

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v21r434

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕДЛЕННОЙ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А. А. Фролов¹, Е. В. Чижонков²

Численно и аналитически исследовано влияние внешнего магнитного поля на плоские нерелятивистские нелинейные плазменные колебания. Для инициализации медленной необыкновенной волны в магнитоактивной плазме предложен способ построения недостающих начальных условий на основе решения линейной задачи методом Фурье. С целью численного моделирования нелинейной волны построена схема метода конечных разностей второго порядка точности типа МакКормака на основе эйлеровых переменных. Показано, что при учете внешнего магнитного поля ленгмюровские колебания трансформируются в медленную необыкновенную волну, энергия которой вибрирует при перемещении от начала координат. При этом скорость волны увеличивается с ростом внешнего постоянного поля, что способствует выносу энергии из первоначальной области локализации колебаний.

Ключевые слова: магнитоактивная плазма, численное моделирование, метод Фурье, метод конечных разностей, плазменные колебания, медленная необыкновенная волна.

1. Введение. Полностью ионизованная плазма является сильно нелинейной средой, в которой даже относительно небольшие начальные коллективные смещения частиц могут приводить к колебаниям и волнам большой амплитуды [1]. Численному моделированию колебаний в холодной плазме, а также кильватерных волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом, посвящена монография [2]. Сложность и разнообразие постановок задач резко возрастает, если рассматривать динамику *магнитоактивной* плазмы, т.е. плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле. Даже в случае малых возмущений, т.е. при рассмотрении только линейных волн, в классических учебниках и монографиях вводится их специальная классификация [3, 4]. В частности, выделяют волны, распространяющиеся в продольном и поперечном направлениях по отношению к вектору заданного магнитного поля. Уже в холодной магнитоактивной плазме существует пять ветвей колебаний, распространяющихся строго вдоль внешнего магнитного поля, причем четыре из них описывают поперечные, а одна — продольные волны. При этом следует отметить, что в общем случае линейные продольные и поперечные волны не являются независимыми, как в изотропной плазме. Именно по этой причине особый интерес вызывает моделирование нелинейных колебаний и волн в магнитоактивной плазме. В качестве основного инструмента исследования здесь выступает численное моделирование, так как возможности аналитического и асимптотического подходов сильно ограничены в силу громоздкости и сложности уравнений, описывающих динамику плазмы.

Следует отметить, что несмотря на кажущуюся простоту и естественность введения в постановку задачи внешнего постоянного магнитного поля, этот фактор качественно меняет динамику плазмы. Поясним это подробнее.

Пусть плазма с заданной плотностью и температурой находится в области пространства, где магнитное поле отсутствует. Предположим, что из некоторого объема внутри плазмы удалась часть электронов, а массивные ионы остались на месте. Квазинейтральность локально нарушится, возникнет объемный заряд, под действием которого электроны устремятся в исходное положение, набирая кинетическую энергию. Дальнейшее развитие естественно: возникнут электронные колебания около положения

¹ Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект, 53, 119991, Москва; старший научный сотрудник, e-mail: frolova@lebedev.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.ru

равновесия. Частота таких колебаний, называемых обычно *ленгмюровскими*, определяется выражением $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$, где n_0 — значение невозмущенной электронной плотности, e, m — заряд и масса электрона. С точки зрения волновых процессов в данной ситуации между частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} связь отсутствует, поэтому групповая скорость равна нулю, т.е. переноса энергии в пространстве не происходит. Иными словами, электрические силы, возникшие при смещении электронов, остаются “спрятанными” внутри области первоначального возмущения. Размеры этой области произвольны.

Ситуация радикально меняется, как только учитывается присутствие внешнего магнитного поля. Так как плазма представляет собой ионизированный газ, состоящий из заряженных частиц, внешнее поле заставляет двигаться каждую из них. Движение каждой частицы складывается из свободного движения вдоль силовой линии магнитного поля и циклотронного вращения вокруг нее. В свою очередь, коллективные движения частиц формируют индуцированные внешним полем заряды и токи, которые создают свое электромагнитное поле и тем самым изменяют полное поле в системе. Таким образом, в магнитоактивной плазме имеет место самосогласованное действие частиц и полей друг на друга. В результате этого взаимодействия происходит перенос энергии в пространстве в направлении волнового вектора \mathbf{k} . Как уже говорилось выше, при наличии внешнего магнитного поля различных решений дисперсионного уравнения, т.е. зависимостей частоты ω от волнового вектора, много, они обладают сильно отличающимися свойствами и в общем случае продольно-поперечных волн их аналитическая форма малоприменима для теоретических исследований.

В настоящей работе методами численного моделирования делается попытка проследить влияние постоянного внешнего магнитного поля на динамику одномерных плоских нерелятивистских электронных колебаний в холодной плазме. Так как используемая ниже гидродинамическая модель холодной плазмы хорошо известна, то основное внимание уделяется постановке начальных условий, зависящих от внешнего магнитного поля. В случае малых возмущений подобные начальные условия порождают так называемую *медленную необыкновенную волну* (МН-волну), изучению которой в последнее время уделяется повышенное внимание [5, 6]. Это напрямую связано с интенсивными экспериментальными и теоретическими исследованиями взаимодействия мощных лазерных импульсов с плазмой, которое имеет множество практических приложений от ядерной физики до медицины.

Статья имеет следующую структуру. Сначала приведена постановка задачи в эйлеровых переменных, включая начальные и асимптотические граничные условия, необходимые для описания временной эволюции плазменных колебаний и волн, порождаемых мощным коротким лазерным импульсом. Этих условий недостаточно для однозначного определения решения, поэтому в следующем разделе рассматривается вспомогательная система уравнений. На основании ее решения с помощью интегрального преобразования Фурье можно описать МН-волну и даже в некоторых частных случаях получить удобные асимптотические формулы для ее представления. Более удобным для численного моделирования является представленное далее решение вспомогательной системы в терминах рядов Фурье, дискретный аналог которых хорошо приспособлен для практических вычислений недостающих начальных условий, зависящих от внешнего поля. В следующем разделе приводится описание численного метода решения нелинейной системы уравнений в частных производных типа МакКормака, имеющего на гладких решениях второй порядок точности относительно параметров дискретизации. Наконец, самый большой раздел посвящен численным экспериментам. В нем приводятся примеры построенных начальных данных, которые зависят от напряженности внешнего магнитного поля и инициализируют МН-волну. Далее в терминах функции, описывающей энергию линейной волны, иллюстрируется ее динамика во времени в различных внешних полях. Особое внимание уделяется расчетам нелинейной нерелятивистской МН-волны и ее сравнению с линейным случаем. Также приведены расчеты нелинейной задачи, когда вместо начальных условий для МН-волны, подлежащих определению, берутся тождественно нулевые данные. В завершении раздела приводятся иллюстрации динамики МН-волны в традиционном представлении с помощью электронной плотности. В заключении систематизируются результаты проведенных исследований.

2. Основные уравнения. Будем считать плазму релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая как столкновительными и рекомбинационными эффектами, так и движением ионов. Тогда система

описывающих ее гидродинамических уравнений совместно с уравнениями Максвелла в векторной форме будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{p} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \\ \gamma = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}}, \\ \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} en\mathbf{v} + \operatorname{rot} \mathbf{B}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где e, m , как и выше, — заряд и масса электрона (здесь заряд электрона имеет отрицательный знак: $e < 0$), c — скорость света; $n, \mathbf{p}, \mathbf{v}$ — концентрация, импульс и скорость электронов; γ — лоренцевский фактор; \mathbf{E}, \mathbf{B} — векторы электрического и магнитного полей.

Система уравнений (1) является одной из простейших моделей плазмы, которую часто называют *уравнениями гидродинамики “холодной” плазмы*; она хорошо известна и достаточно подробно описана в учебниках и монографиях [3, 4, 7, 8].

Будем обозначать независимые переменные в декартовой системе координат обычным образом — (x, y, z) , и примем допущение, что плазма находится во внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 , которое направлено вдоль оси z и не зависит от времени и пространства.

С целью проведения численного моделирования плоских одномерных плазменных колебаний во внешнем поле $\mathbf{B}_0 \equiv \text{const}$ базовые уравнения (1) можно существенно упростить. Будем считать, что

- решение определяется только x - и y -компонентами вектор-функций $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{E}$, а также z -компонентой вектора магнитного поля \mathbf{B} ; при этом $B_z = B_0 + B_p$, где B_p — индуцированное магнитное поле в плазме;
- зависимость во всех указанных функциях и в электронной плотности n от переменных y и z отсутствует, т.е. соответствующие частные производные равны нулю: $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$; напомним, что $B_0 \equiv \text{const}$.

Качественная структура искомого решения представлена на рис. 1, где $B(x, t) \equiv B_p(x, t)$. В рассматриваемом случае из системы (1) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n v_x) &= 0, & \frac{\partial p_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial p_x}{\partial x} &= e [E_x + v_y (B_0 + B_p)], & v_x &= \frac{p_x}{m\gamma}, \\ \frac{\partial p_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial p_y}{\partial x} &= e [E_y - v_x (B_0 + B_p)], & v_y &= \frac{p_y}{m\gamma}, & \gamma &= \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2}{m^2 c^2}}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial B_p}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -4\pi e n v_x, & \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{4\pi e}{c} n v_y - \frac{\partial B_p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

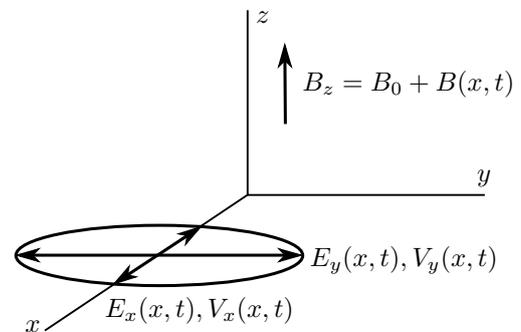


Рис. 1. Искомые функции и их зависимость от координат

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \rho &= k_p x, \quad \theta = \omega_p t, \quad \hat{V}_x = \frac{v_x}{c}, \quad \hat{P}_x = \frac{p_x}{m c}, \quad \hat{V}_y = \frac{v_y}{c}, \quad \hat{P}_y = \frac{p_y}{m c}, \\ \hat{E}_x &= -\frac{e E_x}{m c \omega_p}, \quad \hat{E}_y = -\frac{e E_y}{m c \omega_p}, \quad \hat{N} = \frac{n}{n_0}, \quad \hat{B} = -\frac{e B}{m c \omega_p}, \quad \hat{B} = \hat{B}_0 + \hat{B}_p, \end{aligned}$$

где ω_p и n_0 определены выше, $k_p = \omega_p/c$. В новых переменных система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{N}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\hat{N} \hat{V}_x) &= 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + \hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2}, \quad \hat{V}_x = \frac{\hat{P}_x}{\gamma}, \quad \hat{V}_y = \frac{\hat{P}_y}{\gamma}, \\ \frac{\partial \hat{P}_x}{\partial \theta} + \hat{V}_x \frac{\partial \hat{P}_x}{\partial \rho} &= -\hat{E}_x - \hat{V}_y (\hat{B}_0 + \hat{B}_p), \quad \frac{\partial \hat{P}_y}{\partial \theta} + \hat{V}_x \frac{\partial \hat{P}_y}{\partial \rho} = -\hat{E}_y + \hat{V}_x (\hat{B}_0 + \hat{B}_p), \\ \frac{\partial \hat{B}_p}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial \rho} &= 0, \quad \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial \theta} = \hat{N} \hat{V}_x, \quad \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial \theta} = \hat{N} \hat{V}_y - \frac{\partial \hat{B}_p}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из полученных уравнений

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\hat{N} \hat{V}_x) = 0, \quad \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial \theta} = \hat{N} \hat{V}_x$$

следует

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\hat{N} + \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial \rho} \right] = 0.$$

Это соотношение справедливо как при отсутствии плазменных колебаний ($\hat{N} \equiv 1, \hat{E}_x \equiv 0$), так и при их наличии. Поэтому отсюда имеем более простое выражение для электронной плотности

$$\hat{N}(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial \hat{E}_x(\rho, \theta)}{\partial \rho}. \quad (4)$$

Воспользовавшись им, приходим к уравнениям, описывающим плоские одномерные релятивистские плазменные колебания:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial P_x}{\partial \rho} &= -E_x - V_y (B_0 + B), \quad \frac{\partial P_y}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial P_y}{\partial \rho} = -E_y + V_x (B_0 + B), \\ \gamma &= \sqrt{1 + P_x^2 + P_y^2}, \quad V_x = \frac{P_x}{\gamma}, \quad V_y = \frac{P_y}{\gamma}, \\ \frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\partial E_y}{\partial \rho} &= 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial E_x}{\partial \rho} = V_x, \quad \frac{\partial E_y}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial E_x}{\partial \rho} + \frac{\partial B}{\partial \rho} = V_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь для удобства у всех безразмерных искомым функций убран символ “крышка”, а также — нижний индекс p у индуцированного магнитного поля в плазме.

Чтобы рассмотреть более простой случай нерелятивистских уравнений, достаточно формально положить $\gamma \equiv 1$. Тогда, так как

$$P_x = V_x, \quad P_y = V_y,$$

количество уравнений уменьшается и несколько упрощается их вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial \rho} &= -E_x - V_y (B_0 + B), \quad \frac{\partial V_y}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial \rho} = -E_y + V_x (B_0 + B), \\ \frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\partial E_y}{\partial \rho} &= 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial E_x}{\partial \rho} = V_x, \quad \frac{\partial E_y}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial E_x}{\partial \rho} + \frac{\partial B}{\partial \rho} = V_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) является основной для численного моделирования в настоящей работе. Напомним полезную для дальнейшего формулу электронной плотности

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E_x(\rho, \theta)}{\partial \rho}, \quad (7)$$

а также — следствие (6), (7) — закон сохранения энергии [9]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{E_x^2 + E_y^2 + B_z^2}{2} + N \frac{V_x^2 + V_y^2}{2} \right\} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ E_y B_z + N \frac{V_x^2 + V_y^2}{2} V_x \right\} = 0. \quad (8)$$

Здесь в качестве B_z можно понимать не только индуцированное поле $B(\rho, \theta)$, но и полное поле $B_0 + B(\rho, \theta)$, так как способ получения уравнения (8) допускает оба варианта без изменения формы записи.

3. Медленная необыкновенная волна (МН-волна). Рассмотрим возбуждение колебаний в постоянном внешнем магнитном поле $B_0 \equiv \text{const}$ в окрестности прямой $\rho = 0$. Положим, что скорость электронов V_x в начальный момент времени ($\theta = 0$) равна нулю:

$$V_x(\rho, \theta = 0) = 0, \quad (9)$$

а колебания инициализируются электрическим полем E_x следующего вида:

$$E_x(\rho, \theta = 0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2 \rho \exp \left\{ -2 \frac{\rho^2}{\rho_*^2} \right\}, \quad (10)$$

где параметры ρ_* и a_* характеризуют масштаб области локализации и максимальную величину $E_{\text{max}} = a_*^2 / (\rho_* 2\sqrt{e}) \approx 0.3 a_*^2 / \rho_*$ электрического поля (10) соответственно. Здесь и далее $e = 2.71 \dots$ — основание натурального логарифма. Вид функции (10) выбран из соображений, что подобные колебания могут возбуждаться в разреженной плазме ($\omega_l \gg \omega_p$) лазерным импульсом с частотой ω_l при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы, см. детали в [10]).

Заметим, что на больших расстояниях от прямой $\rho = 0$, в силу начального условия (10), плазменные колебания не возбуждаются. Поэтому будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} V_x(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad V_y(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \\ E_x(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad E_y(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad B(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, будем изучать в верхней полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$ решение основной системы (6), определяемое начальными и граничными условиями (9), (10), (11) при наличии внешнего магнитного поля B_0 , не зависящего ни от времени, ни от пространственной координаты (см. рис. 1).

3.1. Интегральное преобразование Фурье. Рассмотрим систему (6) в предположении малости возмущений относительно нулевого фона. После отбрасывания квадратично малых слагаемых получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x^l}{\partial \theta} = -E_x^l - V_y^l B_0, \quad \frac{\partial V_y^l}{\partial \theta} = -E_y^l + V_x^l B_0, \\ \frac{\partial B^l}{\partial \theta} + \frac{\partial E_y^l}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E_x^l}{\partial \theta} = V_x^l, \quad \frac{\partial E_y^l}{\partial \theta} + \frac{\partial B^l}{\partial \rho} = V_y^l. \end{aligned} \quad (12)$$

Верхний индекс l здесь обозначает принадлежность к решению линеаризованной задачи.

Отметим, что для (12) имеет место закон сохранения энергии [9]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{E_x^2 + E_y^2 + B_z^2}{2} + \frac{V_x^2 + V_y^2}{2} \right\} + \frac{\partial}{\partial \rho} \{E_y B_z\} = 0, \quad (13)$$

где, как и ранее, в качестве B_z можно понимать не только индуцированное поле $B(\rho, \theta)$, но и полное поле $B_0 + B(\rho, \theta)$, так как способ получения уравнения (13) допускает оба варианта без изменения формы записи.

Из системы (12) следует

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 + B_0^2 \right) V_x^l = E_y^l B_0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) E_y^l = V_x^l B_0. \quad (14)$$

Для решения уравнений (14) будем использовать преобразование Фурье по пространственной координате, например для x -компоненты скорости оно имеет вид

$$V_x^l(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) V_x^l(k, \theta), \quad (15)$$

где $V_x^l(k, \theta)$ обозначает ее фурье-образ. Тогда из (14) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для фурье-образов $V_x^l(k, \theta)$ и $E_y^l(k, \theta)$:

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1 + B_0^2\right) V_x^l(k, \theta) = E_y^l(k, \theta) B_0, \quad \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1 + k^2\right) E_y^l(k, \theta) = V_x^l(k, \theta) B_0. \quad (16)$$

Будем искать решение (16) с зависимостью от времени в виде $\exp(i\omega\theta)$, тогда с учетом начального условия (9) получим выражение для x -компоненты скорости электронов

$$V_x^l(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) V_x^0(k) \sin[\omega(k)\theta], \quad (17)$$

где $V_x^0(k)$ выражается через фурье-образ начального электрического поля (10), а частота колебаний имеет вид

$$\omega(k) = \sqrt{1 + \frac{k^2 + B_0^2}{2} \pm \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{k^2 - B_0^2}{2}\right)^2}}. \quad (18)$$

Из второго уравнения (16) находим y -компоненту электрического поля

$$E_y^l(\rho, \theta) = B_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) \frac{V_x^0(k)}{1 + k^2 - \omega^2(k)} \sin[\omega(k)\theta]. \quad (19)$$

С учетом оставшихся уравнений в системе (12) имеем окончательное решение для полей и скоростей в квадратурах:

$$\begin{aligned} E_x^l(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) E_x^0(k) \cos[\omega(k)\theta], \\ V_x^l(\rho, \theta) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) \omega(k) E_x^0(k) \sin[\omega(k)\theta], \\ E_y^l(\rho, \theta) &= - B_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) \frac{\omega(k) E_x^0(k)}{1 + k^2 - \omega^2(k)} \sin[\omega(k)\theta], \\ V_y^l(\rho, \theta) &= B_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) \frac{k^2 - \omega^2(k)}{1 + k^2 - \omega^2(k)} E_x^0(k) \cos[\omega(k)\theta], \\ B^l(\rho, \theta) &= - B_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ik\rho) \frac{E_x^0(k)}{1 + k^2 - \omega^2(k)} \cos[\omega(k)\theta], \end{aligned} \quad (20)$$

где частота $\omega(k)$ определяется формулой (18). Для начального поля (10) фурье-образ имеет вид

$$E_x^0(k) = \frac{a_*^2}{\rho_*^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k \rho_*^3}{4i} \exp\left(-\frac{k^2 \rho_*^2}{8}\right). \quad (21)$$

С целью анализа интегралов в формулах (20) рассмотрим закон дисперсии возбуждаемых волн (18). Будем учитывать только знак “минус” в правой части формулы (18), что соответствует возбуждению медленной необыкновенной волны [3, 4] с законом дисперсии

$$\omega(k) = \sqrt{1 + \frac{k^2 + B_0^2}{2} - \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{k^2 - B_0^2}{2}\right)^2}}. \quad (22)$$

При отсутствии внешнего магнитного поля из (22) следует закон дисперсии ленгмюровских колебаний в холодной изотропной плазме $\omega(k) \equiv 1$ (в размерных переменных $\omega(k) \equiv \omega_p$), т.е. формулы (20) в этом случае дают решение хорошо известной задачи.

Если напряженность магнитного поля достаточно мала: $B_0 \ll 1$, $B_0\rho_* \ll 1$, из формулы (22) следует приближенная зависимость частоты от волнового числа

$$\omega(k) \approx 1 + \frac{1}{2} B_0^2 - \frac{B_0^2}{2k^2}. \quad (23)$$

При этом групповая скорость волнового пакета определяется формулой

$$V_g = \frac{\partial}{\partial k} \omega(k) = \frac{B_0^2}{k^3}. \quad (24)$$

Если же выполнены другие условия: $B_0 \ll 1$, $B_0\rho_* \gg 1$, то закон дисперсии имеет вид

$$\omega(k) \approx 1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{B_0}{2}, \quad (25)$$

а групповая скорость не зависит от напряженности внешнего магнитного поля и равна

$$V_g = \frac{\partial}{\partial k} \omega(k) = \frac{k}{2}. \quad (26)$$

Интегралы в формулах (20) при условиях $B_0 \ll 1$, $B_0\rho_* \gg 1$ и законе дисперсии (25) можно вычислить. В частности, для x -компоненты электрического поля получим

$$E_x^l(\rho, \theta) = \frac{a_*^2}{\rho_*^2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_*^3}{(\rho_*^2 + 2i\theta)^{3/2}} \exp \left[-i\theta \left(1 - \frac{1}{2} B_0 \right) - 2 \frac{\rho^2}{\rho_*^2 + 2i\theta} \right] \right\}. \quad (27)$$

В соответствии со второй формулой в (20) x -компонента скорости электронов имеет вид

$$V_x^l(\rho, \theta) = - \frac{\partial}{\partial \theta} E_x^l(\rho, \theta). \quad (28)$$

В общем виде индуцированное магнитное поле, а также y -компоненты скорости и электрического поля пропорциональны напряженности внешнего магнитного поля. Однако при выполнении условий $B_0 \ll 1$, $B_0\rho_* \gg 1$ стоящее в знаменателе соотношение в соответствии с (25) равно $1 + k^2 - \omega^2(k) = B_0 + k^2/2 \approx B_0$. Поэтому в результате вычислений получим следующие выражения:

$$E_y^l(\rho, \theta) = - \frac{\partial}{\partial \theta} E_x^l(\rho, \theta), \quad V_y^l(\rho, \theta) = - E_x^l(\rho, \theta), \quad B^l(\rho, \theta) = - \frac{\partial}{\partial \rho} E_x^l(\rho, \theta), \quad (29)$$

которые не зависят от напряженности внешнего магнитного поля. Это связано с тем, что при выполнении неравенств $B_0 \ll 1$, $B_0\rho_* \gg 1$ групповая скорость волн в соответствии с формулой (26) не зависит от величины B_0 . При этом плотность электронов выражается через электрическое поле $E_x^l(\rho, \theta)$ по формуле (7). Таким образом, при выполнении условий $B_0 \ll 1$, $B_0\rho_* \gg 1$ в плазме возбуждается МН-волна с частотой $1 - B_0/2$, которая достаточно быстро распространяется из области начальной локализации возмущений плотности. По виду формула (27) аналогична решению задачи о возбуждении ленгмюровских колебаний и волн в изотропной плазме с учетом теплового движения электронов [11].

При выполнении условий $B_0 \ll 1$, $B_0\rho_* \ll 1$, когда закон дисперсии имеет вид (23), вычисление интегралов аналитически весьма затруднительно, так как подынтегральное выражение содержит экспоненциальную функцию, показатель которой равен $ik\rho + i\theta/(2k^2) - k^2\rho_*^2/8$. В этом случае даже использование асимптотических методов не приводит к успеху, так как для нахождения положения точки перевала получается алгебраическое уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами.

3.2. Использование рядов Фурье. Как показано выше, формулы (20)–(22) могут применяться для асимптотического анализа решения системы (12), однако с точки зрения численного моделирования эти выражения практически малоприменимы. Главную трудность представляет собой вычисление интегралов со сложными и различными зависимостями фурье-образов от переменной k , а также — бесконечные пределы интегрирования. Экономичные способы вычисления интегралов (20), к сожалению, неизвестны.

Рассмотрим для анализа системы (12) другой подход, допускающий эффективную численную реализацию, а именно: подход, основанный на применении рядов Фурье. Учитывая убывание искомых функций на бесконечности (11), выберем достаточно большой промежуток $[-d, d]$, $d \geq 4.5\rho_*$, удобный для наблюдения за движением волн, и определим $2d$ -периодические начальные функции $V_x^d(\rho, \theta = 0)$ и $E_x^d(\rho, \theta = 0)$, совпадающие на взятом промежутке $[-d, d]$ с функциями (9), (10).

Учитывая ортонормированность на $[-d, d]$ систем функций $\{C_k \sin(\kappa k \rho)\}$, $\{C_k \cos(\kappa k \rho)\}$, $C_k = \sqrt{1/d}$, $\kappa = \pi/d$, решение системы (12) с начальными условиями

$$V_x^d(\rho, \theta = 0) = 0, \quad E_x^d(\rho, \theta = 0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} E(k) \sin(\kappa k \rho) \quad (30)$$

можно представить в виде:

$$\begin{aligned} E_x^d(\rho, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} E(k) \sin(\kappa k \rho) \cos(\omega(k) \theta), \\ V_x^d(\rho, \theta) &= -\sum_{k=1}^{\infty} E(k) \omega(k) \sin(\kappa k \rho) \sin(\omega(k) \theta), \\ E_y^d(\rho, \theta) &= -B_0 \sum_{k=1}^{\infty} E(k) \frac{\omega(k)}{1 + (\kappa k)^2 - \omega^2(k)} \sin(\kappa k \rho) \sin(\omega(k) \theta), \\ V_y^d(\rho, \theta) &= B_0 \sum_{k=1}^{\infty} E(k) \frac{(\kappa k)^2 - \omega^2(k)}{1 + (\kappa k)^2 - \omega^2(k)} \sin(\kappa k \rho) \cos(\omega(k) \theta), \\ B^d(\rho, \theta) &= -B_0 \sum_{k=1}^{\infty} E(k) \frac{\kappa k}{1 + (\kappa k)^2 - \omega^2(k)} \cos(\kappa k \rho) \cos(\omega(k) \theta), \end{aligned} \quad (31)$$

где частота $\omega(k)$ имеет вид

$$\omega(k) = \sqrt{1 + \frac{(\kappa k)^2 + B_0^2}{2}} - \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{(\kappa k)^2 - B_0^2}{2}\right)^2}. \quad (32)$$

Формулы (31), (32) допускают необременительную проверку подстановкой в систему (12) и фактически являются упрощением формул (20)–(22), когда начальные функции (30) являются четно/нечетными относительно начала координат, достаточно гладкими и $2d$ -периодическими. Главное достоинство формул (31) — при использовании на отрезке $[-d, d]$ равномерной сетки для их реализации удобно использовать дискретное преобразование Фурье, а в случае многократного вычисления решения (в различные моменты времени) доступен такой эффективный инструмент, как быстрое дискретное преобразование Фурье. Однако в процессе вычислений необходимо контролировать, чтобы волна не дошла до границ рассматриваемого отрезка $[-d, d]$, так как отражение от них может привести к искажению смысла получаемого решения. Конечно, при необходимости можно просто увеличить параметр d и заново провести расчеты.

4. Численный алгоритм второго порядка точности. Пусть исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \rho} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, \rho, \theta), \quad (33)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{S} — вектор-функции, рассматриваемые в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \theta \geq 0, \rho \in \mathbb{R}\}$, и в момент времени $\theta = 0$ заданы начальные условия

$$\mathbf{U}(\rho, \theta = 0) = \mathbf{U}^0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (34)$$

Будем считать, что нас интересует приближенное решение задачи Коши, определенной соотношениями (33), (34), про которое известно, что оно существует, единственно и обладает достаточной гладкостью.

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянных параметров τ и h так, что

$$\theta^n = n\tau, \quad n \geq 0, \quad \rho_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и будем обозначать зависимую переменную $\mathbf{U}(\rho, \theta)$ в узле сетки (ρ_i, θ^n) как \mathbf{U}_i^n . Стандартная схема Мак-Кормака [12] состоит из двух этапов вычислений, известных как предиктор и корректор, и может быть представлена как

$$\mathbf{U}_i^p = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) + \tau \mathbf{S}_i^n, \quad (35)$$

$$\mathbf{U}_i^c = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_i^p - \mathbf{F}_{i-1}^p) + \tau \mathbf{S}_i^p, \quad (36)$$

где верхний индекс p обозначает шаг предиктор (c — корректор) или n — временной слой θ^n .

Окончательная формула, формирующая решение на следующем временном слое $(n + 1)$ имеет вид:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c}{2}. \quad (37)$$

Приведенная схема хорошо известна и давно используется в вычислительной практике. Ее свойства представлены в популярных монографиях, посвященных численному анализу и математическому моделированию [13–15]. Напомним, что на гладких решениях схема МакКормака имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ и условие устойчивости $\tau = O(h)$, поэтому ее традиционно относят к схемам второго порядка точности. Современное изложение конструкции схемы, причем в пространственно двумерном случае и при наличии источников членов, можно найти в работе [16].

Важным отличием системы (6) от традиционной формы записи уравнений (33) являются недивергентные слагаемые следующего вида:

$$V_x \frac{\partial E_x}{\partial \rho}, \quad V_x \frac{\partial V_y}{\partial \rho}, \quad V_y \frac{\partial E_x}{\partial \rho}.$$

Например, одно из них присутствует в уравнении, описывающем динамику x -компоненты электрического поля:

$$\frac{\partial E_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial E_x}{\partial \rho} = V_x.$$

В работе [17] был предложен подход для устранения трудности с недивергентной формой слагаемых при сохранении прежнего (второго) порядка точности разностной схемы МакКормака. Напомним его кратко, опустив без потери содержательности нижние индексы x при искомым функциях.

Определим в произвольный требуемый момент времени θ вспомогательную функцию $\varphi(\rho, \theta)$ соотношениями

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = V \frac{\partial E}{\partial \rho}, \quad \varphi(a, \theta) = \varphi_a(\theta). \quad (38)$$

Заметим, что при достаточной гладкости определяющих правую часть функций $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$, функция $\varphi(\rho, \theta)$ существует, единственна и обладает гладкостью не меньшей, чем $E(\rho, \theta)$.

Обратим также внимание, что в формулах (35), (36) участвуют не просто значения φ в узлах сетки (либо с целыми, либо с дробными узлами), а разности этих значений вида $(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$, представляющие собой по определению интегралы вида

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i \equiv \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{d\varphi}{d\rho} d\rho = \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} V \frac{\partial E}{\partial \rho} d\rho. \quad (39)$$

В целях аппроксимации интеграла в (39) воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников с узлом в середине отрезка, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) + O((b - a)^3).$$

Учитывая, что длина отрезка интегрирования равна h , имеем для (39):

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = h \left(V \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_{i+1/2}} + O(h^3) = \frac{V_{i+1} + V_i}{2} (E_{i+1} - E_i) + O(h^3).$$

Теперь, вспоминая, что порядок точности метода МакКормака на гладких решениях есть $O(\tau^2 + h^2)$ при условии устойчивости вида $\tau = O(h)$ [13–15], получаем, что погрешность замены точного значения интеграла его аппроксимацией по формуле прямоугольников можно игнорировать без потери точности исходных формул.

Вышесказанное означает, что на гладких решениях разница в погрешности аппроксимации для дивергентной и недивергентной форм записи исходных уравнений не должна быть существенной. При этом введение вспомогательной функции $\varphi(\rho, \theta)$ иллюстрирует один из возможных переходов к дивергентной форме. В силу этого, при использовании метода МакКормака имеются все основания при расчете величины $(\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n)$ использовать выражение $\frac{V_{i+1}^n + V_i^n}{2} (E_{i+1}^n - E_i^n)$, а при расчете величины $(\mathbf{F}_i^p - \mathbf{F}_{i-1}^p)$ —

выражение $\frac{V_i^p + V_{i-1}^p}{2} (E_i^p - E_{i-1}^p)$. Аналогичные аппроксимации указанных выше недивергентных членов вполне корректно использовать и при численном решении других уравнений (6).

Обратим внимание, что описанная модификация известной схемы никак не влияет на условие ее устойчивости в классической версии $\tau = O(h)$, которое было получено на основе как спектрального признака устойчивости и метода замороженных коэффициентов, так и метода дифференциального приближения [13–15]. Это связано с тем, что источниковые члены в уравнениях плазменных колебаний изначально линейны, а линеаризация как дивергентной формы уравнений, так и недивергентной, порождает одинаковые выражения при замораживании переменных коэффициентов.

Отметим также, что при моделировании динамики медленной необыкновенной волны в схеме Мак-Кормака можно использовать граничные условия из (31) до тех пор, пока волна не достигнет пространственных границ $\rho = \pm d$. Этот момент времени можно отодвигать, выбирая параметр d достаточно большим.

5. Результаты расчетов. Процесс трансформации нерелятивистских ленгмюровских колебаний в бегущие волны вследствие учета изменения температуры электронов рассматривался в работе [18]. Поэтому в целях сохранения преемственности с приведенными там результатами расчетов зафиксируем значения параметров в начальном условии (10): $a_* = 3.105$, $\rho_* = 4.5$. Выберем параметр d , характеризующий искусственную границу, равным 40. При этом характерное значение параметра дискретизации по пространственной переменной, использовавшееся в расчетах, равно $h = 10^{-3}$. Шаг интегрирования по времени τ из соображений устойчивости выбирался равным h , а в целях контроля точности регулярно проводились расчеты с сеточными параметрами в два раза меньшими, чем основные (рабочие).

5.1. Начальные данные. Выбор начальных данных для инициализации медленной необыкновенной волны представляет определенные трудности. Дело в том, что в соответствии с формулами (20), (31) начальные условия (9), (10) порождают ненулевые функции V_y и B при $\theta = 0$. Причем определяются они в терминах фурье-образов или коэффициентов соответствующих рядов, зависящих от функции E_x в начальный момент времени. Как правило, чтобы избежать проблем с недостающими начальными условиями, волны в магнитоактивной плазме рассматривают либо в электростатическом приближении [1, 19], либо полагают недостающие начальные функции V_y и B тождественно нулевыми. При использовании слабых магнитных полей $B_0 \ll 1$ последнее вполне допустимо, однако в общем случае пространственная форма волны может быть сильно искажена тривиальными начальными данными.

Следует отметить, что вышесказанное порождает определенную новизну в постановке задачи, так как при отсутствии внешнего магнитного поля начальные условий (9), (10) вполне достаточно для однозначного определения ленгмюровских колебаний в произвольный момент времени.

Приведем пример, иллюстрирующий согласование начальных данных в медленной необыкновенной волне. На рис. 2 приведено пространственное распределение функции $E_x(\rho, \theta = 0)$, иницирующее волну в соответствии с (10). Далее на рис. 3 и рис. 4 приведены начальные распределения функций $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$, соответствующие решению (31) для различных внешних полей $B_0 \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$.

Процедура их расчета базировалась на использовании пакета FFTPACK [20], реализующего быстрое преобразование Фурье. На отрезке $[-d, d]$ вводилась равномерная сетка с числом узлов $M = 80000$ и

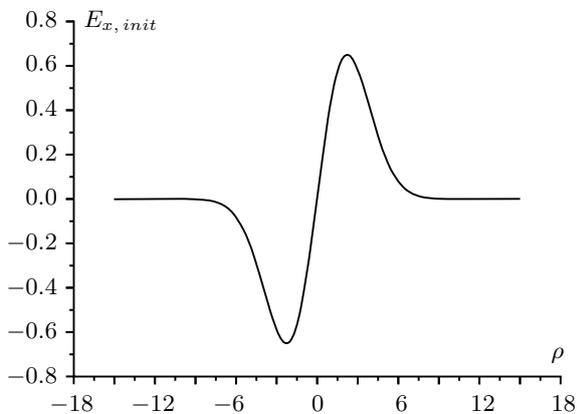


Рис. 2. Начальная x -компонента электрического поля $E_{x,init}(\rho) = E_x(\rho, \theta = 0)$

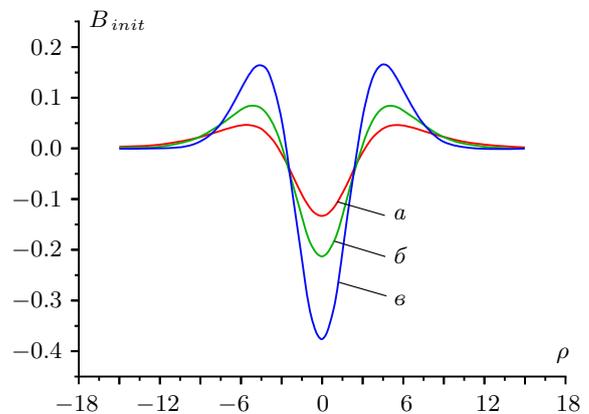


Рис. 3. Начальное индуцированное магнитное поле $B_{init}(\rho) = B(\rho, \theta = 0)$ для различных значений B_0 : а) $B_0 = 0.1$; б) $B_0 = 0.2$; в) $B_0 = 0.5$

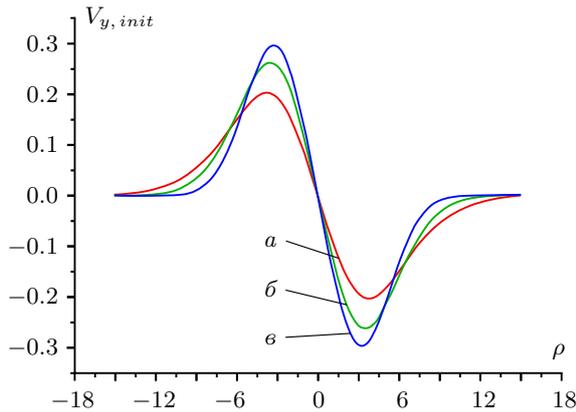


Рис. 4. Начальная y -компонента скорости электронов $V_{y,init}(\rho) = V_y(\rho, \theta = 0)$ для различных значений B_0 :
а) $B_0 = 0.1$; б) $B_0 = 0.2$; в) $B_0 = 0.5$

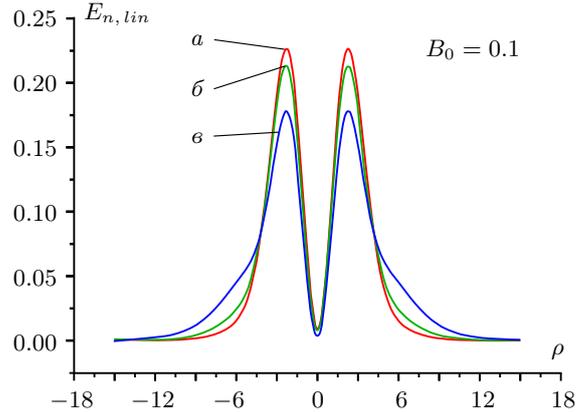


Рис. 5. Энергия линейной волны во внешнем поле $B_0 = 0.1$ для различных значений θ :
а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

вычислялись коэффициенты Фурье $E(k)$ из разложения (30). Далее с помощью формул (31) при $\theta = 0$ и (32) вычислялись коэффициенты Фурье функций $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$, которые использовались для обратного дискретного преобразования Фурье с целью вычисления функций на исходной сетке.

Легко заметить, что диапазон изменения этих начальных функций вполне соизмерим с диапазоном $E_x(\rho, \theta = 0)$. При этом индуцированное магнитное поле меняется сильнее при изменении внешнего поля по сравнению с изменением y -компоненты скорости. Это дает основание для вывода, что как полагать обе начальные функции нулевыми, так и совсем пренебрегать индуцированным магнитным полем (случай электростатического приближения), при рассмотрении МН-волны с начальным возмущением (9), (10) было бы не вполне оправдано.

Отметим, что речь о согласовании начальных данных идет только в смысле сохранения физического смысла решения, так как, в силу гиперболичности исходной системы (6), с математической точки зрения все наборы достаточно гладких начальных условий являются равноправными.

5.2. Линейная МН-волна. Для иллюстраций динамики линейной волны выберем функцию, характеризующую ее энергию,

$$E_{n,lin} = \frac{E_x^2 + E_y^2 + B^2 + V_x^2 + V_y^2}{2}. \quad (40)$$

Из соотношения (13) следует, что интеграл по периоду $[-d, d]$ от функции $E_{n,lin}(\rho, \theta)$ равен константе, поэтому ее пространственные распределения в различные моменты времени могут иллюстрировать волновой характер переноса энергии в пространстве.

Сравним поведение волны для различных внешних полей $B_0 \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$. Выберем с этой целью характерные моменты времени $\theta \in \{0, 7\pi, 14\pi\}$ и рассмотрим для них функцию $E_{n,lin}$.

На рис. 5 приведены пространственные распределения энергии для слабого внешнего магнитного поля $B_0 = 0.1$. Легко заметить, что волна очень похожа на неподвижную, т.е. перемещение экстремальных значений энергии практически незаметно. Однако, пусть медленно, но энергия перемещается в пространстве, о чем свидетельствует ее монотонное увеличение на периферии волны в зависимости от времени. Конечно, в силу закона сохранения, эта монотонность полностью компенсируется соответствующим убыванием максимальных значений. Поэтому можно сказать, что для слабых внешних полей происходит медленное “расплывание” энергии практически без изменения ее начальной формы.

Влияние значимого увеличения внешнего поля представлено на рис. 6. При $B_0 = 0.2$ со временем происходит существенное изменение формы волны, связанное с перемещением в пространстве максимальных значений энергии. Легко заметить, что скорость этого изменения при этом увеличивается. За время 7π экстремумы практически не изменили своего положения, что качественно подобно случаю слабого внешнего поля. Зато в течение следующего периода времени, равного предыдущему, они переместились на примерно удвоенное расстояние от начала координат. Другими словами, в умеренных внешних полях скорость перемещения энергии линейной волны со временем возрастает, хотя максимальные значения энергии при этом монотонно убывают.

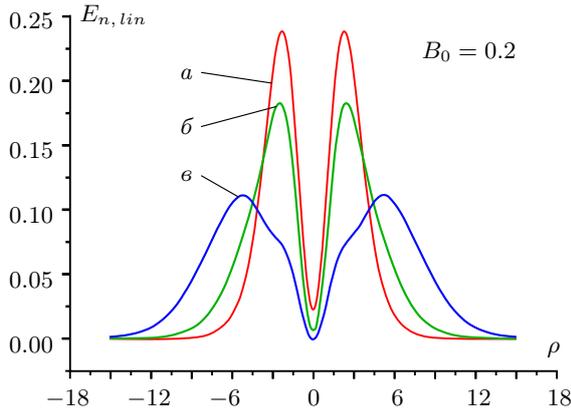


Рис. 6. Энергия линейной волны во внешнем поле $B_0 = 0.2$ для различных значений θ :
 а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

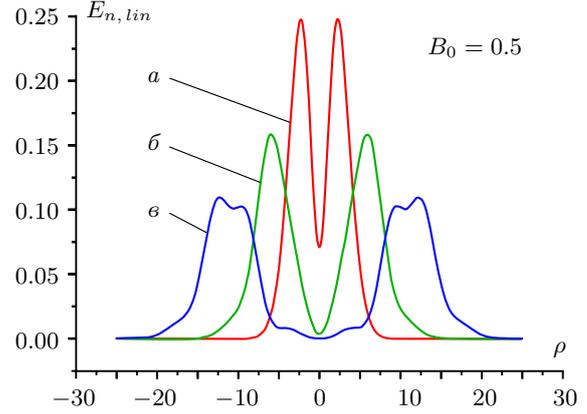


Рис. 7. Энергия линейной волны во внешнем поле $B_0 = 0.5$ для различных значений θ :
 а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

Наконец, динамика энергии волны в сильном магнитном поле $B_0 = 0.5$ представлена на рис. 7. Представленные пространственные распределения функции $E_{n,lin}$ наглядно иллюстрируют волновой характер — скорость перемещения энергии достаточно велика, а амплитуда уменьшается при выполнении закона сохранения, т.е. наблюдаются одновременно две тенденции: ускорение переноса энергии и немонотонное “расплывание” формы волны.

Следует отметить, что представленные выше графики получены одновременно как с помощью формул (31), так и при использовании численного алгоритма из раздела 3, упрощенного для линейных уравнений (12). В силу второго порядка точности приближенного метода и малости параметров дискретизации, заметить визуальные различия в графиках функции $E_{n,lin}$, полученных различными способами, не представляется возможным.

5.3. Нелинейная МН-волна. Для иллюстрации динамики нелинейной волны выберем функцию, характеризующую ее энергию,

$$E_{n,nonl} = \frac{E_x^2 + E_y^2 + B^2 + N(V_x^2 + V_y^2)}{2}. \tag{41}$$

Из соотношения (8) следует, что интеграл по периоду $[-d, d]$ от функции $E_{n,nonl}$ равен константе, поэтому ее пространственные распределения в различные моменты времени могут иллюстрировать волновой характер переноса энергии в пространстве.

Сравним поведение волны для различных внешних полей $B_0 \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$. Выберем с этой целью характерные моменты времени $\theta \in \{0, 7\pi, 14\pi\}$ и рассмотрим для них функцию $E_{n,nonl}(\rho, \theta)$.

На рис. 8 приведены пространственные распределения энергии для слабого внешнего магнитного поля $B_0 = 0.1$. Легко заметить, что волна, как и в линейном случае, похожа на неподвижную, т.е. перемещение экстремальных значений энергии практически невелико. Однако вполне отчетливо наблюдается отличие от линейной волны — немонотонный характер направления перемещения энергии. Сначала максимумы смещаются к началу координат, т.е. происходит некоторое “сжатие” волны, а затем аналогично линейному развитию энергия начинает перемещаться в направлении от начала координат. При этом максимальные значения энергии слабо убывают во времени, что, в силу закона сохранения, компенсируется “расплыва-

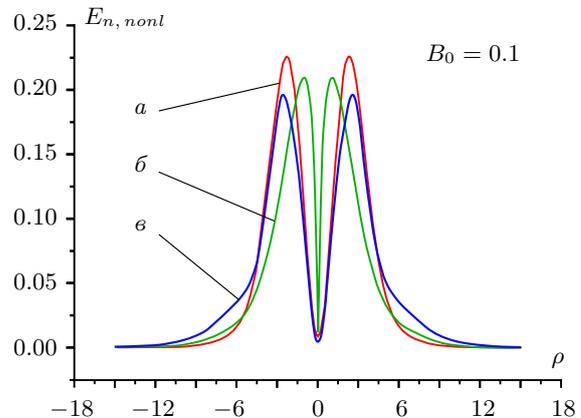


Рис. 8. Энергия нелинейной волны во внешнем поле $B_0 = 0.1$ для различных значений θ :
 а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

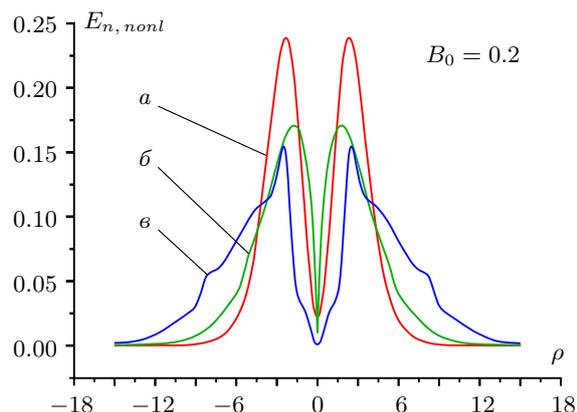


Рис. 9. Энергия нелинейной волны во внешнем поле $B_0 = 0.2$ для различных значений θ :
а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

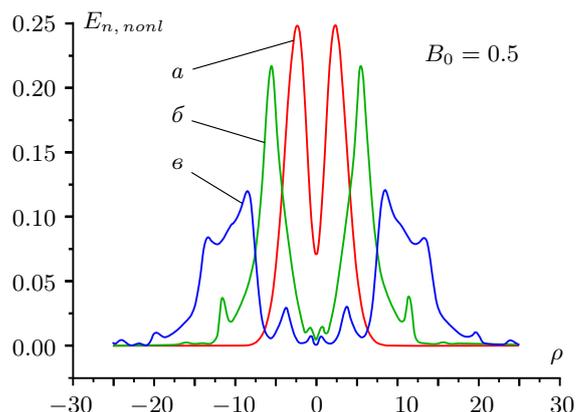


Рис. 10. Энергия нелинейной волны во внешнем поле $B_0 = 0.5$ для различных значений θ :
а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

нием” формы волны. Поэтому можно сказать, что для слабых внешних полей нелинейность модели проявляется в изменении направления движения волны на начальном этапе практически без изменения ее начальной формы.

Влияние значимого увеличения внешнего поля представлено на рис. 9. При $B_0 = 0.2$ со временем происходит существенное изменение формы волны, связанное с перемещением в пространстве максимальных значений энергии. Легко заметить, что скорость такого изменения при этом замедляется. За время 7π экстремумы практически не изменили своего положения, немного сместившись к началу координат, что качественно подобно случаю слабого внешнего поля. Зато в течение следующего периода времени, равного предыдущему, они практически вернулись в исходные положения, что сопровождается сильным “расплыванием” формы и возникновением новых участков немонотонности. Другими словами, в умеренных внешних полях в отличие от линейного случая экстремальные значения энергии практически не перемещаются в пространстве, поэтому наиболее заметно перемещение энергии нелинейной волны на периферии волны.

Динамика энергии волны в сильном магнитном поле $B_0 = 0.5$ представлена на рис. 10. Приведенные пространственные распределения функции $E_{n, nonl}$ качественно очень похожи на линейные аналоги: скорость перемещения энергии достаточно велика и не меняет знака, амплитуда волны уменьшается при выполнении закона сохранения. Существенное отличие как от линейного случая, так и от нелинейной волны в умеренном внешнем поле заключается в активном формировании вторичных волн, характеризующихся более маленькими амплитудами и постоянным направлением распространения. Следует отметить, что вторичные волны не являются мелкомасштабными осцилляциями на фоне гладкого решения, порождаемыми численными неустойчивостями. При уменьшении параметров дискретизации в два раза (контрольные расчеты) форма и расположение локальных экстремумов не изменялись.

Суммируя вышесказанное, подчеркнем существенные отличия нелинейной волны от линейной. Во-первых, немонотонное распространение энергии нелинейной волны в слабых и умеренных внешних полях. Во-вторых, формирование вторичных волн в сильных полях. Возможно, что при еще большем усложнении модели, например учете релятивистского эффекта скоростей электронов, описанные отличия породят настолько значимые эффекты, что изменят само представление о МН-волне, порожденное линейным анализом.

5.4. Нелинейная МН-волна с нулевыми недостающими начальными условиями. Как уже говорилось выше, когда каких-либо начальных условий недостаточно и получить их из физических соображений не представляется возможным, их просто полагают тождественно нулевыми. В нашем случае речь идет о функциях $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$. Покажем, что такой подход является не всегда оправданным, так как может привести к искажению смысла анализируемого процесса.

Для иллюстрации динамики нелинейной волны с нулевыми условиями выберем, как в разделе 5.3, функцию $E_{n, nonl}$ (41), характеризующую ее энергию. Сравним поведение волны для различных внешних полей $B_0 \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$. Выберем с этой целью типичные моменты времени $\theta \in \{0, 7\pi, 14\pi\}$ и рассмотрим для них функцию $E_{n, nonl}$.

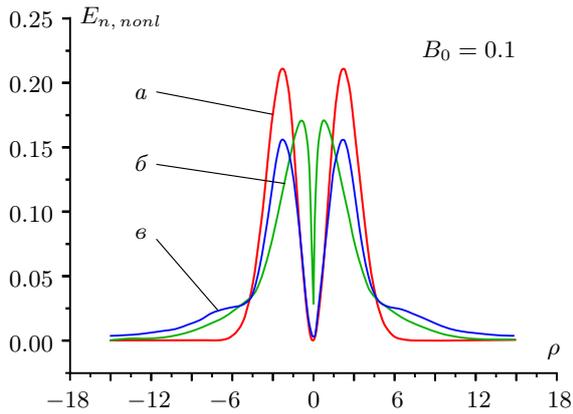


Рис. 11. Энергия нелинейной волны с нулевыми начальными данными $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$ во внешнем поле $B_0 = 0.1$ для различных значений θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

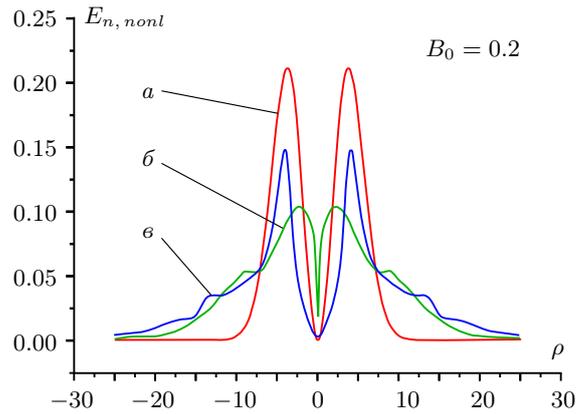


Рис. 12. Энергия нелинейной волны с нулевыми начальными данными $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$ во внешнем поле $B_0 = 0.2$ для различных значений θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

На рис. 11 приведены пространственные распределения энергии для слабого внешнего магнитного поля $B_0 = 0.1$. Сопоставление с изображенной на рис. 8 динамикой нелинейной волны говорит о том, что нулевые начальные данные практически не изменяют процесс перемещения энергии медленной необыкновенной волной. Также имеет место практически незаметное перемещение экстремальных значений энергии и немонотонный характер направления перемещения энергии, когда на начальном этапе движения максимумы смещаются к началу координат, т.е. происходит некоторое “сжатие” волны, а затем все оставшееся время энергия перемещается в направлении от начала координат. При этом максимальные значения энергии сильнее убывают во времени по сравнению с нелинейной волной на рис. 8, что, в силу закона сохранения, компенсируется большим “расплыванием” формы волны. Поэтому можно сказать, что для слабых внешних полей выбор начальных условий не сильно влияет на качественный характер распространения волны в нелинейной модели.

Влияние значимого увеличения внешнего поля представлено на рис. 12. При $B_0 = 0.2$ нулевые начальные данные качественно меняют процесс переноса энергии по сравнению как с нелинейной, так и линейной волной. В момент времени 7π максимумы функции $E_{n,nonl}$ заметно меньше, чем в более поздний момент 14π , чего не наблюдалось ранее ни в каком расчетном варианте. Сравнение с рис. 9 показывает, что при нулевых условиях сначала происходит сильное “расплывание” энергии, а затем — такое ее “сжатие”, что максимумы практически возвращаются в первоначальное положение. Такое немонотонное изменение формы волны, видимо, можно объяснить только “неправильными” (нулевыми) начальными данными, которые приводят к искажению традиционного волнового процесса. Другими словами, в умеренных внешних полях начальное возмущение данных становится настолько значительным, что может привести к потере решением смысла медленной необыкновенной волны.

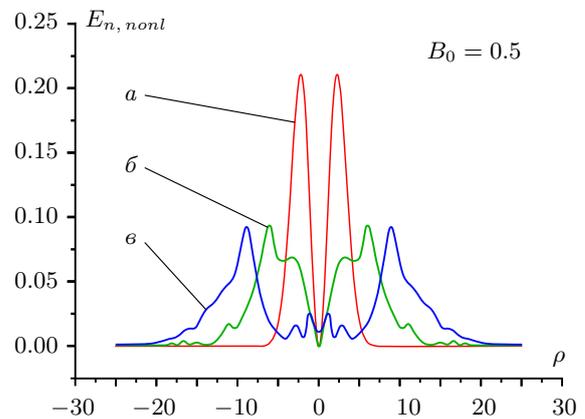


Рис. 13. Энергия нелинейной волны с нулевыми начальными данными $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$ во внешнем поле $B_0 = 0.5$ для различных значений θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

Динамика энергии волны в сильном магнитном поле $B_0 = 0.5$ представлена на рис. 13. Приведенные пространственные распределения функции $E_{n,nonl}$ качественно очень похожи на нелинейные аналоги на рис. 10: скорость перемещения энергии достаточно велика и не меняет знака, амплитуда волны уменьшается при выполнении закона сохранения, активно формируются вторичные волны, характеризующиеся более маленькими амплитудами и постоянным направлением распространения. Следует отметить, что

вторичные волны здесь также контролировались расчетами на более мелкой сетке: при уменьшении параметров дискретизации в два раза форма и расположение локальных экстремумов не изменялись. Конечно, имеются отличия в абсолютных значениях максимумов в момент времени 7π , но это не меняет качественную картину волны.

Суммируя вышесказанное, подчеркнем влияние на решение системы (6) нулевых начальных данных $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$ по сравнению с данными из формул (31). В слабых внешних полях начальные данные из (31) не сильно отличаются от нулевых, поэтому решения, представленные на рис. 8 и рис. 11, не только похожи качественно, но и близки количественно. В свою очередь, сильные внешние магнитные поля за счет больших скоростей распространения волн формируют одну и ту же качественную картину переноса энергии практически при любых начальных данных для $B(\rho, \theta = 0)$ и $V_y(\rho, \theta = 0)$. Количественные расхождения в решениях здесь могут присутствовать и, конечно, присутствуют. В результате наименее правдоподобными оказываются решения с тривиальными начальными данными для умеренных внешних полей, когда скорость распространения волн еще невелика, а эффект различия в начальных данных уже значителен. Взаимное влияние этих двух факторов может приводить к волнам, совершенно не похожим на медленные необыкновенные.

5.5. Вибрация энергии в МН-волне. Рассмотрим на рис. 14 иллюстрацию динамики энергии ленгмюровских колебаний (в отсутствие внешнего поля). В данном случае функция $E_{n, nonl}$ является 2π -периодической по времени, поэтому полностью характеризуется пространственными распределениями в моменты времени, кратные $\pi/2$. Энергия имеет два крайних положения в моменты $\theta = 2\pi l$, $l = 0, 1, \dots$ и $\theta = \pi(2l + 1)$, $l = 0, 1, \dots$. В остальное время, не изменяя своей формы, она занимает промежуточное положение между ними, например строго серединное положение энергия занимает в моменты $\theta = \pi/2 + \pi l$, $l = 0, 1, \dots$. Обратим внимание, что переноса энергии в пространстве при этом не происходит — только ее местные трансформации из электромагнитной в кинетическую. Если же рассматривать линейный случай, то функция $E_{n, lin}$ в отсутствие внешнего магнитного поля даже не колеблется: она в произвольный момент времени совпадает с распределением $E_{n, nonl}$ при $\theta = 0$.

Отметим, что мгновенные распределения энергии не дают полного представления о распространении волны. Поэтому проследим за перемещением одного из двух (правого, т.е. имеющего наибольшую пространственную координату) максимума функции $E_{n, nonl}$. В силу четности функции энергии этого будет достаточно. Другими словами, определим функцию, описывающую координату положения правого “горбика” $\rho_{non}^+(\theta) = \arg_{\rho} \max \{E_{n, nonl}(\rho, \theta)\}$. На рис. 15 приведена ее динамика для двух значений внешнего магнитного поля: $B_0 = 0.0$ и $B_0 = 0.5$. При отсутствии внешнего магнитного поля в полном соответствии с рис. 15 положение правого максимума энергии с периодом 2π колеблется между двумя крайними пространственными позициями. При наличии внешнего поля этот максимум удаляется от начала координат, но при этом совершает ритмические сдвиги примерно одинаковой величины в обратном направлении. Именно такое поведение функции $\rho_{non}^+(\theta)$ позволяет говорить о том, что энергия волны вибрирует в процессе ее распространения в пространстве.

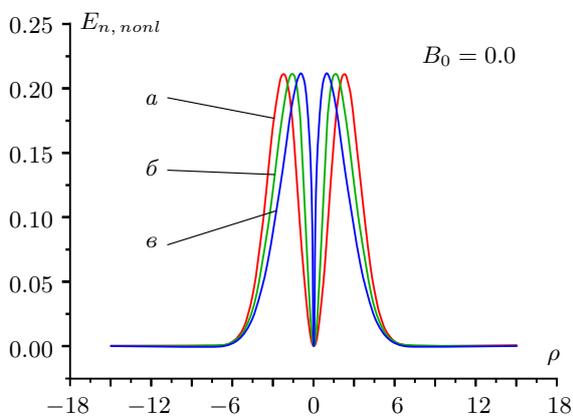


Рис. 14. Энергия ленгмюровских колебаний для различных значений θ :
а) $\theta = 0$; б) $\theta = \pi/2$; в) $\theta = \pi$

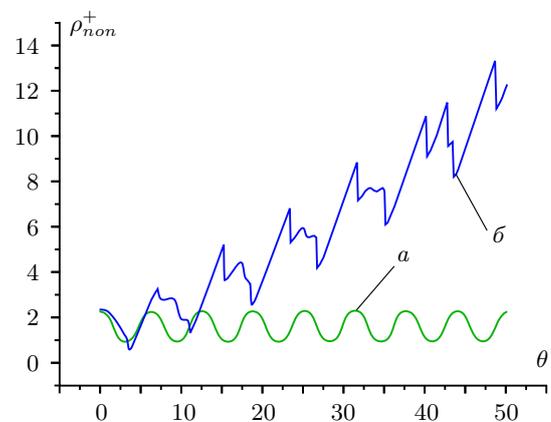


Рис. 15. Динамика функции $\rho_{non}^+(\theta)$ для различных значений B_0 : а) $B_0 = 0.0$ (поле отсутствует); б) $B_0 = 0.5$

Можно предположить, что указанная вибрация является, в некотором смысле, “следом” исходных ленгмюровских колебаний, т.е. допустить интерпретацию, что внешнее магнитное поле просто перемещает от начала координат ленгмюровские колебания, способствуя при этом уменьшению их амплитуды. Однако рис. 16, на котором изображена динамика функции $\rho_{lin}^+(\theta) = \arg_{\rho} \max \{E_{n,lin}(\rho, \theta)\}$, т.е. аналога рассмотренной выше функции для линейного случая, полностью опровергает эту гипотезу. Дело в том, что, как уже говорилось выше, в отсутствие внешнего магнитного поля энергия линейных колебаний не перемещается в пространстве. Иллюстрацией этому является график постоянной функции на рис. 16 а. Но при этом магнитное поле, аналогично нелинейному случаю, перемещает максимум энергии от начала координат, придавая одновременно его движению поступательно-возвратный, т.е. вибрационный, характер (рис. 16 б).

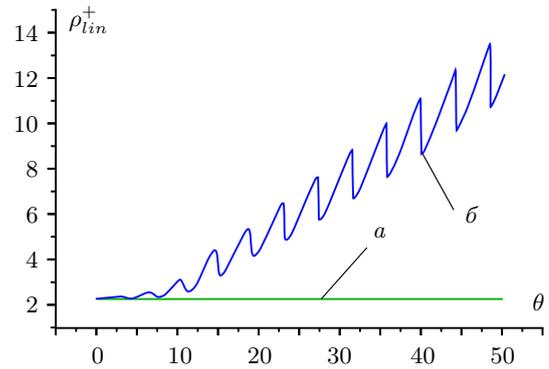


Рис. 16. Динамика функции $\rho_{lin}^+(\theta)$ для различных значений B_0 : а) $B_0 = 0.0$ (поле отсутствует); б) $B_0 = 0.5$

В результате из рис. 14–16 можно сделать вывод, что перемещение энергии МН-волны от начала координат сопровождается ее вибрацией. При этом ответственность за этот эффект, в первую очередь, несет внешнее магнитное поле. Другими словами, вибрация энергии — атрибут МН-волны, т.е. как в линейном, так и в нелинейном случаях, он является порождением внешнего постоянного магнитного поля B_0 в колеблющейся холодной плазме.

5.6. Волновая динамика электронной плотности. Традиционным представлением волнового движения в плазме является изменение зависимости электронной плотности от пространственной координаты. Сравним поведение волны для различных внешних полей $B_0 \in \{0.0, 0.1, 0.2, 0.5\}$. Выберем с этой целью характерные моменты времени $\theta \in \{0, 7\pi, 14\pi\}$ и рассмотрим для них функцию $N(\rho, \theta)$. Фактически ниже речь идет о другой форме наблюдения за результатами расчетов из раздела 5.3.

Рассмотрим динамику нерелятивистских колебаний при отсутствии внешнего поля (случай $B_0 = 0.0$) при указанных выше параметрах a_* и ρ_* . На рис. 17 изображены зависимости плотности электронов от пространственной координаты в различные моменты времени. В полном соответствии с теорией [2] динамика колебаний имеет ярко выраженный 2π -периодический характер; при этом амплитуда осевых максимумов плотности значительно превышает амплитуду внеосевых максимумов. Таким образом, без учета внешнего магнитного поля динамика колебаний имеет простой, можно сказать “учебный”, характер, а именно: через каждую половину периода пространственные распределения функций скорости, электрического поля и плотности электронов регулярно меняют друг друга, т.е. график, изображенный линией

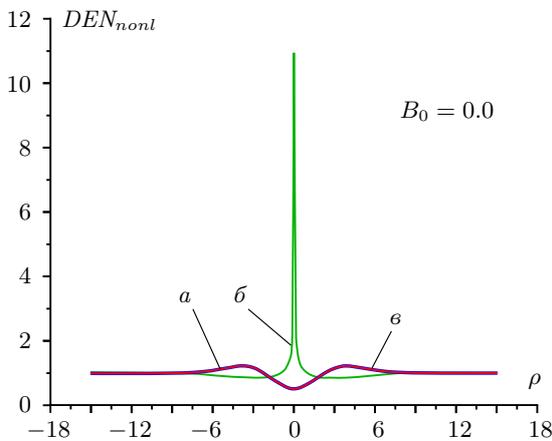


Рис. 17. Плотность электронов во внешнем поле $B_0 = 0.0$ (поле отсутствует) для различных значений θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

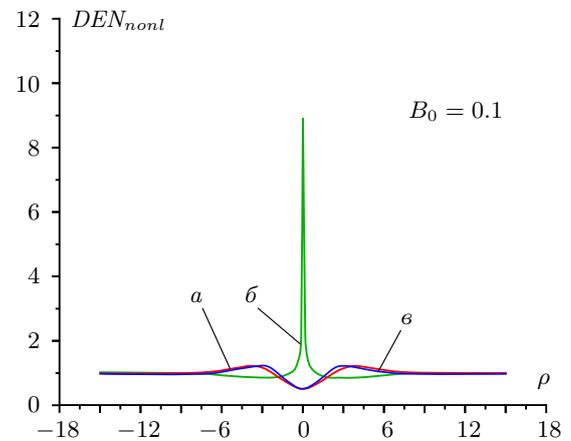


Рис. 18. Плотность электронов во внешнем поле $B_0 = 0.1$ для различных значений θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

красного цвета (рис. 17 а), трансформируется в график, изображенный линией зеленого цвета (рис. 17 б), и этот процесс повторяется бесконечно долго без изменения области локализации колебаний. При этом график, изображенный линией синего цвета (рис. 17 в), совпадает с графиком для $\theta = 0$ (рис. 17 а), а функции V_y , E_y и B являются тождественно нулевыми в произвольный момент времени.

Слабое внешнее поле $B_0 = 0.1$ практически не изменяет графики электронной плотности в указанные моменты времени. Аналогично распределениям энергии на рис. 8, на рис. 18 можно заметить уменьшение амплитуды при $\theta = 7\pi$ по сравнению с отсутствием поля, а также небольшую вибрацию, проявляющуюся в отклонении линии синего цвета (рис. 18 в) от линии красного цвета (рис. 18 а) в окрестности начала координат. В целом на электронную плотность слабое внешнее магнитное поле оказывает менее заметное влияние, чем на функцию энергии.

На рис. 19 и 20 в качестве характерных примеров изображены пространственные распределения электронной плотности в моменты времени $\theta = 7\pi$ и $\theta = 14\pi$ (зеленая и синяя линии, соответственно), при этом красная линия иллюстрирует ее начальное распределение на рис. 17–20 для удобства сравнения. На обоих рисунках хорошо заметно, что плазменная волна распространяется в обе стороны от оси симметрии области, вынося энергию из первоначальной области локализации колебаний.

Влияние значимого увеличения внешнего поля представлено на рис. 19. При $B_0 = 0.2$ со временем происходит существенное изменение формы волны, связанное с относительным изменением максимальных значений плотности. Особенно нагляден вибрационный характер распространения волны: экстремумы плотности при $\theta = 14\pi$ немного сместились к началу координат по сравнению с начальными положениями, при этом фронт переместился на примерно удвоенное расстояние по сравнению со слабым внешним полем (см. рис. 18). Аналогично распределению энергии на рис. 9, в умеренных внешних полях экстремальные значения плотности практически не перемещаются в пространстве, поэтому наиболее заметно движение электронной плотности на периферии волны.

Динамика плотности в сильном магнитном поле $B_0 = 0.5$ представлена на рис. 20. Приведенные пространственные распределения полностью объясняют структуру вторичных волн энергии, представленных на рис. 10: их значительно меньшие амплитуды и постоянное направление распространения. Повторим, что вторичные волны не являются мелкомасштабными осцилляциями на фоне гладкого решения, порождаемыми численными неустойчивостями. При уменьшении параметров дискретизации в два раза (контрольные расчеты) форма и расположение локальных экстремумов плотности и энергии не изменялись.

Таким образом, из проведенных численных экспериментов можно сделать вывод, что влияние внешнего магнитного поля на плазменные колебания заключается в формировании из колебаний бегущих плазменных волн. Причем увеличение напряженности поля этот процесс ускоряет. В результате плазменная волна выносит энергию из первоначальной области колебаний, что приводит к значительному уменьшению их амплитуды. Напомним, что речь идет о моделировании специфического типа волны — медленной необыкновенной.

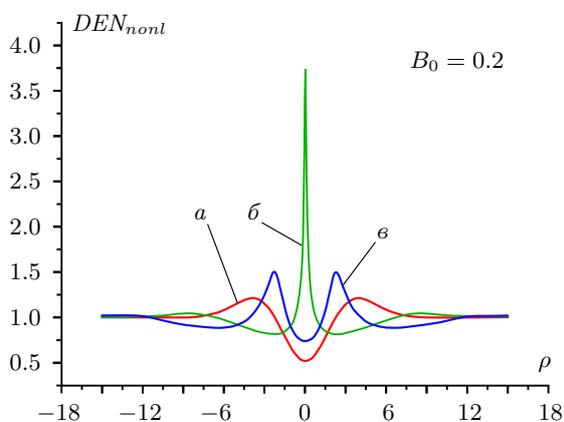


Рис. 19. Плотность электронов во внешнем поле $B_0 = 0.2$ для различных значений θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

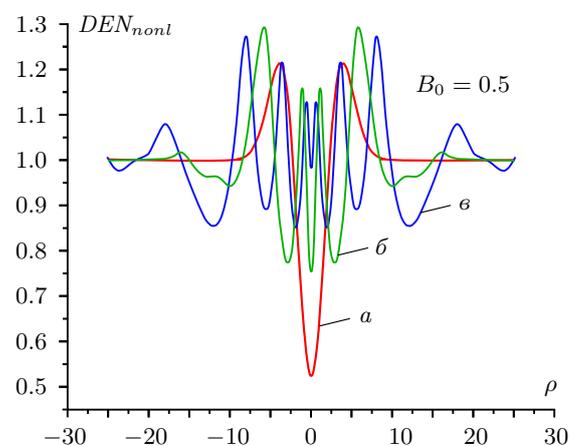


Рис. 20. Плотность электронов во внешнем поле $B_0 = 0.5$ для различных значений θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = 7\pi$; в) $\theta = 14\pi$

6. Заключение. В настоящей работе численно и аналитически исследовано влияние внешнего магнитного поля на плоские нерелятивистские нелинейные плазменные колебания, порождаемые мощным лазерным импульсом. В результате согласованного взаимодействия электромагнитных полей и частиц в магнитоактивной плазме формируется медленная необыкновенная волна. Для ее инициализации предложен способ построения недостающих начальных условий на основе решения линейной задачи методом Фурье, причем используется как интегральное преобразование Фурье, так и ряды Фурье, которые несложно адаптировать к их дискретному аналогу по пространству. Реализация дискретного преобразования Фурье происходит с помощью быстрых алгоритмов. С целью численного моделирования нелинейной волны построена схема метода конечных разностей второго порядка точности типа МакКормака на основе эйлеровых переменных. Численные эксперименты демонстрируют, что при учете внешнего магнитного поля ленгмюровские колебания трансформируются в медленную необыкновенную волну, энергия которой вибрирует при перемещении от начала координат. При этом скорость волны увеличивается с ростом внешнего постоянного поля, что способствует выносу энергии из первоначальной области локализации колебаний. Наиболее значимые иллюстрации представлены как в виде перемещения энергии, так и в виде волн электронной плотности. Полученные результаты можно использовать для моделирования волн при релятивистских скоростях электронов, т.е. изучать влияние внешнего магнитного поля на эффект опрокидывания плазменных колебаний. Кроме того, возможно обобщение полученных данных на случай намагниченной квантовой плазмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davidson R.C. Methods in nonlinear plasma theory. New York: Academic Press, 1972.
2. Чижонков Е.В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018.
3. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
4. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
5. Красовицкий В.Б., Бугримов А.Л. Ускорение электронов в поле световой волны в магнитоактивной плазме // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 1. 31–43.
6. Moradi A. Energy behaviour of extraordinary waves in magnetized quantum plasmas // Physics of Plasmas. 2018. **25**. doi: 10.1063/1.5031753
7. Силлин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
8. Силлин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: ЛИБРОКОМ, 2012.
9. Фролов А.А., Чижонков Е.В. О применении закона сохранения энергии в модели холодной плазмы // Журнал вычислит. математики и матем. физики. 2020. **60**, № 3. 503–519.
10. Sheppard C.J.R. Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review [Invited] // Applied Optics. 2013. **52**, N 4. 538–545.
11. Chizhonkov E.V., Frolov A.A. Influence of electron temperature on breaking of plasma oscillations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2019. **34**, N 2. 71–84.
12. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // J. Spacecr. Rockets. 2003. **40**, N 5. doi 10.2514/2.6901
13. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
14. Шокин Ю.И., Яценко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985.
15. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990.
16. Федотова З.И. О применении разностной схемы Мак-Кормака для задач длинноволновой гидродинамики // Вычислительные технологии. 2006. **11**, спецвыпуск. Часть II. 53–63.
17. Чижонков Е.В. О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21** (1). 115–128.
18. Фролов А.А., Чижонков Е.В. Численное моделирование плазменных колебаний с учетом теплового движения электронов // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19** (2). 194–206.
19. Maity C. Lagrangian Fluid Technique to Study Nonlinear Plasma Dynamics. PhD Thesis. Kolkata: Saha Institute of Nuclear Physics, 2013.
20. Swartztrauber P.N. Vectorizing the FFTs // Parallel Computations. New York: Academic Press. 1982. 51–83.

Поступила в редакцию
26 октября 2020

Numerical Simulation of a Slow Extraordinary Wave in Magnetoactive Plasma

A. A. Frolov¹ and E. V. Chizhonkov²

¹ *P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskiy prospekt, 53, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Senior Scientist, e-mail: frolova@lebedev.ru*

² *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su*

Received October 26, 2020

Abstract: The effect of an external magnetic field on plane non-relativistic nonlinear plasma oscillations is studied numerically and analytically. A method for the initialization a slow extraordinary wave in a magnetoactive plasma is proposed for constructing the missing initial conditions based on solving a linear problem using the Fourier method. For the purpose of numerical simulation of a nonlinear wave, a scheme of the second-order accuracy finite difference method of the MacCormack type based on Euler variables is constructed. It is shown that, when the external magnetic field is taken into account, the Langmuir oscillations are transformed into a slow extraordinary wave whose energy vibrates when moving from the origin. In this case, the wave velocity increases with the growth of the external constant field, which contributes to the removal of energy from the initial region of localization of oscillations.

Keywords: magnetoactive plasma, numerical simulation, Fourier method, finite difference method, plasma oscillations, slow extraordinary wave.

References

1. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic, New York, 1972).
2. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma* (Fizmatlit, Moscow, 2018; CRC Press, Boca Raton, 2019).
3. A. F. Aleksandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Springer, New York, 1984; Vysshaya Shkola, Moscow, 1988).
4. V. L. Ginzburg and A. A. Rukhadze, *Waves in Magnetoactive Plasma* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
5. V. Krasovitskiy and A. Bugrimov, "Acceleration of Electrons in the Field of a Light Wave in Magnetoactive Plasma," *Vestn. Mosk. Gos. Oblast. Univ., Ser.: Phys. Mat., No. 1*, 31–43 (2016).
6. A. Moradi, "Energy Behaviour of Extraordinary Waves in Magnetized Quantum Plasmas," *Phys. Plasmas* **25** (2018). doi: 10.1063/1.5031753
7. V. P. Silin, *Introduction to Kinetic Theory of Gases* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].
8. V. P. Silin and A. A. Rukhadze, *Electromagnetic Properties of Plasma and Plasma-Like Media* (Librokom, Moscow, 2012) [in Russian].
9. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, "Application of the Energy Conservation Law in the Cold Plasma Model," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **60** (3), 503–519 (2020) [*Comput. Math. Math. Phys.* **60** (3), 498–513 (2020)].
10. C. J. R. Sheppard, "Cylindrical Lenses — Focusing and Imaging: A Review [Invited]," *Appl. Opt.* **52** (4), 538–545 (2013).
11. E. V. Chizhonkov and A. A. Frolov, "Influence of Electron Temperature on Breaking of Plasma Oscillations," *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **34** (2), 71–84 (2019).
12. R. W. MacCormack, "The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering," *J. Spacecr. Rockets* **40** (2003). doi 10.2514/2.6901
13. D. E. Potter, *Computational Physics* (Wiley, London, 1973; Mir, Moscow, 1975).
14. Yu. I. Shokin and N. N. Yanenko, *Method of Differential Approximation: Application to Gas Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1985) [in Russian].
15. D. A. Anderson, J. C. Tannehill, and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Hemisphere, New York, 1984; Mir, Moscow, 1990).
16. Z. I. Fedotova, "On the Application of the MacCormack Scheme for Problems of Long Wave Hydrodynamics," *Vychisl. Teknol.* **11**, Special Issue, 53–63 (2006).

17. E. V. Chizhonkov, “On Second-Order Accuracy Schemes for Modeling of Plasma Oscillations,” *Vychisl. Metody Programm.* **21** (1), 115–128 (2020).
18. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “Numerical Modeling of Plasma Oscillations with Consideration of Electron Thermal Motion,” *Vychisl. Metody Programm.* **19** (2), 194–206 (2018).
19. C. Maity, *Lagrangian Fluid Technique to Study Nonlinear Plasma Dynamics*, PhD Thesis (Saha Institute of Nuclear Physics, Kolkata, 2013).
20. P. N. Swarztrauber, “Vectorizing the FFTs,” in *Parallel Computations* (Academic Press, New York, 1982), pp. 51–83.