

УДК 532.529

## УСКОРЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

К. Н. Волков<sup>1</sup>

Рассматриваются вопросы, связанные с исследованием сопряженного теплообмена при движении вязкой сжимаемой жидкости в полости, ограниченной неподвижной и подвижной стенками, в условиях вынужденной конвекции. Обсуждаются дискретизация уравнений, описывающих распределение температуры внутри твердого тела и движение жидкости, реализация упрощенного подхода к расчету температурного поля в жидкости, основанного на интегрировании уравнения изменения температуры при замороженном поле скорости, а также автоматическое построение неструктурированной сетки в области, занятой жидкостью, и другие детали численной реализации. Для решения системы разностных уравнений, полученной в результате конечно-объемной дискретизации осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, используются многосеточный метод и обобщенный метод взвешенных невязок. Возможности подхода демонстрируются на примере решения ряда модельных задач. Проводится сравнение ускорений вычислительного алгоритма, полученных при использовании полного и упрощенного подходов к решению задачи и различных методов решения системы разностных уравнений.

**Ключевые слова:** сопряженный теплообмен, газовая динамика, метод конечных элементов, метод конечных объемов, неструктурированная сетка.

**1. Введение.** Сопряженный тепловой анализ (coupled thermal analysis) вовлекает задание результатов одного анализа в качестве нагрузок для другого и играет важную роль в процессе проектирования и оптимизации многих технических устройств, включая газовые турбины, компрессоры и теплообменные системы [1–12]. Исследование температурного воздействия потока на узлы конструкции позволяет определить потенциально проблемные места и заранее принять меры по обеспечению их надежности и работоспособности.

Тепловой анализ заключается в расчете распределения температуры и тепловых параметров в системе. В его основе лежит уравнение теплового баланса, полученное в соответствии с принципом сохранения энергии. Для дискретизации уравнения теплового баланса обычно используется метод конечных элементов (Finite Element Method, FEM). В дополнение к расчету температурного поля в результате теплового анализа определяются плотность теплового потока на границе системы и коэффициенты теплоотдачи (с учетом заданной температуры окружающей среды).

Течение вязкой сжимаемой жидкости описывается осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса, замкнутыми при помощи той или иной модели турбулентности, для дискретизации которых обычно используется метод конечных объемов (Finite Volume Method, FVM). В результате интегрирования уравнений Рейнольдса находятся распределения скорости, давления и температуры внутри и на границах расчетной области.

**2. Основные подходы.** Разница температур металла в контрольных точках, полученных в результате численного и физического эксперимента, не должна превышать  $\pm 5$  К, что дает относительную погрешность порядка 1% и находится в пределах точности измерений [13].

На практике сопряжение температурных полей в твердом теле и жидкости, а также передача тепловых нагрузок между средами осуществляется при помощи нескольких подходов. Каждый подход имеет свои преимущества и недостатки, а также области применения.

В прямом методе (conjugate method) используется сопряженный тип элемента, содержащий необходимые степени свободы, а управление сопряжением достигается при помощи вычисления матриц элемента или векторов нагрузки элемента. Сопряженный тепловой анализ проводится при помощи одного программного модуля, позволяющего рассчитать поле температуры как внутри твердого тела, так и в жидкости. Такой подход реализуется в работах [1, 2] и успешно применяется для сопряженного теплового

<sup>1</sup> Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: dsci@mail.ru  
© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

анализа компонентов газовых турбин [3–5]. Расчеты ограничиваются либо стационарными, либо сравнительно простыми нестационарными режимами работы, поскольку включение нестационарных расчетов поля течения жидкости является достаточно затратным с вычислительной точки зрения.

Для снижения требований к вычислительным ресурсам находит применение другой подход (*non-coupled method*), в котором расчеты поля течения жидкости проводятся в стационарной постановке и только в ключевых точках цикла нагружения. На основе полученных данных строятся полуэмпирические корреляционные соотношения, которые используются для постановки тепловых граничных условий на поверхности, разделяющей жидкость и твердое тело (в том числе, находит применение метод аналогии Рейнольдса). Такой подход демонстрирует хорошие показатели производительности и не накладывает ограничений на постановку задачи [6, 7]. Однако успех его применения в существенной степени ограничивается качеством построенных корреляционных соотношений и опирается на опыт пользователя. В связи с ограниченностью области применимости критериальных соотношений, распространение подхода на широкий спектр условий представляется проблематичным.

В последовательном методе (*coupled method*) расчеты поля течения жидкости и температурного поля в твердом теле проводятся один за другим с последующей передачей нагрузок между двумя расчетными областями через сетку и соответствующие граничные условия на границе раздела сред. В случае теплового анализа взаимодействия жидкость–твердое тело требуют передачи плотность теплового потока от жидкости к твердому телу и температура на границе раздела. Для моделирования течения жидкости и расчета тепловых нагрузок в твердом теле используются различные модули: конечно-элементный модуль для расчета температурного поля в твердом теле (*Finite Element Analysis, FEA-модуль*) и модуль расчета характеристик течения жидкости (*Computational Fluid Dynamics, CFD-модуль*). Процедура обмена граничными значениями между различными модулями требует реализации соответствующей коммуникационной подпрограммы (*plug-in*). В случае несовпадения конечно-элементной (обычно используются ячейки треугольной формы) и конечно-объемной (используются как структурированные, так и неструктурированные сетки) сеток на границе раздела сред применяется интерполяция граничных значений. Такой подход реализуется в работах [8–12, 14] и успешно применяется для решения прикладных задач различного класса.

Для ситуаций, которые не выражают высокую степень нелинейности взаимодействия, последовательный метод представляется более эффективным и гибким, позволяя выполнить два анализа независимо друг от друга с их последующей итерационной увязкой и сравнительно просто учесть различные механизмы обмена теплом между жидкостью и твердым телом (конвективный, кондуктивный, теплообмен излучением) [8–10]. Сопряжение на каждом шаге по времени реализуется при помощи выполнения итераций между различными расчетными модулями до тех пор, пока не будет достигнут заданный уровень невязки [11, 12, 14].

При этом обычно считается, что время перестройки температурного поля в жидкости намного меньше времени перестройки температурного поля в твердом теле (течение успевает подстраиваться к изменению граничных условий). Для каждой характерной точки или участка цикла нагружения, характеризующего постоянством некоторых параметров (например, угловой скорости вращения ротора), строится отдельная CFD-модель, и расчеты поля течения жидкости проводятся в стационарной постановке. Имеется принципиальная возможность использовать одну CFD-модель для различных точек цикла нагружения, но это требует проведения дополнительных итераций для получения приемлемого поля течения жидкости.

Особенности реализации последовательного подхода к сопряженному тепловому моделированию в областях, образованных подвижными (ротор) и неподвижными (статор) стенками, рассматриваются в работе [12]. В отличие от общепринятого подхода [8–10], когда между различными расчетными модулями передаются температуры жидкости и металла, в подходе [12] температура металла передается от FEA-модуля к CFD-модулю, а в обратном направлении — тепловой поток и температура жидкости. Такая реализация позволяет стабилизировать численные расчеты и избежать проблем, связанных с расходимостью итерационной процедуры [11, 12, 14].

Использование схемы сопряженного теплового анализа, разработанной в [12], подразумевает, что геометрия области, занятой жидкостью, определяется дважды: один раз в качестве составляющей FEA-модели (полная геометрия импортируется, например, из файла в формате IGES), а другой — в качестве составляющей CFD-модели. При этом расчетная сетка и граничные условия, извлекаемые из цикла нагружения, для CFD-модели задаются вручную. Для избежания дублирования информации и уменьшения времени, необходимого для задания входных условий и данных, требуется разработка подпрограммы, осуществляющей извлечение CFD-области из имеющейся конечно-элементной модели без участия пользо-

вателя или при его минимальном вмешательстве и автоматическую генерацию сетки в области, занятой жидкостью, а также построение CFD-модели для каждой точки цикла нагружения.

Во многих задачах, представляющих практический интерес, форма расчетной области является достаточно сложной, в связи с чем построение структурированных и блочных сеток становится трудоемким и сложным. Несмотря на то, что использование неструктурированных сеток приводит к увеличению вычислительной работы на каждом шаге по времени по сравнению со структурированными сетками, это позволяет произвести автоматическую генерацию сетки в области произвольной геометрической конфигурации.

Для сокращения времени на CFD-расчеты, реализуемые на каждом шаге по времени, допускается решение не всех уравнений, описывающих течение жидкости, а только уравнения изменения температуры жидкости [12] (расчет температурного поля жидкости реализуется при замороженном поле скорости). Обновление поля скорости производится лишь в начале каждого шага по времени (для этого делается 1 итерация). Эффективность упрощенного подхода в существенной степени определяется способом решения системы разностных уравнений, полученной в результате конечно-объемной дискретизации уравнения изменения температуры. Для ее решения применяется многосеточный метод (Multi-Grid Method, MGM) и обобщенный метод взвешенных невязок (Generalized Minimal Residual, GMRES), который является одним из проекционных методов, построенных на базе подпространств Крылова.

**3. Общая схема.** Перед началом сопряженного теплового анализа происходит вызов подпрограммы, которая извлекает область, занятую жидкостью, граничные условия и другие необходимые параметры (число областей, занятых жидкостью, и число CFD-моделей) из имеющейся конечно-элементной модели, производит построение расчетной сетки, вызывает CFD-модуль и рассчитывает поля скорости и температуры, которые используются в качестве входных данных для последующего расчета. Особенности реализации схемы сопряженного теплового моделирования обсуждаются в [12, 14].

Схема работы коммуникационной подпрограммы заключается в последовательном выполнении следующих шагов (рис. 1).

1. Извлечение данных из FEA-модели (число, имена и идентификаторы всех областей, занятых жидкостью, их топология и границы CFD-областей, характерные параметры цикла нагружения, используемые для постановки граничных условий).

2. Выделение входной и выходной границ каждой области, занятой жидкостью (эти данные не содержатся в FEA-модели и определяются пользователем вручную).

3. Подготовка входных данных для сеточного генератора (распределение узлов по границам, сгущение узлов). Данные записываются в файлы (для каждой CFD-модели используется отдельный файл).

4. Подготовка входных данных для CFD-модуля (начальные и граничные условия, свойства рабочей среды). Данные записываются в файлы (для каждой CFD-модели используется отдельный файл).

5. Вызов сеточного генератора и CFD-модуля. Построение сетки и подготовка данных для сопря-

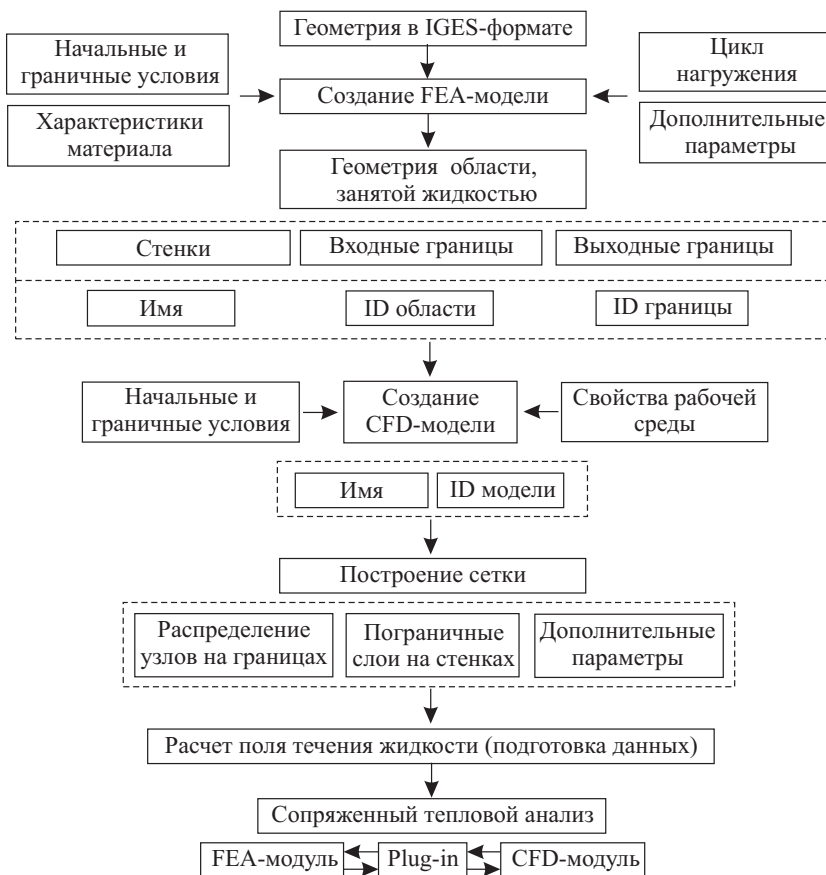


Рис. 1. Схема сопряженного теплового анализа

женного теплового анализа.

6. Сопряженный тепловой анализ по схеме [12].

Результатом работы коммуникационной подпрограммы является набор CFD-моделей, используемых в качестве входных данных для сопряженного теплового анализа [12].

Конечно-элементные расчеты обычно проводятся в осесимметричной постановке (трехмерные модели используются сравнительно редко), а расчеты поля течения жидкости — в осесимметричной или трехмерной постановке с заданием периодических граничных условий в окружном направлении. При передаче данных в FEA-модуль осуществляется осреднение температуры и теплового потока в окружном направлении. Полностью трехмерная постановка задачи является довольно дорогой с вычислительной точки зрения.

При реализации последовательного подхода обычно передается температура на границе раздела сред от одного расчетного модуля к другому и тепловой поток в обратном направлении. Во многих случаях такой подход вызывает проблемы со сходимостью итерационной процедуры [11, 14]. В разработанном подходе на каждой итерации между расчетными модулями передаются коэффициент теплоотдачи и температура стенки. Из FEA-модели в CFD-модель передается температура на входной границе расчетной области, извлекаемая из цикла нагружения, а из CFD-модели в FEA-модель — массовый расход, давление и температура на выходной границе.

**4. Основные расчетные соотношения.** Нарушение теплового равновесия между жидкостью и твердым телом возникает в результате изменения параметров цикла нагружения или граничных условий задачи.

**4.1. Распределение температуры внутри твердого тела.** В декартовой системе координат уравнение баланса энергии для твердого тела, учитывающего анизотропию его теплофизических свойств, имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S. \quad (1)$$

Здесь  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  — плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность твердого тела. Слагаемое  $S$  в правой части учитывает внутренние источники тепла (в расчетах  $S = 0$ ).

В качестве материала ротора (подвижная стенка) принимается титан, а в качестве материала статора (неподвижная стенка) — сталь. Теплофизические свойства — справочные с учетом их зависимости от температуры.

Решение уравнения (1) ищется на интервале времени  $t \in (0, t_f]$  в области  $\Omega$ . В качестве начальных условий задается однородное распределение температуры внутри тела  $T(0) = T_{m0}$  (в расчетах принимается, что  $T_{m0} = 300$  К).

В целом, граничные условия на несопряженных границах расчетной области характеризуются довольно большим разнообразием и их задание представляет собой самостоятельную задачу. Для постановки граничных условий используются корреляционные соотношения для коэффициента теплоотдачи и экспериментальные данные, полученные для модельных конфигураций. Температура компонентов газových турбин задается относительно температуры на выходе из компрессора.

Граничные условия Дирихле и Неймана выставляются на границах расчетной области, которые не находятся в контакте с жидкостью, при  $t \geq 0$ . Тепловое состояние на несопряженной границе твердого тела представляется формулой, отражающей структуру граничных условий 3-го рода:  $\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial x} = \gamma$ . Соответствующий выбор коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  позволяет реализовать требуемое граничное условие по температуре, тепловому потоку или их комбинации.

**4.2. Поле течения жидкости.** Течение вязкой сжимаемой жидкости описывается при помощи осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса и уравнений  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности, которые в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  записываются в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = H. \quad (2)$$

Уравнение (2) дополняется уравнением состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[ e - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - \omega^2 r^2) \right].$$

Вектор консервативных переменных  $Q$ , источниковый член  $H$  и векторы потоков  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  имеют сле-

дующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \omega (y \omega + 2v_z) \\ \rho \omega (z \omega - 2v_y) \\ 0 \\ P - \rho \varepsilon \\ c_{\varepsilon 1} \varepsilon (P - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon) / k \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \\ \rho v_x k - \alpha_x \\ \rho v_x \varepsilon - \beta_x \end{pmatrix},$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \\ \rho v_y k - \alpha_y \\ \rho v_y \varepsilon - \beta_y \end{pmatrix}, \quad F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \\ \rho v_z k - \alpha_z \\ \rho v_z \varepsilon - \beta_z \end{pmatrix}.$$

Неинерциальность системы отсчета учитывается при помощи введения в источникный член  $H$  кориолисовой и центробежной силы. Здесь  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $r$  — радиус вращения,  $v_x, v_y, v_z$  — составляющие скорости в координатных направлениях  $x, y, z$ ,  $\omega$  — угловая скорость,  $p$  — давление,  $e$  — полная энергия единицы массы,  $T$  — температура,  $k$  — кинетическая энергия турбулентности,  $\varepsilon$  — скорость диссипации,  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей.

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений  $\tau_{ij} = \mu_e \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$ ,  $q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}$ . Эффективная вязкость  $\mu_e$  вычисляется как сумма молекулярной  $\mu$  и турбулентной  $\mu_t$  вязкости, а эффективная теплопроводность  $\lambda_e$  выражается через вязкость и число Прандтля  $\mu_e = \mu + \mu_t$ ,  $\lambda_e = c_p \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)$ , где  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении. Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда (для воздуха  $Pr = 0.72$ ,  $Pr_t = 0.9$ ).

Из соотношений  $\alpha_i = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i}$ ,  $\beta_i = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}$  находятся диффузионные слагаемые в уравнениях  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности. Соотношение, записанное с учетом поправки Като–Лаундера:  $P = \mu_t |S| |\Omega|$ ,  $|S| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$ ,  $|\Omega| = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}$ , используется для расчета члена производства турбулентности.

Компоненты тензора скоростей деформаций и тензора вращения имеют вид  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ . Турбулентная вязкость  $\mu_t = \frac{c_\mu \rho k^2}{\varepsilon}$  вычисляется по формуле Колмогорова–Прандтля. Постоянным модели турбулентности присваиваются следующие значения:  $c_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92$ .

Характеристики турбулентности на стенке находятся при помощи метода пристеночных функций.

**4.3. Граничные условия.** На границе раздела сред в каждый момент времени выполняются граничные условия 4-го рода. В результате расчета определяется значение температуры, которое обеспечивает выполнение условия совпадения значений тепловых потоков в твердом теле и жидкости.

**5. Численная реализация.** Рассмотрим особенности реализации метода конечных элементов и метода конечных объемов для интегрирования уравнений (1) и (2), описывающих распределение температуры в твердом теле и жидкости.

**5.1. Метод конечных элементов.** Метод конечных элементов для решения задач теплообмена достаточно хорошо разработан, а процедура дискретизации уравнения изменения температуры — во многом стандартизирована [15].

Расчетная область разбивается на  $N$  конечных элементов простой геометрической формы (обычно на треугольники). Предполагается, что в каждом конечном элементе  $e = 1, 2, \dots, N$  распределение температуры подчиняется соотношению  $T = N_e T_e$ , где  $N_e$  — функции формы, вид которых зависит от формы элемента (по повторяющимся индексам проводится суммирование). Распределение температуры в расчетной области описывается соотношением  $T = N_j T_j$ , где  $N_j$  учитывает вклад всех функций формы в узле  $j$ , а  $T_j$  представляет собой температуру в узле  $j$ .

Применяя метод взвешенных невязок к уравнению (1), получим уравнение [15]

$$CT + \Lambda T = Q, \tag{3}$$

где  $C$  — матрица теплоемкости (specific heat matrix),  $\Lambda$  — матрица теплопроводности (conductivity matrix),  $T$  — вектор узловых значений температуры,  $Q$  — вектор узловых значений теплового потока.

Поскольку коэффициенты уравнения (3) зависят от температуры, то его дискретизация по времени дает следующее нелинейное уравнение

$$\left(\frac{C}{\Delta t} + \theta\Lambda\right)T^{n+1} = \left[\frac{C}{\Delta t} - (1 - \theta)\Lambda\right]T^n + Q, \tag{4}$$

где  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . Верхний индекс  $n$  относится к слою по времени. Параметр  $\theta$  определяет тип разностной схемы. Значение  $\theta = 0$  соответствует явной разностной схеме, применение которой на практике ограничивается условием устойчивости. При  $\theta = 1/2$  получается центрированная разностная схема, которая является безусловно устойчивой для линейных задач, но при нелинейных граничных условиях приводит к возникновению нефизических осцилляций решения. Значение  $\theta = 1$  соответствует полностью неявной схеме. В расчетах используется значение  $\theta = 0.8$ .

Коэффициенты уравнения (4) вычисляются при температуре  $T^n + \theta(T^{n+1} - T^n)$ , а для его решения используется итерационный метод Ньютона. Для упрощения реализации метода Ньютона производные по температуре от теплофизических свойств металла при вычислении якобиана не учитываются. Невязка уравнения (4) находится из соотношения

$$R = Q + \frac{C}{\Delta t}(T^n - T^{n+1}) - \Lambda[(1 - \theta)T^n + \theta T^{n+1}]. \tag{5}$$

С учетом сделанных предположений якобиан принимает вид  $\frac{\partial R}{\partial T^{n+1}} = \frac{\partial Q}{\partial T^{n+1}} - \frac{C}{\Delta t} - \theta\Lambda$ .

В качестве начального приближения решения на итерации  $n+1$  используется линейная экстраполяция температуры с предыдущего шага по времени (экстраполяции температуры не производится на первом шаге по времени каждого участка цикла нагружения). Правая часть уравнения (4), учитывающая внутренние источники тепла, рассчитывается в момент времени  $t^n + \theta\Delta t$ . Невязка на каждой итерации вычисляется по формуле (5). Итерации заканчиваются, если невязка не превышает заданной точности (в расчетах  $10^{-3}$ ). Для обновления решения используется метод нижней релаксации  $T^{n+1} = T^* - \alpha \left(\frac{\partial R}{\partial T^{n+1}}\right)^{-1} R$ , где  $T^*$  — температура, соответствующая решению уравнения (5),  $\alpha$  — коэффициент релаксации (в расчетах  $\alpha = 0.5$ ).

**5.2. Метод конечных объемов.** Для дискретизации уравнений Навье–Стокса и уравнений  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности, записанных в виде (2), используется метод конечных объемов [16]. Для дискретизации по времени применяется метод Рунге–Кутты 5-го порядка, а для дискретизации по пространству — схема MUSCL (невязкие потоки) и схема CDS-2 (вязкие потоки). Для решения системы разностных уравнений используется многосеточный метод.

Расчеты поля течения жидкости запускаются либо в последовательном, либо в параллельном режиме (это касается как расчетов, используемых в качестве входных данных для сопряженного теплового анализа, так и CFD-расчетов на каждом шаге по времени в сопряженном тепловом анализе). В параллельном случае окончание CFD-расчета на каждом шаге по времени (удаление задачи из списка) контролируется при помощи специальной подпрограммы (конкретная реализация зависит от архитектуры вычислительной системы).

**5.3. Итерационная процедура.** Уравнения сохранения энергии для твердого тела (1) и жидкости (2) решаются при граничных условиях 1-го рода, а температура поверхности определяется из равенства тепловых потоков и уточняется в результате итераций.

Согласование значений искомых функций на шаге по времени обеспечивается при помощи простых итераций. При этом уточняются значения функций, которые зависят от температуры, и значение температуры границы раздела. Итерации на данном шаге по времени заканчиваются, когда рассогласование температур металла и жидкости на границе раздела оказывается ниже заданной величины. В расчетах используется значение  $0.25\Delta T$ , где  $\Delta T$  — параметр точности по температуре.

Обычно такой подход приводит к медленной сходимости или неустойчивости итерационного процесса при больших градиентах температуры, поэтому используется реализация итерационной процедуры,

основанная на передаче температуры металла от FEA-модели к CFD-модели и теплового потока и температуры жидкости от CFD-модели к FEA-модели [12, 14].

**5.4. Управление шагом по времени.** Неявная схема, используемая для интегрирования уравнения (1), является безусловно устойчивой, поэтому шаг интегрирования по времени выбирается исходя из заданной точности расчета температуры.

Для управления шагом интегрирования уравнения (1) по времени используется параметр точности по температуре  $\Delta T$  (time stepping accuracy). По умолчанию используется значение 5 К, но оно не является универсальным и зависит от конкретной задачи. Для сопряженного теплового анализа компонентов газовых турбин используется значение  $\Delta T = 2$  К.

Для изменения величины шага интегрирования по времени используется алгоритм, основанный на линейной и параболической интерполяции температуры во времени. Для каждого узла конечно-элементной сетки извлекается температура в текущий и два предыдущих момента времени (рис. 2). Полученные три временные точки соединяются прямыми и параболой. Ошибка рассчитывается в точке  $t_m = \theta \Delta t$  по формуле

$$\delta T = \frac{(\theta \Delta t)^2}{t_3 - t_1} \left| \frac{T_3 - T_2}{t_3 - t_2} - \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1} \right|, \quad \text{где } \Delta t = t_3 - t_2.$$

Такой подход требует гладкого изменения решения и является неприменимым в характерных точках цикла нагружения (в начале каждого участка). На первом шаге каждого участка цикла нагружения шаг по времени не рассчитывается. В случае, если погрешность расчета температуры оказывается неудовлетворительной в конце второго шага по времени, шаг по времени уменьшается в 2 раза и расчет повторяется с начальной точки.

В качестве начального приближения шаг по времени полагается равным 1/4 интервала времени между узловыми точками цикла нагружения  $\Delta t_{01}$  (начало расчета) или берется с предыдущего участка цикла нагружения  $\Delta t_{02}$  (продолжение расчета). Таким образом,  $\Delta t_{\text{cur}} = \min \{0.25 \Delta t_{01}, \Delta t_{02}\}$ . Например, для интервала времени [0, 60] промежуточные расчеты проводятся в моменты времени 15, 30, 45 и 60 с. При неудовлетворительной точности шаг по времени уменьшается в два раза и расчет повторяется в момент времени 7.5 с.

Температура рассчитывается на двух последовательных слоях по времени с шагом  $\Delta t_{\text{cur}}$ . При отсутствии причин для ограничения шага интегрирования по времени дальнейший расчет производится с шагом  $\Delta t_{\text{opt}}$ , который оценивается исходя из скорости сходимости итерационного процесса и погрешности расчета температуры. Причинами ограничения шага интегрирования по времени служат слишком медленная сходимость итераций (медленное уменьшение невязки) и невыполнение условия точности по температуре на слое по времени.

Из условия  $\Delta t_{\text{opt}} = \min \{\Delta t_{\text{opt}1}, \Delta t_{\text{opt}2}\}$  выбирается новый шаг интегрирования по времени (optimum time step). Во избежание слишком малого шага по времени в конце данного временного участка цикла нагружения производится его выравнивание таким образом, чтобы в оставшемся интервале времени укладывалось целое число шагов.

Шаг по времени  $\Delta t_{\text{opt}1}$  зависит от погрешности расчета температуры на предыдущем шаге по времени и значения параметра точности по температуре, заданного пользователем  $\Delta t_{\text{opt}1} = \Delta t^n \left( \frac{\Delta T}{\delta T} \right)^{1/2}$ .

При условии  $\delta T > 2\Delta T$  (полученное изменение температуры на слое по времени находится за пределами указанной пользователем степени точности по температуре) шаг по времени уменьшается в 2 раза.

При выборе нового шага по времени учитывается также возможность его ограничения из-за слишком медленной скорости итерационной процедуры, которая призвана согласовать значения температуры металла и температуры жидкости на границе раздела. Шаг по времени  $\Delta t_{\text{opt}2}$  находится из соотношения

$\Delta t_{\text{opt}2} = \frac{1}{4} \Delta t^n \left( \frac{n_{\text{max}}}{n_i} \right)^{1.33}$ , где  $n_i$  — число итераций на данном слое по времени,  $n_{\text{max}}$  — максимальное число итераций на каждом слое по времени, заданное пользователем (в расчетах  $n_{\text{max}} = 20$ ). Шаг по времени уменьшается в 2 раза при достижении максимального числа итераций (при  $n_i = n_{\text{max}}$ ).

**6. Автоматическое построение сетки.** Построение сетки в области, занятой жидкостью, вклю-

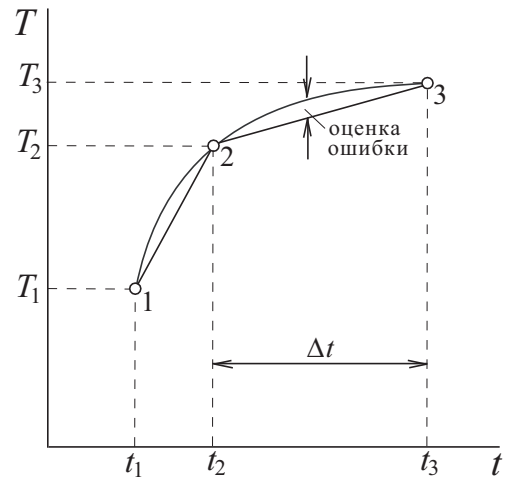


Рис. 2. Управление шагом по времени

чает извлечение необходимых данных из FEA-модели (топология области, параметры цикла нагружения) и их передачу сеточному генератору, который осуществляет триангуляцию расчетной области и проверяет критерии качества сетки (положительность контрольных объемов, вытянутость и скошенность ячеек).

**6.1. Границы области.** Каждая область, занятая жидкостью, ограничена стенками и границами, через которые жидкость поступает и покидает расчетную область.

Стенка состоит из набора геометрических примитивов с сопряженными граничными условиями (стенки из FEA-модели с другим типом граничных условий не образуют границ CFD-модели). Каждой стенке присваивается два идентификатора, первый из которых указывает на порядковый номер CFD-области, а второй — на порядковый номер стенки в пределах области. Геометрические примитивы с одинаковыми значениями первого и второго аргумента образуют стенку CFD-модели (границу с одинаковыми граничными условиями). Номер модели, соответствующий горизонтальному участку цикла нагружения, не включается в число идентификаторов, поскольку все CFD-модели имеют одинаковую геометрию, но, возможно, различную сетку.

Поддерживаются следующие геометрические примитивы: прямые, дуги окружностей и кривые, представляемые NURBS-сплайнами (Non-Uniform Rational B-Spline). Прямые задаются координатами начальной и конечной точек, дуги окружностей — радиусом и углами, а NURBS-сплайны — степенью  $p$ , контрольными точками (их число составляет  $n = p + 1$ ) и узловым вектором (knot vector), имеющим  $p + n - 1$  компонент.

Входные и выходные границы области не распознаются автоматически (они не содержатся в FEA-модели) и указываются пользователем при помощи соответствующего графического интерфейса (считается, что входные и выходные границы представляются прямыми линиями). При этом из FEA-модели извлекаются узлы, ближайšie к тем, которые были указаны пользователем. После извлечения области, занятой жидкостью, из FEA-модели проверяется ее замкнутость.

**6.2. Распределение узлов на границе.** Положение узлов сетки внутри области контролируется распределением узлов на ее границах. При решении задач, в которых расчетными величинами являются касательное напряжение на стенке или тепловой поток, важно контролировать значение  $y^+ = \frac{\rho u_\tau y_w}{\mu}$ ,

где  $u_\tau = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$ ,  $\tau_w$  — напряжение трения на стенке.

Узлы вдоль стенки распределяются равномерно, а расстояние между сеточными узлами по нормали к стенке изменяется по закону геометрической прогрессии. К каждой стенке пристыкуется пограничный слой, толщина которого управляется положением пристеночного узла, числом сеточных линий в пограничном слое и скоростью его роста. Пограничный слой не пристыкуется к стенке, если примыкающие к ней входная или выходная границы слишком малы (происходит смыкание пограничных слоев на смежных границах, что приводит к возникновению отрицательных контрольных объемов).

Для расчета расстояния от центра пристеночного контрольного объема до стенки используется полуэмпирическое соотношение, построенное на основе обработки расчетных и экспериментальных данных

$$y_w = \begin{cases} 0.1\delta & \text{при } Re_\omega < 10^6, \\ 0.03\delta & \text{при } Re_\omega > 10^7, \end{cases}$$

где  $Re_\omega = \frac{\rho\omega r^2}{\mu}$ ,  $\delta = 0.525r Re_\omega^{-0.2}$ . Для стационарных границ (при  $\omega = 0$ ) задается число Рейнольдса по умолчанию ( $Re_\omega = 10^6$ ). При промежуточных числах Рейнольдса используется линейная интерполяция  $y_w = y_{w1} + \frac{y_{w2} - y_{w1}}{Re_{\omega2} - Re_{\omega1}} (Re_\omega - Re_{\omega1})$ , где  $y_{w1}$  и  $y_{w2}$  — значения, соответствующие нижней ( $Re_{\omega1} = 10^6$ ) и верхней ( $Re_{\omega2} = 10^7$ ) границам изменения числа Рейнольдса.

Применяется также и другой подход, основанный на полуэмпирическом соотношении для коэффициента поверхностного трения  $y_w = \frac{2y^+ D}{C_f Re}$ . Входным параметром является линейное число Рейнольдса

$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$ , где  $U$  и  $D$  — характерная скорость и характерный линейный размер. Коэффициент трения  $C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2}$  рассчитывается по формуле  $C_f = \frac{0.455}{\ln^2(0.06 Re)}$ .

Для уменьшения или увеличения величины  $y_w$  вводится контрольный коэффициент  $h$ . Величина  $hy_w$  дает размер грани пристеночного контрольного объема по нормали к стенке (рис. 3а). Последующие



узлы в направлении, нормальном к стенке, размещаются по закону геометрической прогрессии. Толщина пограничного слоя, присоединенного к стенке, находится из соотношения  $\sum_{n=0}^{n_r} (hy_w)g^n$ , где  $n_r$  — число узлов поперек слоя,  $g$  — скорость роста (по умолчанию  $g = 1.2$ ). Узлы вдоль стенки располагаются равномерно, и их число полагается равным  $n_w = \frac{l}{y_w f}$ , где  $l$  — длина границы,  $f$  — контрольный коэффициент (изначально считается, что пристеночный контрольный объем имеет форму квадрата). Пристеночный контрольный объем имеет размер  $(hy_w) \times (fy_w)$ . Подходящий выбор коэффициентов  $h$  и  $f$  позволяет избежать сильно растянутых ячеек сетки в пограничном слое.

Узлы на входных и выходных границах размещаются равномерно между пограничными слоями на соседних стенках (рис. 3б). Число узлов на входной или вы-

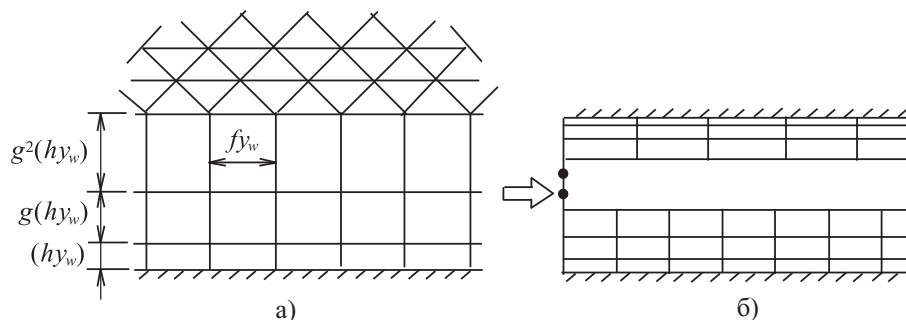


Рис. 3. Построение сетки около стенки (а) и входной границы (б)

ходной границе полагается равным  $n = \frac{l}{f}$ , где  $l$  — длина границы,  $f$  — контрольный коэффициент. Если длина границы оказывается слишком малой, то число узлов считается фиксированным (по умолчанию используется 8 узлов).

**6.3. Расчетная модель.** Построение CFD-модели включает в себя задание свойств рабочей среды, а также постановку начальных и граничных условий. Рабочая среда — воздух. Теплофизические свойства — справочные с учетом их зависимости от температуры, т.е.  $c_p = \text{const}$ , вязкость находится из закона Сазерленда,  $\lambda = \frac{c_p \mu}{Pr}$ .

Для скорости на стенке используются граничные условия прилипания и непротекания. Стенка считается теплоизолированной. Для нахождения характеристик турбулентности на стенке используется метод пристеночных функций [17].

На входной границе задается массовый расход или полное давление (тип граничных условий определяется пользователем при помощи соответствующего графического интерфейса), температура торможения, направление потока в виде значений осевой  $v_x$ , радиальной  $v_r$  и тангенциальной  $v_\theta$  скорости или соответствующих углов  $\alpha = \arctg\left(\frac{v_r}{v_x}\right)$  и  $\beta = \arctg\left(\frac{v_\theta}{v_x}\right)$ , а также характеристики турбулентности.

На выходной границе фиксируется либо статическое давление, либо массовый расход. Течение на выходе считается по нормали к границе.

**7. Ускорение счета.** Для сокращения затрат процессорного времени реализуется расчет температурного поля жидкости при замороженном поле скорости [12]. Физическим обоснованием упрощенного подхода служит то, что поле плотности, рассчитанное при различных тепловых условиях на стенке (условие теплоизоляции или условие фиксированной температуры), изменяется сравнительно слабо.

**7.1. Уравнение изменения температуры.** Для нахождения распределения температуры вместо уравнения изменения полной энергии используется уравнение изменения температуры как более простое по форме и структуре (при  $\lambda = \text{const}$  это уравнение является линейным).

Решение уравнения изменения температуры реализуется при помощи общего расчетного модуля [16], устанавливая блокировку решения других уравнений.

**7.2. Метод решения.** Среди итерационных методов решения систем разностных уравнений широкое распространение получили методы релаксационного типа (методы Якоби, Гаусса–Зейделя, релаксации и их модификации). Теория сходимости этих методов основана на понятии регулярного расщепления матриц и хорошо развита [18]. Меньшее распространение получили методы, основанные на проектировании на последовательность подпространств Крылова (Krylov subspace).

Проекционные методы численно устойчивы благодаря использованию техники ортогонализации, сохраняют исходную структурную разреженность матрицы (базовой операцией является умножение матрицы на вектор), позволяют контролировать точность в ходе итерационных вычислений, а также применимы как для решения задач, в которых матрица системы задана в явной форме, так и для решения

задач, в которых матрица доступна только через операцию умножения на вектор.

В методе GMRES решение системы линейных уравнений  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (матрица  $A$  размерности  $n \times n$  считается обратимой) заменяется вектором  $\mathbf{x}_m \in K_m$ , где  $K_m$  — подпространство Крылова размерности  $m$ , который минимизирует норму невязки  $\|A\mathbf{x}_m - \mathbf{b}\|$ .

Последовательность Крылова, порожденная матрицей  $A$  и вектором  $\mathbf{x}$ , представляет собой последовательность векторов  $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \dots, A^m\mathbf{x}$ . Под подпространствами Крылова степени  $m$  понимается линейная оболочка подсистем последовательности Крылова  $K_m(A, \mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \dots, A^{m-1}\mathbf{x}\}$ .

Вычислительный алгоритм включает в себя построение ортонормированного базиса в подпространстве Крылова, решение проблемы наименьших квадратов (least-squares problem) и вычисление корректирующей поправки, а также ряд дополнительных шагов, направленных на ускорение сходимости и повышение эффективности (например, предобусловливание).

Метод GMRES строит ортогональный базис подпространства Крылова для некоторого начального вектора  $\mathbf{r}_0$  с поиском решения в рамках этого подпространства. В отличие от случая с симметричной положительно определенной матрицей, при несимметричной матрице невозможно построить ортогональный базис с использованием коротких рекуррентных соотношений [18].

Для построения ортогонального базиса используется метод Арнольди (Arnoldi iteration) [18], который позволяет преобразовать исходную матрицу плотной структуры в форму Хессенберга (Hessenberg form). Каждый новый вектор ортогонализируется (orthogonalization procedure) по отношению к предыдущим при помощи модифицированного метода Грама–Шмидта (Modified Gram–Schmidt, MGS) [18]. Метод MGS требует  $2m^2n$  операций, а требования к памяти оцениваются как  $(m + 1)n$ . Для решения проблемы наименьших квадратов матрица в форме Хессенберга преобразуется к верхнетреугольному виду с использованием метода вращений Гивенса (Givens rotation).

Матрично-векторное произведение вычисляется при помощи оценки невязки возмущенного решения [19]: 
$$\left(\frac{\partial R}{\partial Q}\right)V = \frac{R(Q + \varepsilon V) - R(Q)}{\varepsilon},$$
 где  $R$  — невязка,  $Q$  — вектор неизвестных,  $V$  — вектор,  $\varepsilon$  — малая величина.

Стоимость отдельной итерации линейно растет с ее номером, а общая трудоемкость алгоритма растет пропорционально квадрату числа итераций. Для повышения эффективности метод GMRES перезапускается после нескольких итераций (restarting option), при этом GMRES( $k$ ) обозначает, что алгоритм перезапускается после каждых  $k$  итераций. Слишком малые значения  $k$  приводят к медленной сходимости (с точки зрения числа итераций) или ее отсутствию. Слишком большие  $k$  приводят к быстрой сходимости с точки зрения числа итераций, но к высоким затратам процессорного времени, связанным с поиском ортогонального базиса подпространства Крылова [18].

Во многих случаях метод GMRES является чувствительным к числу предобусловленности якобиана [18]. Практически применяемые алгоритмы представляют собой комбинацию методов подпространств Крылова и предобусловливания (preconditioning), которое является вспомогательной операцией, направленной на улучшение вычислительных свойств исходной матрицы без искажения конечного результата. В качестве предобусловливания используется многосеточный метод, особенности реализации которого приводятся в [16]. Параметры многосеточного метода, в частности число уровней сетки и число многосеточных циклов на каждой GMRES-итерации (в расчетах используется V-цикл и четыре вложенных сеточных уровня), оказывают влияние на скорость сходимости.

С точки зрения программной реализации, получается два вложенных цикла и два множества невязок. Внешний цикл связан с получением решения уравнения изменения температуры во времени (он дает истинную невязку решения уравнения изменения температуры), а внутренний цикл — с решением системы разностных уравнений методом GMRES. Внешний цикл проводится до тех пор, пока не достигается заданный уровень невязки (в расчетах  $R \sim 10^{-16}$ ) или число итераций (многосеточных циклов), указанное пользователем. Число шагов во внутреннем цикле равняется числу векторов (размерности) подпространства Крылова. Согласно теории, невязка во внутреннем итерационном цикле уменьшается монотонно (в отличие от невязки во внешнем итерационном цикле, которая может иметь немонотонное поведение).

Для оценки характеристик эффективности и производительности метода GMRES расчеты проводятся для различной размерности подпространства Крылова и различного числа GMRES-итераций на каждом конечно-элементном шаге интегрирования по времени.

**7.3. Ускорение алгоритма.** Для решения системы разностных уравнений, полученных в результате конечно-объемной дискретизации уравнения изменения температуры, используется многосеточный метод [16] и метод GMRES [18].

Вычислительная эффективность алгоритма характеризуется его ускорением  $S$ , равным отношению

времени, затраченного на сопряженный тепловой анализ при решении всех уравнений, описывающих течение жидкости, ко времени, необходимому на расчет при решении уравнения изменения температуры тем или иным методом.

**7.4. Турбулентный пограничный слой на пластине.** Тестирование разработанной процедуры, реализующей расчет температурного поля при замороженном поле скорости, проводится на примере расчета турбулентного пограничного слоя на плоской пластине с отрицательным градиентом давления [20, 21].

Расчетная область представляет собой криволинейный канал длиной 157.22 мм и шириной 21.77 мм во входном сечении [21]. Нижняя стенка является поверхностью пластины, а верхняя стенка состоит из отрезков прямых и дуг окружностей и строится таким образом, чтобы воспроизвести градиент давления, создаваемый экспериментальной установкой [20].

Во входном сечении задаются полное давление и полная температура ( $p_0 = 3.66 \times 10^5$  Па,  $T_0 = 365$  К), кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации ( $k_0 = 2$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon_0 = 200$  м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup>), а в выходном сечении фиксируется статическое давление ( $p = 1.013 \times 10^5$  Па). Верхняя стенка считается теплоизолированной. Пластина имеет постоянную температуру ( $T_w = 300$  К).

Расчеты проводятся на сетке  $90 \times 80$ . При этом координата  $y^+$  имеет приблизительно постоянное значение вдоль поверхности пластины ( $y^+ \sim 22$ ).

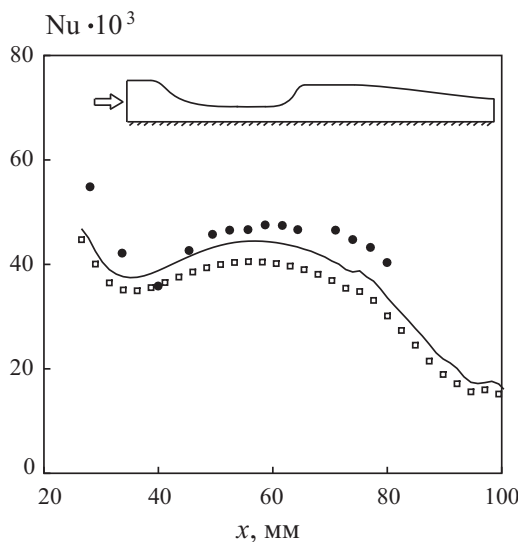


Рис. 4. Распределения локального числа Нуссельта вдоль поверхности пластины

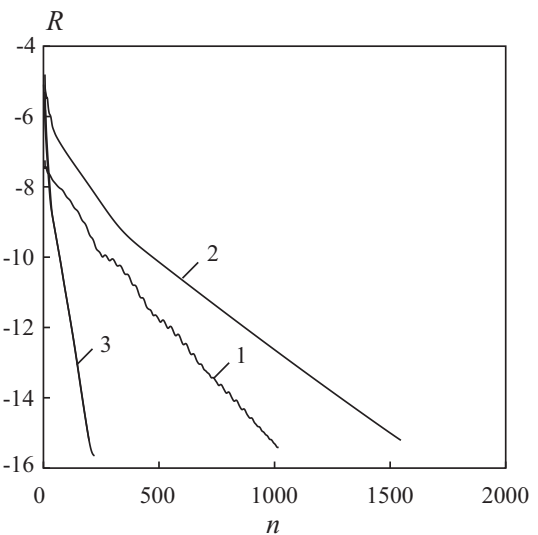


Рис. 5. Изменение невязки в зависимости от числа итераций при использовании различных подходов

Сначала рассчитывается поле течения жидкости, считая, что поверхность пластины является теплоизолированной, т.е.  $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ , а затем решается уравнение изменения температуры при замороженном поле скорости и заданном значении температуры стенки ( $T_w = 300$  К). Распределения локального числа Нуссельта  $Nu = \frac{q_w}{\lambda \Delta T}$  вдоль поверхности пластины приводятся на рис. 4. Сплошная линия показывает результаты расчетов по полным уравнениям Навье–Стокса [21], замкнутым при помощи  $k-\varepsilon$  модели турбулентности, значки  $\square$  соответствуют решению задачи при замороженном поле скорости, а значки  $\bullet$  — данным физического эксперимента [20]. Различие результатов, полученных в рамках полной постановки задачи и при решении уравнения изменения температуры, составляет около 5%.

Для улучшения качества численного решения целесообразно использовать двухслойную модель турбулентности, как это рекомендуется в работе [21].

занятая жидкостью

Изменение невязки в зависимости от числа итераций показывает рис. 5 (заданный уровень невязки во всех расчетных вариантах равняется  $R \sim 10^{-15}$ ). Линия 1 соответствует решению задачи в полной постановке, а линии 2 и 3 — решению уравнения изменения температуры при помощи многосеточного подхода и метода GMRES. Уравнения решаются в безразмерном виде, что позволяет объединить невязки, возникающие в результате дискретизации различных уравнений. Несмотря на то, что метод GMRES дает

существенный выигрыш в числе итераций (число итераций уменьшается с 1500 в многосеточном подходе до 190 в методе GMRES), ускорение алгоритма составляет 1.2, поскольку нахождение векторов подпространства Крылова является достаточно затратным с вычислительной точки зрения (в расчетах  $k = 4$ ). Тем не менее, это может дать существенный выигрыш во времени в сопряженном тепловом анализе, поскольку расчеты поля течения жидкости проводятся многократно на каждом конечно-элементном шаге по времени.

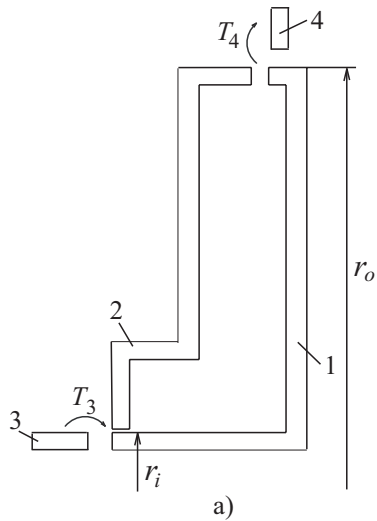


Рис. 6. Геометрическая модель (а) и область, занятая жидкостью (б)

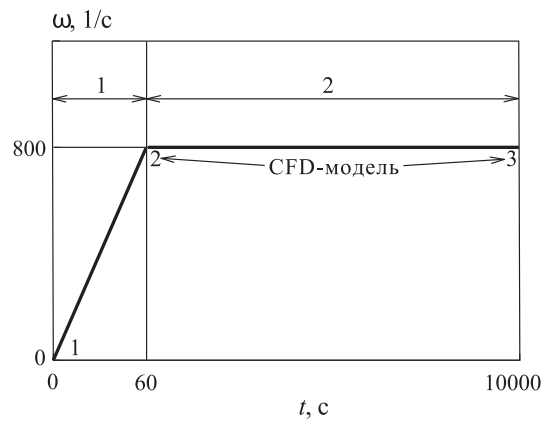


Рис. 7. Цикл нагружения

**8. Течение в каверне.** Полости различных типов находят широкое применение на практике в качестве теплопередающих, теплоизолирующих и технологических элементов в энергетических установках различного назначения, чем объясняется устойчивый интерес к исследованию структуры течения и теплообмена при взаимодействии потока жидкости с ограниченным объемом.

Расчеты течения в каверне проводятся как на структурированной сетке, построенной вручную, так и неструктурированной сетке, которая генерируется автоматически при помощи разработанного алгоритма.

Рассмотрим расчет температурных полей металла и жидкости в каверне, ограниченной вращающимся (ротор) и неподвижным (статор) дисками (рис. 6а). Геометрия области, занятой жидкостью, а также положение точек, в которых контролируется температура в физическом эксперименте [22], показаны на рис. 6б. Внутренний и внешний радиусы каверны равняются  $r_i = 0.2$  м и  $r_o = 0.3$  м, а ширина каверны —  $s = 0.025$  м. Толщина стенок составляет 5 мм.

Блоки 1 и 2 расчетной области представляют собой ротор и статор. Блоки 3 и 4 являются фиктивными и пристыкуются к расчетной области для того, чтобы реализовать передачу температуры между металлом и жидкостью. Температура блока 3 полагается равной температуре, извлекаемой из цикла нагружения, и используется в качестве теплового граничного условия на входной границе CFD-области. Температура выходной границы, полученная в результате решения CFD-задачи, используется для задания граничного условия на поверхности блока 4.

Цикл нагружения показан на рис. 7 (варьируемым параметром является угловая скорость вращения ротора). Ротор, неподвижный в начальный момент времени, за 60 с разгоняется до скорости 800 1/с. Температура ротора изменяется от 300 К в начале расчета до 800 К через 60 с, а температура статора — от 300 до 500 К за тот же интервал времени. Температура блока 3 (полная температура на входной границе) изменяется от 300 К в начале расчета до 680 К через 60 с. Длительный интервал времени используется для того, чтобы позволить температуре металла выйти на стационарный режим.

Конечно-элементная сетка содержит 117 ячеек треугольной формы и 361 узел (рис. 8). Структурированная конечно-разностная сетка, приведенная на рис. 9а, содержит 5078 ячеек (198 ячеек на поверхности ротора, 157 ячеек на поверхности статора, 5 ячеек на входной и 12 ячеек на выходной границах), а неструктурированная сетка, показанная на рис. 9б, содержит 8360 ячеек (177 ячеек на поверхности ротора, 153 ячеек на поверхности статора, по 8 ячеек на входной и выходной границах). Для структурированной сетки координата  $y^+$  изменяется от 36 до 82 на поверхности ротора и от 20 до 58 на поверхности ста-

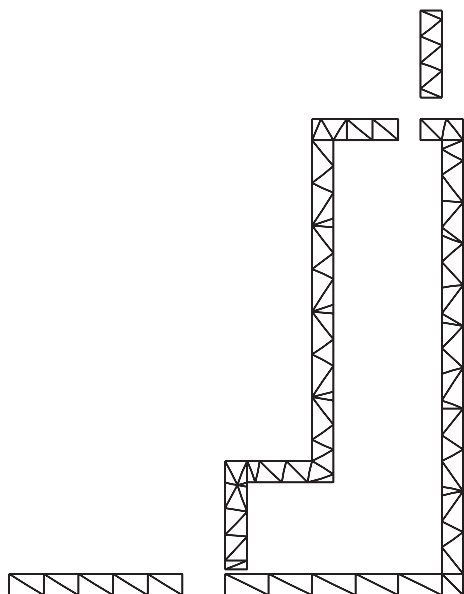


Рис. 8. Конечно-элементная сетка

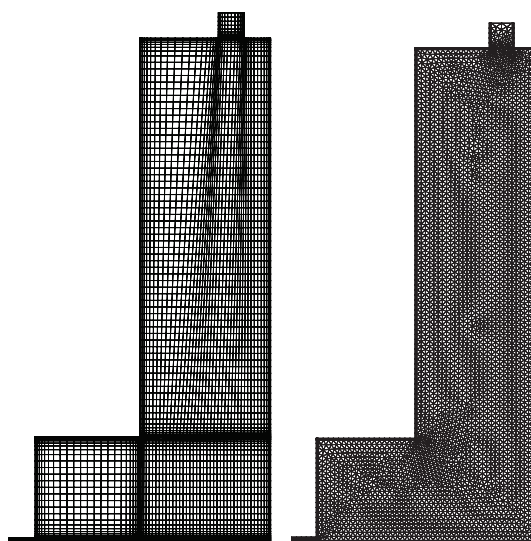
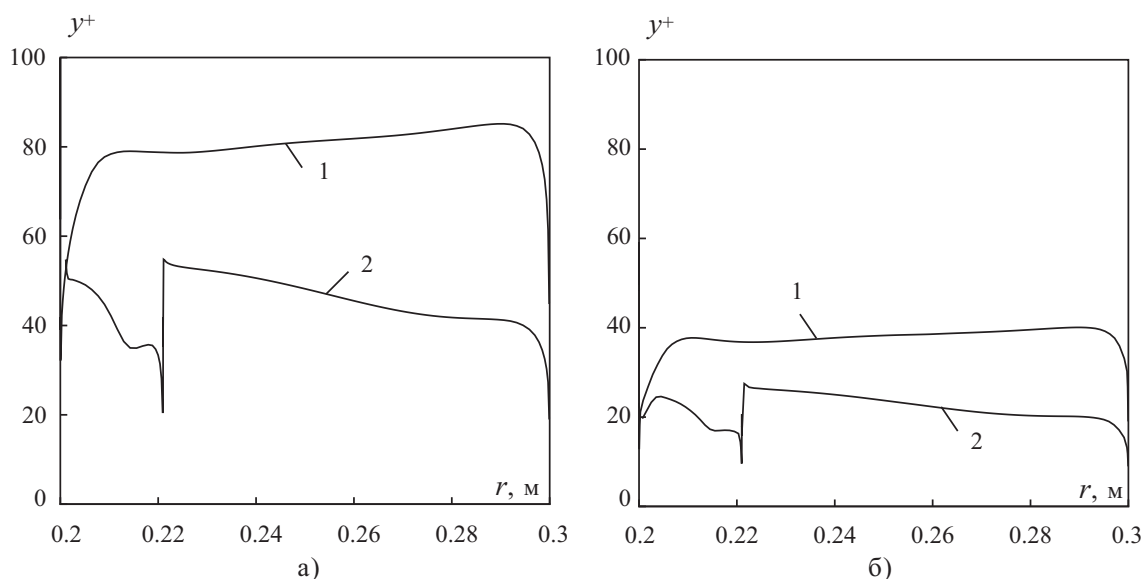


Рис. 9. Структурированная (а) и неструктурированная (б) сетки в области, занятой жидкостью

Рис. 10. Распределения координаты  $y^+$  на поверхности ротора (линия 1) и статора (линия 2) для структурированной (а) и неструктурированной (б) сеток

тора (рис. 10а), а для неструктурированной сетки — от 18 до 40 на поверхности ротора и от 12 до 35 на поверхности статора (рис. 10б).

На внутренней поверхности ротора и статора выставляются сопряженные граничные условия. На внешней поверхности ротора задается тепловой поток, а коэффициент теплоотдачи вычисляется по корреляционной зависимости для свободного вращающегося диска (угловая скорость извлекается из цикла нагружения для заданного момента времени). Внешняя поверхность статора считается теплоизолированной.

Для скорости на поверхности ротора и статора выставляются граничные условия прилипания и непротекания. На входной границе камеры задаются массовый расход ( $\dot{m} = 0.8$  кг/с), температура торможения ( $T_0 = 300$  К при  $t = 0$  и  $T_0 = 680$  К при  $t \geq 60$  с, между указанными временными точками температура изменяется по линейной зависимости), направление потока, кинетическая энергия

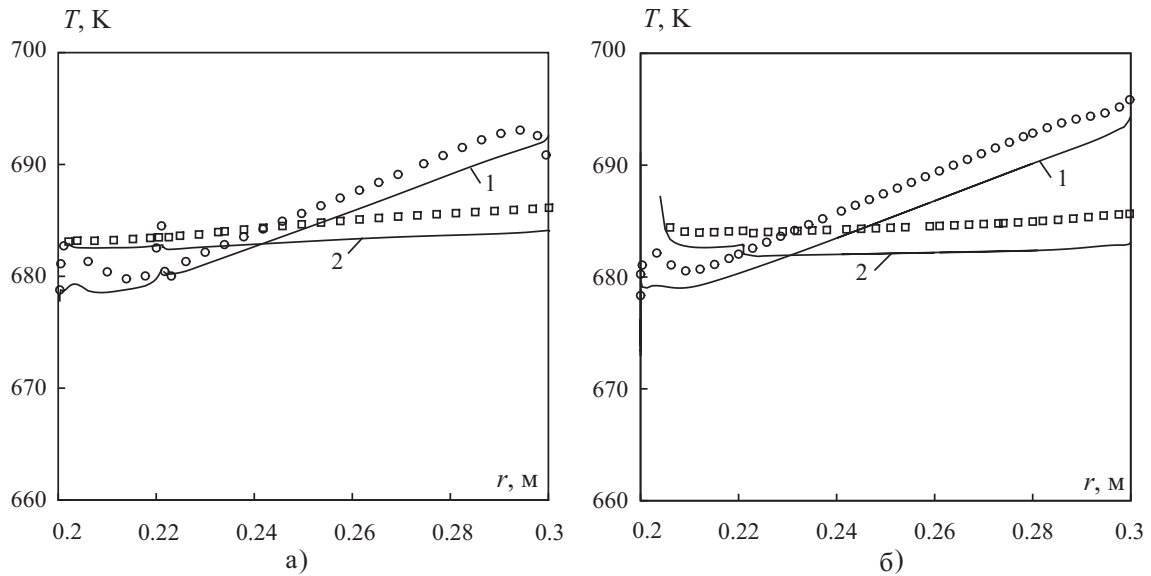


Рис. 11. Распределения температуры по поверхности ротора (линия 1, значки  $\circ$ ) и статора (линия 2, значки  $\square$ ) для структурированной (а) и неструктурированной (б) сеток

турбулентности и скорость ее диссипации ( $k = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\varepsilon = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}^3$ ). Угол закрутки потока  $\beta = \arctg\left(\frac{v_\theta}{v_x}\right)$  на входной границе равняется  $31.61^\circ$ . На выходной границе каверны фиксируется статическое давление ( $p = 8.5 \times 10^5 \text{ Па}$ ) и направление течения по нормали к границе. Линейное и вращательное числа Рейнольдса, рассчитанные по параметрам во входном сечении и угловой скорости вращения ротора, равняются  $3.42 \times 10^4$  и  $9.54 \times 10^6$ , что соответствует турбулентному режиму течения.

В качестве начального поля температуры принимается распределение, полученное для случая теплоизолированных стенок каверны (рис. 11). Сплошные линии соответствуют решению задачи в полной постановке, а значки  $\circ$  и  $\square$  — распределению температуры, полученному при замороженном поле скорости. Различие результатов, полученных на основе двух подходов к расчету распределения температуры, является малым и составляет от 1 до 3 К для структурированной сетки. Для неструктурированной сетки различие результатов несколько выше, но не превосходит 5 К. На неструктурированной сетке отсутствует характерный излом в распределении температуры, имеющийся на структурированной сетке в месте сгущения сеточных линий при  $r \sim 0.22 \text{ м}$  (рис. 11а).

Жидкость, поступающая в каверну, достигает поверхности ротора и растекается вдоль радиуса (рис. 12). Часть жидкости покидает каверну через выходное сечение, а часть формирует циркуляционное течение внутри каверны с замкнутыми линиями тока. Центральный вихрь занимает практически весь объем каверны. В окрестности угловых точек, образованных изломом поверхности статора, формируются вторичные вихри меньшей интенсивности.

Изменение невязки в зависимости от числа итераций показывает рис. 13. Линия 1 соответствует решению всех уравнений, а линии 2 и 3 — решению уравнения изменения температуры при помощи многосеточного подхода и метода GMRES. Уровень сходимости является одинаковым в обоих случаях ( $R \sim 10^{-16}$ ). Метод GMRES позволяет получить выигрыш как в числе итераций (на структурированной сетке в 5 раз, а на неструктурированной — в 8 раз), так и в ускорении счета (1.2 на структурированной и 2.2 на неструктурированной сетке).

На каждом шаге по времени число итераций для расчета поля течения жидкости в каверне полагается равным 100. Такое же число итераций используется и для решения уравнения изменения температуры при замороженном поле скорости при помощи многосеточного подхода. При использовании GMRES-подхода число итераций на шаге по времени устанавливается равным 10 (основной расчетный вариант). Условие сходимости контролируется по разности температур на границе раздела, которая равняется 2 К. Макси-

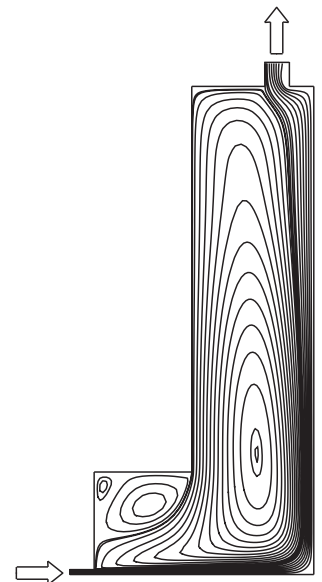


Рис. 12. Линии тока в каверне

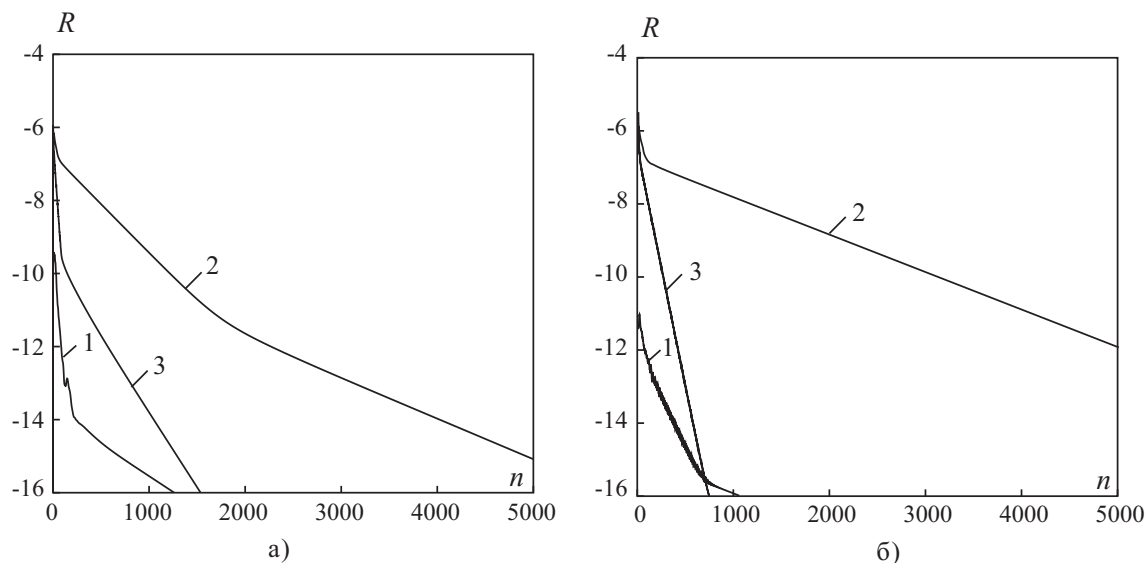


Рис. 13. Изменение невязки в зависимости от числа итераций на структурированной (а) и неструктурированной (б) сетках

Таблица 1

Температура металла в контрольных точках

2	Ротор					Статор				
	r1	r2	r3	r4	r5	s1	s2	s3	s4	s5
Эксперимент [22]										
1	719.24	722.07	726.24	731.45	734.84	556.28	590.23	585.40	581.40	623.89
Расчеты при помощи пакета Fluent 6.3										
2	723.01	725.89	730.01	735.01	738.50	551.04	586.61	581.73	577.75	620.74
3	723.60	729.01	731.91	736.73	740.15	554.39	584.91	578.38	574.18	619.82
Расчеты при помощи модуля [16]										
4	719.72	723.12	728.41	734.95	732.30	552.45	590.99	586.05	581.42	621.96
5	728.25	727.56	730.36	735.67	736.07	550.33	579.75	579.23	579.19	618.84
6	719.80	723.31	728.79	735.42	735.45	550.65	590.06	585.16	580.58	622.42
7	728.52	728.12	731.01	736.18	739.99	548.78	578.72	578.27	578.38	618.96

мальная разность температур металла и жидкости на границе раздела сред полагается равной 0.5 К (если разность температур не превосходит заданной величины, то уравнения в CFD-области не решаются).

Результаты расчетов в виде значений температур металла в контрольных точках приводятся в табл. 1. Строки 2, 4 и 6 соответствуют структурированной, а строки 3, 5 и 7 — неструктурированной сетке. Результаты расчетов, приведенные в строках 6 и 7, получены при замороженном поле скорости. Результаты расчетов, проведенные на основе CFD-модуля [16] (строки 4–7), сравниваются с данными физического эксперимента [22] (строка 1), а также с данными, полученными при использовании коммерческого пакета Fluent 6.3 (строки 2 и 3).

Распределения температуры, соответствующие конечному моменту времени, приведены на рис. 14. Линии 1 и 2 соответствуют расчету при помощи CFD-модуля [16], а линии 3 и 4 — расчету при помощи пакета Fluent 6.3 (все результаты получены при решении всех уравнений, описывающих течение жидкости). Различия результатов расчетов, полученных на структурированной и неструктурированной сетках, находится в разумных пределах, а сами результаты хорошо согласуются с данными физического эксперимента [22].

Изменение температуры ротора и статора в контрольных точках во времени показаны на рис. 15–17 (до момента времени  $t = 200$  с, после этого температура выходит на стационарный режим). Линии 1

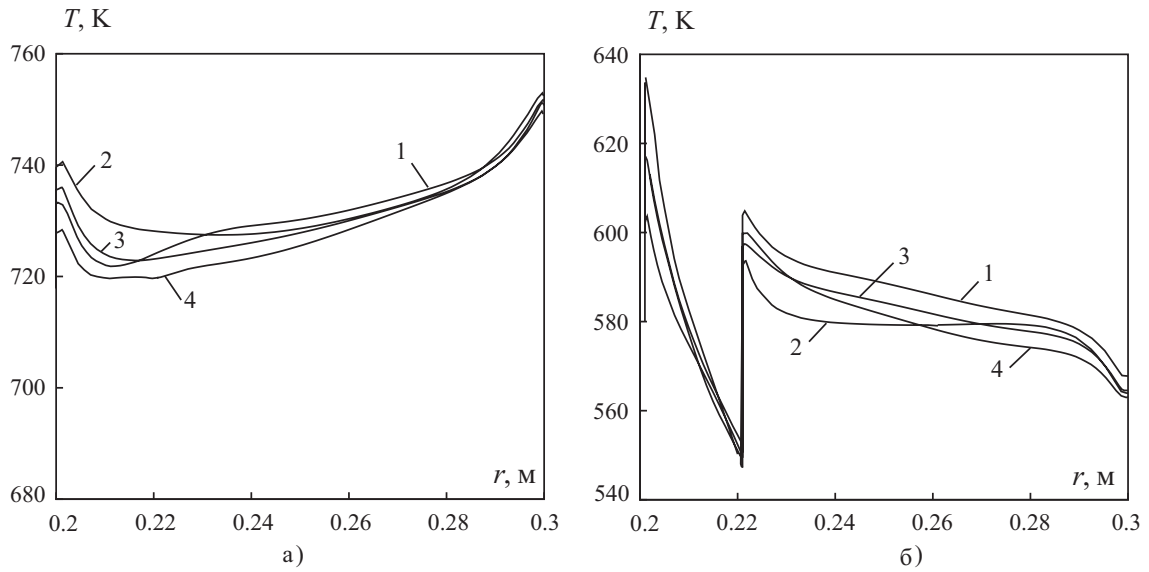


Рис. 14. Распределения температуры по поверхности ротора (а) и статора (б) для структурированной (линии 1 и 3) и неструктурированной (линии 2 и 4) сеток в конце цикла нагружения

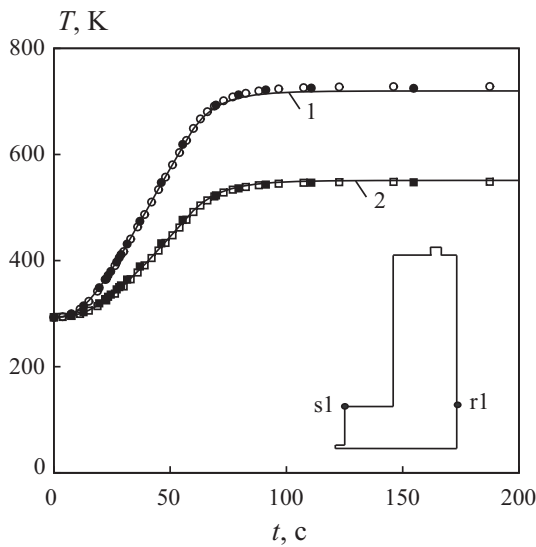


Рис. 15. Изменение температуры ротора (линия 1, значки o, ●) и статора (линия 2, значки □, ■) в точках r1 и s1 во времени

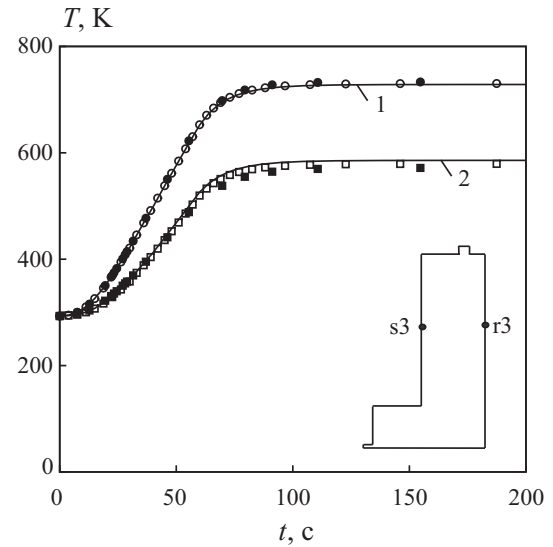


Рис. 16. Изменение температуры ротора (линия 1, значки o, ●) и статора (линия 2, значки □, ■) в точках r3 и s3 во времени

и 2 соответствуют структурированной сетке, значки o и □ — неструктурированной сетке, а значки ● и ■ — экспериментальным данным [22]. Согласование результатов численного моделирования с данными измерений является хорошим во всех контрольных точках.

Распределения теплового потока по поверхности ротора и статора в конечный момент времени показывает рис. 18. Различие результатов, полученных на структурированной и неструктурированной сетках, является достаточно малым.

Сопряженные расчеты проводятся как при решении всех уравнений, описывающих течение жидкости в камере, так и при решении уравнения изменения температуры различными методами. Некоторые результаты расчетов при замороженном поле скорости и использовании многосеточного метода приводятся в табл. 1 (строки 6 и 7).

Ускорение алгоритма и число шагов по времени при различном числе итераций для расчета температурного поля жидкости на шаге интегрирования по времени и различных методах решения уравнения изменения температуры приводятся в табл. 2 (колонки 1 и 2 соответствуют участкам 1 и 2 цикла нагружения). В качестве основного расчетного варианта принимаются данные, полученные при решении всех



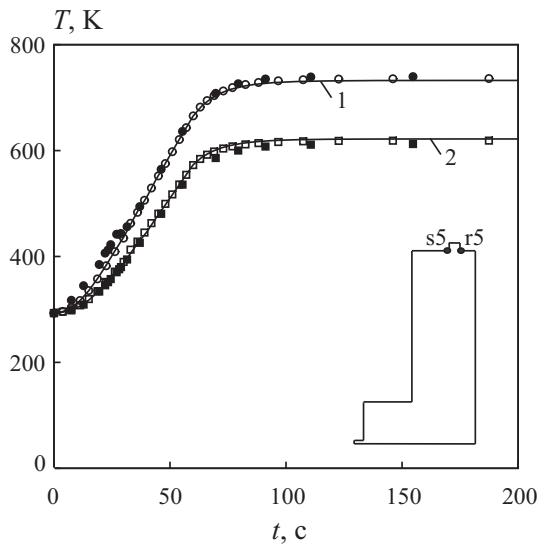


Рис. 17. Изменение температуры ротора (линия 1, значки  $\circ$ ,  $\bullet$ ) и статора (линия 2, значки  $\square$ ,  $\blacksquare$ ) в точках  $r5$  и  $s5$  во времени

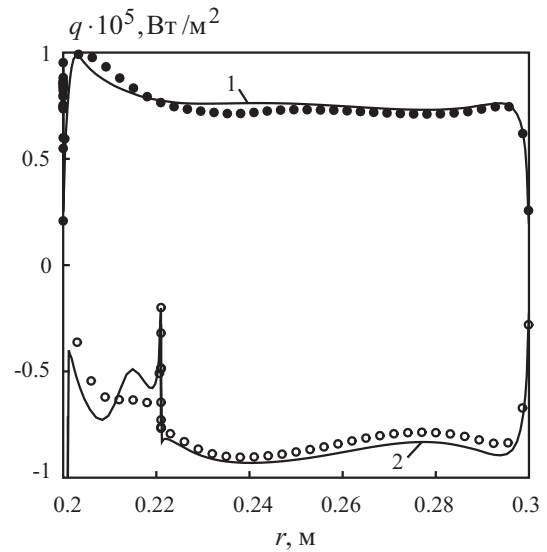


Рис. 18. Распределения теплового потока по поверхности ротора (линия 1, значки  $\bullet$ ) и статора (линия 2, значки  $\circ$ ), полученные на структурированной (линии 1 и 2) и неструктурированной (значки  $\bullet$  и  $\circ$ ) сетках, в конце цикла нагружения

Таблица 2

Ускорение счета при использовании различных подходов

2	Метод решения	Число итераций	Структурированная сетка		Неструктурированная сетка			
			Ускорение	Число шагов по времени		Ускорение	Число шагов по времени	
				1	2		1	2
1	MGM	10	3.23	30	26	10.13	26	24
2	MGM	25	1.78	22	24	5.10	23	23
3	MGM	50	1.56	18	21	3.08	18	21
4	GMRES	1	6.26	25	24	9.17	32	24
5	GMRES	2	3.15	28	25	6.07	27	24
6	GMRES	5	1.91	17	22	3.23	17	22
7	GMRES	10	1.18	15	23	2.02	17	21

уравнений, описывающих течение жидкости, и числе итераций, равном 100.

При использовании для решения уравнения изменения температуры жидкости метода GMRES и уменьшении числа итераций на шаге по времени от 50 до 1 температура металла в контрольных точках изменяется не более, чем на 0.5 К. Решение задачи в полной постановке или при использовании многосеточного метода для решения уравнения изменения температуры жидкости демонстрируют более сильную чувствительность к изменению числа итераций на шаге по времени. При уменьшении числа итераций со 100 до 10 температура металла в контрольных точках изменяется на 1.2 и 0.8 К.

В основном расчетном варианте параметр точности равняется 2 К. Для проверки корректности решения используются различные значения параметра точности по температуре (число итераций на шаге по времени поддерживается одинаковым). При изменении параметра точности от 2 К до 0.5 К (уменьшение) и от 2 К до 10 К (увеличение) решение изменяется не более, чем на 0.25 К (изменяется число итераций, необходимых для согласования поля температуры металла и жидкости на границе раздела на шаге по времени, а также число шагов по времени и, как следствие, общее время счета).

**9. Заключение.** Разработан подход к сопряженному тепловому моделированию, основанный на решении уравнения изменения температуры жидкости при замороженном поле скорости, и подход к авто-

матической генерации неструктурированных сеток в областях, характерных для каверн газовых турбин. Для контроля и изменения шага интегрирования по времени вводится параметр точности по температуре, позволяющий реализовать гибкое управление вычислительным процессом. Метод GMRES дает выигрыш в характеристиках точности и приводит к сокращению времени, необходимого для решения задачи при замороженном поле скорости, по сравнению с многосеточным подходом.

Возможности разработанных средств численного моделирования показаны на примере расчета температурного поля металла и жидкости в каверне, ограниченной неподвижными и подвижными стенками. Результаты расчетов имеют значение для последующего расчета напряженно-деформированного состояния и прочностного анализа компонентов газовых турбин.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bohn D., Kruger U., Kusterer K.* Conjugate heat transfer: an advanced computational method for the cooling design of modern gas turbine blades and vanes // *Heat Transfer in Gas Turbine*. Southampton: WIT Press. 2001. 58–108.
2. *Rigby D.L., Lepicovsky J.* Conjugate heat transfer analysis of internally cooled configurations // *ASME Paper*. 2001. N GT2001-0405.
3. *Okita Y., Yamawaki S.* Conjugate heat transfer analysis of turbine rotor–stator systems // *ASME Paper*. 2002. N GT2002-30615.
4. *Bohn D., Ren J., Kusterer K.* Conjugate heat transfer analysis for film cooling configurations with different hole geometries // *ASME Paper*. 2003. N GT2003-38369.
5. *Kusterer K., Bohn D., Sugimoto T., Tanaka R.* Conjugate calculations for a film-cooled blade under different operating conditions // *ASME Paper*. 2004. N GT2004-53719.
6. *Lewis L.V., Provins J.I.* A non-coupled CFD–FE procedure to evaluate windage and heat transfer in rotor–stator cavities // *ASME Paper*. 2004. N GT2004-53246.
7. *Saunders K., Alizadeh S., Lewis L.V., Provins J.* The use of CFD to generate heat transfer boundary conditions for a rotor–stator cavity in a compressor drum thermal model // *ASME Paper*. 2007. N GT2007-28333.
8. *Li H., Kassab A.J.* A Coupled FVM/BEM approach to conjugate heat transfer in turbine blades // *AIAA Paper*. 1994. N 94-1981.
9. *Verdicchio J.A., Chew J.W., Hills N.J.* Coupled fluid/solid heat transfer computation for turbine discs // *ASME Paper*. 2001. N GT2001-0123.
10. *Mirzamoghadam A.V., Xiao Z.* Flow and heat transfer in an industrial rotor–stator rim sealing cavity // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2002. **124**, N 1. 125–132.
11. *Illingworth J., Hills N., Barnes C.* 3D fluid–solid heat transfer coupling of an aero-engine preswirl system // *ASME Paper*. 2005. N GT2005-68939.
12. *Волков К.Н.* Решение задач сопряженного теплообмена и передача тепловых нагрузок между жидкостью и твердым телом // *Вычислительные методы и программирование*. 2007. **8**, № 2. 116–125.
13. *Dixon J.A., Verdicchio J.A., Benito D., Karl A., Tham K.M.* Recent developments in gas turbine component temperature prediction methods, using computational fluid dynamics and optimization tools, in conjunction with more conventional finite element analysis techniques // *Power and Energy*. 2004. **218**, N 4. 241–255.
14. *Sun Z., Chew J.W., Hills N.J., Volkov K.N., Barnes C.J.* Efficient FEA/CFD thermal coupling for engineering applications // *ASME Paper*. 2008. N GT2008-50638.
15. *Zienkiewicz O.C.* The finite element method in engineering science. London: McGraw-Hill Education, 1977.
16. *Волков К.Н.* Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // *Вычислительные методы и программирование*. 2005. **6**, № 1. 43–60.
17. *Волков К.Н.* Пристеночное моделирование в расчетах турбулентных течений на неструктурированных сетках // *Теплофизика и аэромеханика*. 2007. **14**, № 1. 113–129.
18. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: SIAM, 2003.
19. *Barth T.J., Linton S.W.* An unstructured mesh Newton solver for compressible fluid flow and its parallel implementation // *AIAA Paper*. 1995. N 95-0221.
20. *Teekaram A.J.H., Forth C.J.P., Jones T.V.* Film cooling in the presence of mainstream pressure gradients // *ASME Journal of Turbomachinery*. 1991. **113**, N 3. 484–492.
21. *Волков К.Н.* Влияние градиента давления и локализованного вдува на турбулентный теплообмен плоской пластины // *Теплофизика высоких температур*. 2006. **44**, № 3. 24–32.
22. *Barnes C.* Integration test plan for the SC03 plug-in SC89 // *Rolls–Royce Technical Design Report*. 2004. N DNS99645.

Поступила в редакцию  
26.03.2009