УДК 519.6

МЕТОДЫ ВЫБОРА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

И. В. Колос[1], **М. В. Колос**[2]

Получены соотношения для выбора значения параметра регуляризации согласно критерию квазиоптимальности и критерию отношения для решения задачи линейной оптимальной фильтрации с вырожденным белым шумом в наблюдениях. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07–01–00269 и 07–01–92104).

---

1. Введение. При решении задач линейной оптимальной фильтрации часто бывает трудно сказать что-либо определенное о точности задания исходных данных, или их оценки задаются грубо. В этих случаях, если параметр регуляризации выбирать согласно критерию невязки или обобщенного принципа невязки [1–3], решение задачи линейной оптимальной фильтрации будет значительно отличаться от точного [1].

В работах [1, 6] для выбора параметра регуляризации предлагаются два способа, которые не зависят в явном виде от оценок ошибок задания исходных данных, — критерий квазиоптимальности и критерий отношения. В общем случае эти критерии опробованы численно, а в случае точного задания оператора для алгебраических систем доказательство приведено в [6]. Эти методы работают локально в области, близкой к оптимальному параметру регуляризации [1, 6], и их следует применять в сочетании с другими способами выбора параметра регуляризации, такими как критерий невязки [2], критерий минимума мажорантных оценок [1] и др.

Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_n$, $L_2\big([0,t]\big)$ — гильбертово пространство вектор-функций, определенных на $[0,t]$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, и интегрируемых с квадратом по Лебегу с нормой $\|\cdot\|_0$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$, $\Big\{W^1_{20}\big([0,t]\big), L_2\big([0,t]\big), W^{-1}_{20}\big([0,t]\big)\Big\}$ — оснащенное гильбертово пространство [4, 5], где $W^1_{20}\big([0,t]\big)$ — позитивное пространство, $(\cdot,\cdot)_{10}$ — скалярное произведение и $\|\cdot\|_{10}$ — норма в $W^1_{20}\big([0,t]\big)$, $W^{-1}_{20}\big([0,t]\big)$ — негативное пространство с нормой $\|\cdot\|_{-10}$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{-10}$. Для любых двух элементов $u \in W^{-1}_{20}\big([0,t]\big)$ и $v \in W^1_{20}\big([0,t]\big)$ определим билинейную форму $\langle u, v\rangle = \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^t u^{\mathrm T}_k(\tau)v(\tau)\,d\tau$, где $\big\{u_k(\tau)\big\}^\infty_{k=1}$ — последовательность функций из $L_2\big([0,t]\big)$, такая, что $\|u-u_k\|_{-10}\to 0$ при $k\to\infty$. Очевидно, что билинейная форма совпадает со скалярным произведением в $L_2\big([0,t]\big)$, если $u \in L_2\big([0,t]\big)$. Индекс $^{\mathrm T}$ означает операцию транспонирования.

Согласно теоремам вложения С.Л. Соболева [7], в негативное пространство входят обобщенные функции типа δ-функций Дирака. Подробнее о построении и свойствах позитивных и негативных пространств можно ознакомиться в [4, 5, 7].

Далее будем обозначать через $C\big([0,t]\big)$ пространство непрерывных на $[0,t]$ вектор-функций с нормой $\|u\|_C = \max\limits_\tau\Big\{\big|u(\tau)\big|,\ \tau\in[0,t]\Big\}$, $|u|^2 = \sum\limits_{k=1}^n u_k^2$, где $u_k(\tau)$ — координаты вектора $u(\tau)$.

Пусть $(\Omega, \mathcal F, P)$ — вероятностное пространство, на котором определены все встречающиеся в дальнейшем случайные величины и функции, а M — оператор математического ожидания.

Пусть $w(\tau)\equiv w(\tau,\omega)$ — векторный случайный процесс ($\tau\in[0,t]$, $\omega\in\Omega$), выборочные функции которого с вероятностью 1 принадлежат негативному пространству $W^{-1}_{20}\big([0,t]\big)$. Математическое ожидание случайного процесса $w(\tau)$ вычисляется по формуле $M\big[w(\tau)\big] = D^*M\big[j^*w(\tau)\big]$, а ковариационная матрица $M\big[w(\tau)w^{\mathrm T}(\sigma)\big] = D^*D^*M\Big[\big(j^*w(\tau)\big)\big(j^*w(\sigma)\big)^{\mathrm T}\Big]$ для $\tau,\sigma\in[0,t]$. Здесь оператор D^* изоморфно отображает $L_2\big([0,t]\big)$ на $W^{-1}_{20}\big([0,t]\big)$, а j^* — обратный ему оператор.

---

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; доцент, e-mail: kolos_v@mail.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, Ленинские горы, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: arush@srcc.msu.su

Случайный процесс $v(\tau,\omega)$ с нулевым средним и ковариационной функцией, содержащей множителем δ-функцию Дирака, т.е. $M\big[v(\tau)\big] = 0$, $M\big[v(\tau)v^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = V(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, где $V(\tau)$ — симметрическая положительно определенная матрица с элементами из $C\big([0,t]\big)$, называется белым шумом [11].

Множитель $V(\tau)$ при δ-функции называется матрицей интенсивности белого шума $v(\tau,\omega)$. Если интенсивность белого шума представляет собой неотрицательно определенную симметрическую матрицу, то такой процесс будем называть белым вырожденным шумом.

Пусть $x(\tau) \equiv x(\tau,\omega)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $\omega \in \Omega$, — случайный n-мерный гауссовский процесс с реализациями, принадлежащими с вероятностью 1 пространству непрерывных функций $C\big([0,t]\big)$, и статистиками $M\big[x(\tau)\big] = 0$, $M\big[x(\tau)x^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = K_x(\tau,\sigma)$, где $0 \leqslant \sigma \leqslant t$. Очевидно, что элементы матрицы $K_x(\tau,\sigma)$ по обоим аргументам принадлежат $L_2\big([0,t]\big)$.

2. Задача линейной оптимальной фильтрации. Пусть известен некоторый случайный процесс $\big\{y(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\big\}$, связанный с процессом $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau), \tag{1}$$

где $C(\tau)$ — матрица наблюдений (измерений) размерности $m \times n$, $m \leqslant n$, с гладкими элементами (ранг матрицы $C(\tau)$ равен m), $w(\tau) \equiv w(\tau,\omega)$ — m-мерный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $M\big[w(\tau)\big] = 0$ и ковариационной матрицей $K_w(\tau,\sigma) = M\big[w(\tau)w^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]$, реализации $w(\tau)$ и элементы ковариационной матрицы $K_w(\tau,\sigma)$ могут принадлежать негативному пространству $W_{20}^{-1}\big([0,t]\big)$, процессы $x(\tau)$ и $w(\tau)$ не коррелированны.

Требуется по наблюдениям процесса $\big\{y(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\big\}$ найти линейную оценку $\widehat{x}(\tau)$ процесса $x(\tau)$, удовлетворяющую критерию минимума среднеквадратической ошибки в момент времени $\tau = t$:

$$m(t) = \inf_h \left\{ M\Big[\big(z, x(t) - \widehat{x}(t)\big)_n^2\Big] \;\middle|\; \widehat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau \right\}. \tag{2}$$

Здесь z — произвольный постоянный вектор из E_n, а нижняя грань берется по всем матрицам $h(t,\tau)$ размерности $n \times m$, для которых существует допустимый фильтр $\widehat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau$. Интеграл в (2) понимается в смысле билинейной формы, $\widehat{x}_i = \langle h_i^{\mathrm{T}}, y\rangle$, где $h_i(t,\tau)$ — i-я строка матрицы $h(t,\tau)$, $h_i^{\mathrm{T}}(t,\tau) \in W_{20}^{1}\big([0,t]\big)$, а $\widehat{x}_i(t)$ — i-я координата вектора оценки.

3. Решение задачи фильтрации. Импульсная переходная функция $h_0(t,\tau)$, определяющая оптимальную оценку в смысле среднеквадратического критерия (2), удовлетворяет матричному уравнению Винера–Хопфа [4, 5, 8, 11]:

$$M\big[x(t)y^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t h_0(t,\tau)M\big[y(\tau)y^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau, \quad \sigma \in [0,t]. \tag{3}$$

Уравнение (3) в общем случае является уравнением Фредгольма первого рода, решение которого, как известно, может быть неустойчивым [1–3].

Вместо (3) рассмотрим регуляризированное уравнение

$$K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau + h_\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma),$$

где $S_\alpha(\sigma) = \begin{bmatrix} \alpha I_{m-q} & 0 \\ 0 & R(\sigma) + \alpha I_q \end{bmatrix}$, I_{m-q} и I_q — единичные матрицы порядка $(m-q)$ и q, α — параметр регуляризации, $\alpha > 0$. Это уравнение получено из (3) добавлением к нему выражения $\alpha h_\alpha(t,\sigma)$, использованием статистических свойств случайных процессов $x(\tau)$, $w(\tau)$ и свойств δ-функции Дирака. При фиксированном $\alpha > 0$ оно представляет собой уравнение Фредгольма второго рода, решение которого, как известно, является устойчивым.

В [12] получено приближенно-аналитическое решение регуляризированного уравнения Винера–Хопфа, когда в измерениях присутствует белый вырожденный шум $w(\tau)$.

Сформулируем критерии выбора параметра регуляризации в случае решения задачи линейной оптимальной фильтрации.

Квазиоптимальный критерий [1, 2]. В качестве квазиоптимального значения параметра регуляризации α_{kopt} выбирается наименьшее из значений $\alpha > 0$, реализующих локальный минимум функции $J(\alpha) = \left\| S_\alpha(\tau)\, \dfrac{\partial h_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)}{\partial \alpha}\, z \right\|_{-10}$, где z — произвольный элемент из E_n, а величина $S_\alpha(\tau)\, \dfrac{\partial h_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)}{\partial \alpha} = g_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)$ находится из соотношений

$$K_x(t,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)\,d\tau + h_\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma), \tag{4}$$

$$\int\limits_0^t g_\alpha(t,\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)\,d\tau + g_\alpha(t,\sigma) + h_\alpha(t,\sigma) = 0. \tag{5}$$

Критерий отношения [1, 2]. В качестве оптимального значения параметра регуляризации α_o выбирается наименьшее из значений $\alpha > 0$, реализующих локальный минимум функции

$$J_0(\alpha) = \frac{\|v_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)z\|_{-10}}{\|h_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)z\|_{-10}}\,,$$

где z — произвольный элемент из E_n, а величины $h_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)$ и $S_\alpha(\tau)\,\dfrac{\partial h_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)}{\partial\alpha} = g_\alpha^{\text{т}}(t,\tau)$ находятся из соотношений (4), (5).

4. Приближенно-аналитические значения для функций $h_\alpha(t,\tau)$ и $g_\alpha(t,\tau)$. Пусть $K_w(\tau,\sigma) = R_w(\tau)\delta(\tau-\sigma)$ и матрица $R_w(\tau)$ неотрицательно определена, т.е. для всех $u \in L_2([0,t])$ выполнено неравенство $(u, R_w u)_0 \geqslant 0$ (в этом случае обратная матрица к $R_w(\tau)$ может не существовать или быть неограниченной).

Далее будем рассматривать задачу линейной оптимальной фильтрации с вырожденным белым шумом [9]. В этом случае уравнение Винера–Хопфа принимает вид

$$K_x(t,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma) = \int\limits_0^t h_0(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)\,d\tau + h_0(t,\tau)R_w(\sigma), \tag{6}$$

где $R_w(\sigma)$ — неотрицательно определенная матрица интенсивности белого вырожденного шума $w(\sigma)$. Если ранг матрицы $R_w(\sigma)$ равен q, то ее можно представить в форме $R_w(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma) \end{bmatrix}$, где $R(\sigma)$ — невырожденная (положительно определенная) матрица порядка p с элементами, принадлежащими пространству $W_2^1([0,t])$.

Решение (6) неустойчиво, а его компоненты могут принадлежать негативному пространству [4, 5]. Вместо (6) будем решать регуляризированное уравнение Винера–Хопфа (4).

Пусть $L_2([0,t])$ — гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом в смысле Лебега на $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$. Выберем в $L_2([0,t])$ какой-либо ортонормируемый базис $\{e_i(t)\}_{i=1}^\infty$. Тогда любая конечная система функций $\{e_i(t)\}_{i=1}^N$ будет линейно независимой. Разлагая матрицу $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)$ в ряд по базису $\{e_i(t)\}_{i=1}^\infty$, получим $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma) = \sum\limits_{i,j=1}^\infty e_i(\tau)K_{ij}e_j(\sigma)$, где K_{ij} — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов матрицы $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)$, $k_{ij}^{pq} = \int\limits_0^T\int\limits_0^T k_x^{pq}(\tau,\sigma)e_i(\tau)e_j(\sigma)\,d\tau\,d\sigma$. Здесь $k_x^{pq}(\tau,\sigma) = \sum\limits_{l=1}^n\sum\limits_{k=1}^n c_{pk}k_{kl}c_{lq}$ — элемент матрицы $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)$, который расположен в p-й строке и q-м столбце, c_{lq} и k_{kl} — элементы матриц $C(\tau)$ и $K_x(\tau,\sigma)$, $p,q = 1,2,\ldots,m$ и $i,j = 1,2,\ldots$.

Аналогично, матрицу $K_x(t,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)$ представим рядом Фурье $K_x(t,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma) = \sum\limits_{i,j=1}^\infty e_i(t)K_{ij}^1 e_j(\sigma)$. Здесь через K_{ij}^1 обозначена матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов матрицы

$K_x(t,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)$, $\widetilde{k}_{ij}^{pq} = \int\limits_0^T \int\limits_0^T k^{pq}(\tau,\sigma)e_i(\tau)e_j(\sigma)\,d\tau\,d\sigma$, и $k^{pq}(\tau,\sigma) = \sum\limits_{l=1}^{n} k_{pl}c_{lq}$ — элемент матрицы $K_x(t,\sigma)C^{\text{т}}(\sigma)$, расположенный в p-й строке и q-м столбце.

Зафиксируем некоторое натуральное число N и определим матрицы $K_N(\tau,\sigma) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} e_i(\tau)K_{ij}e_j(\sigma)$, $K_N^1(t,\sigma) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} e_i(t)K_{ij}^1 e_j(\sigma)$. Пусть $B_N^{\text{т}}(\tau) \equiv \big[e_1(\tau)I_m\ e_2(\tau)I_m\ \ldots\ e_N(\tau)I_m\big]$, где I_m — единичная матрица порядка m; A_N — матрица порядка mN; $F_N^{\text{т}}(\tau) \equiv \big[e_1(\tau)I_n\ e_2(\tau)I_n\ \ldots\ e_N(\tau)I_n\big]$, где I_n — единичная матрица порядка n и L_N — матрица размерности $nN \times mN$:

$$A_N \equiv \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{N1} & K_{N2} & \ldots & K_{NN} \end{bmatrix}, \quad L_N \equiv \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & \ldots & K_{1N}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & \ldots & K_{2N}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{N1}^1 & K_{N2}^1 & \ldots & K_{NN}^1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицы $K_N(\tau,\sigma)$ и $K_N^1(t,\sigma)$ можно представить в виде

$$K_N = B_N^{\text{т}}(\tau)A_N B_N(\sigma), \quad K_N^1(t,\sigma) = F_N^{\text{т}}(t)L_N B_N(\sigma). \tag{7}$$

Далее рассмотрим уравнение

$$K_N^1(t,\sigma) = \int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)K_N(\tau,\sigma)\,d\tau + h_{\alpha N}(t,\tau)S_\alpha(\sigma). \tag{8}$$

Подставляя в уравнение (8) выражение (7), получим

$$F_N^{\text{т}}(t)L_N B_N(\sigma) = \int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)B_N^{\text{т}}(\tau)A_N B_N(\sigma)\,d\tau + h_{\alpha N}(t,\tau)S_\alpha(\sigma). \tag{9}$$

Отметим, что матрица $S_\alpha(\sigma)$ положительно определена при $\alpha > 0$. Следовательно, существует ограниченная обратная матрица $S_\alpha^{-1}(\sigma) = \big[\alpha I_m + R_w(\sigma)\big]^{-1}$. Умножим (9) справа на $S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\text{т}}(\sigma)$ и, интегрируя полученное соотношение по σ от 0 до t, находим, что

$$\begin{aligned} F_N^{\text{т}}(t)L_N \int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\text{т}}(\sigma)\,d\sigma = \\ = \int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)B_N^{\text{т}}(\tau)\,d\tau\, A_N \int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\text{т}}(\sigma)\,d\sigma + \int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\sigma)B_N^{\text{т}}(\sigma)\,d\sigma. \end{aligned} \tag{10}$$

Положим, что $Q_{\alpha N}(t) \equiv \int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\text{т}}(\sigma)\,d\sigma$. Матрица $Q_{\alpha N}(t)$ имеет размерность $mN \times mN$. Это симметрическая и неотрицательно определенная матрица, $Q_{\alpha N}(0) = 0$. Покажем, что ее ранг равен mN.

Матрица $B_N^{\text{т}}(\tau) = \big[e_1(\tau)I_m, e_2(\tau)I_m, \ldots, e_N(\tau)I_m\big]$ имеет m независимых строк и ее размерность равна $m \times mN$. Матрица $S_\alpha(\tau)$ — симметрическая и положительно определенная, т.е. $S_\alpha(\tau) = S_\alpha^{\text{т}}(\tau)$ и для любого m-мерного вектора $x(\tau) \in L_2\big([0,t]\big)$ скалярное произведение $(x, S_\alpha x)_0 \geqslant c\,\|x\|_0^2$, или в интегральной форме: $\int\limits_0^t x^{\text{т}}(\tau)S_\alpha(\tau)x(\tau)\,d\tau \geqslant c\int\limits_0^t x^{\text{т}}(\tau)x^{\text{т}}(\tau)\,d\tau$, где c — положительная константа. Из свойств матрицы B_N следует, что $\int\limits_0^t B_N(\tau)B_N^{\text{т}}(\tau)\,d\tau = Q_N(t)$ имеет порядок mN и ее ранг при $t > 0$ равен mN, так как для $i,j = 1,2,\ldots,N$ выполнено $\int\limits_0^T e_i(\sigma)e_j(\sigma)\,d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j. \end{cases}$

Имеем $Q_N(T) = I_{mN}$, т.е. существует ограниченная обратная матрица $Q_N^{-1}(t)$, $t > 0$; $Q_N(t)$ — симметрическая матрица. Отметим, что обратная матрица $S_\alpha^{-1}(\tau)$, как и матрица $S_\alpha(\tau)$, положительно определена.

Рассмотрим билинейную форму $z^{\mathrm{T}} Q_{\alpha N}(t) z = \int\limits_0^t z^{\mathrm{T}} B_N(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) B_N^{\mathrm{T}}(\tau) z\, d\tau$, где z — произвольный вектор из E_{mN} и $B_N^{\mathrm{T}}(\tau) z$ — m-мерный вектор из $L_2([0,t])$. Положим $y(\tau) = B_N^{\mathrm{T}}(\tau) z$, $y(\tau) \in L_2([0,t])$. Тогда имеем

$$z^{\mathrm{T}} Q_{\alpha N}(t) z = \int\limits_0^t y^{\mathrm{T}}(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) y(\tau)\, d\tau \geqslant c_1 \int\limits_0^t y^{\mathrm{T}}(\tau) y(\tau)\, d\tau =$$

$$= c_1 \int\limits_0^t z^{\mathrm{T}} B_N(\tau) B_N(\tau) z\, d\tau = c_1 z^{\mathrm{T}} \int\limits_0^t B_N(\tau) B_N(\tau)\, d\tau\, z = c_1\, z^{\mathrm{T}} Q_N(t) z.$$

Это положительно определенная квадратичная форма в E_{mN}. Таким образом, имеет место неравенство $z^{\mathrm{T}} Q_{\alpha N}(t) z \geqslant c_1 z^{\mathrm{T}} Q_N z > 0$; матрица $Q_{\alpha N}(t)$ при фиксированных $t > 0$ и $\alpha > 0$ положительно определена как матрица положительной квадратичной формы в E_{mN}. Следовательно, существует ограниченная обратная матрица $Q_{\alpha N}^{-1}(t)$, что и требовалось доказать.

Тогда уравнение (10) можно записать следующим образом:

$$F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]^{-1} = \int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau) B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\, d\tau. \tag{11}$$

В [12] показано, что выражение

$$h_{\alpha N}(t,\tau) = \eta(t-\tau) F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) B_N(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau), \quad \eta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \leqslant t, \\ 0, & \text{если } \tau > t, \end{cases} \tag{12}$$

является решением уравнений (11) и (8), и при $N \to \infty$ стремится к решению уравнения (4).

5. Шум в наблюдениях отсутствует. Регуляризированное уравнение Винера–Хопфа в этом случае будет иметь вид

$$K_x(t,\sigma) C^{\mathrm{T}}(\sigma) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau) C(\tau) K_x(\tau,\sigma) C^{\mathrm{T}}(\sigma)\, d\tau + \alpha h_\alpha(t,\sigma). \tag{13}$$

Тогда $S_\alpha(\tau) = \alpha I_m$, $S_\alpha^{-1}(\tau) = \dfrac{1}{\alpha} I_m$, $Q_{\alpha N}(t) = \dfrac{1}{\alpha} Q_N(t)$, $Q_{\alpha N}^{-1}(t) = \alpha Q_N^{-1}(t)$ и уравнение для определения приближенного значения импульсной переходной матрицы фильтра принимает вид

$$K_N^1(t,\sigma) = \int\limits_0^t \overline{h}_{\alpha N}(t,\tau) K_N(\tau,\sigma)\, d\tau + \alpha \overline{h}_{\alpha N}(t,\sigma). \tag{14}$$

Используя выражения для $K_N(\tau,\sigma)$ и $K_N^1(t,\sigma)$, получим

$$F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N B_N(\sigma) = \int\limits_0^t \overline{h}_{\alpha N} B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\, d\tau\, A_N B_N(\sigma) + \alpha \overline{h}_{\alpha N}(t,\sigma). \tag{15}$$

Аналитическое решение (15) задается соотношением

$$\overline{h}_{\alpha N}(t,\tau) = \eta(t-\tau) F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N \big[A_N + \alpha Q_N^{-1}(t)\big]^{-1} Q_N^{-1}(t) B_N(\tau). \tag{16}$$

Найдем величину $\overline{g}_{\alpha N}(t,\tau) = \alpha \dfrac{\partial \overline{h}_{\alpha N}(t,\tau)}{\partial \alpha}$. Для этого дифференцируем по α выражение (16) и находим

$$\overline{g}_{\alpha N}(t,\tau) = -\alpha\, \eta(t-\tau) F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N \Big\{\big[A_N + \alpha Q_N^{-1}(t)\big]^{-1} Q_N^{-1}(t)\Big\}^2 B_N(\tau). \tag{17}$$

6. Случай белого вырожденного шума. Дифференцируя по α уравнение (9), имеем

$$0 = \int_0^t \frac{\partial h_{\alpha N}(t,\tau)}{\partial \alpha} B_N^{\mathrm{T}}(\tau) A_N B_N(\sigma)\, d\tau + \frac{\partial h_{\alpha N}(t,\sigma)}{\partial \alpha} S_\alpha(\sigma) + h_{\alpha N}(t,\sigma).$$

Обозначим $g_{\alpha N}(t,\tau) = \dfrac{\partial h_{\alpha N}(t,\tau)}{\partial \alpha} S_\alpha(\tau)$. Тогда

$$-h_{\alpha N}(t,\sigma) = \int_0^t g_{\alpha N}(t,\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\, d\tau\, A_N B_N(\sigma) + g_{\alpha N}(t,\tau). \tag{18}$$

Подставляя в (18) значение $h_{\alpha N}(t,\sigma)$ из (12), получим

$$-F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) = \int_0^t g_{\alpha N}(t,\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\, d\tau\, A_N B_N(\sigma) + g_{\alpha N}(t,\tau). \tag{19}$$

Дифференцируем по α выражение (12) и учитывая, что

$$\frac{\partial S_\alpha(\tau)}{\partial \alpha} = I_m, \quad \frac{\partial S_\alpha^{-1}(\tau)}{\partial \alpha} = -S_\alpha^{-1}(\tau) \frac{\partial S_\alpha(\tau)}{\partial \alpha} S_\alpha^{-1}(\tau) = -S_\alpha^{-2}(\tau),$$

$$\frac{\partial Q_{\alpha N}(t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^t B_N(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) B_{N^{\mathrm{T}}}(\tau)\, d\tau = -\int_0^t B_N(\tau) S_\alpha^{-2}(\tau) B_{N^{\mathrm{T}}}(\tau)\, d\tau = -R_{\alpha N}(t),$$

$$\frac{\partial Q_{\alpha N}^{-1}(t)}{\partial \alpha} = -Q_{\alpha N}^{-1}(t) \frac{\partial Q_{\alpha N}(t)}{\partial \alpha} Q_{\alpha N}^{-1}(t) = Q_{\alpha N}^{-1}(t) R_{\alpha N}(t) Q_{\alpha N}^{-1}(t),$$

$$\frac{\partial \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]}{\partial \alpha} = \frac{\partial Q_{\alpha N}^{-1}(t)}{\partial \alpha} = Q_{\alpha N}^{-1}(t) R_{\alpha N}(t) Q_{\alpha N}^{-1}(t),$$

находим

$$\frac{\partial h_{\alpha N}(t,\tau)}{\partial \alpha} = -\eta(t-\tau) F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) \Big\{ R_{\alpha N}(t) Q_{\alpha N}^{-1}(t) \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) B_N(\tau) - \\ - R_{\alpha N}(t) Q_{\alpha N}^{-1}(t) B_N(\tau) + B_N(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) \Big\} S_\alpha^{-1}(\tau).$$

Отсюда следует, что

$$g_{\alpha N}(t,\tau) = -\eta(t-\tau) F_N^{\mathrm{T}}(t) L_N \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) \Big\{ R_{\alpha N}(t) Q_{\alpha N}^{-1}(t) \big[A_N + Q_{\alpha N}^{-1}(t)\big]^{-1} \times \\ \times Q_{\alpha N}^{-1}(t) B_N(\tau) - R_{\alpha N}(t) Q_{\alpha N}^{-1}(t) B_N(\tau) + B_N(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) \Big\}. \tag{20}$$

Выражение (20) является решением (19), что легко проверяется подстановкой.

Теперь покажем, что решение $g_{\alpha N}(t,\tau)$ уравнения (18) при $N \to \infty$ стремится к решению уравнения

$$-h_\alpha(t,\sigma) = \int_0^t g_\alpha(t,\tau) S_\alpha^{-1}(\tau) C(\tau) K_x(\tau,\sigma) C^{\mathrm{T}}(\sigma)\, d\tau + g_\alpha(t,\sigma), \tag{21}$$

которое было получено из уравнения (4) дифференцированием его по α и введением матрицы-функции $g_\alpha(t,\sigma) = \dfrac{\partial h_\alpha(t,\sigma)}{\partial \alpha} S_\alpha(\sigma)$.

Уравнение (18) можно записать в форме

$$-h_{\alpha N}(t,\sigma) = \int_0^t g_{\alpha N}(t,\tau) K_N(\tau,\sigma)\, d\tau + g_{\alpha N}(t,\sigma). \tag{22}$$

Введем обозначения: $f \equiv C(\sigma)K_x(t,\sigma)z$, $u \equiv h^{\mathrm{T}}_{\alpha}(t,\tau)z$, $\mathcal{A}u \equiv \int\limits_0^t C(\sigma)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\tau)h^{\mathrm{T}}_{\alpha}(t,\tau)z\,d\tau$, $v \equiv g^{\mathrm{T}}_{\alpha}(t,\tau)z$,

$f_N \equiv \big[K^1_N(t,\sigma)\big]^{\mathrm{T}}z$, $u_N \equiv h^{\mathrm{T}}_{\alpha N}(t,\tau)z$, $v_N \equiv g^{\mathrm{T}}_{\alpha N}(t,\tau)z$, $\mathcal{A}_N u_N \equiv \int\limits_0^t K_N(\tau,\sigma)h^{\mathrm{T}}_{\alpha N}(t,\tau)z\,d\tau$, где z — произвольный элемент из E_n.

Уравнения (21) и (22) в операторной форме будут соответственно иметь вид

$$-u = \mathcal{A}v + v, \tag{23}$$

$$-u_N = \mathcal{A}_N v_N + v_N. \tag{24}$$

Отметим, что существуют ограниченные операторы $\mathcal{B} \equiv [\mathcal{A}+I]^{-1}$, $\mathcal{B}_N \equiv [\mathcal{A}_N+I]^{-1}$. Рассмотрим уравнение $g = \mathcal{A}_N u + Iu$, где g — произвольный вектор из $L_2\big([0,t]\big)$. Это уравнение можно записать в виде $(I+\mathcal{A})u + (\mathcal{A}_N-\mathcal{A})u = g$. Оператор $\mathcal{B}_N$ можно представить следующим образом: $\mathcal{B}_N = \big[I-\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^{-1}\mathcal{B}$. Действительно, рассмотрим оператор $\big[I-\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]$. Тогда

$$\begin{aligned} I-\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A}) &= I-\mathcal{B}\mathcal{A}_N+\mathcal{B}\mathcal{A} = I-\mathcal{B}\mathcal{A}_N+\mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{B}-\mathcal{B} = \\ &= I-\mathcal{B}(\mathcal{A}+I)+\mathcal{B}(\mathcal{A}_N+I) = \mathcal{B}(\mathcal{A}_N+I) \end{aligned}$$

и, следовательно, $\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N+I)\big]^{-1} = (\mathcal{A}_N+I)^{-1}\mathcal{B}^{-1}$. Отсюда получаем, что $\mathcal{B}_N = \big[I-\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^{-1}\mathcal{B}$.

Имеем $\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big\| \leqslant \|\mathcal{B}\|\,\|\mathcal{A}_N-\mathcal{A}\| \to 0$ при $N\to\infty$ (по построению операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_N$).

Выберем N таким, чтобы $\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big\|$ была меньше 1. Тогда оператор $\big[I-\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^{-1}$ является суммой ряда [10]

$$\big[I-\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^{-1} = I + \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big] + \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^2 + \ldots + \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^k + \ldots$$

и, следовательно, $\mathcal{B}_N g = (\mathcal{A}_N+I)^{-1}g = \big[I-\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^{-1}\mathcal{B}g = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^k\mathcal{B}g$.

Тогда очевидно, что при $N\to\infty$ верна оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_N g-\mathcal{B}g\|_0 &= \left\|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^k - I\right)\mathcal{B}g\right\|_0 = \left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big]^k\right)\mathcal{B}g\right\|_0 \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big\|^k\,\|\mathcal{B}\|\,\|\,g\,\|_0 = \frac{\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big\|}{1-\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N-\mathcal{A})\big\|}\,\|\mathcal{B}\|\,\|\,g\,\|_0 \to 0. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\|v_N-v\|_0 \to 0$ при $N\to\infty$, где u — решение уравнения (23). Действительно, при $N\to\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \|v_N-v\|_0 &= \big\|(\mathcal{A}_N+I)^{-1}u_N-(\mathcal{A}+I)^{-1}u\big\|_0 = \|\mathcal{B}_N u_N-\mathcal{B}u\|_0 = \\ &= \|\mathcal{B}_N u_N-\mathcal{B}_N u+\mathcal{B}_N u-\mathcal{B}u\|_0 \leqslant \|\mathcal{B}_N\|\,\|u_N-u\|_0 + \|\mathcal{B}_N u-\mathcal{B}u\|_0 \to 0, \end{aligned}$$

так как $\|u_N-u\|_0 \to 0$ при $N\to\infty$ [12].

Отсюда следует, что при произвольном $z\in E_n$ последовательность $g^{\mathrm{T}}_{\alpha N}(t,\tau)z \to g^{\mathrm{T}}_{\alpha}(t,\tau)z$ при $N\to\infty$; тогда последовательность приближенных решений уравнения (24) стремится при $N\to\infty$ к решению уравнения (21).

Итак, найдены приближенные решения уравнений (4) и (5) как в случае точных наблюдений, так и при наличии вырожденного белого шума, которые можно использовать при выборе параметра регуляризации по критериям квазиоптимальности и отношения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука. 1987.
3. *Морозов В.А., Гребенников А.И.* Методы решения некорректно поставленных задач. Алгоритмический аспект. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

4. *Белов Ю.А., Диденко В.П. и др.* Математическое обеспечение сложного эксперимента. Обработка измерений при исследовании сложных систем. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1982.
5. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы линейной оптимальной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
6. *Леонов А.С.* К обоснованию выбора параметра регуляризации по критерию квазиоптимальности и отношения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1978. **18**, № 6. 1363–1376.
7. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
8. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
9. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
10. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
11. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
12. *Колос И.В., Колос М.В.* О приближенно-аналитическом решении одной задачи фильтрации // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 332–337.

Поступила в редакцию
10.09.2009