $\mathbf{l}^{(j)}$ , мы получаем уравнения (5), (7) схемы для уравнения переноса значения  $R^{(j)}$  со скоростью  $\lambda^{(j)}$ . Таким образом, в силу линейной зависимости инвариантов Римана от исходных переменных задачи, схема (14)–(16) эквивалентна  $k$  независимым схемам (5)–(7) для инвариантов Римана  $R^{(j)}$ .

**3.2. Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем уравнений.** Для улучшения дисперсионных свойств схемы (14)–(16) для системы уравнений (12) воспользуемся той же идеей, что и для схемы (8)–(11): добавим антидисперсионные члены в балансные фазы алгоритма,

не меняя при этом характеристическую фазу. Для этого рассмотрим балансные фазы схемы с улучшенными дисперсионными свойствами (8) для каждого из уравнений переноса инвариантов Римана (13):

$$\frac{[R^{(j)}]_{i+1/2}^{n+1/2} - [R^{(j)}]_{i+1/2}^n}{\tau_n/2} + \lambda^{(j)} \frac{[R^{(j)}]_{i+1}^n - [R^{(j)}]_i^n}{h_{i+1/2}} + \lambda^{(j)} \left\langle \mu(\lambda^{(j)}, \tau_n) \frac{\partial^3 R^{(j)}}{\partial x^3} \right\rangle_{i+1/2}^n = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (17)$$

Затем вернемся к исходным переменным системы  $\mathbf{u}$ , домножив векторное уравнение (17) слева на матрицу  $L^{-1}$ :

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n}{h_{i+1/2}} + \left\langle L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3} \right\rangle_{i+1/2}^n = 0,$$

где  $\Lambda \in \mathbb{R}^{k \times k}$  — диагональная матрица из собственных чисел системы  $(\Lambda)_{ij} = \delta_{ij} \lambda^{(j)}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{k \times k}$  — диагональная матрица антидисперсионных коэффициентов  $(D)_{ij} = \delta_{ij} \mu(\lambda^{(j)}, \tau_n)$ . Аналогичным образом получают и уравнения с антидисперсионной поправкой для третьей фазы (16). Схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами для систем линейных уравнений гиперболического типа имеет следующий вид:

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n}{h_{i+1/2}} + \left\langle L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3} \right\rangle_{i+1/2}^n = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [R^{(j)}]_i^{n+1} &= 2[R^{(j)}]_{i-1/2}^{n+1/2} - [R^{(j)}]_{i-1}^n, & \text{если } \lambda^{(j)} > 0, \\ [R^{(j)}]_i^{n+1} &= 2[R^{(j)}]_{i+1/2}^{n+1/2} - [R^{(j)}]_{i+1}^n, & \text{если } \lambda^{(j)} < 0, \end{aligned} \quad j = \overline{1, k}, \quad (19)$$

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + A \frac{\mathbf{u}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{u}_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} + \left\langle L^{-1} \Lambda D L \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3} \right\rangle_{i+1/2}^{n+1} = 0, \quad (20)$$

Таким образом, в аппроксимацию каждого уравнения системы (12) входит не только разностный аналог первой пространственной производной от потоков  $(A\mathbf{u})^{(j)}$ , но и аналог третьей разностной производной от, вообще говоря, всех переменных системы  $\mathbf{u}$ . Так, например, для линеаризованных уравнений газовой динамики в аппроксимацию закона сохранения массы будет входить третья разностная пространственная производная от плотности.

Схема (18)–(20) обладает теми же свойствами, что и схема для уравнения переноса (8)–(10): имеет второй порядок аппроксимации и улучшенные дисперсионные свойства на неравномерных сетках и четвертый порядок аппроксимации на равномерных сетках, устойчива при числах Куранта  $\text{CFL} \leq 1$  и обладает свойством временной обратимости. Действительно, домножив уравнения первой (18) и третьей (20) фаз слева на матрицу собственных векторов  $L$ , мы получаем независимые уравнения (8), (10) схемы для уравнения переноса значения  $R^{(j)}$  со скоростью  $\lambda^{(j)}$ . Таким образом, в силу линейной зависимости инвариантов Римана от исходных переменных задачи, схема (18)–(20) эквивалентна  $k$  независимым схемам (8)–(10) для инвариантов Римана  $R^{(j)}$ . При этом система уже, вообще говоря, не будет точна на равномерных сетках при числах Куранта  $\text{CFL} = 0.5$  и  $\text{CFL} = 1$ . Это связано с тем, что число Куранта для системы уравнений определяется по максимальному по модулю собственному значению системы и, например, при  $\text{CFL} = 1$  точно будут переноситься лишь самые быстро распространяющиеся инварианты. Отметим также, что для монотонизации схемы характеристическую фазу алгоритма (19) следует дополнить процедурой нелинейной коррекции инвариантов Римана, основанной на принципе максимума. Так как характеристическая фаза осталась прежней, то и коррекцию инвариантов следует делать так же, как и в стандартной схеме КАБАРЕ [19].

Предложенная схема (18)–(20) отличается от схемы, предложенной в [15], тем, что антидисперсионная поправка вводится отдельно для каждого инварианта Римана системы, в то время как в [15] ко всем инвариантам Римана применяется одинаковая антидисперсионная поправка, отвечающая максимальному по модулю собственному значению системы, что не позволяет получить четвертый порядок аппроксимации на равномерных расчетных сетках. Заметим, что формулы для схемы [15] можно получить из формул (18)–(20), заменив диагональную матрицу антидисперсионных коэффициентов  $D$  на диагональную матрицу с одинаковыми элементами:  $(\hat{D})_{ij} = \delta_{ij} \mu(\lambda_{max}, \tau_n)$ , где  $\lambda_{max}$  — максимальное по модулю собственное значение системы (12).

**4. Тестовые расчеты.** Для тестирования предложенной схемы (18)–(20) и демонстрации четвертого порядка сходимости рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad x \in (-200, 200), \quad t > 0. \quad (21)$$

Систему (21) можно трактовать как уравнение колебаний с коэффициентом  $c^2 = 4$  в движущейся системе координат, записанное в виде уравнений в частных производных первого порядка. Дополним систему периодическими граничными условиями, а также начальными условиями в виде промодулированной гауссианом волны, аналогичными использованным ранее при исследовании свойств схемы КАБАРЕ [20, 21]:

$$\begin{aligned} v(x, t = 0) &= 2 \sin(\pi x/4) \exp(-\ln(2)(x/3)^2), \\ w(x, t = 0) &= \sin(\pi x/4) \exp(-\ln(2)(x/3)^2), \end{aligned} \quad x \in (-200, 200). \quad (22)$$

На рис. 1 представлены результаты расчетов задачи (21), (22) на момент времени  $t = 12.5$  на отрезке  $x \in [0, 25]$  по стандартной схеме КАБАРЕ (14)–(16), схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами (18)–(20), схеме, предложенной в [15], а также аналитическое решение. Расчеты проводились на равномерной сетке из 800 расчетных ячеек при числе Куранта  $CFL = 0.2$ , процедуры монотонизации в силу гладкости рассматриваемого решения были отключены. Момент времени  $t = 12.5$  подобран таким образом, чтобы компоненты решения, отвечающие инвариантам Римана, передвигающимся со скоростями  $\lambda_1 = 3$  и  $\lambda_2 = 1$ , успели “разойтись”. На отрезке  $x \in [0, 25]$  располагается часть решения, отвечающая медленно распространяющемуся инварианту Римана с собственным значением  $\lambda_2$ , к которому в схеме [15] применяется не согласованная с  $\lambda_2$  антидисперсионная поправка.

Результаты на рис. 1 позволяют заключить, что предложенная схема с улучшенными дисперсионными свойствами дает достаточно точное решение задачи, практически ложащееся на аналитическое решение. При этом схема из [15] хоть и дает более точный результат, чем стандартная схема КАБАРЕ, но проигрывает в точности предложенному методу.

В табл. 1–3 указаны ошибки и порядки точности (ООА — Order Of Accuracy) для расчетов на различных равномерных сетках и числах Куранта  $CFL$  для стандартной схемы КАБАРЕ, схемы из [15] и схемы КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами соответственно. Ошибка вычислялась для решения на момент времени  $t = 12.5$  по стандартной  $C$ -норме, в каждую таблицу вставлялась максимальная из ошибок для переменных  $v$  и  $w$ . Порядок сходимости вычислялся по правилу Рунге [22].

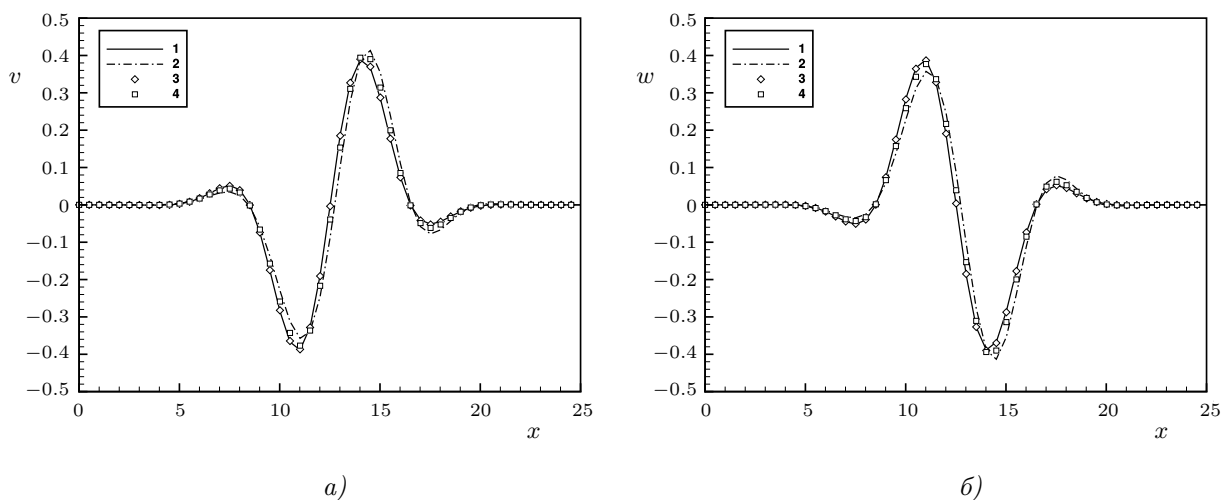


Рис. 1. Результаты расчетов по задаче (21), (22) на момент времени  $t = 12.5$  на отрезке  $x \in [0, 25]$  на равномерной сетке из 800 ячеек при  $CFL = 0.2$ . а) компонента решения  $v(x, t)$ ; б) компонента решения  $w(x, t)$ . 1 — аналитическое решение; 2 — решение по стандартной схеме КАБАРЕ; 3 — решение по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами; 4 — решение по схеме [15]

Таблица 1

Ошибки по С-норме и порядки точности (ООА) для расчетов задачи (21), (22) по стандартной схеме КАБАРЕ

Ячейки	С-ошибка CFL = 0.2	ООА	С-ошибка CFL = 0.4	ООА	С-ошибка CFL = 0.6	ООА	С-ошибка CFL = 0.8	ООА
3200	$2.98 \times 10^{-2}$	2.00	$7.45 \times 10^{-3}$	2.00	$4.96 \times 10^{-3}$	2.00	$7.46 \times 10^{-3}$	2.00
1600	$1.18 \times 10^{-1}$	1.99	$2.98 \times 10^{-2}$	2.00	$1.99 \times 10^{-2}$	2.00	$2.98 \times 10^{-2}$	1.99
800	$4.46 \times 10^{-1}$	1.90	$1.15 \times 10^{-1}$	1.95	$7.90 \times 10^{-2}$	2.00	$1.20 \times 10^{-1}$	2.00
400	1.03	1.23	$4.45 \times 10^{-1}$	1.90	$2.61 \times 10^{-1}$	1.70	$4.49 \times 10^{-1}$	1.96
200	1.00	1.01	$9.48 \times 10^{-1}$	1.22	$8.49 \times 10^{-1}$	1.53	$9.77 \times 10^{-1}$	1.27

Таблица 2

Ошибки по С-норме и порядки точности (ООА) для расчетов задачи (21), (22) по схеме [15]

Ячейки	С-ошибка CFL = 0.2	ООА	С-ошибка CFL = 0.4	ООА	С-ошибка CFL = 0.6	ООА	С-ошибка CFL = 0.8	ООА
3200	$2.28 \times 10^{-3}$	2.00	$3.56 \times 10^{-3}$	2.00	$3.87 \times 10^{-3}$	2.00	$3.19 \times 10^{-3}$	2.00
1600	$9.28 \times 10^{-3}$	2.00	$1.43 \times 10^{-2}$	2.00	$1.55 \times 10^{-2}$	2.00	$1.27 \times 10^{-2}$	1.99
800	$3.91 \times 10^{-2}$	2.08	$5.69 \times 10^{-2}$	1.99	$6.06 \times 10^{-2}$	1.97	$4.98 \times 10^{-2}$	1.96
400	$2.66 \times 10^{-1}$	2.76	$2.14 \times 10^{-1}$	1.88	$2.17 \times 10^{-1}$	1.80	$1.86 \times 10^{-1}$	1.83
200	$8.70 \times 10^{-1}$	1.76	$5.43 \times 10^{-1}$	1.47	$4.58 \times 10^{-1}$	0.95	$5.53 \times 10^{-1}$	1.60

Таблица 3

Ошибки по С-норме и порядки точности (ООА) для расчетов задачи (21), (22) по схеме КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами

Ячейки	С-ошибка CFL = 0.2	ООА	С-ошибка CFL = 0.4	ООА	С-ошибка CFL = 0.6	ООА	С-ошибка CFL = 0.8	ООА
3200	$7.87 \times 10^{-5}$	4.00	$2.04 \times 10^{-5}$	4.00	$1.36 \times 10^{-5}$	4.00	$1.99 \times 10^{-5}$	4.00
1600	$1.26 \times 10^{-3}$	3.97	$3.25 \times 10^{-4}$	3.99	$2.16 \times 10^{-4}$	3.99	$3.18 \times 10^{-4}$	3.99
800	$2.00 \times 10^{-2}$	3.96	$5.00 \times 10^{-3}$	3.97	$3.40 \times 10^{-3}$	3.97	$5.07 \times 10^{-3}$	3.99
400	$2.66 \times 10^{-1}$	3.74	$7.07 \times 10^{-2}$	3.79	$4.46 \times 10^{-2}$	3.69	$6.40 \times 10^{-2}$	3.69
200	$8.98 \times 10^{-1}$	1.72	$5.41 \times 10^{-1}$	2.94	$4.52 \times 10^{-1}$	3.14	$5.55 \times 10^{-1}$	2.89

Результаты в табл. 1–3 позволяют сделать вывод о сходимости всех трех методов на сгущающихся сетках. При этом стандартный метод КАБАРЕ имеет второй порядок сходимости, метод КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами — четвертый порядок сходимости. Метод [15] хоть и позволяет получить более точное решение, чем стандартная схема КАБАРЕ, тем не менее также имеет всего лишь второй порядок сходимости, что объясняется неполной антидисперсионной поправкой для всех инвариантов Римана, кроме наиболее быстро переносимого.

**5. Заключение.** В работе представлен новый явный балансно-характеристический метод решения систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа четвертого порядка аппроксимации. Метод основан на добавлении в стандартную схему КАБАРЕ антидисперсионных членов особого вида, улучшающих дисперсионные свойства переноса всех инвариантов Римана системы. Предложенная схема бездиссипативна при отключенных процедурах монотонизации и устойчива при числах Куранта  $CFL \leq 1$ . Точность метода и его порядок сходимости продемонстрированы на серии расчетов задачи о переносе волны, промодулированной гауссианом, на последовательности сгущающихся сеток.

Предложенная схема для линейных дифференциальных уравнений представляет не только теоретический, но и практический интерес, и может быть использована, например, для расчетов задач о выявлении термоакустической неустойчивости (вибрационного горения) акустических трактов [23].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 19–01–00472) в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liu X.-D., Osher S., Chan T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes // *Journal of Computational Physics*. 1994. **115**, N 1. 200–212.
2. *Shu C.-W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // *Journal of Computational Physics*. 1988. **77**, N 2. 439–471.
3. *Cockburn B., Shu C.-W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // *Journal of Scientific Computing*. 2001. **16**, N 3. 173–261.
4. *Qiu J., Shu C.-W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2005. **26**, N 3. 907–929.
5. *Bogey C., de Cacqueray N., Bailly C.* A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations // *Journal of Computational Physics*. 2009. **228**, N 5. 1447–1465.
6. Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. **58**, № 8. 20–29.
7. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // *Математическое моделирование*. 1998. **10**, № 1. 86–100.
8. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // *Journal of Computational Physics*. 2009. **228**, N 19. 7426–7451.
9. *Goloviznin V.M., Korotkin I.A., Finogenov S.A.* Modeling of turbulent natural convection in enclosed tall cavities // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. **58**. 1211–1222.
10. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // *AIAA Journal*. 2007. **45**, N 12. 2861–2871.
11. *Markesteijn A.P., Karabasov S.A.* CABARET solutions on graphics processing units for NASA jets: Grid sensitivity and unsteady inflow condition effect // *Comptes Rendus Mécanique*. 2018. **346**, N 10. 948–963.
12. *Зайцев М.А., Карабасов С.А.* Схема Кабаре для численного решения задач деформирования упругопластических тел // *Математическое моделирование*. 2017. **29**, № 11. 53–70.
13. *Головизнин В.М., Карабасов С.А.* Нелинейная коррекция схемы Кабаре // *Математическое моделирование*. 1998. **10**, № 12. 107–123.
14. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // *Математическое моделирование*. 1998. **10**, № 1. 101–116.
15. *Abhishek C., Naghibi S.E., Markesteijn A.P., Karabasov S.A.* A fourth-order CABARET scheme for Computational Aeroacoustics. 2019. doi 10.13140/RG.2.2.28629.88805.
16. *Iserles A.* Generalized leapfrog methods // *IMA Journal of Numerical Analysis*. 1986. **6**. 381–392.
17. *Шокин Ю.И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
18. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // *Математическое моделирование*. 2003. **15**, № 9. 29–48.
19. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
20. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // *Journal of Computational Physics*. 2009. **228**, N 19. 7426–7451.
21. *Bogey C., Bailly C.* A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations // *Journal of Computational Physics*. 2004. **194**, N 1. 194–214.
22. *Балвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
23. *Афанасьев Н.А., Головизнин В.М., Семенов В.Н., Сипатов А.М., Нестеров С.С.* Прямое моделирование термоакустической неустойчивости в газогенераторах по схеме “КАБАРЕ” // *Математическое моделирование*. 2021. **33** (2). 3–19.

Поступила в редакцию  
20 декабря 2020



## CABARET Scheme with Improved Dispersion Properties for Systems of Linear Hyperbolic-Type Differential Equations

N. A. Afanasiev<sup>1</sup>, V. M. Goloviznin<sup>2</sup>, and A. V. Solovjev<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Industrial Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Postgraduate Student, e-mail: vmnaf@cs.msu.ru*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Industrial Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: gol@ibrae.ac.ru*

<sup>3</sup> *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru*

Received December 20, 2020

**Abstract:** A conservative-characteristic method to solve systems of linear hyperbolic-type partial differential equations is proposed. This method has the fourth order of approximation on uniform grids and the second approximation order and improved dispersion properties on non-uniform grids. The proposed method is based on the well-known CABARET scheme whose conservative phases are modified by adding anti-dispersive terms of a special type. Previously, a method with similar properties was proposed only for the simplest one-dimensional linear advection equation. The modification of the scheme allows us to improve the dispersion properties of the advection for all Riemann invariants of the system of equations under consideration at once. The scheme is non-dissipative when the monotization procedures are not used and is stable at Courant numbers  $CFL \leq 1$ . The accuracy of the method and its order of convergence are shown in a series of solving the problem of advection of a wave modulated by a Gaussian on a sequence of condensing grids. The proposed method is planned to be used as a basis for constructing a CABARET scheme with improved dispersion properties for systems of nonlinear differential equations.

**Keywords:** conservative-characteristic methods, CABARET scheme, Computational Fluid Dynamics (CFD), high-order schemes, hyperbolic-type equations.

### References

1. X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan, "Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes," *J. Comput. Phys.* **115** (1), 200–212 (1994).
2. C.-W. Shu and S. Osher, "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes," *J. Comput. Phys.* **77** (2), 439–471 (1988).
3. B. Cockburn and C.-W. Shu, "Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems," *J. Sci. Comput.* **16** (3), 173–261 (2001).
4. J. Qiu and C.-W. Shu, "Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters," *SIAM J. Sci. Comput.* **26** (3), 907–929 (2005).
5. C. Bogey, N. de Cacqueray, and C. Bailly, "A Shock-Capturing Methodology Based on Adaptive Spatial Filtering for High-Order Non-Linear Computations," *J. Comput. Phys.* **228** (5), 1447–1465 (2009).
6. V. M. Goloviznin and B. N. Chetverushkin, "New Generation Algorithms for Computational Fluid Dynamics," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **58** (8), 20–29 (2018) [*Comput. Math. Math. Phys.* **58** (8), 1217–1225 (2018)].
7. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Difference Approximation of Convective Transport with Spatial Splitting of Time Derivative," *Mat. Model.* **10** (1), 86–100 (1998).
8. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, "Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics," *J. Comput. Phys.* **228** (19), 7426–7451 (2009).
9. V. M. Goloviznin, I. A. Korotkin, and S. A. Finogenov, "Modeling of Turbulent Natural Convection in Enclosed Tall Cavities," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **58**, 1211–1222 (2017).
10. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, "New Efficient High-Resolution Method for Nonlinear Problems in Aeroacoustics," *AIAA J.* **45** (12), 2861–2871 (2007).
11. A. P. Markesteijn and S. A. Karabasov, "CABARET Solutions on Graphics Processing Units for NASA Jets: Grid Sensitivity and Unsteady Inflow Condition Effect," *Comptes Rendus Mécanique* **346** (10), 948–963 (2018).

12. M. A. Zaitsev and S. A. Karabasov, “Cabaret Scheme for Computational Modelling of Linear Elastic Deformation Problems,” *Mat. Model.* **29** (11), 53–70 (2017).
13. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, “Nonlinear Correction of Cabaret Scheme,” *Mat. Model.* **10** (12), 107–123 (1998).
14. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, “Some Properties of the Difference Scheme ‘Cabaret’,” *Mat. Model.* **10** (1), 101–116 (1998).
15. C. Abhishek, S. E. Naghibi, A. P. Markesteijn, and S. A. Karabasov, “A Fourth-Order CABARET Scheme for Computational Aeroacoustics,” (2019). doi 10.13140/RG.2.2.28629.88805.
16. A. Iserles, “Generalized Leapfrog Methods,” *IMA J. Numer. Anal.* **6**, 381–392 (1986).
17. Yu. I. Shokin, *The Method of Differential Approximation* (Nauka, Novosibirsk, 1979; Springer, Berlin, 1983).
18. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, “Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables,” *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003).
19. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *Novel Algorithms of Computational Hydrodynamics for Multicore Computing* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
20. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, “Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics,” *J. Comput. Phys.* **228** (19), 7426–7451 (2009).
21. C. Bogey and C. Bailly, “A Family of Low Dispersive and Low Dissipative Explicit Schemes for Flow and Noise Computations,” *J. Comput. Phys.* **194** (1), 194–214 (2004).
22. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel’kov, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
23. N. A. Afanasiev, V. M. Goloviznin, V. N. Semenov, et al., “Direct Simulation of Thermoacoustic Instability in Gas Generators Using ‘CABARET’ Scheme,” *Mat. Model.* **33** (2), 3–19 (2021).