

УДК 532.529

doi 10.26089/NumMet.v22r101

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ НЕОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ ГАЗОВЗВЕСИ ГИБРИДНЫМ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Д. В. Садин,¹ И. О. Голиков,² В. А. Давидчук³

Исследуются задачи взаимодействия ударной волны с ограниченным слоем газозвеси, внутри которого имеется неоднородность квадратного сечения пониженной или повышенной плотности. Для расчетов используется гибридный метод крупных частиц второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Правильность численных разрывных решений, в частности скачков пористости, подтверждается сравнением с асимптотически точными профилями плотности смеси. Приведены аналитические зависимости ослабления ударной волны слоем газозвеси. Изучены ударно-волновые структуры в двумерных областях и влияние на них релаксационных процессов.

Ключевые слова: гибридный метод крупных частиц, неоднородный слой газозвеси, ударная волна, релаксация, асимптотически точное решение.

1. Введение. Нестационарные течения газозвесей с ударными волнами и контактными разрывами представляют практический интерес в ряде приложений, связанных с технологиями напыления, при производстве ракетных двигателей на твердом топливе, газовом транспорте сыпучих материалов, оценке потенциальных последствий на взрывоопасных производствах, защите объектов заградительными дисперсными образованиями и др.

Численное моделирование неравновесных течений газа с частицами встречает ряд принципиальных трудностей, например в сравнении с классической вычислительной гидродинамикой. Одна из них — неконсервативность подсистем уравнений импульсов фаз, связанная с изменением трубки тока газа (сила Архимеда): $p\nabla\alpha_1$, где p — давление газа и α_1 — его объемная доля. К настоящему времени не найдены преобразования, приводящие законы сохранения двухфазных сред достаточно общего вида к дивергентной форме записи. Для специального случая достигнута консервативность по Рождественскому и Яненко [1] законов сохранения систем уравнений двухфазных сред [2]. В некоторых работах динамика газозвеси формулируется в дивергентном виде за счет пренебрежения силой Архимеда в уравнениях газовой фазы [3, 4], что справедливо, по-видимому, для малых градиентов пористости. Отметим, что проблема неконсервативности возникает прежде всего для дискретных моделей, требующих потоковую, полностью дивергентную запись уравнений и опирающихся на характеристическое представление и решение задачи распада разрыва (римановские солверы) [5–7].

В различных математических формулировках неравновесной динамики газозвеси газ и частицы обладают собственными скоростями и температурами, а также включают общее давление [8–10] или два давления для каждой фазы [11–13]. Давление в дисперсной фазе возникает вследствие случайного, столкновительного характера движения частиц по аналогии с молекулярно-кинетической теорией газов. Проблема математического описания хаотического движения частиц в несущем газе остается открытой до настоящего времени. Гольдштик [14] предложен механизм генерации “кипящего” слоя частиц за счет действия сил Магнуса. В дополнение к этому в работах [15, 16] учтен физический эффект вихревого обтекания дисперсных частиц как следствие колебаний продольной и поперечной сил при числе Рейнольдса скольжения фаз $Re_{12} > 200$. Молекулярно-кинетические подходы описания динамических процессов в

¹ Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: sadin@yandex.ru

² Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: igira55@yandex.ru

³ Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, Санкт-Петербург; адъюнкт, e-mail: david_lxii@mail.ru

столкновительных средах развиваются в работах [3, 4, 11–14, 17, 18]. Бесстолкновительные модели “запыленного” газа и некоторые системы уравнений движения с двумя давлениями являются в общем случае негиперболическими [19–21]. В ряде исследований применяются и развиваются законы сохранения двухфазных сред гиперболического типа [5–7, 22, 23]. Учет инерционных эффектов (силы присоединенных масс) при обтекании дисперсных частиц приводит к “неклассическому” характеристическому представлению законов сохранения [24].

Еще одна проблема вычислительной динамики гетерогенных сред связана с жесткостью — существенным различием характерных временных масштабов. А именно, когда времена релаксации фаз значительно меньше газодинамического масштаба распространения возмущения в пределах расчетной ячейки. Для содержательных постановок задач предложены высокоустойчивые дискретные модели [25–30]. Одним из полезных вычислительных свойств схемы является К-устойчивость [31, 32]. Неформальный смысл этого свойства заключается в том, что устойчивость определяется только газодинамическим масштабом дискретной задачи (условием Куранта–Фридрихса–Леви) и не зависит от времен релаксации фаз. В случае интенсивного межфазного взаимодействия применение традиционных дискретных моделей становится непригодным из-за неприемлемо малого шага по времени.

Изучению взаимодействия ударной волны со слоем или облаком газозвеси посвящены работы [33–37]. В нашем исследовании рассматривается движение скачка уплотнения в среде с разрывом пористости. Анализируется точность гибридного метода крупных частиц и сходимость численного решения к асимптотически точному равновесному решению для малых размеров дисперсных частиц. Исследуются задачи преломления падающей ударной волны на неоднородности квадратного сечения пониженной или повышенной плотности в двумерных областях.

2. Основные уравнения. Рассмотрим законы сохранения калорически совершенного газа и твердых несжимаемых частиц в рамках взаимопроникающих континуумов [30]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B} (\nabla_d \mathbf{F}) &= \mathbf{H}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q} &= [\rho_1, \rho_2, \rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2, \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2]^T, \\ \mathbf{G} &= [\rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 K_2 \mathbf{v}_2]^T, \\ \mathbf{F} &= [0, 0, p, p, 0, p (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)]^T, \quad \mathbf{H} = [0, 0, -\mathbf{F}_\mu, \mathbf{F}_\mu, Q_T, -Q_T]^T, \\ \nabla_d &= \text{diag}(\nabla \cdot, \nabla \cdot, \nabla, \nabla, \nabla \cdot, \nabla \cdot), \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, \alpha_1, \alpha_2, 1, 1], \\ \rho_i &= \rho_i^\circ \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_i = e_i + K_i, \quad K_i = \mathbf{v}_i^2 / 2, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз; ∇ — оператор Гамильтона. Через $\alpha_i, \rho_i^\circ, \rho_i, \mathbf{v}_i, E_i, e_i, K_i, p$ обозначены объемная доля, истинная и приведенная плотности, вектор скорости, полная, внутренняя и кинетическая энергии единицы массы i -й фазы, давление газа; \mathbf{F}_μ, Q_T — соответственно вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия, мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема; t — время.

Замыкающими соотношениями системы (1) являются уравнения состояния идеального калорически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц: $p = (\gamma_1 - 1) \rho_1^\circ e_1, e_1 = c_v T_1, e_2 = c_2 T_2, \{\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const}$, где T_1, T_2 — температура несущей фазы и частиц; γ_1, c_v — показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; c_2 — удельная теплоемкость частиц. Силовое и тепловое межфазное взаимодействие \mathbf{F}_μ, Q_T рассчитываются по формулам [38]:

$$\mathbf{F}_\mu = (3/8)(\alpha_2/r) C_\mu \rho_1 \mathbf{w}_{12} |\mathbf{w}_{12}|, \quad \mathbf{w}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad Q_T = (3/2)(\alpha_2/r^2) \lambda_1 \text{Nu}_1 (T_1 - T_2).$$

Здесь r — радиус частицы, λ_1 — коэффициент теплопроводности газа, C_μ, Nu_1 — коэффициент сопротивления и число Нуссельта, определяемые из эмпирических зависимостей [38].

3. Гибридный метод крупных частиц. Кратко опишем алгоритм гибридного метода крупных частиц [39] для одномерного случая, обобщение на пространственные ортогональные сетки выполняется без существенных особенностей. В расчетах используется равномерная сетка с размером ячейки h . Целые индексы относятся к центру ячейки x_n , а полуцелые — к ее граням $x_{n\pm 1/2} = x_n \pm h/2$. Временной слой t^k пронумерован верхним индексом k , а шаг по времени обозначим $\tau = t^{k+1} - t^k$.

Алгоритм состоит из шага *предиктор* с расщеплением на лагранжевы (0), эйлеров и заключительный (1) этапы:

$$\mathbf{q}_n^{(0)} - \mathbf{H}(\mathbf{q}_n^{(0)})\tau = \mathbf{q}_n^k - \mathbf{B}_n^k \left(\tilde{\mathbf{F}}_{n+1/2}^k - \tilde{\mathbf{F}}_{n-1/2}^k \right) \tau/h, \quad (2)$$

$$\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(0)} - \left(\hat{\mathbf{G}}_{n+1/2}^{(0)} - \hat{\mathbf{G}}_{n-1/2}^{(0)} \right) \tau/h, \quad (3)$$

и шага *корректор* с определением окончательных значений искомым функций с суммарной аппроксимацией $O(h^2 + \tau^2)$ на гладких решениях:

$$\mathbf{q}_n^{(2)} - 0.5\mathbf{H}(\mathbf{q}_n^{(2)})\tau = 0.5 \left(\mathbf{q}_n^k + \mathbf{q}_n^{(1)} \right) - 0.5 \left(\tilde{\mathbf{F}}_{n+1/2}^{(1)} - \tilde{\mathbf{F}}_{n-1/2}^{(1)} \right) \tau/h, \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_n^{k+1} = \mathbf{q}_n^{(2)} - 0.5 \left(\hat{\mathbf{G}}_{n+1/2}^{(2)} - \hat{\mathbf{G}}_{n-1/2}^{(2)} \right) \tau/h. \quad (5)$$

Замечание 1. Для обеспечения монотонности численного решения на лагранжевом этапе используется нелинейная искусственная вязкость $Q_{n\pm 1/2}$ с ограничителем ψ_v типа Христенсена [40]: $\tilde{p}_{n\pm 1/2} = p_{n\pm 1/2} + (1 - \psi_v) Q_{n\pm 1/2}$. На эйлеровом этапе применяется гибридная схема потоков $\hat{\mathbf{G}}_{n\pm 1/2} = (1 - \psi_f) \mathbf{G}_{n\pm 1/2}^{\text{Upwind}} + \psi_f \mathbf{G}_{i\pm 1/2}^{\text{Centered}}$ с ограничителем ψ_f .

Замечание 2. Высокая устойчивость схемы достигается неявным учетом источниковых членов $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n)$ (межфазного трения и теплообмена) [25]. Для исключения итерационных процедур используется линеаризация $\mathbf{H}(\mathbf{q}_n)$, учитывая неявно линейную часть [26].

Шаг по времени определяется из условия Куранта–Фридрихса–Леви для “чистого” газа:

$$\tau^k = \text{CFL} \frac{h}{\max_{\forall n} (|v_n^k| + a_{1,n}^k)},$$

где CFL — фиксированное число Куранта (рекомендуемое значение ≤ 0.5), $a_{1,n}^k$ — скорость звука по газовой фазе в точке (x_n, t^k) .

Все расчеты выполнялись с числом Куранта CFL = 0.4. Для нелинейной коррекции схемы использовался ограничитель потоков Van Leer $\psi_f = (r + |r|) / (1 + r)$ в (3) и (5) и ограничитель вязкости Superbee $\psi_v = \max[\min(2r, 1), \min(r, 2), 0]$ в (2) и (4), где r — отношение наклонов параметров на грани ячейки [41].

4. Равновесные решения. Полагаем, что течение является равновесным по скоростям $u = u_1 = u_2$ и температурам фаз $T = T_1 = T_2$. Такое предположение справедливо, когда времена релаксаций фаз много меньше временного масштаба задачи. Пусть течение двухфазной среды характеризуется постоянными параметрами слева $(p_L, u_L, \rho_L, \alpha_{1L})$ и справа $(p_R, u_R, \rho_R, \alpha_{1R})$ от произвольного разрыва при $x = x_c$ и $t = t_c$, а также $p_L > p_R, u_R = 0$. Выпишем определяющие формулы распада произвольного разрыва в равновесной двухфазной среде, вытекающие из базовых соотношений [42, 43].

В случае $u_L \geq u'$, где

$$u' = (p_L - p_R) \sqrt{\frac{\chi_L - 1}{\rho_R (\kappa_L p_L + p_R)}},$$

реализуется конфигурация с двумя ударными волнами (SS) с давлением P , скоростью U и плотностью смеси слева R_- и справа R_+ от контактного разрыва. Вначале рассчитывается давление P :

$$u_L - (P - p_L) \sqrt{\frac{\chi_L - 1}{\rho_L (\kappa_L P + p_L)}} = (P - p_R) \sqrt{\frac{\chi_R - 1}{\rho_R (\kappa_R P + p_R)}},$$

где $\chi_J = (\gamma_J^* + 2\alpha_{1J} - 1) / (\gamma_J^* - 1)$, $\kappa_J = (\gamma_J^* + 1) / (\gamma_J^* - 1)$ — вспомогательные функции, J — индекс области L или R , $\gamma^* = 1 + (\zeta_1 R_1) / (\zeta_1 c_v + \zeta_2 c_2)$ — показатель политропы смеси, $\zeta_i = \rho_i / \rho$ — массовые концентрации фаз, R_1 — газовая постоянная. Затем остальные параметры:

$$U = u_L - (P - p_L) \sqrt{\frac{\chi_L - 1}{\rho_L (\kappa_L P + p_L)}},$$

$$R_- = \rho_L \frac{\kappa_L P + p_L}{\chi_{LP} + \frac{\gamma_L^* - 2\alpha_{1L} + 1}{\gamma_L^* - 1} P}, \quad \alpha_{1-} = 1 - \frac{R_-}{\rho_L} (1 - \alpha_{1L}),$$

$$R_+ = \rho_R \frac{\kappa_R P + p_R}{\chi_{RP} + \frac{\gamma_R^* - 2\alpha_{1R} + 1}{\gamma_R^* - 1} P}, \quad \alpha_{1+} = 1 - \frac{R_+}{\rho_R} (1 - \alpha_{1R}).$$

Используя полученные значения газодинамических величин, можно определить числа Маха и скорости движения левой и правой ударных волн:

$$M_- = \sqrt{\frac{\alpha_{1L}}{\alpha_{1-}} \left(\frac{\gamma_L^* + 2\alpha_{1-} - 1}{2\gamma_L^*} \frac{P}{p_L} + \frac{\gamma_L^* - 2\alpha_{1-} + 1}{2\gamma_L^*} \right)}, \quad D_- = u_L - M_- a_L,$$

$$M_+ = \sqrt{\frac{\alpha_{1R}}{\alpha_{1+}} \left(\frac{\gamma_R^* + 2\alpha_{1+} - 1}{2\gamma_R^*} \frac{P}{p_R} + \frac{\gamma_R^* - 2\alpha_{1+} + 1}{2\gamma_R^*} \right)}, \quad D_+ = M_+ a_R,$$

где $a_J = \sqrt{\gamma_J^* p_J / (\rho_J \alpha_J)}$ — скорость звука в области J .

В случае $u'' \leq u_L < u'$, где

$$u'' = \frac{2a_L \alpha_L}{\gamma_L^* - 1} \left[1 - \left(\frac{p_R}{p_L} \right)^{\frac{\gamma_L^* - 1}{2\gamma_L^*}} \right],$$

образуется конфигурация с волной разрежения, областью постоянного течения, контактным разрывом и ударной волной (WS). Определяется давление P как решение уравнения

$$u_L + \frac{2a_L \alpha_L}{\gamma_L^* - 1} \left[1 - \left(\frac{P}{p_L} \right)^{\frac{\gamma_L^* - 1}{2\gamma_L^*}} \right] = (P - p_R) \sqrt{\frac{\chi_R - 1}{\rho_R P + p_R}},$$

а также другие параметры за скачком уплотнения “+”, в зоне постоянного течения между контактным разрывом и волной разрежения “-”:

$$U = (P - p_R) \sqrt{\frac{\chi_R - 1}{\rho_R (\kappa_R P + p_R)}},$$

$$R_+ = \rho_R \frac{\kappa_R P + p_R}{\chi_{RP} + \frac{\gamma_R^* - 2\alpha_{1R} + 1}{\gamma_R^* - 1} P}, \quad \alpha_{1+} = 1 - \frac{R_+}{\rho_R} (1 - \alpha_{1R}),$$

$$R_- = \rho_L \left[\alpha_{2L} + \alpha_{1L} \left(1 - \frac{\gamma_L^* - 1}{2\alpha_{1L}} \frac{U - u_L}{a_L} \right)^{-\frac{2}{\gamma_L^* - 1}} \right]^{-1}, \quad \alpha_{1-} = 1 - \frac{R_-}{\rho_L} (1 - \alpha_{1L}),$$

$$M_+ = \sqrt{\frac{\alpha_{1R}}{\alpha_{1+}} \left(\frac{\gamma_R^* + 2\alpha_{1+} - 1}{2\gamma_R^*} \frac{P}{p_R} + \frac{\gamma_R^* - 2\alpha_{1+} + 1}{2\gamma_R^*} \right)}, \quad D_+ = M_+ a_R.$$

В области центрированной волны разрежения $u_L - a_L \leq (x - x_c) / (t - t_c) \leq U - a_+$ решение является автомодельным в зависимости от переменной $\xi' = \frac{x - x_c}{a_L \alpha_{1L} (t - t_c)} - \frac{M'_L}{\alpha_{1L}}$:

$$\left[\frac{(1 - \alpha_{1L}) \alpha_1}{(1 - \alpha_1) \alpha_{1L}} \right]^\omega = \frac{\alpha_1 + \omega}{\alpha_1 (1 - \omega \xi')}, \quad \omega = \frac{\gamma_L^* - 1}{2},$$

$$M' = M'_L + \frac{2\alpha_{1L}}{\gamma_L^* + 2\alpha_1 - 1} (\alpha_1 \xi' + 1), \quad M' = \frac{u}{a_L}, \quad M'_L = \frac{u_L}{a_L},$$

$$\rho = \rho_L \frac{\alpha_1}{\alpha_{1L}} \left(1 - \frac{\gamma_L^* - 1}{2\alpha_L} (M' - M'_L) \right)^{\frac{1}{\omega}}, \quad p = p_L \left(1 - \frac{\gamma_L^* - 1}{2\alpha_L} (M' - M'_L) \right)^{\frac{\gamma_L^*}{\omega}}.$$

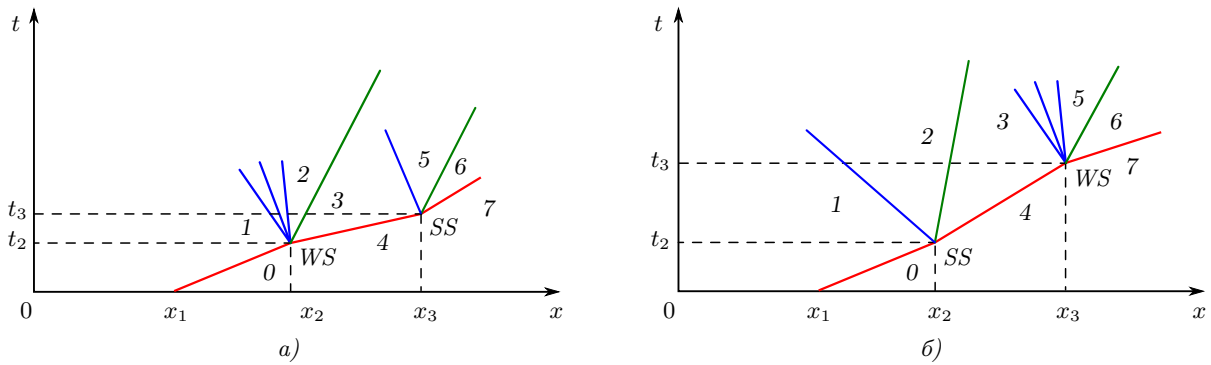


Рис. 1. Диаграммы взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси:
 а) пониженной плотности, б) повышенной плотности

Замечание 1. Для полноты приведем условие реализации третьего случая (две волны разрежения WW) $u''' \leq u_L < u''$, где $u''' = -\frac{2a_L \alpha_L}{\gamma_L^* - 1} - \frac{2a_R \alpha_R}{\gamma_R^* - 1}$.

Замечание 2. При выводе формул распада разрыва использовано свойство сохранения вдоль траектории смеси массовых концентраций фаз $d\zeta_2/dt \equiv \partial\zeta_2/\partial t + u\partial\zeta_2/\partial x = 0$ и как следствие неизменности показателя политропы смеси $d\gamma^*(\zeta_2)/dt = 0$. Откуда вытекают равенства $\gamma_-^* = \gamma_L^*$ и $\gamma_+^* = \gamma_R^*$.

Замечание 3. Приведенные соотношения являются асимптотически точным решением распада произвольного разрыва для полных уравнений динамики газозвеси (1) при уменьшении диаметра частиц $d \rightarrow 0$.

Рассмотрим одномерный вариант взаимодействия ударной волны со ступенькой пониженной (случай 1) или повышенной (случай 2) плотности. Взаимодействие ударной волны с числом Маха $M_0 = 1.22$ с неоднородностями, расположенными в области $x_2 \leq x \leq x_3$, представлено на $x-t$ диаграмме (рис. 1, траектории ударных волн и характеристик волны разрежения показаны красным и синим цветом соответственно, траектории контактных разрывов — зеленым цветом).

Течение характеризуется начальным состоянием 0, 4 и 7, а также параметрами за падающей 1, преломленной в слое 3, прошедшей 6 ударными волнами и отраженной центрированной волной разрежения 2 — в случае ступеньки пониженной плотности или повышенной плотности — 5. При взаимодействии падающей ударной волны со ступенькой возникают два типа распада разрывов: волна разрежения — ударная волна WS или две ударные волны SS (см. приведенные выше расчетные соотношения).

Одномерные задачи решались при начальных условиях, указанных в табл. 1.

Граничные условия слева и справа заданы в виде свободного втекания и вытекания. Для однородности алгоритма в области “чистого” газа задавалась пренебрежимо малая концентрация частиц $\alpha_2 = 10^{-10}$. Параметры за падающей ударной волной (область 1, рис. 1) определялись по следующим соотношениям [30]:

$$M_0^2 = \frac{\alpha_{10} [\chi_0 (\alpha_{20}) + 1] \alpha_{21} - [\chi_1 (\alpha_{21}) + 1] \alpha_{20}}{\gamma_0^*} \frac{\alpha_{21}}{\chi_1 (\alpha_{21}) \alpha_{20} - \alpha_{21} \alpha_{20}},$$

Таблица 1

Начальные условия одномерных задач (размерности системы СИ)

Область определения	$(\alpha_2, p, T_1, T_2, u_1, u_2)$
перед ударной волной $x_1 < x < x_2$ и $x > x_3$	$(0.001, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 1 $(10^{-10}, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 2
за ударной волной $x < x_1$	$(1.44442 \cdot 10^{-3}, 1.53851 \cdot 10^5, 308.111, 308.111, 66.0650, 66.0650)$ случай 1 $(1.37636 \cdot 10^{-10}, 1.5906 \cdot 10^5, 334.441, 334.441, 114.51, 114.51)$ случай 2
неоднородность $x_2 < x < x_3$	$(10^{-10}, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 1 $(0.001, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 2

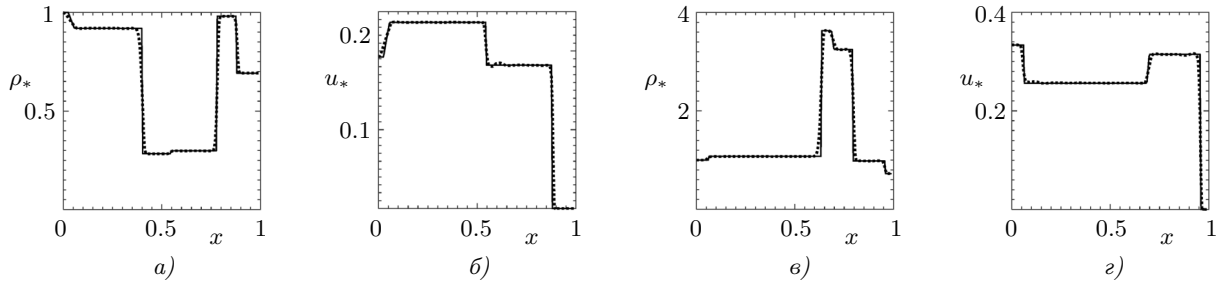


Рис. 2. Распределения относительных величин плотности ρ_* и скорости u_* газозвеси в момент времени $t = 0.001$ с

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{20}}, \quad p_1 = p_0 \frac{\chi_0 (\alpha_{20}) \alpha_{21} - \alpha_{20}}{\chi_1 (\alpha_{21}) \alpha_{20} - \alpha_{21}}, \quad u_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\rho_0} \frac{\alpha_{10} - \alpha_{11}}{1 - \alpha_{11}}}.$$

Для сравнения численных и аналитических решений выполнены расчеты гибридным методом крупных частиц по полным уравнениям неравновесной динамики газозвеси (1) задач преломления ударной волны на неоднородности пониженной или повышенной плотности. Результаты в виде распределения относительных величин плотности $\rho_* = \rho/\rho_1$ и скорости $u_* = u/a_0$ смеси воздуха и частиц кварцевого песка с истинной плотностью $\rho_2^0 = 2500$ кг/м³ представлены на рис. 2 (а, б — для случая 1; в, г — для случая 2). Здесь сплошные линии — точные решения, а пунктирные кривые — расчет для достаточно мелких частиц $d = 0.1$ мкм на сетке $1/200$ с шагом $h = 2$ мм. Время окончания расчета $t = 0.001$ с.

Наблюдается хорошее согласие численных результатов с автомодельными решениями. При увеличении разрешения сетки до $1/400$ расчетные и аналитические кривые графически совпадают, относительное расхождение в характерных точках 0.3 и 0.7 имеет порядок 10^{-4} .

Практический интерес представляет степень ослабления ударной волны в воздухе при ее прохождении через слой газозвеси в зависимости от числа Маха M_0 и объемной концентрации дисперсной фазы в неоднородности $\alpha_s = \alpha_{24}$ (индексы соответствуют областям на рис. 1 б). Результаты расчетов по аналитическим соотношениям для равновесной двухфазной среды показаны на рис. 3 а и б, где при фиксированном значении начальной объемной доли частиц в слое $\alpha_s = 0.001$ рассчитаны зависимости степени ослабления ударной волны $p_* = p_6/p_1$ и величины максимального сжатия слоя газозвеси $\alpha_* = \alpha_{23}$ от M_0 . На рис. 3 в, г задано постоянное число Маха падающей ударной волны $M_0 = 1.5$, а параметры p_* и α_* определялись в зависимости от начальной объемной концентрации дисперсной фазы слоя газозвеси α_s .

С увеличением числа Маха возрастает сжатие слоя газозвеси и степень ослабления падающей ударной волны (рис. 3 а и б), что объясняется более интенсивным поглощением ударно-волнового импульса смесью. С ростом начальной концентрации частиц степень ослабления падающей ударной волны увеличивается, а интенсивность прошедшей волны примерно на 30% меньше по отношению к исходному скачку уплотнения для $\alpha_s = 0.01$ (рис. 3 в). При этом сжатие слоя происходит практически по линейной зависимости (рис. 3 г).

5. Обсуждение численных двумерных решений. Изучим движение в плоском канале 1 (рис. 4) стационарной ударной волны 2 в воздухе с числом Маха 1.22 и ее взаимодействие с ограниченным слоем

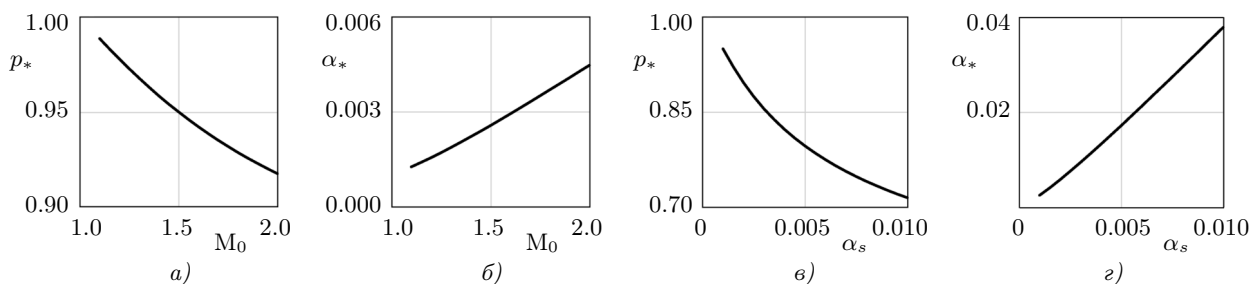


Рис. 3. Аналитические зависимости степени ослабления ударной волны p_* и величины максимального сжатия слоя газозвеси α_* в зависимости: а), б) от числа Маха M_0 при $\alpha_s = 0.001$; в), г) от начальной объемной концентрации частиц α_s при $M_0 = 1.5$

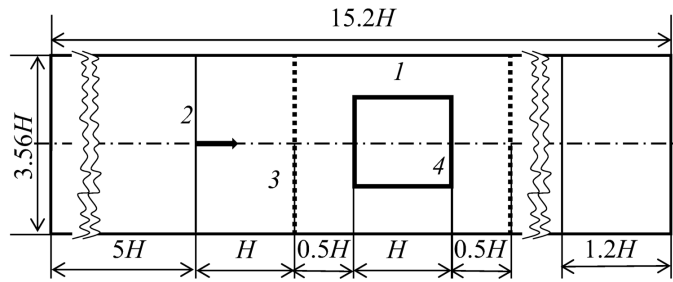


Рис. 4. Расчетная схема задачи

Таблица 2

Начальные условия двумерных задач (размерности системы СИ)

Область определения	$(\alpha_2, p, T_1, T_2, u_1, u_2)$
перед ударной волной	$(10^{-10}, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$
за ударной волной	$(1.37636 \cdot 10^{-10}, 1.5906 \cdot 10^5, 334.441, 334.441, 114.51, 114.51)$
слой газозвеси	$(0.001, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 1 $(0.0001, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 2
неоднородность	$(10^{-10}, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 1 $(0.001, 1.01325 \cdot 10^5, 293.23, 293.23, 0, 0)$ случай 2

газовзвеси 3, внутри которого имеется квадратная неоднородность 4 пониженной (случай 1) или повышенной (случай 2) плотности.

Начальные условия двумерных задач представлены в табл. 2.

Несжимаемые частицы газозвеси обладают плотностью $\rho_2^0 = 2500 \text{ кг/м}^3$ и удельной теплоемкостью $c_2 = 710 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Граничные условия заданы на стенках — отражения, а слева и справа расчетной области в виде свободного втекания и вытекания. Расчеты проведены до оси симметрии на равномерной сетке с разрешением 200 ячеек на размер неоднородности $H = 5 \text{ см}$ до момента времени $t_f = 2.5 \text{ мс}$. В правой части расчетной области размером $1.2H$ использована неравномерная сетка с шагом ячейки h , изменяющимся по зависимости $h'_{n+1} = h'_n + 0.5h$ (n — номер ячейки).

Вначале рассмотрим взаимодействие ударной волны со слоем газозвеси с мелкой фракцией частиц $d = 0.1 \text{ мкм}$. В этом случае течение смеси близко к равновесному. Пространственные зоны релаксации являются подсеточными. Газозвесь ведет себя как “тяжелый” газ со специальным уравнением состояния $e = \rho\alpha_1 / [(\gamma^* - 1)\rho]$ (e — внутренняя энергия смеси) [42, 43].

Численные решения для случаев неоднородности пониженной и повышенной плотности в виде плириен-изображений функции градиента плотности смеси представлены на рис. 5 и 6 соответственно. На этих рисунках приведены четыре характерные момента времени. После столкновения падающего скачка уплотнения с левой границей слоя газозвеси c_1 происходит распад разрыва с отраженной и прошедшей s_1 ударных волн. Затем при взаимодействии скачка уплотнения с неоднородностью возникает следующий распад WS типа (рис. 5 а) или SS типа (рис. 6 а). При этом образуются структуры, известные как двойное преломление фон Неймана: с проходящей ударной волной s_2 , предвестником, ножкой Маха, двумя искривленными ударными волнами (см. выноски N_1 на рис. 5 а и N_2 на рис. 6 а). Вследствие различных скоростей звука в неоднородности и слое газозвеси ударная волна s_2 отстает в случае 1 или опережает в случае 2 в своем движении внешний скачок уплотнения s_1 .

При схождении скачков s_3 и s_4 к оси симметрии возникают отраженные волны s_5 и эффект фокусировки f в задаче с неоднородностью повышенной плотности (рис. 6 б и в). А в случае 1 движение системы скачков уплотнения s_4 имеет дивергентный характер (рис. 5 б и в). В рассматриваемые моменты времени отмечается искривление поверхностей слоя газозвеси с выпуклостью по потоку для случая 1 и против потока для случая 2. В последующем существенно деформируются контактные границы c_1 и c_2 слоя газозвеси, развивается неустойчивость Рихтмайера–Мешкова и турбулентные разнонаправленные грибовидные вихревые структуры tu (рис. 5 г и рис. 6 г).

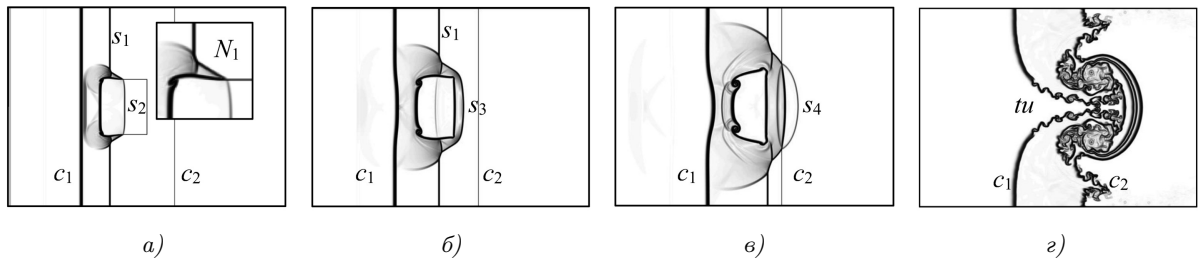


Рис. 5. Взаимодействие ударной волны с неоднородностью пониженной плотности ($d = 0.1$ мкм). Численные шпирен-изображения функции градиента плотности смеси в моменты времени: а) 0.3 мс; б) 0.4 мс; в) 0.5 мс; г) 2.5 мс

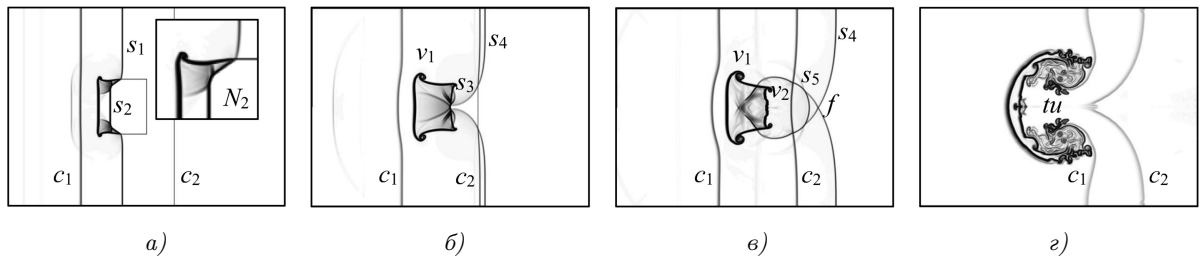


Рис. 6. Взаимодействие ударной волны с неоднородностью повышенной плотности ($d = 0.1$ мкм). Численные шпирен-изображения функции градиента плотности смеси в моменты времени: а) 0.26 мс; б) 0.4 мс; в) 0.5 мс; г) 2.5 мс

С увеличением размеров частиц газозвеси начинает проявляться эффект неравновесности (различие скоростей и температур фаз). На рис. 7 для случая 2 приведены шпирен-изображения функции градиента плотности смеси и распределения относительной плотности смеси $\bar{\rho} = \rho/\rho_1$ на оси симметрии для различных диаметров частиц ($d = 0.1, 1, 2, 10$ мкм) в расчетный момент времени $t = 0.26$ мс. Осевая координата отнесена к размеру неоднородности $\bar{x} = x/H$.

Релаксационные процессы для смеси несущего газа и группы частиц характеризуются временами выравнивания скоростей и температур фаз [31]. Поскольку для рассматриваемой задачи их значения по

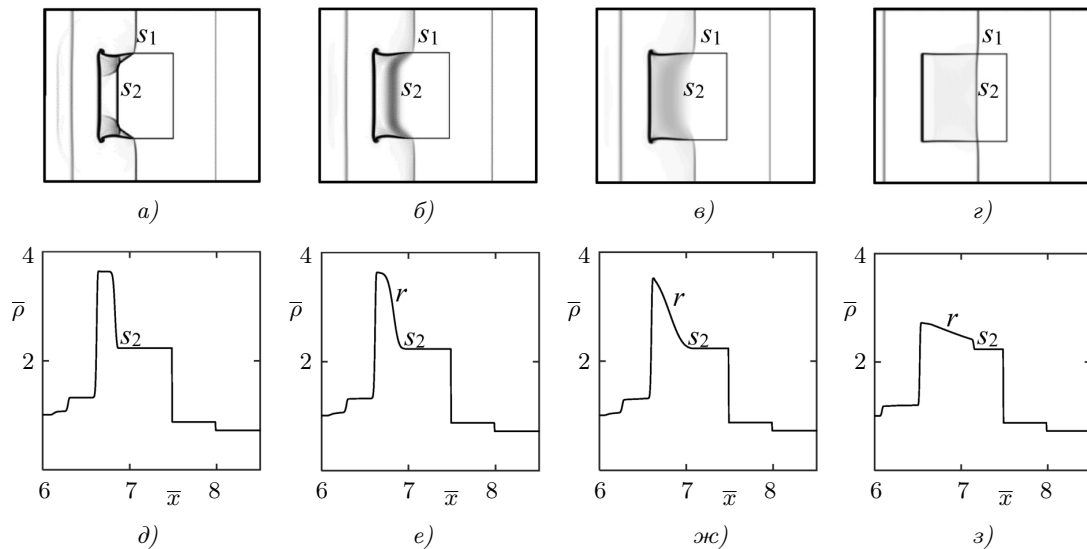


Рис. 7. Взаимодействие ударной волны с неоднородностью повышенной плотности в момент времени $t = 0.26$ мс. Численные шпирен-изображения функции градиента плотности смеси и распределения плотности смеси на оси симметрии для различных диаметров частиц: а), д) 0.1 мкм; б), е) 1 мкм; в), ж) 2 мкм; г), з) 10 мкм

порядку сопоставимы, то в качестве масштаба используем время динамической релаксации дисперсной фазы $t_2^{(\mu)} = \rho_2^0 d^2 / (18\mu_1 \alpha_1)$. Хорошим приближением для оценки относительной пространственной зоны релаксации за ударной волной может служить выражение $\bar{h}_r = (a_{10} 3 t_2^{(\mu)}) / H$, где a_{10} — скорость звука в несущем газе. Для исследуемого ряда размеров частиц значения \bar{h}_r равны 0.0016, 0.16, 0.64, 16, что соответствует расчетным областям “размазывания” профиля плотности смеси (рис. 7). Следует отметить структурные особенности течения газозвеси, которые характеризуются двумя сильными разрывами s_1 и s_2 для $d = 0.1$ мкм (рис. 7 а и д), сильным разрывом для огибающей ударной волны s_1 в слое газозвеси и вырожденным (звуковым) фронтом волны в неоднородности s_2 для $d = 1$ и 2 мкм (рис. 7 б, в, е, ж), двумя скачками s_1 и s_2 конечной интенсивности для $d = 10$ мкм (рис. 7 з и з).

6. Заключение. Для одномерной постановки задачи взаимодействия ударной волны с областями пониженной и повышенной плотности получены асимптотически точные равновесные решения. Расчет гибридным методом крупных частиц по неравновесным уравнениям динамики смеси газа и твердых частиц находится в хорошем соответствии с асимптотическими решениями. На основе автомодельных соотношений выполнен анализ степени ослабления ударной волны слоем мелкодисперсной газозвеси для различных чисел Маха и концентраций дисперсной фазы в неоднородности.

Изучена динамика неоднородного слоя при прохождении скачка уплотнения в двумерных областях. Получена оценка пространственных зон релаксации для различных размеров частиц, которая согласуется с результатами численного моделирования. Установлено, что в зависимости от времен релаксации фаз реализуются два режима течения: с двумя сильными разрывами или огибающей ударной волной совместно с вырожденным (звуковым) фронтом внутри неоднородности.

Гибридный метод крупных частиц продемонстрировал большой запас устойчивости и высокую разрешающую способность выявления ударно-волновых структур, развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. Метод обладает универсальностью и возможностью решения расширенного класса задач с доминированием конвекции гиперболического или смешанного типа, в консервативной или недивергентной записи уравнений. Рассмотренные задачи совместно с асимптотически точными решениями могут служить тестом для проверки других разностных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. *Рув Г.А., Рождественский Б.Л., Фомин В.М., Яненко Н.Н.* Законы сохранения систем уравнений двухфазных сред // Доклады Академии наук СССР. 1980. **254**, № 2. 289–293.
3. *Huilin L., Gidaspow D., Bouillard J., Wentie L.* Hydrodynamic simulation of gas-solid flow in a riser using kinetic theory of granular flow // Chemical Engineering Journal. 2003. **95**, N 1–3. 1–13.
4. *Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Тетерина И.В.* Моделирование нестационарного течения газозвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем частиц // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21** (1). 96–114.
5. *Sauvel R., Abgrall R.* A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // Journal of Computational Physics. 1999. **150**, N 2. 425–467.
6. *Abgrall R., Sauvel R.* Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // Journal of Computational Physics. 2003. **186**, N 2. 361–396.
7. *Tokareva S.A., Toro E.F.* HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // Journal of Computational Physics. 2010. **229**, N 10. 3573–3604.
8. *Jackson R.* The mechanics of fluidized beds. I: The stability of the state of uniform fluidization // Trans. Inst. Chem. Eng. 1963. **41**. 13–21.
9. *Rudinger G., Chang A.* Analysis of non-steady two-phase flow // Phys. Fluid 1964. **7**. 1747–1754.
10. *Низматуллин П.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
11. *Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurnyi N.* Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield // J. Fluid Mech. 1984. **140**. 223–256.
12. *Ding J., Gidaspow D.A.* A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow // AIChE J. 1990. **36**, N 4. 523–538.
13. *Boemer A., Qi H., Renz U.* Eulerian simulation of bubble formation at a jet in a two-dimensional fluidized bed // Int. J. Multiphase Flow. 1997. **23**, N 5. 927–944.
14. *Гольдштик М.А.* Элементарная теория кипящего слоя // Прикладная механика и техническая физика. 1972. № 6. 106–112.

15. *Садин Д.В.* Поведение нестационарной струи при истечении смеси газа высокого давления и дисперсной среды из цилиндрического канала в атмосферу // Прикладная механика и техническая физика. 1999. **40** (1). 151–157.
16. *Садин Д.В., Любарский С.Д., Гравченко Ю.А.* Особенности недорасширенной импульсной импактной газодисперсной струи с высокой концентрацией частиц // Журнал технической физики. 2017. **87**, вып. 1. 22–26.
17. *Gidaspow D.* Multiphase flow and fluidization: continuum and kinetic theory descriptions. New York: Academic Press, 1994.
18. *Goldshtein A., Shapiro M.* Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 1. General hydrodynamic equations // J. Fluid Mech. 1995. **282**. 75–114.
19. *Lyczkowski R.W., Gidaspow D., Solbrig C.W., Hughes E.D.* Characteristics and stability analyses of transient one-dimensional two-phase flow equations and their finite difference approximations // Nucl. Sci. Eng. 1978. **66**, N 3. 378–396.
20. *Клебанов Л.А., Крошилин А.Е., Нигматуллин Б.И., Нигматуллин Р.И.* О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // Прикладная математика и механика. 1982. **46**, № 1. 83–95.
21. *Drew D.A.* Mathematical modelling of two-phase flow // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. **15**. 261–291.
22. *Суров В.С.* Гиперболические модели в механике гетерогенных сред // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. **54**, № 1. 139–148.
23. *Hantke M., Matern C., Warnecke G.* Numerical solutions for a weakly hyperbolic dispersed two-phase flow model // Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems I. Vol. 236. Cham: Springer, 2018. 665–675.
24. *Садин Д.В.* О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. **38**, № 9. 1572–1577.
25. *Садин Д.В.* Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных течений газа в пористой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. **36**, № 10. 158–164.
26. *Садин Д.В.* Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. **38**, № 6. 1033–1039.
27. *Gascón L., Corberán J.M.* Construction of second-order TVD schemes for nonhomogeneous hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 2001. **172**, N 1. 261–297.
28. *Xing Y., Shu C.-W.* High-order well-balanced finite difference WENO schemes for a class of hyperbolic systems with source terms // Journal of Scientific Computing. 2006. **27**, N 1–3. 477–494.
29. *Saurel R., Le Métayer O., Massoni J., Gavrilyuk S.* Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation // Shock Waves. 2007. **16**, N 3. 209–232.
30. *Садин Д.В.* TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. **56**, № 12. 2098–2109.
31. *Садин Д.В.* О жесткости систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движения гетерогенных сред // Математическое моделирование. 2002. **14**, № 11. 43–53.
32. *Садин Д.В.* Проблема жесткости при моделировании волновых течений гетерогенных сред с трехтемпературной схемой межфазного тепло- и массообмена // Прикладная механика и техническая физика. 2002. **43**, № 2. 136–141.
33. *Бойко В.М., Киселев В.П., Киселев С.П., Папырин А.Н., Поплавский С.В., Фомин В.М.* О взаимодействии ударной волны с облаком частиц // Физика горения и взрыва. 1996. **32**, № 2. 86–99.
34. *Дэвис С.Л., Диттман Т.Б., Якобс Дж.Б., Дон В.С.* Дисперсия облака частиц в ударной волне. Влияние формы, угла поворота и геометрических параметров облака на динамику потока и дисперсию // Прикладная механика и техническая физика. 2013. **54**, № 6. 45–59.
35. *Тукмаков Д.А.* Численное исследование интенсивных ударных волн в запыленных средах с однородной и двухкомпонентной несущей фазой // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. **12**, № 1. 141–154.
36. *Садин Д.В., Давидчук В.А.* Взаимодействие плоской ударной волны с областями различной формы и плотности в мелкодисперсной газозвеси // Инженерно-физический журнал. 2020. **93**, № 2. 489–498.
37. *Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Тетерина И.В.* Влияние двумерных эффектов на взаимодействие ударной волны с облаком частиц // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21** (3). 207–224.
38. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
39. *Садин Д.В.* Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газозвеси // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2019. **12**, № 2. 112–122.
40. *Christensen R.B.* Godunov methods on a staggered mesh — an improved artificial viscosity. Preprint UCRL-JC-105269. Livermore: Lawrence Livermore Nat. Lab., 1990.
41. *Hirsch C.* Numerical computation of internal and external flows. Vol. 2. Computational methods for inviscid and viscous flows. Wiley: New York, 1990.

42. Садин Д.В. Основы теории моделирования волновых гетерогенных процессов. СПб: Военный инженерно-космический ун-т, 2000.
43. Садин Д.В. Решение жестких задач течений двухфазных сред со сложной волновой структурой // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. **15**, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/243/>

Поступила в редакцию
3 октября 2020

Simulation of a Shock Wave Interaction with a Bounded Inhomogeneous Gas–Particle Layer Using the Hybrid Large-Particle Method

D. V. Sadin¹, I. O. Golikov², and V. A. Davidchuk³

¹ *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, St. Petersburg, 197198, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: sadin@yandex.ru*

² *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, St. Petersburg, 197198, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: igira55@yandex.ru*

³ *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, St. Petersburg, 197198, Russia; Postgraduate, e-mail: david_lcii@mail.ru*

Received October 3, 2020

Abstract: The problems of shock wave interaction with a bounded layer of gas suspension is studied in the case when a square-section inhomogeneity of reduced or increased density is situated inside this layer. The hybrid large-particle method of the second-order approximation in space and time is used for calculations. The numerical correctness of discontinuous solutions, in particular jumps of porosity, is confirmed by comparison with the asymptotically exact profiles of the mixture density. Analytical dependences of shock wave attenuation by a gas suspension layer are given. Shock-wave structures in two-dimensional regions and the effect of relaxation processes on them are analyzed.

Keywords: hybrid large-particle method, inhomogeneous gas–particle layer, shock wave, relaxation, asymptotically exact solution.

References

1. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; Amer. Math. Soc., Providence, 1982).
2. G. A. Ruev, B. L. Rozhdestvenskii, V. M. Fomin, and N. N. Yanenko, “Conservation Laws for Systems of Equations for Two-Phase Media,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **254** (2), 288–293 (1980) [*Sov. Math. Dokl.* **22** (2), 352–357 (1980)].
3. L. Huilin, D. Gidaspow, J. Bouillard, and L. Wentie, “Hydrodynamic Simulation of Gas–Solid Flow in a Riser Using Kinetic Theory of Granular Flow,” *Chem. Eng. J.* **95** (1–3), 1–13 (2003).
4. K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, A. G. Karpenko, and I. V. Teterina, “Simulation of Unsteady Gas–Particle Flow Induced by the Shock-Wave Interaction with a Particle Layer,” *Vychisl. Metody Programm.* **21** (1), 96–114 (2020).
5. R. Saurel and R. Abgrall, “A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows,” *J. Comput. Phys.* **150** (2), 425–467 (1999).
6. R. Abgrall and R. Saurel, “Discrete Equations for Physical and Numerical Compressible Multiphase Mixtures,” *J. Comput. Phys.* **186** (2), 361–396 (2003).
7. S. A. Tokareva and E. F. Toro, “HLLC-Type Riemann Solver for the Baer–Nunziato Equations of Compressible Two-Phase Flow,” *J. Comput. Phys.* **229** (10), 3573–3604 (2010).
8. R. Jackson, “The Mechanics of Fluidized Beds. I: The Stability of the State of Uniform Fluidization,” *Trans. Inst. Chem. Eng.* **41**, 13–21 (1963).
9. G. Rudinger and A. Chang, “Analysis of Non-Steady Two-Phase Flow,” *Phys. Fluid* **7**, 1747–1754 (1964).

10. R. I. Nigmatulin, *Fundamentals of the Mechanics of Heterogeneous Media* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
11. C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, and N. Chepurnyi, “Kinetic Theories for Granular Flow: Inelastic Particles in Couette Flow and Slightly Inelastic Particles in a General Flowfield,” *J. Fluid Mech.* **140**, 223–256 (1984).
12. J. Ding and D. Gidaspow, “A Bubbling Fluidization Model Using Kinetic Theory of Granular Flow,” *AIChE J.* **36** (4), 523–538 (1990).
13. A. Boemer, H. Qi, and U. Renz, “Eulerian Simulation of Bubble Formation at a Jet in a Two-Dimensional Fluidized Bed,” *Int. J. Multiph. Flow* **23** (5), 927–944 (1997).
14. M. A. Gol’dshhtik, “Elementary Theory of the Boiling Layer,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, No. 6, 106–112 (1972) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **13** (6), 851–856 (1972)].
15. D. V. Sadin, “Behavior of the Unsteady Jet of a Mixture of a Pressurized Gas and Dispersed Particles Discharged from a Circular Duct into the Atmosphere,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, **40** (1), 151–157 (1999) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **40** (1), 130–135 (1999)].
16. D. V. Sadin, S. D. Lyubarskii, and Yu. A. Gravchenko, “Features of an Underexpanded Pulsed Impact Gas-Dispersed Jet with a High Particle Concentration,” *Zh. Tekh. Fiz.* **87** (1), 22–26 (2017) [*Tech. Phys.* **62** (1), 18–23 (2017)].
17. D. Gidaspow, *Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Descriptions* (Academic Press, New York, 1994).
18. A. Goldshtein and M. Shapiro, “Mechanics of Collisional Motion of Granular Materials. Part 1. General Hydrodynamic Equations,” *J. Fluid Mech.* **282**, 75–114 (1995).
19. R. W. Lyczkowski, D. Gidaspow, C. W. Solbrig, and E. D. Hughes, “Characteristics and Stability Analyses of Transient One-Dimensional Two-Phase Flow Equations and Their Finite Difference Approximations,” *Nucl. Sci. Eng.* **66** (3), 378–396 (1978).
20. L. A. Klebanov, A. E. Kroshilin, B. I. Nigmatulin, and R. I. Nigmatulin, “On the Hyperbolicity, Stability and Correctness of the Cauchy Problem for the System of Equations of Two-Speed Motion of Two-Phase Media,” *Prikl. Mat. Mech.* **46** (1), 83–95 (1982) [*J. Appl. Math. Mech.* **46** (1), 66–74 (1982)].
21. D. A. Drew, “Mathematical Modelling of Two-Phase Flow,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15**, 261–291 (1983).
22. V. S. Surov, “Hyperbolic Models in the Mechanics of Heterogeneous Media,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **54** (1), 139–148 (2014) [*Comput. Math. Math. Phys.* **54** (1), 148–157 (2014)].
23. M. Hantke, C. Matern, and G. Warnecke, “Numerical Solutions for a Weakly Hyperbolic Dispersed Two-Phase Flow Model,” in *Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems I* (Springer, Cham, 2018), Vol. 236, pp. 665–675.
24. D. V. Sadin, “On the Convergence of a Certain Class of Difference Schemes for the Equations of Unsteady Gas Motion in a Disperse Medium,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **38** (9), 1572–1577 (1998) [*Comput. Math. Math. Phys.* **38** (9), 1508–1513 (1998)].
25. D. V. Sadin, “A Modified Large-Particle Method for Calculating Unsteady Gas Flows in a Porous Medium,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **36** (10), 158–164 (1996) [*Comput. Math. Math. Phys.* **36** (10), 1453–1458 (1996)].
26. D. V. Sadin, “A Method for Computing Heterogeneous Wave Flows with Intense Phase Interaction,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **38** (6), 1033–1039 (1998) [*Comput. Math. Math. Phys.* **38** (6), 987–993 (1998)].
27. L. Gascón and J. M. Corberán, “Construction of Second-Order TVD Schemes for Nonhomogeneous Hyperbolic Conservation Laws,” *J. Comput. Phys.* **172** (1), 261–297 (2001).
28. Y. Xing and C.-W. Shu, “High-Order Well-Balanced Finite Difference WENO Schemes for a Class of Hyperbolic Systems with Source Terms,” *J. Sci. Comput.* **27** (1–3), 477–494 (2006).
29. R. Saurel, O. Le Métayer, J. Massoni, and S. Gavrilyuk, “Shock Jump Relations for Multiphase Mixtures with Stiff Mechanical Relaxation,” *Shock Waves* **16** (3), 209–232 (2007).
30. D. V. Sadin, “TVD Scheme for Stiff Problems of Wave Dynamics of Heterogeneous Media of Nonhyperbolic Nonconservative Type,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **56** (12), 2098–2109 (2016) [*Comput. Math. Math. Phys.* **56** (12), 2068–2978 (2016)].
31. D. V. Sadin, “On Stiff Systems of Partial Differential Equations for Motion of Heterogeneous Media,” *Mat. Model.* **14** (11), 43–53 (2002).

32. D. V. Sadin, “Stiffness Problem in Modeling Wave Flows of Heterogeneous Media with a Three-Temperature Scheme of Interphase Heat and Mass Transfer,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **43** (2), 136–141 (2002) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **43** (2), 286–290 (2002)].
33. V. M. Bojko, V. P. Kiselev, S. P. Kiselev, et al., “Interaction of a Shock Wave with a Cloud of Particles,” *Fiz. Goreniya Vzryva* **32** (2), 86–99 (1996) [*Combust. Explos. Shock Waves* **32** (2), 191–203 (1996)].
34. S. L. Davis, T. B. Dittmann, G. B. Jacobs, and W. S. Don, “Dispersion of a Cloud of Particles by a Moving Shock: Effects of the Shape, Angle of Rotation, and Aspect Ratio,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **54** (6), 45–59 (2013) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **54** (6), 900–912 (2013)].
35. D. A. Tukmakov, “Numerical Study of Intense Shock Waves in Dusty Media with a Homogeneous and Two-Component Carrier Phase,” *Comput. Issled. Model.* **12** (1), 141–154 (2020).
36. D. V. Sadin and V. A. Davidchuk, “Interaction of a Plane Shock Wave with Regions of Varying Shape and Density in a Finely Divided Gas Suspension,” *Inzh. Fiz. Zh.* **93** (2), 489–498 (2020) [*J. Eng. Phys. Thermophys.* **93** (2), 474–483 (2020)].
37. K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, A. G. Karpenko, and I. V. Teterina, “Two-Dimensional Effects on the Interaction of a Shock Wave with a Cloud of Particles,” *Vychisl. Metody Programm.* **21**, 207–224 (2020).
38. R. I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media* (Nauka, Moscow, 1987; Hemisphere, New York, 1990).
39. D. V. Sadin, “A Modification of the Large-Particle Method to a Scheme Having the Second Order of Accuracy in Space and Time for Shockwave Flows in a Gas Suspension,” *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Programm.* **12** (2), 112–122 (2019).
40. R. B. Christensen, *Godunov Methods on a Staggered Mesh — An Improved Artificial Viscosity*, Preprint UCRL-JC-105269 (Lawrence Livermore Nat. Lab., Livermore, 1990).
41. C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows* (Wiley, New York, 1990).
42. D. V. Sadin, *Fundamentals of the Theory of Modeling Wave Heterogeneous Processes* (Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, 2000) [in Russian].
43. D. V. Sadin, “Stiff Problems of a Two-Phase Flow with a Complex Wave Structure,” *Fiz.-Khim. Kinetika Gaz Din.* **15** (4) (2014).
<http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/243/>. Cited December 6, 2020.