УДК 519.6 doi 10.26089/NumMet.v21r324

О ТЕОРЕМЕ КЕНИГА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

А. Н. Громов[1]

Показано, что теорема Кенига о нулях аналитической функции, примененная к логарифмической производной целой функции конечного порядка, приводит к алгоритму отыскания нулей, для которого областями сходимости являются многоугольники Вороного искомых нулей. Так как диаграмма Вороного последовательности нулей составляет множество меры нуль, то алгоритм имеет глобальную сходимость. Дана оценка скорости сходимости. Для итераций высших порядков, которые строятся с помощью теоремы Кенига, рассмотрено влияние кратности корня на область сходимости и приводится оценка скорости сходимости.

Ключевые слова: логарифмическая производная, производная высшего порядка, простейшие дроби, радиус сходимости степенного ряда, многоугольники (ячейки) Вороного, глобальная сходимость.

В работе [7] описаны итерации с глобальной сходимостью для отыскания вещественных нулей целых функций. В настоящей статье предложен метод, основанный на теореме Кенига, который снимает ограничение на принадлежность нулей целых функций к множеству действительных чисел. Для этого метода получено описание областей сходимости в терминах вычислительной геометрии [1, с. 249–258], что отличает данную работу от публикаций [6–10].

Теорема Кенига [2, с. 143–144] утверждает, что если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — аналитические функции в области $|z| < r$, содержащей единственный корень $z = \alpha$ уравнения $f(z) = 0$ кратности единица, и $\varphi(\alpha) \neq 0$, то

$$\alpha = \lim_{s\to\infty} \frac{a_s}{a_{s+1}}\,, \tag{1}$$

где a_s — коэффициент при z^s в разложении $\varphi(z)/f(z)$ по степеням z.

В предлагаемой работе теорема Кенига применяется в ситуации, когда отношение $\varphi(z)/f(z)$ является логарифмической производной целой функции конечного порядка $f(z)$ и рассматриваются степенные ряды вида

$$y(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \big(z - z^0\big)^s. \tag{2}$$

Здесь доказано, что для логарифмической производной целой функции конечного порядка предел (1) существует почти для любой точки z^0 и указывает на нуль (независимо от его кратности), ближайший к точке z^0. Доказательство основано на представлении производных высшего порядка от логарифмической производной в виде суммы простейших дробей и приводит к оценке скорости сходимости.

Пусть $f(z)$ целая функция конечного порядка ρ с нулями в точках $\{\zeta_j\}$, число которых конечно или бесконечно. Известно [3, с. 266–268], что если последовательность $\{\zeta_j\}$ конечна (каждый нуль повторяется столько раз, какова его кратность), т.е. $j = 1, 2, \dots, m$, то порядок ρ является целым числом и функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)\dots(z - \zeta_m)e^{p(z)}. \tag{3}$$

Здесь $p(z)$ — многочлен степени ρ.

Для логарифмической производной функции (3) находим

$$y(z) = \frac{d}{dz}\,\mathrm{Ln}\, f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{z - \zeta_j} + p'(z). \tag{4}$$

Из (4) следует

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{(s)} = (-1)^s (s)! \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(z - \zeta_j)^{s+1}} + p^{(s+1)}(z), \quad s = 0, 1, \dots\,. \tag{5}$$

[1] Московский государственный институт международных отношений Министерства иностранных дел РФ, Одинцовский филиал, факультет финансовой экономики, Ново-Спортивная, д. 3, 143007, Московская область, г. Одинцово; ст. преподаватель, e-mail: an_gromov@rambler.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Поскольку $p(z)$ многочлен степени ρ, то $p^{(s+1)}(z) \equiv 0$ для $s+1>\rho$. Из (5) получаем

$$\frac{1}{(s)!}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{(s)} = (-1)^s \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(z-\zeta_j)^{s+1}}\,, \quad s=\rho,\rho+1,\ldots\,. \tag{6}$$

Отметим, что если функция $f(z)$ является многочленом ($p(z)$ — многочлен нулевой степени), то формула (6) верна начиная с $s=0$ и использовалась в работах [4, 5].

Если функция $f(z)$ имеет бесконечное число нулей, то считаем, что

$$|\zeta_j| \leqslant |\zeta_{j+1}|, \quad j=1,2,\ldots\,, \quad \lim_{j\to+\infty} |\zeta_j| = \infty$$

и последовательность $\{\zeta_j\}$ обладает конечным показателем сходимости τ, т.е. существует наибольшее целое число χ, для которого ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\zeta_j|^{\chi}}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\zeta_j|^{\chi+1}}$ сходится.

Представление (3) ($f(0)\neq 0$), согласно [3, с. 272–284], принимает вид

$$f(z) = e^{p(z)} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{\zeta_j}\right) e^{p_j(z)}, \tag{7}$$

где $p(z)$ — многочлен степени не выше, чем $[\rho]$; многочлены $p_j(z)$, обеспечивающие сходимость, выбраны в виде

$$p_j(z) = \frac{z}{\zeta_j} + \frac{z^2}{2\zeta_j^2} + \ldots + \frac{z^{\chi}}{\chi\zeta_j^{\chi}}\,.$$

Пусть $N(R)$ — номер, начиная с которого $\left|\dfrac{z}{\zeta_j}\right| < \dfrac{1}{2}$. Так как в каждом фиксированном круге $|z|<R$ ряд

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1-\frac{z}{\zeta_j}\right) + p_j(z)\right]$$

сходится абсолютно и равномерно [3, с. 298], то из (7) следует равенство

$$\operatorname{Ln} f(z) = p(z) + \sum_{1}^{N(R)} \left[\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{\zeta_j}\right) + p_j(z)\right] + \sum_{N(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1-\frac{z}{\zeta_j}\right) + p_j(z)\right],$$

где ряд можно дифференцировать почленно любое число раз. Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = p'(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-\zeta_j} + p_j'(z)\right]. \tag{8}$$

Имея в виду степени многочленов $p(z)$, $p_j(z)$ и неравенства $\chi \leqslant [\tau] \leqslant [\rho]$, из (8) получаем обобщение (6):

$$\frac{1}{(s)!}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{(s)} = (-1)^s \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-\zeta_j)^{s+1}}\,, \quad s=[\rho],[\rho]+1,\ldots\,. \tag{9}$$

Пусть $\zeta_n = \zeta_{n+1} = \ldots = \zeta_{n+k_{\zeta_n}-1}$ (k_{ζ_n} — кратность корня), а J — множество индексов тех членов последовательности $\{\zeta_j\}$, для которых $\zeta_n \neq \zeta_j$. Область комплексной плоскости C, все точки которой ближе к ζ_n, чем к любому другому корню, называется многоугольником (ячейкой) Вороного [1, с. 250–251]:

$$C_{\zeta_n} = \Big\{ z\in C \big|\ |z-\zeta_n| < |z-\zeta_j|,\ j\in J \Big\}. \tag{10}$$

Далее принято, что $z^0 \in C_{\zeta_n}$. Объединим формулы (6) и (9), записав их следующим образом:

$$\frac{1}{(s)!}\left(\frac{f'(z^0)}{f(z^0)}\right)^{(s)} = \frac{(-1)^s}{\left(z^0-\zeta_n\right)^{s+1}}\, t_s\big(z^0,\zeta_n\big), \quad s=[\rho],\ [\rho]+1,\ldots\,. \tag{11}$$

Здесь

$$t_s\big(z^0,\zeta_n\big) = k_{\zeta_n} + \sum_{j\in J}(q_j)^{s+1}, \quad q_j = \frac{z^0-\zeta_n}{z^0-\zeta_j}, \quad |q_j|<1. \tag{12}$$

В частном случае, когда функция имеет единственный корень кратности k_{ζ_n}, выражение для $t_s\big(z^0,\zeta_n\big)$ приобретает особенно простой вид

$$t_s\big(z^0,\zeta_n\big) = k_{\zeta_n}, \quad s \geqslant \rho. \tag{12$'$}$$

Так как $\lim\limits_{j\to+\infty}|\zeta_j| = \infty$, то $\lim\limits_{j\to+\infty}|q_j| = 0$ и существует

$$q = \max_{j\in J}\big\{|q_j|\big\} < 1. \tag{13}$$

Коэффициенты разложения (2) имеют вид

$$a_s = \frac{1}{(s)!}\,y^{(s)}\big(z^0\big) = \frac{1}{(s)!}\left(\frac{f'\big(z^0\big)}{f\big(z^0\big)}\right)^{(s)}. \tag{14}$$

Величина $\big|z^0-\zeta_n\big|$ является радиусом сходимости ряда (2), так как в силу условия $z^0\in C_{\zeta_n}$ внутри круга $\big|z-z^0\big| \leqslant \big|z^0-\zeta_n\big|$ функция $y(z)$ не имеет особых точек, а ζ_n — единственная особая точка на границе этого круга.

Производная $y^{(s)}$ в формуле (14) вычисляется последовательно для $l=1,2,\ldots,s$ из рекуррентного соотношения

$$y^{(l)}\big(z^0\big)f^{(0)}\big(z^0\big) = f^{(l+1)}\big(z^0\big) - \sum_{j=1}^{l} C_l^j\, y^{(l-j)}\big(z^0\big)f^{(j)}\big(z^0\big), \tag{15}$$

которое получается из (2), записанного в виде $y\cdot f = f'$, с применением формулы Лейбница.

Сравнение (11) и (14) приводит к варианту теоремы Кенига с оценкой скорости сходимости.

Теорема 1. *Пусть ζ_n — нуль кратности k_{ζ_n} целой функции конечного порядка $f(z)$, а точка z^0 принадлежит ячейке Вороного для нуля ζ_n и a_s — коэффициенты разложения логарифмической производной функции $f(z)$ в ряд по степеням $z-z^0$. Если ζ_n — единственный корень уравнения $f(z)=0$, то*

$$\frac{a_s}{a_{s+1}} = -\big(z^0-\zeta_n\big), \quad s\geqslant\rho. \tag{16}$$

В противном случае справедливы равенства

$$\zeta_n = z^0 + \frac{a_s}{a_{s+1}} + O\big(q^{s+1}\big) \quad \text{при} \quad s\to+\infty, \tag{17}$$

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{a_s}{a_{s+1}} = -\big(z^0-\zeta_n\big). \tag{17$'$}$$

Доказательство. Объединяя (11), (14), имеем

$$\frac{a_s}{a_{s+1}} = -\big(z^0-\zeta_n\big)\,\frac{t_s\big(z^0,\zeta_n\big)}{t_{s+1}\big(z^0,\zeta_n\big)}. \tag{18}$$

Утверждение (16) является следствием формул (12′), (18).

Рассмотрим случай, когда уравнение $f(z)=0$ имеет различные корни. Используя (12), находим

$$\frac{t_s\big(z^0,\zeta_n\big)}{t_{s+1}\big(z^0,\zeta_n\big)} = \frac{k_{\zeta_n} + \sum\limits_{j\in J}(q_j)^{s+1}\big(q_j+(1-q_j)\big)}{k_{\zeta_n} + \sum\limits_{j\in J}(q_j)^{s+2}} = 1+R_s. \tag{19}$$

Здесь

$$R_s = \frac{\sum\limits_{j\in J}(q_j)^{s+1}(1-q_j)}{k_{\zeta_n} + \sum\limits_{j\in J}(q_j)^{s+2}}. \tag{20}$$

Покажем, что имеет место оценка

$$R_s = O\big(q^{s+1}\big) \quad \text{при} \quad s \to +\infty\,. \tag{21}$$

Из выражения (20) следует

$$|R_s| \leqslant \frac{(1+q)}{\left|k_{\zeta_n} - \left|\sum\limits_{j\in J}(q_j)^{s+2}\right|\right|} \sum_{j\in J}|q_j|^{s+1}. \tag{22}$$

Если множество J конечно, то оно состоит из $m - k_{\zeta_n}$ элементов и выполняется неравенство

$$\left|\sum_{j\in J}(q_j)^{s+1}\right| \leqslant \sum_{j\in J}|q_j|^{s+1} \leqslant (m-k_{\zeta_n})q^{s+1}. \tag{23}$$

Другими словами, имеем

$$\sum_{j\in J}(q_j)^{s+1} = O\big(q^{s+1}\big) \quad \text{при} \quad s\to+\infty. \tag{24}$$

Из (22) и (24) следует (21).

Покажем, что оценка (24) остается справедливой и в случае неограниченности J. Представим множество индексов J в виде суммы двух непересекающихся подмножеств:

$$J' = \Big\{j\in J\big|\ |q_j| = q\Big\}, \quad J'' = \Big\{j\in J\big|\ |q_j| < q\Big\}, \quad J = J'\bigcup J''. \tag{25}$$

Тогда

$$\sum_{j\in J}|q_j|^{s+1} = \sum_{j\in J'}|q_j|^{s+1} + \sum_{j\in J''}|q_j|^{s+1} = \left(k_q + \sum_{j\in J''}\left(\frac{|q_j|}{q}\right)^{s+1}\right)q^{s+1}, \tag{26}$$

где k_q — количество элементов множества J'. Согласно (25) неравенство $|q_j|/q < 1$ выполняется для $j\in J''$, что дает

$$\sum_{j\in J''}\left(\frac{|q_j|}{q}\right)^{s+1} \leqslant \sum_{j\in J''}\left(\frac{|q_j|}{q}\right)^{\chi+1}. \tag{27}$$

Пусть $l\in J'$, тогда

$$\frac{|q_j|}{q} = \left|\frac{\big(z^0-\zeta_n\big)}{\big(z^0-\zeta_j\big)}\cdot\frac{\big(z^0-\zeta_l\big)}{\big(z^0-\zeta_n\big)}\right| = \left|\frac{\big(z^0-\zeta_l\big)}{\big(z^0-\zeta_j\big)}\right| = \frac{1}{|\zeta_j|}\left|\frac{z^0-\zeta_l}{\dfrac{z^0}{\zeta_j}-1}\right|. \tag{28}$$

Поскольку $\lim\limits_{j\to+\infty}|\zeta_j| = \infty$, то второй множитель в правой части формулы (28) ограничен некоторой постоянной величиной M, т.е.

$$\left|\frac{z^0-\zeta_l}{\dfrac{z^0}{\zeta_j}-1}\right| \leqslant M \quad \text{и, следовательно,} \quad \frac{|q_j|}{q} \leqslant \frac{M}{|\zeta_j|}\,. \tag{29}$$

Объединяя (27) и (29), получаем

$$\sum_{j\in J''}\left(\frac{|q_j|}{q}\right)^{s+1} \leqslant M^{\chi+1}\sum_{j\in J''}\frac{1}{|\zeta_j|^{\chi+1}}\,. \tag{30}$$

Так как ряд в правой части неравенства (30) сходится по условию, то из (26), (30) вытекают асимптотические оценки (24), (21).

Из (18), (19) следует

$$\frac{a_s}{a_{s+1}} = -\big(z^0-\zeta_n\big) - \big(z^0-\zeta_n\big)R_s, \tag{31}$$

что, в силу (21), равносильно утверждениям (17), (17′) теоремы.

Опуская в (17) бесконечно малую при $s \to +\infty$ величину $O\big(q^{s+1}\big)$, получаем последовательность

$$\zeta_{n,s} = z^0 + \frac{a_s}{a_{s+1}}\,, \tag{32}$$

сходящуюся к корню ζ_n. Здесь порядок производной s выступает в качестве номера итерации, а значение $z^0 \in C_{\zeta_n}$ фиксировано. Элементы последовательности $\{a_s\}$, имея в виду (14), вычисляются с помощью рекуррентной формулы (15).

Замечание 1. Поскольку функция $f(z)$ в любом круге $|z| < R < \infty$ имеет только конечное число нулей, то каждый такой круг содержит конечное число ребер диаграммы Вороного. Так как диаграмма Вороного последовательности ζ_j составляет множество меры нуль, то формула (32) определяет сходящуюся к ближайшему корню последовательность почти для любого z^0, т.е. итерации (32) имеют глобальную сходимость.

Замечание 2. Когда точка z^0 выбрана на ребре (границе) ячейки Вороного, то в сумме (24), составляющей функцию $t_s\big(z^0, \zeta_n\big)$ (см. (12)), появляется хотя бы одно слагаемое вида $(q_l)^{s+1} = e^{i\varphi_l(s+1)}$, которое не имеет предела при $s \to +\infty$. В таком случае, как показывают примеры, последовательность $\{R_s\}$ может расходиться и сходимость итераций (32) нарушается.

Таким образом, можно сказать, что ячейка Вороного является естественной областью сходимости итераций (32) к ближайшему для точки z^0 корню.

Зафиксируем величину s и рассмотрим итерационную функцию

$$\varphi_s\big(z^0\big) = z^0 + \frac{a_s\big(z^0\big)}{a_{s+1}\big(z^0\big)}\,, \tag{33}$$

где $a_s\big(z^0\big)$ — коэффициент разложения (2).

Как указано в [2, с. 144–145], итерации

$$z^{k+1} = \varphi_s\big(z^k\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

сходятся к корню ζ_n, если начальное приближение z^0 близко к ζ_n, и имеют порядок не ниже $s + 2$.

Справедливость этого утверждения вытекает из равенства (31), которое с учетом (33) можно записать в виде

$$\varphi_s\big(z^0\big) - \zeta_n = -\big(z^0 - \zeta_n\big) R_s. \tag{35}$$

В силу (12), (20) правая часть (35) содержит множитель $\big(z^0 - \zeta_n\big)^{s+2}$, поэтому $\varphi_s(\zeta_n) = \zeta_n$ и $\varphi_s^{(l)}(\zeta_n) = 0$, $l = 1, 2, \ldots, s + 1$.

Поскольку $\varphi_s'(\zeta_n) = 0$, существует окрестность корня, в которой выполняется неравенство $\big|\varphi_s'(z)\big| < 1$, что обеспечивает сходимость итераций (34). Как показывают примеры, эта окрестность, вообще говоря, не может быть расширена до ячейки Вороного. Формула (20) позволяет сделать более определенные заключения об этой окрестности.

Для функций (3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если начальное приближение z^0 удовлетворяет условию*

$$\big|z^0 - \zeta_n\big| \leqslant \alpha \cdot \frac{1}{2}\,|\zeta_n - \zeta_j|, \quad 0 < \alpha < 1, \quad j \in J, \tag{36}$$

а количество корней уравнения m и кратность корня k_{ζ_n} связаны неравенством

$$k_{\zeta_n} > \frac{3}{4}\,m, \tag{37}$$

то итерации (34) сходятся к корню ζ_n со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\big(\alpha/(2-\alpha)\big)^{s+1}$.

Доказательство. Предположим, что в последовательности (34) элемент z^k удовлетворяет условию (36). Покажем, что тогда и элемент z^{k+1} удовлетворяет этому условию.

Так как

$$|\zeta_n - \zeta_j| = \big|\zeta_n - z^k + z^k - \zeta_j\big| \leqslant \big|z^k - \zeta_n\big| + \big|z^k - \zeta_j\big|,$$

то, согласно (12),

$$|q_j| = \frac{\left|z^k - \zeta_n\right|}{\left|z^k - \zeta_j\right|} \leqslant \frac{\left|z^k - \zeta_n\right|}{|\zeta_n - \zeta_j| - \left|z^k - \zeta_n\right|} \leqslant \frac{\alpha \cdot \dfrac{1}{2}\,|\zeta_n - \zeta_j|}{|\zeta_n - \zeta_j| - \alpha \cdot \dfrac{1}{2}\,|\zeta_n - \zeta_j|} = \frac{\alpha}{2-\alpha}\,. \tag{38}$$

Поскольку функция аргумента α в правой части неравенства (38) монотонно возрастает и обращается в единицу при $\alpha = 1$, то из (38) следует, что $|q_j| < 1$ для любого $j \in J$, т.е. точка $z^k \in C_{\zeta_n}$ и для любой такой точки (см. (13))

$$q \leqslant \frac{\alpha}{2-\alpha}\,. \tag{39}$$

Условие (37) дает

$$0 < k_{\zeta_n} - (m - k_{\zeta_n}) \cdot 3 < k_{\zeta_n} - (m - k_{\zeta_n})q^{s+2} \leqslant k_{\zeta_n} - \sum_{j \in J} |q_j|^{s+2} \leqslant k_{\zeta_n} - \left|\sum_{j \in J} (q_j)^{s+2}\right|. \tag{40}$$

Из неравенств (22), (23), (40) получаем

$$|R_s| \leqslant \frac{(1+q)}{k_{\zeta_n} - (m - k_{\zeta_n})q^{s+2}}\,(m - k_{\zeta_n})q^{s+1} = \frac{(1+q)}{\dfrac{k_{\zeta_n}}{m - k_{\zeta_n}} - q^{s+2}} \cdot q^{s+1}.$$

Откуда с учетом (13), (37) следует оценка

$$|R_s| < q^{s+1} < 1. \tag{41}$$

Так как точка $z^k \in C_{\zeta_n}$, то заменяя в равенстве (35) z^0 на z^k и используя (41), находим

$$\left|z^{k+1} - \zeta_n\right| = \left|z^k - \zeta_n\right| \cdot |R_s| < \left|z^k - \zeta_n\right| q^{s+1} < \left|z^k - \zeta_n\right|. \tag{42}$$

Неравенство (42) показывает, что итерации (34) переводят точку z^k, удовлетворяющую условию (36), в точку z^{k+1}, которая так же удовлетворяет этому условию. Так как по условию теоремы начальная точка z^0 подчиняется (36), то по индукции это переносится на все точки последовательности $\left\{z^{k+1}\right\}$. Тогда, имея в виду (39) и (42), получим

$$\left|z^{k+1} - \zeta_n\right| < \left|z^k - \zeta_n\right| \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^{s+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Из последнего неравенства следует

$$\left|z^{k+1} - \zeta_n\right| < \left|z^0 - \zeta_n\right| \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^{(s+1)(k+1)}, \tag{43}$$

что и доказывает сходимость $\left\{z^{k+1}\right\}$ к ζ_n со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\big(\alpha/(2-\alpha)\big)^{s+1}$.

Численные эксперименты подтверждают теоретические результаты. Примеры показывают, что отказ от одного из условий (36), (37) может приводить к выходу членов последовательности (34) за пределы ячейки C_{ζ_n}.

Многочлен $f(z) = z^3 + 1$ имеет корни $\zeta_1 = -1$, $\zeta_{2,3} = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Неравенство (37) для этого многочлена не выполняется, поскольку корни однократны. Лучи $z = \lambda_i \zeta_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, составляют границы ячеек Вороного для корней ζ_i, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим точки z^0 на продолжении луча $z = \lambda_2 \zeta_2$, $\lambda_2 \leqslant 0$, положив

$$z^0 = \lambda \zeta_2, \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{или} \quad \lambda > 1. \tag{44}$$

Точки (44) принадлежат ячейке Вороного корня ζ_2, т.е. $z^0 \in C_{\zeta_2}$. Так как они равноудалены от корней ζ_1 и ζ_3 и $\left|z^0 - \zeta_1\right| = \left|z^0 - \zeta_3\right|$, то это дает простое выражение для величины q, которая, согласно (17), характеризует точность итераций (32). Следуя (12) и (13), получаем

$$q(\lambda) = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda + 1}}\,. \tag{45}$$

Формула (17) показывает, что чем ближе значение $q(\lambda)$ к единице, тем медленнее сходятся последовательные приближения $\zeta_{n,s}$ к точному решению. Очевидно,

$$\lim_{\lambda\to 0} q(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} q(\lambda) = 1.$$

Крайние значения λ (0 и ∞) связаны с разными причинами медленной сходимости. Близость λ к нулю означает близость точки z^0 к границе ячейки Вороного. Когда $\left|z^0\right|$ велик ($\lambda \to +\infty$), так что $\left|\zeta_i/z^0\right| \ll 1$, то теряется чувствительность алгоритма (точки z^0) к разбросу значений нулей.

Например, для $\lambda = 0.1$ согласно (45) имеем $q(0.1) = 8.54\cdot 10^{-1}$ и наблюдаем медленное убывание степеней $\bigl(q(0.1)\bigr)^{11} = 1.77\cdot 10^{-1}$ и только $\bigl(q(0.1)\bigr)^{41} = 1.57\cdot 10^{-3}$. Формула (32) дает приближенное значение корня

$$\zeta_{2,40} = 5.015536\cdot 10^{-1} + i\cdot 8.687162\cdot 10^{-1}$$

с абсолютной погрешностью $|\zeta_2 - \zeta_{2,40}| = 3.12\cdot 10^{-3}$.

При

$$\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad q\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0.5$$

и уже $q^{11} = 4.88\cdot 10^{-4}$, что обеспечивает

$$\zeta_{2,10} = 5.003411\cdot 10^{-1} + i\cdot 8.666162\cdot 10^{-1}, \quad |\zeta_2 - \zeta_{2,10}| = 6.82\cdot 10^{-4}.$$

Из (45) следует, что $q(0.1) = q(10)$, и при $\lambda = 10$ последовательные приближения (32) ведут себя так же, как в выше рассмотренном примере с $\lambda = 0.1$.

Для иллюстрации поведения итераций (34) рассмотрим начальные точки $z^0 \in C_{\zeta_2}$ вида

$$z^0 = \frac{1}{2} + i\lambda, \quad \lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

лежащие на отрезке, соединяющем корни ζ_2 и ζ_3.

Так как $|\zeta_2 - \zeta_3| = |\zeta_2 - \zeta_1| = \sqrt{3}$, то

$$\left|z^0 - \zeta_2\right| = \left(1 - \frac{2\lambda}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{2}\,|\zeta_2 - \zeta_3| = \alpha\cdot\frac{1}{2}\,|\zeta_2 - \zeta_3|, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Иными словами, эти точки удовлетворяют условию (36) теоремы 2. Они принадлежат кругу с центром в ζ_2, для которого границы ячейки C_{ζ_2} являются касательными.

Положив $\alpha = 0.99$, $z^0 = 5.0\cdot 10^{-1} + i\cdot 8.66\cdot 10^{-3}$, $s = 0$ (метод второго порядка), наблюдаем, что в последовательности (34) элементы z^1, z^2 удаляются от корня ζ_2, оставаясь в ячейке C_{ζ_2}. Приближение z^3 переходит в ячейку C_{ζ_1}, и итерации (34) сходятся к корню ζ_1. Например, $\left|z^9 - \zeta_1\right| = 2.96\cdot 10^{-8}$.

При $\alpha = 0.95$ и $z^0 = 5.0\cdot 10^{-1} + i\cdot 4.33\cdot 10^{-2}$ итерации (34) ведут себя еще более замысловато. Как и в предыдущем случае, точка z^3 переходит в ячейку C_{ζ_1}, но уже z^4 попадает в C_{ζ_3} и последовательность z^k сходится к корню ζ_3.

Отметим, что изменение кратности любого из корней многочлена не меняет границ ячеек Вороного. Увеличим кратность корня ζ_2 и рассмотрим многочлен $g(z) = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)^7(z-\zeta_3)$. Для этого многочлена выполнено соотношение (37), так как $k_{\zeta_2} = 7$, а $m = 9$. Сохранив в качестве начальной ранее выбранную точку $z^0 = 5.0\cdot 10^{-1} + i\cdot 8.66\cdot 10^{-3} \in C_{\zeta_2}$, попадаем в условия теоремы 2 и наблюдаем сходимость итераций (34) к корню ζ_2. Уже на второй итерации имеем $\left|z^2 - \zeta_2\right| = 5.80\cdot 10^{-3}$, тогда как $\left|z^0 - \zeta_2\right| = 8.57\cdot 10^{-1}$.

Отказ от условия (36) при выполнении (37) так же может приводить к выходу итераций (34) из ячейки Вороного C_{ζ_n}.

Для построения соответствующего примера предположим, что ячейка C_{ζ_n} не ограничена. Это позволяет рассмотреть предельный случай, когда $z^0 \to \infty$ (оставаясь в ячейке) и упростить анализ.

Пусть $z^1 = \varphi\bigl(z^0\bigr)$. Согласно (12), (34), (35) имеем

$$\tilde{q}_l = \frac{z^1 - \zeta_n}{z^1 - \zeta_l} = \frac{-\bigl(z^0 - \zeta_n\bigr)R_s}{\zeta_n - \zeta_l - \bigl(z^0 - \zeta_n\bigr)R_s}.$$

Условие выхода точки z^1 из ячейки C_{ζ_n} запишем в виде $\left|\tilde{q}_l\right| > 1$.

Поскольку

$$1 - q_j = 1 - \frac{z^0 - \zeta_n}{z^0 - \zeta_j} = \frac{\zeta_n - \zeta_j}{z^0 - \zeta_j}\,,$$

то для произведения $\left(z^0 - \zeta_n\right)R_s$, используя (20), находим

$$\left(z^0 - \zeta_n\right)R_s = \frac{\sum\limits_{j\in J}(q_j)^{s+2}(\zeta_n - \zeta_j)}{k_{\zeta_n} + \sum\limits_{j\in J}(q_j)^{s+2}}\,.$$

Так как

$$\lim_{z^0\to\infty} q_j = \lim_{z^0\to\infty} \frac{z^0 - \zeta_n}{z^0 - \zeta_j} = 1,$$

то

$$\lim_{z^0\to\infty}\left(z^0 - \zeta_n\right)R_s = \frac{1}{m}\sum_{j\in J}(\zeta_n - \zeta_j)$$

и для предела $\tilde{q}_l$ получаем (сохраняя обозначение)

$$\tilde{q}_l = \frac{-\sum\limits_{j\in J}(\zeta_n - \zeta_j)}{m(\zeta_n - \zeta_l) - \sum\limits_{j\in J}(\zeta_n - \zeta_j)} = -\frac{(\zeta_n - \zeta_l) + \sum\limits_{j\in J, j\neq l}(\zeta_n - \zeta_j)}{(m-1)(\zeta_n - \zeta_l) - \sum\limits_{j\in J, j\neq l}(\zeta_n - \zeta_j)} = -\frac{1+w}{m-1-w}\,.$$

Здесь

$$w = \frac{\sum\limits_{j\in J, j\neq l}(\zeta_n - \zeta_j)}{\zeta_n - \zeta_l} = a + ib. \tag{46}$$

Тогда условие выхода точки z^1 из ячейки принимает вид

$$\left|\frac{1+a+ib}{m-1-a-ib}\right| > 1.$$

Решение последнего неравенства запишем в виде

$$a > \frac{m-2}{2}\,. \tag{47}$$

Для рассмотренных выше многочленов неравенство (47) не имеет места. Оно выполнится, если принять $h(z) = (z-\xi_1)(z-\xi_2)^{k_{\xi_2}}(z-\xi_3)$, $\xi_1 = 4.8$, $\xi_2 = 5.0$, $\xi_3 = 4.0$ и $k_{\xi_2} = 1, 2, \ldots, 7$. Действительно, согласно (46), имеем

$$w = a + ib = \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{5-4}{5-4.8} = a = 5.$$

Поскольку максимальная степень $m = 9$, а $(m-2)/2 = 3.5$, то справедливо неравенство (47) и выбором начальной точки z^0 (не подчиняющейся (36)) можно добиться выхода приближения z^1 за пределы ячейки C_{ξ_2}, которая представляет собой правую полуплоскость с границей $z = 4.9 + i\tau, \tau \in \mathbb{R}$. Численный эксперимент подтверждает это.

Приняв за начальное приближение $z^0 = 4.96\cdot 10^0 + i\cdot 2.50\cdot 10^1 \in C_{\xi_2}$, наблюдаем, что уже с первой итерации последовательные приближения переходят в ячейку C_{ξ_1} и для кратностей $k_{\xi_2} = 1, 2, \ldots, 5$ сходятся к корню $\xi_1 = 4.8$. Например, при $k_{\xi_2} = 5$ имеем $\left|z^5 - \xi_1\right| = 3.31\cdot 10^{-3}$. Для кратности $k_{\xi_2} = 6$ приближения z^1 и z^2 находятся в ячейке C_{ξ_1}, но уже z^3 возвращается в ячейку C_{ξ_2} и итерации сходятся к корню ξ_2. При $k_{\xi_2} = 7$ уже точка z^2 возвращается в ячейку C_{ξ_2}.

Многочлен $h(z)$ с $k_{\xi_2} = 1$ дает простой пример расходимости итераций (32) для того случая, когда начальное приближение лежит на ребре ячейки Вороного. Пусть $\tau = 0$, т.е. $z^0 = 4.9$. Тогда имеем

$$q_1 = \frac{z^0 - \xi_2}{z^0 - \xi_1} = \frac{4.9-5}{4.9-4.8} = -1, \quad q_3 = \frac{z^0 - \xi_2}{z^0 - \xi_3} = \frac{4.9-5}{4.9-4} = -\frac{1}{9}\,.$$

Следуя (20), находим

$$R_s = \frac{(-1)^{s+1}2 + \dfrac{10}{9}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{s+1}}{1 + (-1)^{s+2} + \left(\dfrac{1}{9}\right)^{s+2}}\,.$$

Для $s = 2l+1$ получаем

$$R_{2l+1} = \frac{2 + \dfrac{10}{9}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2l+2}}{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2(l+1)+2}} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

что вместе с (18), (19) и означает расходимость (32).

Методы отыскания нулей целых функций конечного порядка, предложенные в [5] и в настоящей статье, имеют одну основу. Формула (28), полученная в [5], уточняет формулу Коши–Адамара, а формула ($17'$) данной работы уточняет (для целых функций конечного порядка) другое утверждение о радиусе сходимости степенного ряда. Известно, что если существует $\lim\limits_{s\to\infty}\left|a_s/a_{s+1}\right| = R$, то радиус сходимости степенного ряда (2) равен R.

Поэтому алгоритм, использующий итерации (32), может иметь реализацию, подобную той, что подробно описана в [5] (с очевидными изменениями), и использоваться как для отыскания нулей целых функций конечного порядка с требуемой точностью, так и для их локализации с последующим уточнением известными методами с локальной сходимостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989.
2. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Наука, 1962.
3. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1967.
4. *Громов А.Н.* Об одном подходе к построению одноточечных итерационных методов для решения нелинейных уравнений одного переменного // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 298–306.
5. *Громов А.Н.* Глобально сходящийся метод для отыскания нулей целых функций конечного порядка // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 115–128.
6. *Proinov P.D., Ivanov S.I.* Convergence analysis of Sakurai–Torii–Sugiura iterative method for simultaneous approximation of polynomial zeros // J. Comput. Appl. Math. 2019. **357**. 56–70.
7. *Sugiura H., Hasegawa T.* On the global convergence of Schröder's iteration formula for real zeros of entire functions // J. Comput. Appl. Math. 2019. **358**. 136–145.
8. *Gutiérrez J.M., Hernández-Verón M.Á.* An acceleration of the continuous Newton's method // J. Comput. Appl. Math. 2019. **354**. 213–220.
9. *García-Zapata J.L., Martín J.C.D., Fácila Á.C.* An adaptive subdivision method for root finding of univariate polynomials // J. Comput. Appl. Math. 2019. **352**. 146–164.
10. *Lázaro M., Martín P., Agüero A., Ferrer I.* The polynomial pivots as initial values for a new root-finding iterative method // Journal of Applied Mathematics. 2015. doi 10.1155/2015/413816.

Поступила в редакцию
26.02.2020

On Koenig's Theorem for Integer Functions of Finite Order

A. N. Gromov[1]

[1] *Moscow State Institute of International Relations at Odintsovo, Faculty of Financial Economics; ulitsa Novo-Sportivnaya 3, Odintsovo, Moscow Region, 143007, Russia; Associate Professor, e-mail: an_gromov@rambler.ru*

Received February 26, 2020

Abstract: It is shown that Koenig's theorem on zeros of analytic functions applied to the logarithmic derivative of an integer function of finite order leads to an algorithm of finding zeros whose convergence domains are the Voronoi polygons of the zeros to be found. Since the Voronoi diagram of a sequence of zeros is a set of measure zero, this algorithm is globally convergent. The rate of convergence is estimated. For higher-order iterations that are constructed using Koenig's theorem, the effect of root multiplicity on the convergence domain is considered and the convergence rate is estimated for this case.

Keywords: logarithmic derivative, higher-order derivative, simplest fractions, convergence radius of power series, Voronoi polygons (cells), global convergence.

References

1. F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction* (Springer, New York, 1985; Mir, Moscow, 1989).

2. I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (Nauka, Moscow, 1962; Oxford, Pergamon, 1965).

3. A. I. Markushevich, *The Theory of Analytic Functions* (Nauka, Moscow, 1967; Chelsea, New York, 1977).

4. A. N. Gromov, "An Approach for Constructing One-Point Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations of One Variable," Vychisl. Metody Programm. **16**, 298–306 (2015).

5. A. N. Gromov, "A Globally Convergent Method for Finding Zeros of Integer Functions of Finite Order," Vychisl. Metody Programm. **18**, 115–128 (2017).

6. P. D. Proinov and S. I. Ivanov, "Convergence Analysis of Sakurai–Torii–Sugiura Iterative Method for Simultaneous Approximation of Polynomial Zeros," J. Comput. Appl. Mat. **357**, 56–70 (2019).

7. H. Sugiura and T. Hasegawa, "On the Global Convergence of Schröder's Iteration Formula for Real Zeros of Entire Functions," J. Comput. Appl. Math. **358**, 136–145 (2019).

8. J. M. Gutiérrez and M. Á. Hernández-Verón, "An Acceleration of the Continuous Newton's Method," J. Comput. Appl. Math. **354**, 213–220 (2019).

9. J. L. García-Zapata, J. C. D. Martín, and Á. C. Fácila, "An Adaptive Subdivision Method for Root Finding of Univariate Polynomials," J. Comput. Appl. Math. **352**, 146–164 (2019).

10. M. Lázaro, P. Martín, A. Agüero, and I. Ferrer, "The Polynomial Pivots as Initial Values for a New Root-Finding Iterative Method," J. Appl. Math. **2015** (2015). doi 10.1155/2015/413816.