

УДК 519.633

doi 10.26089/NumMet.v21r433

О ПРИМЕНЕНИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ТРОПОСФЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

М. С. Лытаев¹

Рассматривается задача численного моделирования распространения электромагнитных волн в неоднородной тропосфере на основе широкоугольных обобщений метода параболического уравнения. Используется конечно-разностная аппроксимация Паде оператора распространения. Существенно, что в предлагаемом подходе указанная аппроксимация осуществляется одновременно по продольной и поперечной координатам. При этом допускается моделирование произвольного коэффициента преломления тропосферы. Метод не накладывает ограничений на максимальный угол распространения. Для различных условий распространения радиоволн проведено сравнение с методом расщепления Фурье и методом геометрической теории дифракции. Показаны преимущества предлагаемого подхода.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, параболическое уравнение, распространение радиоволн, аппроксимация Паде.

1. Введение. Одним из самых широко используемых подходов к решению задачи тропосферного распространения электромагнитных волн является метод параболического уравнения (ПУ) [1–3]. Метод ПУ позволяет одновременно учитывать пространственные изменения показателя преломления тропосферы, неоднородности и кривизну земной поверхности, весьма произвольные параметры излучающей антенны. Данный метод постоянно модернизируется с целью учета все более сложных условий распространения [4]. Появляется возможность учета обратного рассеяния [5–8], лесных массивов [9], взволнованной поверхности моря [10]. Имеются работы по применению метода ПУ в существенно трехмерных задачах [11, 12] и во временной области [13]. Из этого следует, что соответствующие численные методы тоже должны постоянно совершенствоваться.

Метод ПУ широко используется не только в задачах тропосферного распространения, но также в гидроакустике [14], геофизике [15], оптике [16] и квантовой механике [17]. Классическое ПУ, разработанное М.А. Леонтовичем и В.А. Фоком [1], применимо для углов распространения, не превышающих нескольких градусов [2]. Для снятия этого ограничения были разработаны широкоугольные модификации метода ПУ, основанные на теории псевдодифференциальных операторов [14, 18, 19, 20]. В настоящей работе рассматривается однонаправленное уравнение Гельмгольца, которое можно считать обобщением классического метода ПУ.

На сегодняшний день существуют два широко используемых подхода к решению ПУ и его широкоугольных обобщений: метод расщепления Фурье [21, 22] и конечно-разностные численные схемы [23, 24]. Метод расщепления Фурье является наиболее распространенным в настоящее время. Считается, что метод расщепления Фурье быстрее существующих конечно-разностных аппроксимаций ПУ, однако имеет трудности с моделированием как верхнего, так и нижнего граничного условия (ГУ). Конечно-разностные методы лучше приспособлены к моделированию сложных граничных условий, но на сегодняшний день несколько уступают в производительности, что затрудняет их широкое практическое применение. В последнее время появляется все больше работ, посвященных применению конечно-разностных методов для решения ПУ в задачах тропосферного распространения [25–31]. Для подробно сравнительного анализа указанных методов можно обратиться к [32–34].

Особенностью задачи тропосферного распространения является необходимость проведения вычислений в неограниченной по высоте расчетной области. Для учета верхнего прозрачного ГУ в рамках конечно-разностных методов используется метод дискретных нелокальных ГУ [35–38]. В рамках метода

¹ Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург; младший научный сотрудник, e-mail: mikelytaev@gmail.com

расщепления Фурье используется нестрогий метод искусственного поглощающего слоя, который в некоторых случаях приводит к неудовлетворительным численным результатам [28, 39]. Моделирование нижнего импедансного ГУ также может быть проблемой при использовании метода расщепления Фурье [10, 40]. Моделирование импедансного ГУ в рамках конечно-разностных методов выполняется непосредственно и не вызывает проблем [31].

Целью настоящей работы является повышение эффективности конечно-разностных численных методов решения ПУ. Известно, что использование высокоточных аппроксимаций псевдодифференциального оператора распространения позволяет не только увеличить максимальный угол распространения, но и повысить скорость расчетов [2, 19]. Ранее аппроксимации высокого порядка точности использовались для численного интегрирования по продольной координате (x), в то время как по поперечной координате (z) обычно использовалась простая аппроксимация второго порядка точности [39]. В данной работе предлагается использовать аппроксимацию Паде высокого порядка точности одновременно по продольной и поперечной координатам. При этом сохраняется возможность использования произвольного показателя преломления тропосферы.

Проясним структуру данной работы. Следующий раздел посвящен математической постановке задачи. В разделе 3 представлена конечно-разностная схема, основанная на аппроксимации Паде по продольной координате и аппроксимации второго порядка точности по поперечной координате. В разделе 4 предлагается совместная аппроксимация Паде по продольной и поперечной координатам, позволяющая учитывать неоднородности коэффициента преломления тропосферы. В разделе 5 приводится сравнительный анализ численных схем в различных условиях распространения.

2. Постановка задачи. Будем исходить из двумерного уравнения Гельмгольца [2]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 m^2(x, z) \psi = 0, \quad (1)$$

где $\psi(x, z)$ — искомая компонента электромагнитного поля, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны. Функция m определяется через коэффициент преломления тропосферы n и радиус Земли R следующим образом:

$$m = n + 1/R.$$

Функция m позволяет наравне с тропосферной рефракцией учитывать кривизну земной поверхности и обычно называется модифицированным коэффициентом преломления [2]. Далее используется приведенный модифицированный коэффициент преломления

$$M = 10^6(m - 1),$$

численные значения которого называются M -единицами. Функция $\psi(x, z)$ удовлетворяет импедансному граничному условию на нижней границе

$$\left(q_1 \psi + q_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_{z=h(x)} = 0,$$

где $h(x)$ — профиль рельефа местности, коэффициенты q_1 и q_2 определяются из свойств подстилающей поверхности [2].

Волновой процесс порождается начальным условием вида

$$\psi(0, z) = \psi_0(z), \quad (2)$$

с известной функцией $\psi_0(z)$, отвечающей диаграмме направленности антенны.

Следуя общепринятой методологии [2, 20], уравнение для волн, распространяющихся вдоль положительного направления оси x , можно записать следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik(\sqrt{1+L} - 1)u, \quad (3)$$

где

$$Lu = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (m^2 - 1)u,$$

$$u(x, z) = e^{-ikx} \psi(x, z).$$

3. Аппроксимация Паде оператора распространения. Пошаговое решение уравнения (3) формально записывается при помощи псевдодифференциального оператора распространения следующим образом:

$$u(x + \Delta x, z) = \exp\left(ik\Delta x\left(\sqrt{1+L}-1\right)\right)u(x, z). \tag{4}$$

Для дискретных функций далее используются следующие обозначения:

$$u_j^n = u(n\Delta x, j\Delta z), \quad u^n(z) = u(n\Delta x, z).$$

Рассматривая оператор распространения (4) как функцию от оператора L , можно записать аппроксимацию Паде порядка $[m/n]$ [19, 41] в следующей форме

$$\exp\left(ik\Delta x\left(\sqrt{1+L}-1\right)\right) \approx \frac{1 + \prod_{l=1}^m \tilde{a}_l L^l}{1 + \prod_{l=1}^n \tilde{b}_l L^l} = \prod_{l=1}^p \frac{1 + a_l L}{1 + b_l L}. \tag{5}$$

Происходит одновременная аппроксимация псевдодифференциального оператора квадратного корня, отвечающего за максимальный угол распространения, и операторной экспоненты, отвечающей за интегрирование по продольной координате x . Таким образом, при выборе достаточного количества коэффициентов аппроксимации Паде можно достичь любого требуемого угла распространения.

Действие оператором распространения (4) можно приближенно записать при помощи следующей системы одномерных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (1 + b_1 L) v^n = (1 + a_1 L) u^{n-1}, \\ (1 + b_l L) v_l^n = (1 + a_l L) v_{l-1}^n, \\ (1 + b_p L) u^n = (1 + a_p L) v_{p-1}^n, \end{cases} \quad l = 2, \dots, p-1, \tag{6}$$

где $u^{n-1}(z)$ — значение поля, полученное на предыдущем шаге, u^n — искомое значение поля на текущем шаге, v_l^n — вспомогательные функции.

Система (6) состоит из p однотипных уравнений вида

$$(1 + bL) v = (1 + aL) u \tag{7}$$

и решается последовательно сверху вниз. Заменим в уравнении (7) оператор L на его конечно-разностный аналог второго порядка точности

$$\hat{L}u_j = \frac{1}{k^2\Delta z^2}\delta^2u_j + (m_j^2 - 1)u_j,$$

где оператор второй разности δ^2 определяется следующим образом:

$$\delta^2u = u(z - \Delta z) - 2u(z) + u(z + \Delta z) = u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}.$$

Получим следующее конечно-разностное уравнение:

$$\left(1 + b\left(\frac{1}{k^2\Delta z^2}\delta^2u_j + (m_j^2 - 1)u_j\right)\right)v = \left(1 + a\left(\frac{1}{k^2\Delta z^2}\delta^2u_j + (m_j^2 - 1)u_j\right)\right)u.$$

Данное уравнение, вместе с дискретными граничными условиями [31], представляет собой трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и решается за линейное время методом прогонки. В итоге получилась схема, имеющая произвольный порядок точности при интегрировании по продольной координате x и второй порядок по z .

4. Совместная аппроксимация Паде по продольной и поперечной координатам. Отметим, что если в аппроксимации (5) положить $p = 1$, то рассматриваемая схема сводится к хорошо известному методу Кранка–Николсон для решения ПУ [25]. Вместе с тем, данная схема значительно превосходит метод Кранка–Николсон как по скорости расчетов, так и в смысле гладкости получаемых решений [2, 39]. Однако определенным недостатком данной схемы остается аппроксимация оператора дифференцирования по координате z . В то время как по продольной координате используется схема произвольного порядка точности, по поперечной координате порядок аппроксимации равен двум. Логично предположить,

что повышение порядка аппроксимации по координате z может еще больше повысить производительность схемы. Очевидным вариантом решения данной проблемы является использование многоточечных схем для аппроксимации оператора дифференцирования. Однако при этом будет расти и сложность схемы, так как уравнение (7) уже не будет сводиться к трехдиагональной матрице. Вместо этого, в данной работе предлагается использовать аппроксимацию Паде (5) одновременно по продольной и поперечной координатам.

Пользуясь определением псевдодифференциального оператора [18], выразим оператор второй разности через оператор дифференцирования

$$\delta^2 u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_z z} (e^{-ik_z \Delta z} - 2 + e^{ik_z \Delta z}) \tilde{u}(k_z) dk_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_z z} f(k_z) \tilde{u}(k_z) dk_z = f\left(\frac{d}{dz}\right) u,$$

где

$$\tilde{u}(k_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_z z} u(z) dz,$$

$$f(k_z) = 2(\cosh(ik_z \Delta z) - 1).$$

Теперь проведем обратную операцию: выразим оператор дифференцирования через оператор второй разности. Выпишем функцию, обратную к f :

$$f^{-1}(\xi) = \frac{1}{i\Delta z} \cosh^{-1} \left[1 + \frac{\xi}{2} \right] = \frac{1}{i\Delta z} \ln \left(1 + \frac{\xi}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^2 - 1} \right).$$

Тогда оператор двойного дифференцирования запишется через функцию f и оператор второй разности следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (f^{-1}(\delta^2))^2 u = g(\delta^2) u.$$

Для случая однородной среды ($m(x, z) \equiv 1$) можно записать следующую аппроксимацию оператора распространения относительно оператора δ^2 :

$$\exp \left(ik \Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} - 1 \right) \right) u = \exp \left(ik \Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} g(\delta^2)} - 1 \right) \right) u \approx \prod_{l=1}^p \frac{1 + a'_l \delta^2}{1 + b'_l \delta^2} u. \quad (8)$$

В этом выражении отсутствует явная аппроксимация оператора двойного дифференцирования по координате z . Таким образом, дискретизация по продольной и поперечной координатам выполняется при помощи аппроксимации Паде высокого порядка точности.

Недостатком данного подхода, который ранее рассматривался [19] для решения задач вычислительной гидроакустики, является его ограниченность случаем однородной среды.

Вернемся теперь к случаю неоднородной тропосферы. Подставим $\delta^2 + (k\Delta z)^2 h$ вместо δ^2 в качестве аргумента функции g , получим:

$$\frac{1}{k^2} g(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h) u = \frac{1}{k^2} g(\delta^2) u + hu + \frac{1}{k^2} Res(u) = \frac{1}{k^2} \frac{d^2 u}{dz^2} + hu + \frac{1}{k^2} Res(u),$$

где

$$h = m^2 - 1.$$

Пользуясь разложением функции g по формуле Тейлора

$$g(\xi) = \frac{1}{\Delta z^2} \left[\xi - \frac{1}{12} \xi^2 + \frac{1}{90} \xi^3 - \dots \right],$$

можно оценить остаточный член

$$\frac{1}{k^2} Res(u) = -\frac{1}{12} \delta^2 hu - \frac{1}{12} h \delta^2 u - \frac{1}{12} (k\Delta z)^2 h^2 u + \dots$$

В задачах тропосферного распространения показатель преломления $m(x, z)$ является медленно меняющейся функцией как по продольной координате, так и по высоте и редко удаляется от единицы более чем на 0.0004 [2]. Это наблюдение дает возможность пренебречь членом $Res(u)$:

$$\frac{1}{k^2}g(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h)u \approx \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + hu.$$

Теперь можно записать следующее приближенное выражение:

$$\exp\left(ik\Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}g(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h)} - 1\right)\right) u = \exp\left(ik\Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + h + \frac{1}{k^2}Res - 1}\right)\right) u \approx \exp\left(ik\Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + h} - 1\right)\right) u.$$

Далее, пользуясь аппроксимацией (8) с новыми коэффициентами a'_l и b'_l , можно записать следующую аппроксимацию оператора распространения, учитывающую неоднородность коэффициента преломления:

$$\exp\left(ik\Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}g(\xi)} - 1\right)\right) \Big|_{\xi=\delta^2+(k\Delta z)^2 h} u \approx \prod_{l=1}^p \frac{1 + a'_l \xi}{1 + b'_l \xi} \Big|_{\xi=\delta^2+(k\Delta z)^2 h} u. \tag{9}$$

В итоге приходим к следующей схеме, которая эквивалентна схеме второго порядка за исключением коэффициентов a'_l и b'_l :

$$\begin{cases} \left(1 + b'_1 \left(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h\right)\right) v^n = \left(1 + a'_1 \left(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h\right)\right) u^{n-1}, \\ \left(1 + b'_l \left(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h\right)\right) v_l^n = \left(1 + a'_l \left(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h\right)\right) v_{l-1}^n, & l = 2, \dots, p-1. \\ \left(1 + b'_p \left(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h\right)\right) u^n = \left(1 + a'_p \left(\delta^2 + (k\Delta z)^2 h\right)\right) v_{p-1}^n, \end{cases} \tag{10}$$

Отметим, что вычислительная сложность данной схемы равна сложности схемы второго порядка. Разница состоит лишь в коэффициентах аппроксимации Паде. В аппроксимацию (9) одновременно входят оператор дифференцирования по поперечной координате, оператор квадратного корня и оператор интегрирования по продольной координате. Таким образом, одна аппроксимация отвечает одновременно за три параметра численной схемы: величину шагов сетки по продольной и поперечной координатам и максимальный угол распространения.

Идея совместного использования аппроксимации Паде для дискретизации по продольной и поперечной координатам высказывалась в работах [19, 38]. Однако ранее она ограничивалась случаем однородной среды. В данной работе показано, что в случае, когда коэффициент преломления достаточно мал, можно обобщить данную идею на случай неоднородной среды без дополнительных вычислительных затрат. Малый коэффициент преломления как раз возникает в задачах тропосферного распространения. Ясно, что такая схема неприменима в случае сильных пространственных изменений показателя преломления, которые возникают, например, при моделировании границы вода–грунт в гидроакустике. Отметим также, что методы повышения точности конечно-разностной схемы Кранка–Николсон путем выбора оптимальных коэффициентов в задаче тропосферного распространения предлагались в работе [30].

Для учета прозрачного условия на верхней границе расчетной области используется дискретное нелокальное ГУ [39]. Рекомендуется использовать аппроксимации Паде порядка $[p - 1/p]$ или $[p - 2/p]$ [2, 31].

5. Результаты численного моделирования. Далее приводятся результаты сравнительного анализа предложенной схемы с двумя независимыми альтернативными методами: методом расщепления Фурье и методом геометрической теории дифракции (ГТД) [42]. Использовалась реализация метода расщепления Фурье из программы PETOOL [43] и реализация метода ГТД из программы GO+UTD [44]. Предложенная схема реализована в виде программной библиотеки на языке Python 3 и свободно доступна по ссылке [45].

Далее во всех примерах частота излучения равна 3 ГГц, что соответствует длине волны $\lambda = 0.1$ м.

Таблица 1

Вычислительные параметры численных методов.
Падение гауссова пучка на идеально проводящую поверхность

Метод	$\Delta x, \lambda$	$\Delta z, \lambda$	$\theta_{max}, ^\circ$	время, с
Паде-[10/11] по x и z (предложенный метод)	100	2	10	0.46
Паде-[10/11], 2-й порядок по z	100	2	3.7	0.46
Паде-[10/11], 2-й порядок по z	100	1	8.1	0.93
Паде-[10/11], 2-й порядок по z	100	0.5	9.4	1.84
Паде-[10/11], 2-й порядок по z	100	0.25	10	3.71
Паде-[1/1] (метод Кранка–Николсон)	2.5	0.25	9.8	45.1
Метод расщепления Фурье	100	2	10	3.4
Метод расщепления Фурье	100	4	4	3.2

5.1. Падение гауссова пучка на ровную поверхность. В первом примере будет показано, как угол распространения влияет на плотность требуемой расчетной сетки. Рассмотрим падение гауссова пучка горизонтальной поляризации под углом 10° на идеально проводящую поверхность. Тот факт, что эта задача имеет аналитическое решение, позволяет легко оценить надежность получаемых результатов. Излучатель расположен на высоте 150 м. На рис. 1 показано двумерное распределение амплитуды поля, полученное при помощи рассматриваемых численных методов с различными параметрами расчетной сетки. В табл. 1 сравнивается время, затраченное на получение каждого результата, а также максимально допустимый угол распространения θ_{max} при выбранных параметрах. Далее во всех примерах используется аппроксимация Паде оператора распространения порядка [10/11]. Видно, что для получения корректного результата предложенным методом достаточно использовать шаг сетки по поперечной координате $\Delta z = 2\lambda$. При этом схема второго порядка с аналогичными параметрами расчетной сетки способна обеспечить максимальный угол распространения θ_{max} равный лишь 3.7° . Для достижения целевого угла $\theta_{max} = 10^\circ$ схемой второго порядка потребовалось использовать значительно более густую сетку по z , что увеличило время расчетов в 8 раз по сравнению с предложенной схемой. Схема Кранка–Николсон и вовсе не позволила достичь целевого угла распространения. Даже для достижения угла распространения $\theta_{max} = 9.8^\circ$ методом Кранка–Николсон потребовалось почти в 100 раз больше времени, чем при использовании предложенного метода.

Время работы метода расщепления Фурье не зависит линейным образом от числа узлов сетки, что должно было бы следовать из его асимптотики ($O(n_x n_z \log_2 n_z)$, где n_x и n_z — число узлов сетки по x и z соответственно). По всей видимости, это связано с особенностями реализации быстрого преобразования Фурье и необходимостью округления до ближайшей степени двойки. Кроме того, на производительность метода расщепления Фурье негативным образом сказывается необходимость введения искусственного поглощающего слоя на верхней границе расчетной области.

5.2. Дифракция на клине. В следующем примере рассмотрим поведение поля в дифракционной зоне за препятствием. Клин с наклоном 10° расположен на расстоянии 3 км от источника излучения. Сравнение численных результатов, полученных различными методами, изображено на рис. 2. В целом метод ГТД и конечно-разностное ПУ дают одинаковые результаты как в освещенной области, так и в дифракционной зоне за препятствием. Исключением является место пересечения освещенной зоны и зоны тени на высоте 150 м, что можно объяснить особенностями метода ГТД и его реализации. Как и в прошлом примере, предложенный метод позволяет использовать в 8 раз более разреженную сетку, чем метод второго порядка. Использование более разреженной сетки в методе второго порядка точности не позволяет корректно учитывать поле в зоне тени (рис. 2 з). В рамках метода ПУ использовалась кусочно-постоянная аппроксимация клина. Метод ГТД учитывает кусочно-линейные структуры непосредственно.

5.3. Распространение в тропосферном волноводе. В следующем примере рассматривается распространение радиоволн на сверхдальние расстояния в трилинейном приподнятом тропосферном волноводе. Цель данного примера — показать, что несмотря на сделанные ранее допущения, предложенная схема может корректно учитывать неоднородности коэффициента преломления тропосферы. Профиль коэффициента преломления тропосферы для рассматриваемого волновода изображен на рис. 3. Легко

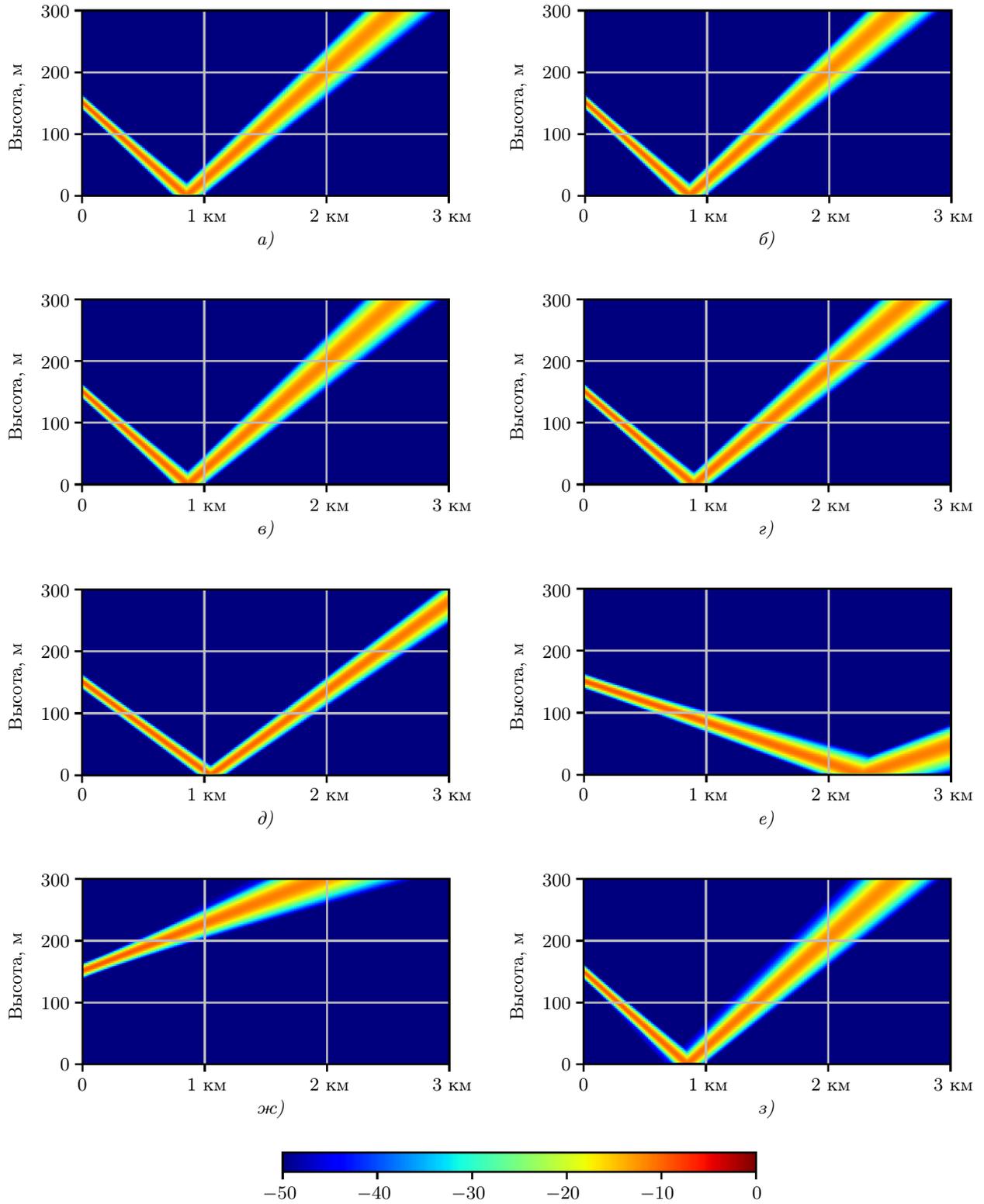


Рис. 1. Падение гауссова пучка на идеально проводящую поверхность. Пространственное распределение амплитуды поля $10 \lg |\psi(x, z)|$, полученное методом: а) ГТД; б) Паде-[10/11] по x и z (предложенный метод), $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 2.0\lambda$; в) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 0.25\lambda$; г) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 0.5\lambda$; д) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 1.0\lambda$; е) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 2.0\lambda$; ж) расщепления Фурье, $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 4.0\lambda$; з) расщепления Фурье, $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 2.0\lambda$

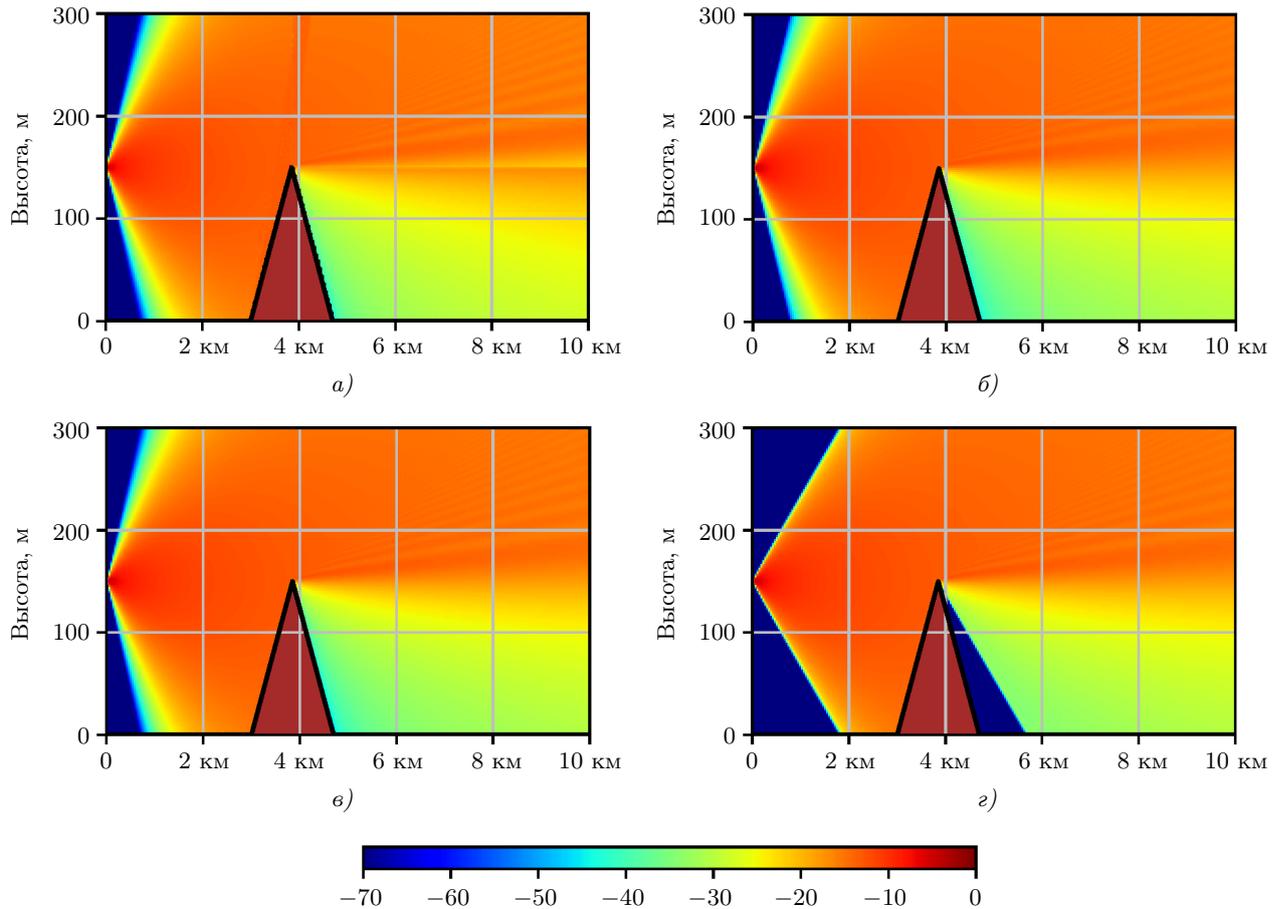


Рис. 2. Дифракция на клине. Пространственное распределение амплитуды поля $10 \lg |\psi(x, z)|$, полученное методом: а) ГТД; б) Паде-[10/11] по x и z (предложенный метод), $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 2.0\lambda$; в) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 0.25\lambda$; г) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 2.0\lambda$

заметить, что функция $m^2(x, z)$ для такого профиля будет весьма незначительно отличаться от единицы. Остальные типовые профили коэффициента преломления тропосферы, например волновод испарения и поверхностный волновод [2], имеют такой же порядок пространственных вариаций.

Поверхность Земли в данном примере является гладкой. Источник, как и ранее, расположен на высоте 150 м и излучает гармонический сигнал на частоте 3 ГГц. Результаты моделирования приведены на рис. 4 и 5. Тот факт, что в распространении на дальние расстояния участвуют волны с углом распространения, не превышающим 1° , позволяет использовать в данном примере более разреженную сетку ($\Delta x = 1000\lambda$, $\Delta z = 0.5\lambda$). Хорошо видно, что предложенный метод, конечно-разностный метод второго порядка точности и метод расщепления Фурье дают практически неотличимые результаты. Таким образом, сделанное в разделе 4 предположение о достаточной малости коэффициента преломления тропосферы получило практическое подтверждение. Вместе с тем, даже такие малые флуктуации показателя преломления способны значительно изменить характер распространения волн на дальние расстояния [46].

5.4. Дифракция на клине, расположенном в волноводе. В последнем примере рассмотрим более сложный и интересный с практической точки зрения случай одновременного наличия неоднородностей показателя преломления и препятствий. Для этого в среду из предыдущего примера поместим три клина на расстоя-

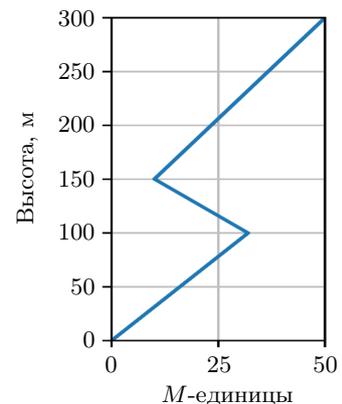


Рис. 3. M -профиль коэффициента преломления тропосферы для приподнятого волновода

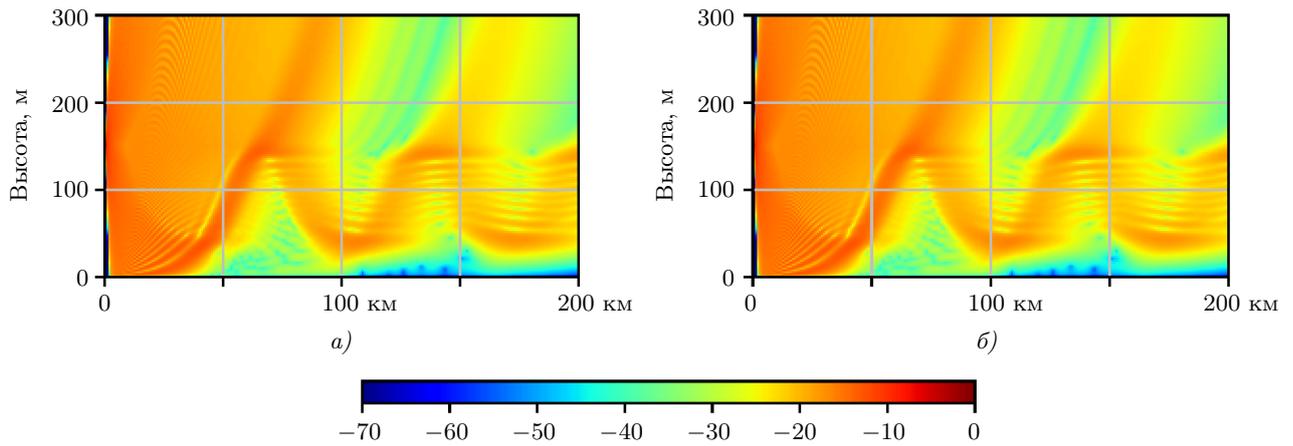


Рис. 4. Распространение в трилинейном приподнятом тропосферном волноводе. Пространственное распределение амплитуды поля $10 \lg |\psi(x, z)|$, полученное методом: а) Паде-[10/11] по x и z (предложенный метод), $\Delta x = 1000\lambda$, $\Delta z = 0.5\lambda$; б) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 1000\lambda$, $\Delta z = 0.5\lambda$

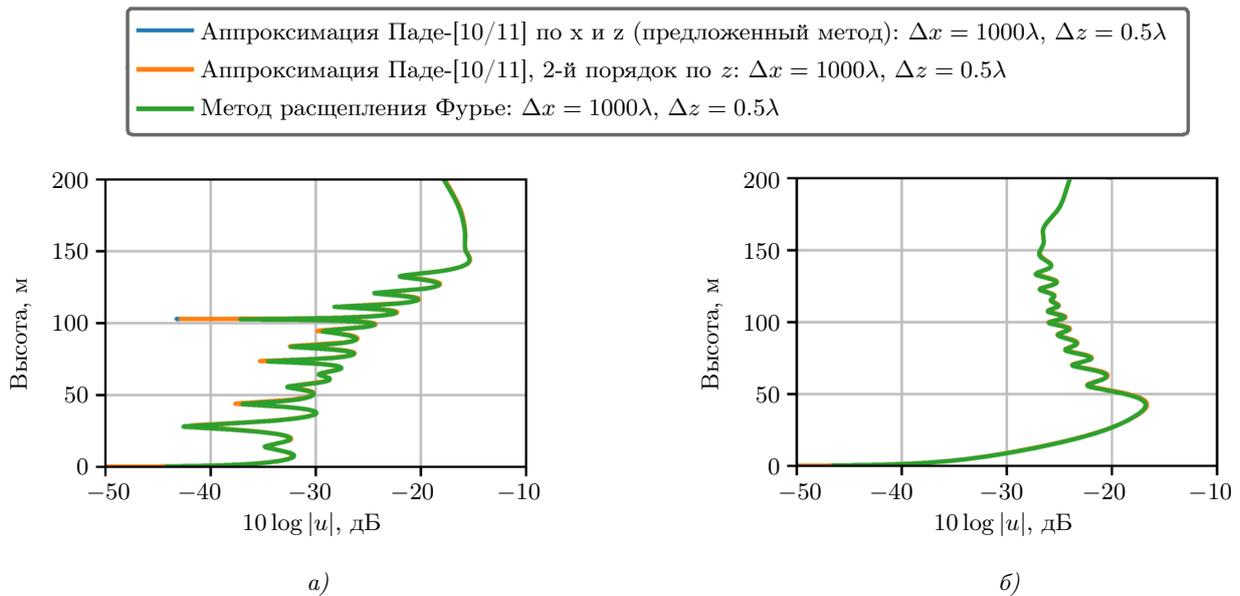


Рис. 5. Распределение амплитуды поля $10 \lg |\psi(x, z)|$ в трилинейном приподнятом тропосферном волноводе на расстоянии от источника: а) 72.5 км; б) 100 км

ниях 50, 70 и 90 км от источника. Высоты клиньев равны соответственно 50, 100 и 150 м. Наклон всех трех клиньев равен 5° . Размеры расчетной сетки подобраны исходя из максимального угла распространения $\theta_{max} = 5^\circ$. Результаты моделирования показаны на рис. 6 и 7. Предложенный метод в данном случае позволяет использовать в 6 раз более разреженную сетку по z , чем схема второго порядка.

5.5. Некоторые особенности программной реализации. Представленные выше результаты численного моделирования выполнены при помощи разработанной автором программной библиотеки на языке Python 3. Исходный код данной библиотеки свободно доступен по адресу [45]. Для вычисления коэффициентов аппроксимации Паде (9) использовалась библиотека расчетов в длинной арифметике mpmath [47]. Использовалась точность в 63 десятичных знака. Это позволило без проблем рассчитывать аппроксимации Паде порядка [10/11].

Для ускорения типовых вычислений, таких как решение трехдиагональной системы линейных уравнений, использовался статически типизированный язык Cython [48].

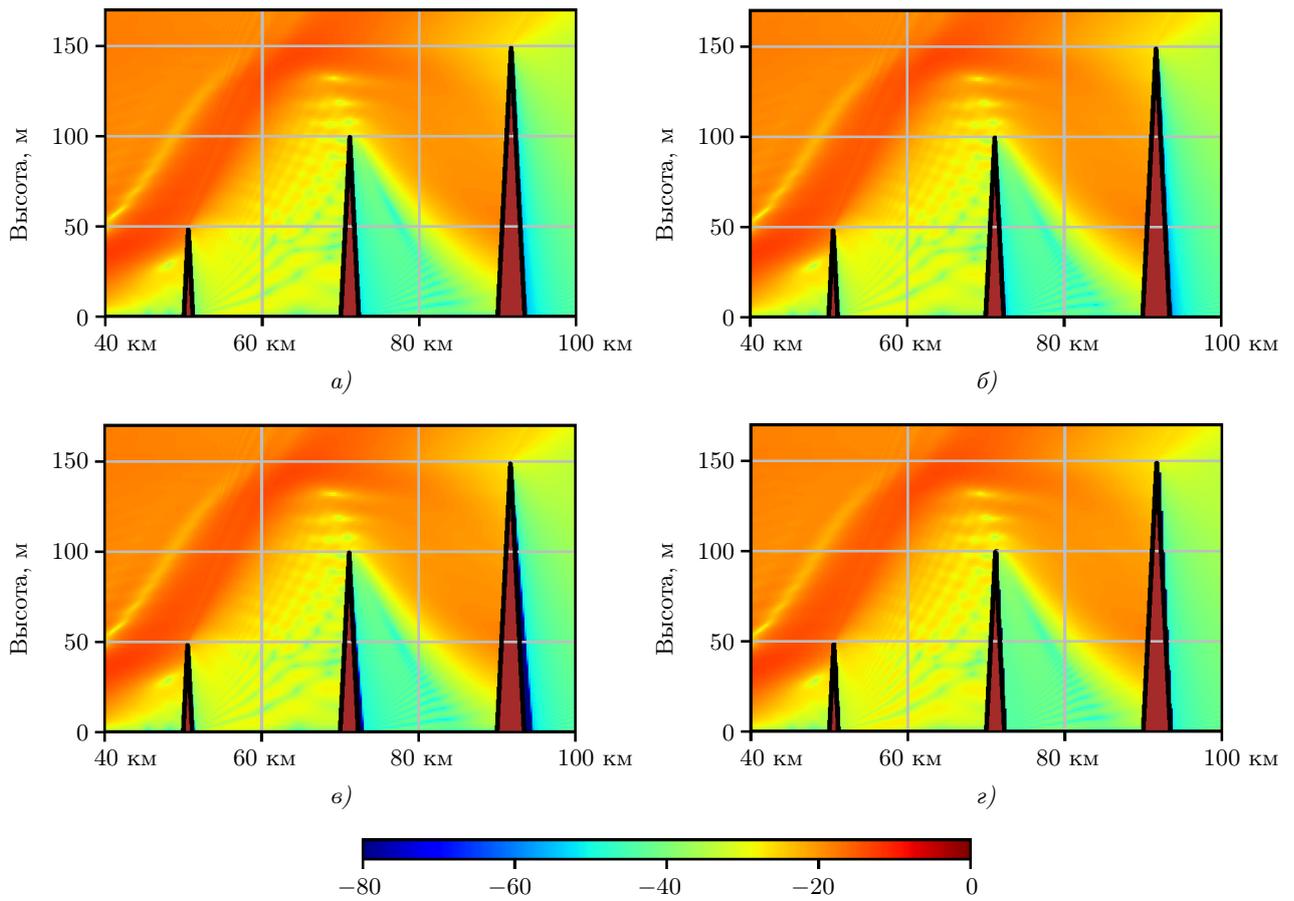


Рис. 6. Дифракция на неоднородностях, расположенных в волноводе. Пространственное распределение амплитуды поля $10 \lg |\psi(x, z)|$, полученное методом: а) Паде-[10/11] по x и z (предложенный метод), $\Delta x = 500\lambda$, $\Delta z = 3.0\lambda$; б) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 500\lambda$, $\Delta z = 0.5\lambda$; в) Паде-[10/11], 2-й порядок по z , $\Delta x = 100\lambda$, $\Delta z = 3.0\lambda$; г) расщепления Фурье $\Delta x = 500\lambda$, $\Delta z = 3\lambda$

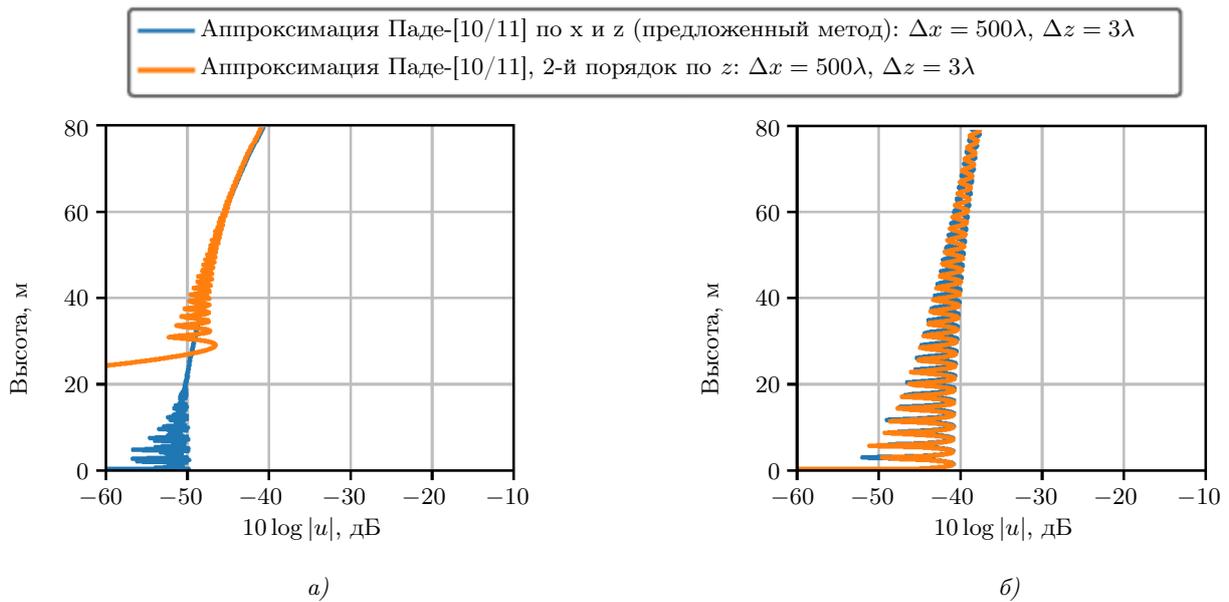


Рис. 7. Дифракция на неоднородностях, расположенных в волноводе. Распределение амплитуды поля $10 \lg |\psi(x, z)|$ на расстоянии от источника: а) 72.5 км; б) 100 км

6. Заключение. Без сомнения, приведенные в разделе 4 выкладки нельзя считать строгими и они требуют дальнейшего математического анализа. Тем не менее, продемонстрированные результаты численного моделирования и сравнение с другими методами говорят в пользу адекватности и надежности предложенной схемы. Предложенная схема позволяет использовать значительно более разреженную расчетную сетку, что положительно сказывается на скорости расчетов. Вместе с тем, предложенная схема отличается от схемы второго порядка лишь коэффициентами, и, таким образом, не приводит к усложнению ее программной реализации. Предложенный метод практически не уступает методу расщепления Фурье в производительности и, при этом, не имеет проблем, связанных с моделированием верхнего и нижнего граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
2. Levy M.F. Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. London: The Institution of Electrical Engineers, 2000.
3. Araydin G., Sevgi L. Radio wave propagation and parabolic equation modeling. Hoboken: John Wiley and Sons, 2017.
4. Permyakov V.A., Mikhailov M.S., Malevich E.S. Analysis of propagation of electromagnetic waves in difficult conditions by the parabolic equation method // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2019. **67**, N 4. 2167–2175.
5. Ozgun O. Recursive two-way parabolic equation approach for modeling terrain effects in tropospheric propagation // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2009. **57**, N 9. 2706–2714.
6. Mills M.J., Collins M.D., Lingeitch J.F. Two-way parabolic equation techniques for diffraction and scattering problems // Wave Motion. 2000. **31**, N 2. 173–180.
7. Ахияров В.В. Вычисление множителя ослабления при обратном рассеянии от земной поверхности методом параболического уравнения // Журнал радиоэлектроники. 2019. № 11. doi 10.30898/1684-1719.2019.11.1.
8. Vavilov S.A., Lytaev M.S. Modeling equation for multiple knife-edge diffraction // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2020. **68**, N 5. 3869–3877.
9. Malevich E.S., Mikhailov M.S., Volkova A.A. Comparison of the results of an experimental research of the radio wave propagation in the forest with numerical simulation // Proc. Int. Conf. on Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). 2019. Piscataway: IEEE Press. doi: 0.1109/RSEMW.2019.8792732.
10. Kuttler J.R., Janaswamy R. Improved Fourier transform methods for solving the parabolic wave equation // Radio Science. 2002. **37**. 1–11. doi 10.1029/2001RS002488.
11. Михайлов М.С., Пермяков В.А., Сазонов Д.М. Расчет энергетических характеристик фазированной антенной решетки над нерегулярной земной поверхностью методом параболического уравнения (трехмерная модель) // Журнал радиоэлектроники. 2014. № 12. <http://jre.cplire.ru/jre/dec14/24/text.pdf>
12. Михайлов М.С., Пермяков В.А., Малевич Е.С. Расчет поля методом параболического уравнения в трехмерном пространстве с препятствиями // Известия ВУЗов. Физика. 2016. **59**, № 12-3. 145–148.
13. Li Y.-C., Bian Y.-Q., He Z., Chen R.-S. EM Pulse Propagation Modeling for Tunnels by Three-Dimensional ADI-TDPE Method // IEEE Access. 2020. **8**. doi 10.1109/ACCESS.2020.2991205.
14. Авиллов К.В. Псевдодифференциальные параболические уравнения распространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решение // Акустический журнал. 1995. **41**, № 1. 5–12.
15. Terekhov A.V. The Laguerre finite difference one-way equation solver // Computer Physics Communications. 2017. **214**. 71–82.
16. Feshchenko R.M., Popov A.V. Exact transparent boundary condition for the parabolic equation in a rectangular computational domain // Journal of the Optical Society of America A. 2011. **28**, N 3. 373–380.
17. Zlotnik A., Romanova A. On a Numerov–Crank–Nicolson–Strang scheme with discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation on a semi-infinite strip // Applied Numerical Mathematics. 2015. **93**. 279–294.
18. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.
19. Collins M.D. A split-step Padé solution for the parabolic equation method // The Journal of the Acoustical Society of America. 1993. **93**, N 4. 1736–1742.
20. Fishman L., McCoy J.-J. Derivation and application of extended parabolic wave theories. I. The factorized Helmholtz equation // Journal of Mathematical Physics. 1984. **25**, N 2. 285–296.
21. Hardin R.H., Tappert F.D. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // SIAM Review. 1973. **15**, N 2. 423–423.
22. Zhang P., Bai L., Wu Z., Guo L. Applying the parabolic equation to tropospheric groundwave propagation: a review of recent achievements and significant milestones // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2016. **58**, N 3. 31–44.

23. *Collins M.D., Siegmann W.L.* Parabolic wave equations with applications. New York: Springer, 2019.
24. *Lee D., Pierce A.D., Shang E.-C.* Parabolic equation development in the twentieth century // *Journal of Computational Acoustics*. 2000. **8**, N 4. 527–637.
25. *Guo Q., Zhou C., Long Y.* Greene approximation wide-angle parabolic equation for radio propagation // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2017. **65**, N 11. 6048–6056.
26. *Guo Q., Long Y.* Pade second-order parabolic equation modeling for propagation over irregular terrain // *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*. 2017. **16**. 2852–2855.
27. *Guo Q., Long Y.* Two-way parabolic equation method for radio propagation over rough sea surface // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2020. **68**, N 6. 4839–4847.
28. *Lytaev M.S., Vladuko A.G.* Split-step Padé approximations of the Helmholtz equation for radio coverage prediction over irregular terrain // *Proc. Int. Conf. on Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO)*. Piscataway: IEEE Press, 2018. 179–184.
29. *Захаров Ф.Н.* Численный анализ электромагнитного поля при распространении УКВ в случайно-неоднородной тропосфере над морской поверхностью. Дисс. ... к.т.н. ТУСУР. Томск, 2015.
30. *Ваулин И.Н.* Способы повышения точности численного решения параболического уравнения для прогнозирования характеристик поля УКВ над морем. Дисс. ... к.т.н. ТУСУР. Томск, 2008.
31. *Льтаев М.С.* Численный метод расчета тропосферного распространения электромагнитных волн в задачах построения геоинформационных систем дистанционного мониторинга // *Труды СПИИРАН*. 2018. **56**. 195–213.
32. *Apaydin G., Sevgi L.* The split-step-Fourier and finite-element-based parabolic-equation propagation-prediction tools: canonical tests, systematic comparisons, and calibration // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2010. **52**, N 3. 66–79.
33. *Apaydin G., Ozgun O., Kuzuoglu M., Sevgi L.* A novel two-way finite-element parabolic equation groundwave propagation tool: tests with canonical structures and calibration // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2011. **49**, N 8. 2887–2899.
34. *Владуко А.Г., Льтаев М.С.* Моделирование потерь в радиоканале миллиметрового диапазона методом параболического уравнения // *Труды учебных заведений связи*. 2019. **5**, N 2. 108–116.
35. *Baskakov V.A., Popov A.V.* Implementation of transparent boundaries for numerical solution of the Schrödinger equation // *Wave Motion*. 1991. **14**, N 2. 123–128.
36. *Levy M.F.* Transparent boundary conditions for parabolic equation solutions of radiowave propagation problems // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1997. **45**, N 1. 66–72.
37. *Petrov P.S., Ehrhardt M.* Transparent boundary conditions for iterative high-order parabolic equations // *Journal of Computational Physics*. 2016. **313**. 144–158.
38. *Ehrhardt M., Zisowsky A.* Discrete non-local boundary conditions for split-step Padé approximations of the one-way Helmholtz equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007. **200**, N 2. 471–490.
39. *Lytaev M.S.* Nonlocal boundary conditions for split-step Padé approximations of the Helmholtz equation with modified refractive index // *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*. 2018. **17**, N 8. 1561–1565.
40. *Sprouse C.R., Awadallah R.S.* An angle-dependent impedance boundary condition for the split-step parabolic equation method // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2012. **60**, N 2. 964–970.
41. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
42. *Pathak P.H., Carluccio G., Albani M.* The uniform geometrical theory of diffraction and some of its applications // *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. 2013. **55**, N 4. 41–69.
43. *Ozgun O., Sahin V., Erguden M.E., Apaydin G., Yilmaz A.E., Kuzuoglu M., Sevgi L.* PETOOL v2. 0: Parabolic Equation Toolbox with evaporation duct models and real environment data // *Computer Physics Communications*. 2020. 256.
44. *Ozgun O.* New software tool (GO+UTD) for visualization of wave propagation [Testing Ourselves] // *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. 2016. **58**, N 3. 9–103.
45. *Lytaev M.S.* Wave Propagation Framework for Python 3 // <https://github.com/mikelytaev/wave-propagation>. Cited November 25, 2020.
46. *Пищин О.Н., Каламбацкая О.В.* Особенности распространения радиоволн УВЧ диапазона в приземном и приводном тропосферном волноводе // *Вестник Астраханского гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ.* 2019, № 4. 115–121.
47. *Johansson F. et al.* mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 1.1.0). 2018. <http://mpmath.org/>.
48. *Smith K.W.* Cython: a guide for python programmers. Sebastopol: O'Reilly Media, 2015.

Поступила в редакцию
17 сентября 2020

On Application of the Finite-Difference Padé Approximation of the Pseudo-Differential Parabolic Equation to the Tropospheric Radio Wave Propagation Problem

M. S. Lytaev¹

¹ *St. Petersburg Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, 14 Linia V.O., 39, Saint Petersburg, 199178, Russia; Junior Scientist, e-mail: mikelytaev@gmail.com*

Received September 17, 2020

Abstract: This paper is devoted to the numerical simulation of electromagnetic wave propagation in an inhomogeneous troposphere. The study is based on the wide-angle generalizations of the parabolic wave equation. The finite-difference Padé approximation is used to approximate the propagation operator. It is important that, within the proposed approach, the Padé approximation is carried out simultaneously along with the longitudinal and transverse coordinates. At the same time, the proposed approach gives an opportunity to model an arbitrary tropospheric refractive index. The method does not impose restrictions on the maximum propagation angle. The comparison with the split-step Fourier method and the geometric theory of diffraction is discussed. The advantages of the proposed approach are shown.

Keywords: Helmholtz equation, parabolic equation, radio wave propagation, Padé approximation.

References

1. V. A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems* (Pergamon Press, Oxford, 1965; Sov. Radio, Moscow, 1970).
2. M. Levy, *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation* (The Institution of Electrical Engineers, London, 2000).
3. G. Apaydin and L. Sevgi, *Radio Wave Propagation and Parabolic Equation Modeling* (Wiley, Hoboken, 2017).
4. V.A. Permyakov, M.S. Mikhailov, and E.S. Malevich, "Analysis of Propagation of Electromagnetic Waves in Difficult Conditions by the Parabolic Equation Method," *IEEE Trans. Antennas Propag. Mag.* **67** (4), 2167–2175 (2019).
5. O. Ozgun, "Recursive Two-Way Parabolic Equation Approach for Modeling Terrain Effects in Tropospheric Propagation," *IEEE Trans. Antennas Propag. Mag.* **57** (9), 2706–2714 (2009).
6. M. J. Mills, M. D. Collins, and J. F. Lingeitch, "Two-Way Parabolic Equation Techniques for Diffraction and Scattering Problems," *Wave Motion* **31** (2), 173–180 (2000).
7. V. V. Akhilarov, "Attenuation Factor Calculation for Backscattering from the Terrain Using the Parabolic Equation Technique," *J. Radio Electron.*, No. 11 (2019). doi 10.30898/1684-1719.2019.11.1
8. S. A. Vavilov and M. S. Lytaev, "Modeling Equation for Multiple Knife-Edge Diffraction," *IEEE Trans. Antennas Propag. Mag.* **68** (5), 3869–3877 (2020).
9. E. S. Malevich, M. S. Mikhailov, and A. A. Volkova, "Comparison of the Results of an Experimental Research of the Radio Wave Propagation in the Forest with Numerical Simulation," in *Proc. Int. Conf. on Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves, Divnomorskoe, Russia, June 24–28, 2019* (IEEE Press, Piscataway, 2019), doi 10.1109/RSEMW.2019.8792732
10. J. R. Kuttler and R. Janaswamy, "Improved Fourier Transform Methods for Solving the Parabolic Wave Equation," *Radio Sci.* **37** (2), 1–11 (2002). doi 10.1029/2001RS002488
11. M. S. Mikhailov, V. A. Permyakov, and D. M. Sazonov, "Calculation the Energy Characteristics of a Phased Array Antenna above the Irregular Earth Surface by the Parabolic Equation Method (Three Dimensional Model)," *J. Radio Electron.*, No 12 (2014).
http://jre.cplire.ru/jre/dec14/24/abstract_e.html. Cited November 25, 2020.
12. M. S. Mikhailov, V. A. Permyakov, and E. S. Malevich, "Calculation by the Method of Parabolic Equation in Three-Dimensional Space with Obstacles," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Fizika* **59** (12-3), 145–148 (2016).
13. Y. C. Li, Y. Q. Bian, Z. He, and R.-S. Chen, "EM Pulse Propagation Modeling for Tunnels by Three-Dimensional ADI-TDPE Method," *IEEE Access* **8** (2020). doi 10.1109/ACCESS.2020.2991205

14. K. V. Avilov, "Pseudodifferential Parabolic Equations of Sound Propagation in the Slowly Range-Dependent Ocean and Their Numerical Solutions," *Akust. Zh.* **41** (1), 5–12 (1995) [*Acoust. Phys.* **41** (1), 1–7 (1995)].
15. A. V. Terekhov, "The Laguerre Finite Difference One-Way Equation Solver," *Comput. Phys. Commun.* **214**, 71–82 (2017).
16. R. M. Feshchenko and A. V. Popov, "Exact Transparent Boundary Condition for the Parabolic Equation in a Rectangular Computational Domain," *J. Opt. Soc. Am. A* **28** (3), 373–380 (2011).
17. A. Zlotnik and A. Romanova, "On a Numerov–Crank–Nicolson–Strang Scheme with Discrete Transparent Boundary Conditions for the Schrödinger Equation on a Semi-Infinite Strip," *Appl. Numer. Math.* **93**, 279–294 (2015).
18. M. Taylor, *Pseudo-Differential Operators* (Springer, Berlin, 1974; Mir, Moscow, 1985).
19. M. D. Collins, "A Split-Step Padé Solution for the Parabolic Equation Method," *J. Acoust. Soc. Am.* **93** (4), 1736–1742 (1993).
20. L. Fishman and J. J. McCoy, "Derivation and Application of Extended Parabolic Wave Theories. I. The Factorized Helmholtz Equation," *J. Math. Phys.* **25** (2), 285–296 (1984).
21. R. H. Hardin and F. D. Tappert, "Applications of the Split-Step Fourier Method to the Numerical Solution of Nonlinear and Variable Coefficient Wave Equations," *SIAM Rev.* **15** (2), 423–423 (1973).
22. P. Zhang, L. Bai, Z. Wu, and L. Guo, "Applying the Parabolic Equation to Tropospheric Groundwave Propagation: A review of Recent Achievements and Significant Milestones," *IEEE Antennas Propag. Mag.* **58** (3), 31–44 (2016)
23. M. D. Collins and W. L. Siegmann, *Parabolic Wave Equations with Applications* (Springer, New York, 2019).
24. D. Lee, A. D. Pierce, and E.-C. Shang, "Parabolic Equation Development in the Twentieth Century," *J. Comput. Acoust.* **8** (4), 527–637 (2000).
25. Q. Guo, C. Zhou, and Y. Long, "Greene Approximation Wide-Angle Parabolic Equation for Radio Propagation," *IEEE Trans. Antennas Propag. Mag.* **65** (11), 6048–6056 (2017).
26. Q. Guo and Y. Long, "Pade Second-Order Parabolic Equation Modeling for Propagation over Irregular Terrain," *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **16**, 2852–2855 (2017).
27. Q. Guo and Y. Long, "Two-Way Parabolic Equation Method for Radio Propagation over Rough Sea Surface," *IEEE Trans. Antennas Propag. Mag.* **68** (6), 4839–4847 (2020).
28. M. S. Lytaev and A. G. Vladyko, "Split-Step Padé Approximations of the Helmholtz Equation for Radio Coverage Prediction over Irregular Terrain" in *Proc. Int. Conf. on Advances in Wireless and Optical Communications, Riga, Latvia, November 15–16, 2018* (IEEE Press, Piscataway, 2018), pp. 179–184.
29. F. N. Zakharov, *Numerical Analysis of the Electromagnetic Field during VHF Propagation in a Randomly Inhomogeneous Troposphere over the Sea Surface*, Candidate's Dissertation in Technical Sciences (Tomsk State Univ. of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, 2015).
30. I. N. Vaulin, *Ways to Improve the Accuracy of the Numerical Solution of the Parabolic Equation for Predicting the Characteristics of the VHF Field over the Sea*, Candidate's Dissertation in Technical Sciences (Tomsk State Univ. of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, 2008).
31. M. S. Lytaev, "A Numerical Method for Estimating Tropospheric Radio Wave Propagation for Remote Monitoring Geoinformation Systems," *Tr. St. Petersburg Inst. Inform. Avtomat., Ross. Akad. Nauk* **56**, 195–213 (2018).
32. G. Apaydin and L. Sevgi, "The Split-Step-Fourier and Finite-Element-Based Parabolic-Equation Propagation-Prediction Tools: Canonical Tests, Systematic Comparisons, and Calibration," *IEEE Antennas Propag. Mag.* **52** (3), 66–79 (2010).
33. G. Apaydin, O. Ozgun, M. Kuzuoglu, and L. Sevgi, "A Novel Two-Way Finite-Element Parabolic Equation Groundwave Propagation Tool: Tests with Canonical Structures and Calibration," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **49** (8), 2887–2899 (2011).
34. A. Vladyko and M. Lytaev, "Path Loss Modelling in Millimeter Wave Radio Channel by the Parabolic Equation Method," *Tr. Uchebn. Zaved. Svyazi* **5** (2), 108–116 (2019).
35. V. A. Baskakov and A. V. Popov, "Implementation of Transparent Boundaries for Numerical Solution of the Schrödinger Equation," *Wave Motion* **14** (2), 123–128 (1991).
36. M. F. Levy, "Transparent Boundary Conditions for Parabolic Equation Solutions of Radiowave Propagation Problems," *IEEE Trans. Antennas Propag. Mag.* **45** (1), 66–72 (1997).

37. P. S. Petrov and M. Ehrhardt, “Transparent Boundary Conditions for Iterative High-Order Parabolic Equations,” *J. Comput. Phys.* **313**, 144–158 (2016).
38. M. Ehrhardt and A. Zisowsky, “Discrete Non-Local Boundary Conditions for Split-Step Padé Approximations of the One-Way Helmholtz Equation,” *J. Comput. Appl. Math.* **200** (2), 471–490 (2007).
39. M. S. Lytaev, “Nonlocal Boundary Conditions for Split-Step Padé Approximations of the Helmholtz Equation with Modified Refractive Index,” *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **17** (8), 1561–1565 (2018).
40. C. R. Sprouse and R. S. Awadallah, “An Angle-Dependent Impedance Boundary Condition for the Split-Step Parabolic Equation Method,” *IEEE Trans. Antennas Propag. Mag.* **60** (2), 964–970 (2012).
41. G. A. Baker and P. R. Graves-Morris, *Padé Approximants* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996; Mir, Moscow, 1986).
42. P. H. Pathak, G. Carluccio, and M. Albani, “The Uniform Geometrical Theory of Diffraction and Some of Its Applications,” *IEEE Antennas Propag. Mag.* **55** (4), 41–69 (2013).
43. O. Ozgun, V. Sahin, M. E. Erguden, et al., “PETOOL v2.0: Parabolic Equation Toolbox with Evaporation Duct Models and Real Environment Data,” *Comput. Phys. Commun.* **256** (2020).
doi 10.1016/j.cpc.2020.107454
44. O. Ozgun, “New Software Tool (GO+UTD) for Visualization of Wave Propagation [Testing Ourselves],” *IEEE Antennas Propag. Mag.* **58** (3), 91–103 (2016).
45. M.S. Lytaev, “Wave Propagation Framework for Python 3,”
<https://github.com/mikelytaev/wave-propagation>. Cited November 25, 2020.
46. O. N. Pishchin and O. V. Kalambatskaya, “Characteristics of UHF Waves Distribution in Land and Water Surface Tropospheric Waveguide,” *Vestn. Astrakhan Gos. Tech. Univ. Ser. Management. Comput. Sci. Inf.*, No. 4, 115–121 (2019).
47. F. Johansson et al., “mpmath: A Python Library for Arbitrary-Precision Floating-Point Arithmetic (Version 1.1.0, 2018),” <http://mpmath.org/>. Cited November 25, 2020.
48. K. W. Smith, *Cython: A Guide for Python Programmers* (O’Reilly Media, Sebastopol, 2015).