УДК 517.958 doi 10.26089/NumMet.v21r323

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И О ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Н. Л. Гольдман[1]

Рассматривается проблема оптимального управления системой, состоящей из краевой задачи первого рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, а также из уравнения изменения по времени этого коэффициента. Обоснованы две постановки вариационных задач с финальным наблюдением, в которых управлением является граничный режим на одной из границ области. Доказаны свойства непрерывности и дифференцируемости соответствующих минимизируемых функционалов. Дано явное представление для дифференциалов через решение сопряженных задач. Установлен вид этих сопряженных задач, доказана их однозначная разрешимость в классе гладких функций. Проведенное исследование связано с моделированием и управлением физико-химическими процессами с изменяющимися внутренними свойствами материалов.

Ключевые слова: квазилинейные параболические уравнения, первая краевая задача, вариационная задача, финальное наблюдение, граничное управление, сопряженная задача, однозначная разрешимость, математические модели термодеструкции.

1. Введение. Данная работа связана с изучением нелинейных параболических систем, возникающих при математическом моделировании и управлении физико-химическими процессами, в которых происходят изменения внутренних характеристик материалов. В [1] исследована одна их таких систем, состоящая из первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, а также из уравнения изменения по времени этого коэффициента. Сложность системы и ее существенное отличие от обычных постановок краевых задач (см. [2, 3]) вызывают значительные трудности при доказательстве условий существования и единственности ее решения. В [1] для преодоления этих трудностей в доказательстве однозначной разрешимости в классе гладких функций использованы метод Ротэ и априорные оценки в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера. Полученные в [1] результаты позволяют перейти к изучению проблемы оптимального управления этой системой, рассматривая в качестве управляющего воздействия граничный режим на одной из границ области.

Основное внимание в настоящей статье уделено постановкам соответствующих вариационных задач о граничном управлении с финальным наблюдением. Обоснование этих постановок и изучение свойств минимизируемых функционалов представляет значительный интерес из-за сложности управляемой системы. Наличие в [1] оценок в классах Гельдера для этой системы позволило выделить компактное в пространстве $W_2^2[0,T]$ множество допустимых граничных управлений, установить непрерывность и дифференцируемость на этом множестве соответствующих функционалов, а также получить явное представление дифференциалов через решение сопряженных задач. Установлен вид этих сопряженных задач — каждая из них является системой, которая включает в себя первую краевую задачу для линейного параболического уравнения с неизвестной функцией в правой части, а также уравнение изменения по времени этой функции. Значительное место в статье занимает доказательство условий однозначной разрешимости этих систем в классе гладких функций на основе метода Ротэ и соответствующих априорных оценок.

Полученные результаты имеют также и практическое значение для самых разных приложений, связанных с управлением физико-химическими процессами. Приведен пример одного такого приложения о деструкции теплозащитного материала под воздействием граничной температуры. Возможность эффективного применения численных методов минимизации в задачах управления конкретными процессами основана на доказанном явном представлении градиента функционала через решение сопряженной задачи. Одним из таких методов является, например, метод проекции сопряженных градиентов на множество допустимых граничных управлений.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: nata@srcc.msu.ru

Используемые в статье функциональные пространства определяются стандартным образом, как и в [2]. В частности, класс Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ $(0<\lambda<1)$ определяется как пространство функций $u(x,t)$, непрерывных в замкнутой области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ вместе со своими производными u_{xx}, u_t, которые удовлетворяют условию Гельдера по x и t с показателями λ и $\lambda/2$ соответственно.

Для удобства изложения будет также использовано следующее обозначение:

$H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ — пространство функций, непрерывных при $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times\ [-M_0,M_0]$, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ производные по x и u и удовлетворяющих условию Гельдера по t с показателем $\lambda/2$.

Кроме того, в связи с применением метода Ротэ будут использоваться аналоги классов Гельдера для сеточных функций $\widehat{u}=(u_0,\dots,u_n,\dots,u_N)$, заданных в узлах сетки $\overline{\omega}_\tau=\{t_n\}=\big\{n\tau, n=\overline{0,N}, \tau=TN^{-1}\big\}$, и для сеточно-непрерывных функций $\widehat{u}(x)=\big(u_0(x),\dots,u_n(x),\dots,u_N(x)\big)$, которые заданы в области $\overline{Q}_\tau=\{0\leqslant x\leqslant l, t_n\in\overline{\omega}_\tau\}$.

Как и в [4, 5], эти аналоги определяются следующим образом.

$H_\tau^{1+\lambda/2}(\overline{\omega}_\tau)$ — аналог пространства $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ (см. [2]) для функций $\widehat{u}$, имеющих конечную норму

$$\big|\widehat{u}\big|^{1+\lambda/2}_{\overline{\omega}_\tau}=\max_{0\leqslant n\leqslant N}|u_n|+\max_{1\leqslant n\leqslant N}|u_{n\overline{t}}|+\big\langle\widehat{u}_{\overline{t}}\big\rangle^{\lambda/2}_{\overline{\omega}_\tau},$$

$$u_{n\overline{t}}=(u_n-u_{n-1})\tau^{-1},\quad n=\overline{1,N},\quad \big\langle\widehat{u}_{\overline{t}}\big\rangle^{\lambda/2}_{\overline{\omega}_\tau}=\max_{1\leqslant n<n'\leqslant N}\big\{|u_{n\overline{t}}-u_{n'\overline{t}}||t_n-t_{n'}|^{-\lambda/2}\big\}\,.$$

$H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ (см. [2]) для функций $\widehat{u}(x)$, непрерывных по x при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\widehat{u}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}=\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big|+\big\langle\widehat{u}(x)\big\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_\tau}+\big\langle\widehat{u}(x)\big\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau},$$

$$\big\langle\widehat{u}(x)\big\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_\tau}=\sup_{(x,t_n),(x',t_n)\in\overline{Q}_\tau}\Big\{\big|u_n(x)-u_n(x')\big||x-x'|^{-\lambda}\Big\},$$

$$\big\langle\widehat{u}(x)\big\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau}=\sup_{(x,t_n),(x,t_n')\in\overline{Q}_\tau}\Big\{\big|u_n(x)-u_{n'}(x)\big||t_n-t_{n'}|^{-\lambda/2}\Big\}.$$

$H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ для функций $\widehat{u}(x)$, непрерывных по x вместе со своими производными $\widehat{u}_{xx}(x)$ и $\widehat{u}_{\overline{t}}(x)$ при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\widehat{u}(x)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}=\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big|+\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_{nx}(x)\big|+\big|\widehat{u}_{xx}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}+\big|\widehat{u}_{\overline{t}}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau},$$

где $\begin{cases}\widehat{u}_x(x)=\big(u_{0x}(x),\dots,u_{nx}(x),\dots,u_{Nx}(x)\big), & \widehat{u}_{xx}(x)=\big(u_{0xx}(x),\dots,u_{nxx}(x),\dots,u_{Nxx}(x)\big),\\ \widehat{u}_{\overline{t}}(x)=\big(u_{1\overline{t}}(x),\dots,u_{n\overline{t}}(x),\dots,u_{N\overline{t}}(x)\big), & u_{n\overline{t}}(x)=\big(u_n(x)-u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1},\quad n=\overline{1,N}.\end{cases}$

2. Постановка нелинейной параболической задачи с фиксированным граничным режимом. В области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ рассматривается система для определения функций $\big\{u(x,t),\rho(x,t)\big\}$, которая включает в себя краевую задачу первого рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, а также уравнение изменения по времени этого коэффициента:

$$c(x,t,u)\rho(x,t)u_t-Lu=f(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=w(t),\quad u(x,t)\big|_{x=l}=v(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3}$$

$$\rho_t(x,t)=\gamma(x,t,u),\quad (x,t)\in Q,\quad \rho(x,t)\big|_{t=0}=\rho^0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

где равномерно эллиптический оператор Lu имеет вид

$$Lu\equiv\big(a(x,t,u)u_x\big)_x-b(x,t,u)u_x-d(x,t,u)u,$$

a, b, c, d, f, а также w, v, φ, γ и ρ^0 — известные функции своих аргументов; $a\geqslant a_{\min}>0$, $c\geqslant c_{\min}>0$, $\rho^0\geqslant\rho^0_{\min}>0$, $a_{\min}$, $c_{\min}$, $\rho^0_{\min}=\text{const}>0$.

В зависимости от функции $\gamma(x,t,u)$, которая при $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times[-M_0,M_0]$ предполагается знакопостоянной (M_0 — постоянная из принципа максимума для краевой задачи (1)–(3): $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}}|u|\leqslant M_0$), требование параболичности уравнения (1) приводит к ограничениям на искомое решение

$$0<\rho^0_{\min}<\rho(x,t)\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}\rho^0(x)+T\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\gamma(x,t,u)\quad\text{при}\quad\gamma(x,t,u)>0, \tag{5}$$

$$0<\rho^0_{\min}-T\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\bigl|\gamma(x,t,u)\bigr|\leqslant\rho(x,t)\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}\rho^0(x)\quad\text{при}\quad\gamma(x,t,u)\leqslant 0. \tag{6}$$

Если $\gamma(x,t,u)\leqslant 0$ в области $\overline{D}$, то условие (6) накладывает ограничение на отрезок времени $[0,T]$, на котором ищется решение системы (1)–(4): $0<T<\rho^0_{\min}\left(\max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}}\bigl|\gamma(x,t,u)\bigr|\right)^{-1}$.

Условия однозначной разрешимости этой нелинейной параболической задачи в классе гладких функций устанавливает следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) *при* $(x,t)\in\overline{Q}$ *и любых* u, $|u|<\infty$, *все входные данные в соотношениях* (1)–(3) *являются равномерно ограниченными функциями своих аргументов, причем коэффициент* $a(x,t,u)$ *ограничен вместе со своими производными* $a_x(x,t,u)$ *и* $a_u(x,t,u)$, *кроме того*

$$0<a_{\min}\leqslant a(x,t,u)\leqslant a_{\max},\quad 0<c_{\min}\leqslant c(x,t,u)\leqslant c_{\max};$$

2) *при* $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times\ [-M_0,M_0]$ *функции* $a(x,t,u)$, $a_x(x,t,u)$, $a_u(x,t,u)$, $b(x,t,u)$ *и* $d(x,t,u)$ *непрерывны в смысле Гельдера по* x *и* t *с показателями* λ, $\lambda/2$ *и имеют ограниченные производные по* u; *кроме того, функции* $c(x,t,u)$ *и* $f(x,t)$ *принадлежат, соответственно,* $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ *и* $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$;

3) *функции* $w(t)$ *и* $v(t)$ *принадлежат* $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, *функции* $\varphi(x)$ *и* $\rho^0(x)$ *принадлежат, соответственно,* $H^{2+\lambda}[0,l]$ *и* $C^1[0,l]$, $0<\rho^0_{\min}\leqslant\rho^0(x)\leqslant\rho^0_{\max}$, $\rho^0_{\min},\rho^0_{\max}=\text{const}>0$; *выполнены условия согласования*

$$c(x,0,\varphi)\rho^0(x)w_t-L\varphi\big|_{x=0,t=0}=f(x,0)\big|_{x=0},\quad c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t-L\varphi\big|_{x=l,t=0}=f(x,0)\big|_{x=l};$$

4) *функция* $\gamma(x,t,u)$ *в условии* (4) *знакопостоянна при* $(x,t,u)\in\overline{D}$ *и принадлежит* $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$.

Тогда нелинейная система (1)–(4) *имеет единственное решение* $\bigl\{u(x,t),\rho(x,t)\bigr\}$, *обладающее свойствами*

$$u(x,t)\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}),\quad \rho(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad \rho_x(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad \rho_t(x,t)\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),$$
$$\bigl|u(x,t)\bigr|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}}\leqslant M,\quad \max_{(x,t)\in\overline{Q}}\bigl|\rho_x(x,t)\bigr|+\bigl|\rho_t(x,t)\bigr|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}}\leqslant\mathcal{M},\quad M,\,\mathcal{M}=\text{const}>0,$$

и удовлетворяющее ограничениям (5), (6) *в зависимости от знака функции* $\gamma(x,t,u)$.

3. Оптимальное управление с управляющим граничным режимом.

3.1. Сформулируем задачу оптимального управления системой (1)–(4), рассматривая в качестве управляющего воздействия граничную функцию $v(t)$ при $x=l$. Теорема 1 позволяет задать множество допустимых граничных управлений:

$$V_R=\Bigl\{v(t)\in W^2_2[0,T],\ c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t-L\varphi\big|_{x=l,t=0}=f(x,0)\big|_{x=l},\ \|v\|_{W^2_2[0,T]}\leqslant R\Bigr\},\quad R=\text{const}>0. \tag{7}$$

При каждом фиксированном управлении $v(t)$ из этого множества однозначно определяется соответствующее решение $\bigl\{u(x,t;v),\rho(x,t;v)\bigr\}$ системы (1)– (4) в силу вложения пространства $W^2_2[0,T]$ в пространство Гельдера $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$ (см. [6]).

Рассмотрим следующую вариационную задачу — требуется минимизировать на V_R функционал

$$\inf_{v\in V_R}J_g(v),\quad J_g(v)=\int\limits_0^l\bigl(\rho(x,T;v)-g(x)\bigr)^2\,dx, \tag{8}$$

где $g(x)$ — заданная функция, такая, что $g(x)\in C^1[0,l]$, $g(x)>0$ при $0\leqslant x\leqslant l$.

Следуя терминологии, принятой в [7], назовем вариационную задачу (8) задачей о граничном управлении с финальным наблюдением. Соответственно, назовем оптимальным управлением множество

$$V_R^* = \left\{ v_R \in V_R,\ J_g(v_R) = \inf_{v \in V_R} J_g(v) \right\}.$$

Теорема 2. *Задача минимизации функционала $J_g(v)$ на V_R является корректно поставленной, а именно: множество V_R^* не пусто и для любой минимизирующей последовательности $\{v^s\} \subset V_R$ имеет место соотношение*

$$\inf_{v_R \in V_R^*} \left| v^s - v_R \right|_{[0,T]}^{1+\lambda/2} \to 0 \quad \textit{при} \quad s \to \infty.$$

3.2. Доказательство этой теоремы основано на теореме Вейерштрасса — прежде всего заметим, что множество допустимых граничных управлений (см. (7)) является компактным в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$, так как оператор вложения из $W_2^2[0,T]$ в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ вполне непрерывен [6]. Кроме того, возможность применения теоремы Вейерштрасса опирается на следующее свойство функционала $J_g(v)$.

Теорема 3. *При выполнении входными данными системы* (1)–(4) *требований теоремы* 1 *функционал $J_g(v)$ является непрерывным в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ и слабо непрерывным в $W_2^2[0,T]$ на множестве V_R.*

Доказательство. Пусть $\{v^s(t)\} \subset V_R$ — произвольная последовательность, сходящаяся в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ к некоторой функции $v(t) \in V_R$:

$$\left| v^s(t) - v(t) \right|_{[0,T]}^{1+\lambda/2} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$\Delta v(t) = v^s(t) - v(t), \quad \Delta u(x,t) = u^s(x,t) - u(x,t), \quad \Delta\rho(x,t) = \rho^s(x,t) - \rho(x,t),$$

где $\{u^s(x,t), \rho^s(x,t)\}$ и $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ — решения нелинейной системы (1)–(4), соответствующие граничным функциям $v^s(t)$ и $v(t)$.

Очевидно, рассматривая минимизируемый функционал в виде $J_g(v) = \left\| \rho(x,T;v) - g(x) \right\|_{L_2[0,l]}$, можем заключить, что

$$\Big| J_g(v^s) - J_g(v) \Big| = \Big| \left\| \rho^s(x,T) - g(x) \right\|_{L_2[0,l]} - \left\| \rho(x,T) - g(x) \right\|_{L_2[0,l]} \Big| \leqslant \left\| \Delta\rho(x,T) \right\|_{L_2[0,l]}. \tag{10}$$

Покажем, что в области $\overline{Q}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} &\max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left| \Delta u(x,t) \right| \leqslant K_1 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \Delta v(t) \right|, \quad K_1 = \text{const} > 0, \\ &\max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left| \Delta\rho(x,t) \right| \leqslant K_2 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \Delta v(t) \right|, \quad K_2 = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Предположим, что при $t \in [0, t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, эти оценки уже установлены:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0} \left| \Delta u(x,t) \right| \leqslant K_1 \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \left| \Delta v(t) \right|, \quad \max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0} \left| \Delta\rho(x,t) \right| \leqslant K_2 \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \left| \Delta v(t) \right|. \tag{12}$$

Докажем, что аналогичные оценки имеют место и при $t \in [t^0, t^0 + \Delta t]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина. В области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\}$ для $\Delta u(x,t)$ и $\Delta\rho(x,t)$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} c(x,t,u)\rho(x,t)\Delta u_t - \big(a(x,t,u)\Delta u_x\big)_x + \mathcal{A}_0 \Delta u_x + \mathcal{A}_1 \Delta u = c(x,t,u^s) u_t^s \Delta\rho(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t^0}, \\ \Delta u\big|_{x=0} = 0, \quad \Delta u\big|_{x=l} = \Delta v(t), \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t, \\ \Delta\rho(x,t) = \int_{t^0}^{t} \gamma_u(x,\tau,u) \Delta u(x,\tau)\, d\tau + \Delta\rho(x,t^0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{gathered} \tag{13}$$

в которых коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят соответствующим образом от производных a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u и d_u в точке $\big(x, t, \sigma u + (1-\sigma)u^s\big)$ $(0 < \sigma < 1)$, а также от $\rho(x,t)$, $u(x,t)$ и производных $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и $u_t(x,t)$.

Все входные данные этой линейной краевой задачи (в том числе коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$) равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t) в силу справедливости оценок теоремы 1 для $\big\{u^s(x,t),\rho^s(x,t)\big\}$ и $\big\{u(x,t),\rho(x,t)\big\}$. Это позволяет применить принцип максимума и получить оценку

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big| \leqslant K_3\Delta t\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big| + K_4\max\left(\max_{0\leqslant t\leqslant t^0}\big|\Delta v(t)\big|,\max_{0\leqslant x\leqslant l}\Big|\Delta u\big(x,t^0\big)\Big|\right), \tag{14}$$

в которой $K_3, K_4 = \mathrm{const} > 0$. Кроме того, из (13) следует, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big| \leqslant \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|\Delta t\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big| + \max_{0\leqslant x\leqslant l}\Big|\Delta\rho\big(x,t^0\big)\Big|.$$

Учитывая оценки (14) и (12) и выбирая величину Δt из условия $(\Delta t)^2 K_3 \max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big| < 1$, устанавливаем справедливость неравенства

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta\rho(x,t)\big| \leqslant K_2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta v(t)\big|.$$

Но тогда из (14) следует справедливость оценки и для $\Delta u(x,t)$:

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\Delta u(x,t)\big| \leqslant K_1\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta v(t)\big|.$$

Проводя подобные рассуждения последовательно для $t\in\big[t^1,t^1+\Delta t\big]$ $(t^1=t^0+\Delta t)$, $t\in\big[t^2,t^2+\Delta t\big]$ $(t^2=t^1+\Delta t)$ и т.д., устанавливаем оценки (11) на всем отрезке времени $[0,T]$. Это позволяет заключить из (10), что

$$\Big|J_g\big(v^s\big)-J_g(v)\Big| \leqslant K_5\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta v(t)\big|,\quad K_5=\mathrm{const}>0,$$

т.е. в силу (9) имеет место равенство $\lim\limits_{s\to\infty} J_g\big(v^s\big) = J_g(v)$, которое доказывает первое утверждение теоремы 3.

Для доказательства второго утверждения заметим, что для любой последовательности $\big\{v^s\big\}\subset V_R$, слабо сходящейся в $W_2^2[0,T]$ к некоторой функции $v(t)\in V_R$, справедливы в силу определения V_R неравенства $\|v^s\|_{W_2^2[0,T]}\leqslant R$, $\|v\|_{W_2^2[0,T]}\leqslant R$. Так как оператор вложения из $W_2^2[0,T]$ в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$ вполне непрерывен, то отсюда и из единственности слабого предела заключаем, что для последовательности $\big\{v^s\big\}$ имеет место сходимость (9). Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к утверждению $\lim\limits_{s\to\infty} J_g\big(v^s\big)=J_g(v)$, которое и означает слабую непрерывность функционала $J_g(v)$ в $W_2^2[0,T]$ на множестве V_R. Теорема 3 доказана.

Таким образом, в силу теоремы 2 постановка задачи минимизации (8) для функционала $J_g(v)$ обоснована.

4. Дифференцируемость минимизируемого функционала. Исследуем условия, при которых функционал $J_g(v)$ дифференцируем на множестве допустимых управлений V_R, и получим способ представления его дифференциала.

Теорема 4. *Пусть входные данные системы* (1)–(4) *удовлетворяют требованиям теоремы* 1, *и пусть, кроме того, при* $(x,t,u)\in\overline{D}$ *производные коэффициентов уравнения* (1) a_{xu}, a_{uu}, b_x, b_u, c_t, c_u *и* d_u *непрерывны в смысле Гельдера по* x, t, u *с показателями* λ, $\lambda/2$, λ *соответственно; производная по* u *функции* $\gamma(x,t,u)$ *в условии* (4) *знакопостоянна при* $(x,t,u)\in\overline{D}$ *и непрерывна в смысле Гельдера по* x, t *с показателями* λ, $\lambda/2$, *производная* $\gamma_{uu}(x,t,u)$ *ограничена при* $(x,t,u)\in\overline{D}$; *функция финального наблюдения* $g(x)$ *принадлежит* $C^1[0,l]$ *и* $g(x)>0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$.

Тогда функционал $J_g(v)$ *дифференцируем в смысле Фреше в* $W_2^2[0,T]$ *в каждой точке* v *множества* V_R *и его дифференциал можно представить в виде*

$$d\,J_g(v) = -\int_0^T\big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\Big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt,\quad \Delta v\in V_R, \tag{15}$$

где $\big\{\psi(x,t),\vartheta(x,t)\big\}$ *— решение сопряженной задачи, являющейся системой вида*

$$\begin{aligned}\big(c(x,t,u)\rho(x,t)\psi\big)_t + \big(a(x,t,u)\psi_x\big)_x + \mathcal{B}_0(x,t,u)\psi_x + \big(\mathcal{B}_{0x}(x,t,u)-\mathcal{B}_1(x,t,u)\big)\psi ={}&\\ = -\gamma_u(x,t,u)\vartheta(x,t),\quad 0<x<l, 0\leqslant t<T,&\end{aligned} \tag{16}$$

$$\psi(x,t)\big|_{x=0}=0, \quad \psi(x,t)\big|_{x=l}=0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{17}$$

$$\psi(x,t)\big|_{t=T}=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{18}$$

$$\vartheta_t(x,t) = c(x,t,u)u_t(x,t)\psi(x,t), \quad 0 < x < l, 0 \leqslant t < T, \tag{19}$$

$$\vartheta(x,t)\big|_{t=T}= 2\big(\rho(x,T) - g(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{20}$$

в которой

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_0(x,t,u) = b(x,t,u) - a_u(x,t,u)u_x, \\ &\mathcal{B}_1(x,t,u) = c_u(x,t,u)u_t\rho(x,t) - a_u(x,t,u)u_{xx} - a_{uu}(x,t,u)u_x^2 + \\ &\qquad +\big(b_u(x,t,u) - a_{xu}(x,t,u)\big)u_x + d(x,t,u) + d_u(x,t,u)u \end{aligned} \tag{21}$$

и где $\big\{u(x,t),\rho(x,t)\big\}$ *— решение нелинейной системы* (1)–(4)*, соответствующее граничному управлению* $v(t) \in V_R$.

Для доказательства теоремы 4 рассмотрим произвольные граничные функции v и $v+\Delta v$ из множества допустимых управлений V_R. Пусть $\{u,\rho\}$ и $\{u+\Delta u, \rho+\Delta\rho\}$ — решения системы (1)–(4), соответствующие этим граничным функциям. Запишем приращение функционала $J_g(v)$ (см. (8)) относительно приращения Δv:

$$\Delta J_g(v) = J_g(v+\Delta v) - J_g(v) = 2\int\limits_0^l \big(\rho(x,T) - g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx + \int\limits_0^l \big(\Delta\rho(x,T)\big)^2\,dx. \tag{22}$$

Функционал $J_g(v)$ дифференцируем в смысле Фреше в каждой точке v множества V_R, если его приращение можно представить в виде (см. [8, 9])

$$\Delta J_g(v) = d\,J_g(v) + o(\Delta v, v), \tag{23}$$

где $d\,J_g(v)$ — линейный функционал относительно Δv, называемый дифференциалом функционала $J_g(v)$ в точке v множества V_R. Заметим, что $d\,J_g(v)$ является главной линейной частью приращения, в то время как $\big|o(\Delta v, v)\big|\,\Big(\|v\|_{W_2^2[0,T]}\Big)^{-1} \to 0$ при $\|v\|_{W_2^2[0,T]} \to 0$. Покажем, что приращение $\Delta J_g(v)$ вида (22) можно привести к виду (23).

Заметим прежде всего, что при выполнении условий теоремы 4 имеют место оценки устойчивости в классах Гельдера для решений $\{u,\rho\}$ и $\{u+\Delta u, \rho+\Delta\rho\}$ системы (1)–(4):

$$\big|\Delta u(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_6\big|\Delta v(t)\big|_{[0,T]}^{1+\lambda/2}, \quad \big|\Delta\rho(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant K_7\big|\Delta v(t)\big|_{[0,T]}^{1+\lambda/2}, \quad K_6, K_7 = \text{const} > 0. \tag{24}$$

Вывод таких оценок (как и ранее вывод оценок (11) в теореме 3) проводится последовательно для конечных интервалов времени вплоть до момента $t = T$. Доказательство аналогично доказательству соответствующих оценок в классах Гельдера в [1]. С учетом вложения пространства $W_2^2[0,T]$ в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ оценки (24) принимают вид

$$\big|\Delta u(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_8\big\|\Delta v(t)\big\|_{W_2^2[0,T]}, \quad \big|\Delta\rho(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant K_9\big\|\Delta v(t)\big\|_{W_2^2[0,T]}, \quad K_8, K_9 = \text{const} > 0. \tag{25}$$

В силу этих оценок приращения $\Delta u(x,t)$, $\Delta\rho(x,t)$ удовлетворяют следующим соотношениям с точностью до членов второго порядка относительно $\big\|\Delta v(t)\big\|_{W_2^2[0,T]}$:

$$c(x,t,u)\rho(x,t)\Delta u_t + c(x,t,u)u_t\Delta\rho(x,t) - \mathcal{L}\Delta u = \mathcal{F}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{26}$$

$$\Delta u\big|_{x=0}=0, \quad \Delta u\big|_{x=l} = \Delta v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{27}$$

$$\Delta u\big|_{t=0}=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{28}$$

$$\Delta\rho_t(x,t) = \gamma_u(x,t,u)\Delta u(x,t), (x,t) \in Q, \quad \Delta\rho(x,t)\big|_{t=0}=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{29}$$

в которых оператор $\mathcal{L}\Delta u$ определен как

$$\mathcal{L}\Delta u \equiv \big(a(x,t,u)\Delta u_x\big)_x - \mathcal{B}_0(x,t,u)\Delta u_x - \mathcal{B}_1(x,t,u)\Delta u$$

с коэффициентами $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$ вида (21) и где функция $\mathcal{F}(x,t)$ зависит от $(\Delta u)^2$, $\Delta u\Delta u_x$, $\Delta u\Delta u_t$, $\Delta u\Delta u_{xx}$, $\Delta\rho\Delta u$, $\Delta\rho\Delta u_t$. С учетом оценок (25) справедливо неравенство

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\mathcal{F}(x,t)\big| \leqslant K_{10}\big\|\Delta v(t)\big\|^2_{W_2^2[0,T]}, \quad K_{10} = \text{const} > 0. \tag{30}$$

5. Сопряженная задача. Дальнейшее доказательство теоремы 4 связано с исследованием сопряженной задачи (16)–(20), которая является системой относительно функций $\psi(x,t)$, $\vartheta(x,t)$. Она включает в себя линейную краевую задачу первого рода для неоднородного параболического уравнения (16) с неизвестной функцией $\vartheta(x,t)$ в правой части, а также содержит условия (19), (20), описывающие изменение по времени этой функции. Прежде чем перейти к доказательству разрешимости системы (16)–(20) в классе гладких функций, введем переменную $t' = T - t$ и представим эту систему в виде

$$c\rho\psi_{t'} - (a\psi_x)_x - \mathcal{B}_0\psi_x + \big\{(c\rho)_{t'} + \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{0x}\big\}\psi = \gamma_u\vartheta(x,t'), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t' \leqslant T, \tag{31}$$

$$\psi(x,t')\big|_{x=0} = 0, \quad \psi(x,t')\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t' \leqslant T, \tag{32}$$

$$\psi(x,t')\big|_{t'=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{33}$$

$$\vartheta_{t'}(x,t') = cu_{t'}\psi(x,t'), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t' \leqslant T, \tag{34}$$

$$\vartheta(x,t')\big|_{t'=0} = 2\Big(\rho(x,t')\big|_{t'=0} - g(x)\Big), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{35}$$

5.1. Покажем, что для решения $\big\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\big\}$ имеет место

Лемма 1. *Пусть входные данные исходной системы* (1)–(4) *удовлетворяют требованиям, при которых справедливы оценки теоремы* 1 *для решения* $\big\{u(x,t),\rho(x,t)\big\}$ *и его производных.*

При выполнении условий теоремы 4 *для решения* $\big\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\big\}$ *сопряженной задачи* (31)–(35) *в области* $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t' \leqslant T\}$ *справедливы оценки*

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}}\big|\psi(x,t')\big| \leqslant \overline{M}_0, \quad \max_{(x,t')\in\overline{Q}}\big|\vartheta(x,t')\big| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0, \tag{36}$$

в которых $\overline{M}_0 > 0$ *и* $\overline{\mathcal{M}}_0 > 0$ *— постоянные вида*

$$\begin{aligned}
&\overline{M}_0 = (1+\varepsilon)c^{-1}_{\min}\rho^{-1}_{\min}\gamma_{u\max}(\rho_{\max} + g_{\max})T\exp(K_{11}T), \quad \varepsilon > 0 \textit{ любое},\\
&\overline{\mathcal{M}}_0 = (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max}),\\
&K_{11} \geqslant (1+\varepsilon)\left\{c_{\max}\rho_{t\max} + (c_{t\max} + c_{u\max}u_{t\max})\rho_{\max} + \max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_1| + \max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_{0x}|\right\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Доказательство. Получение оценок (36) проводится последовательно для конечных интервалов времени в предположении, что при $t' \in \big[0,t^0\big]$, $0 \leqslant t^0 < T$, соответствующие оценки уже установлены:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t'\leqslant t^0}\big|\psi(x,t')\big| \leqslant (1+\varepsilon)c^{-1}_{\min}\rho^{-1}_{\min}\gamma_{u\max}(\rho_{\max} + g_{\max})t^0\exp\big(K_{11}t^0\big),$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t'\leqslant t^0}\big|\vartheta(x,t')\big| \leqslant (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max}), \quad \varepsilon > 0 \text{ любое}. \tag{38}$$

Покажем, что аналогичные оценки имеют место в области $\overline{Q}_{t^0} = \big\{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t' \leqslant t^0 + \Delta t\big\}$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина. Рассмотрим в Q_{t^0} уравнение (31) и заметим, что все его коэффициенты равномерно ограничены как функции (x,t'), в том числе коэффициенты $\mathcal{B}_{0x}$ и $\mathcal{B}_1$. Это следует из (21) и из оценок теоремы 1 для функций $\big\{u(x,t),\rho(x,t)\big\}$ и их производных. Применение принципа максимума в области $\overline{Q}_{t^0}$ приводит к оценке

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\psi(x,t')\big| \leqslant \exp(K_{11}\Delta t)\left\{c^{-1}_{\min}\rho^{-1}_{\min}\gamma_{u\max}\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}}\big|\vartheta(x,t')\big|\Delta t + \max_{0\leqslant x\leqslant l}\Big|\psi\big(x,t^0\big)\Big|\right\}. \tag{39}$$

Заметим из (34), что

$$\vartheta(x,t') = \int\limits_{t^0}^{t'} c(x,\tau,u)u_{t'}(x,\tau)\psi(x,\tau)\,d\tau + \vartheta\big(x,t^0\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\vartheta(x,t')\right| \leqslant \Delta t c_{\max} u_{t\,\max} \max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\psi(x,t')\right| + \max_{0\leqslant x\leqslant l} \left|\vartheta\big(x,t^0\big)\right|. \qquad (40)$$

Учитывая эту оценку для $\left|\vartheta(x,t')\right|$, представим неравенство (39) в виде

$$\left\{1 - \Delta t c_{\max} u_{t\,\max} c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\,\max} T \exp(K_{11}T)\right\} \max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\psi(x,t')\right| \leqslant$$
$$\leqslant \Delta t \exp(K_{11}\Delta t) \left\{c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\,\max} \max\nolimits_{0\leqslant x\leqslant l} \left|\vartheta\big(x,t^0\big)\right|\right\} + \exp(K_{11}\Delta t) \max\nolimits_{0\leqslant x\leqslant l} \left|\psi\big(x,t^0\big)\right|.$$

Выбирая затем величину Δt из условия

$$\Delta t c_{\max} u_{t\,\max} c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\,\max} T \exp(K_{11}T) \leqslant 1 - \mu, \quad 0 < \mu < 1 \text{ любое}, \qquad (41)$$

и учитывая оценки (38) для $\left|\psi\big(x,t^0\big)\right|$ и $\left|\vartheta\big(x,t^0\big)\right|$, приходим к неравенству

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\psi(x,t')\right| \leqslant \mu^{-1} \Delta t \exp(K_{11}\Delta t) \left\{c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\,\max} (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max})\right\} +$$
$$+ \mu^{-1}(1+\varepsilon) \left\{c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\,\max} (\rho_{\max} + g_{\max})\right\} t^0 \exp\Big(K_{11}\big(t^0 + \Delta t\big)\Big). \qquad (42)$$

Так как $0 < t^0 < T$, $0 < \Delta t < T$, $0 < t^0 + \Delta t < T$, число μ — любое из интервала $0 < \mu < 1$, то оценку (42) для $\left|\psi(x,t')\right|$ можно представить в виде

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\psi(x,t')\right| \leqslant \overline{M}_0, \quad \overline{M}_0 = (1+\varepsilon) c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\,\max} (\rho_{\max} + g_{\max}) T \exp(K_{11}T),$$

в котором $\varepsilon > 0$ — любое. Таким образом, искомая оценка для функции $\psi(x,t')$ в области $\overline{Q}_{t^0}$ доказана. Учитывая эту оценку, нетрудно видеть из (40), что

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\vartheta(x,t')\right| \leqslant \Delta t c_{\max} u_{t\,\max} (1+\varepsilon) c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\,\max} (\rho_{\max} + g_{\max}) T \exp(K_{11}T) + (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max}). \quad (43)$$

Так как величина $\Delta t > 0$ удовлетворяет условию (41), то неравенство (43) можно представить в виде

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\vartheta(x,t')\right| \leqslant (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max}), \quad \varepsilon > 0 \text{ любое}.$$

Следовательно, искомая оценка для функции $\vartheta(x,t')$ в области $\overline{Q}_{t^0}$ доказана. Проводя подобные рассуждения последовательно для $t' \in \left[t^1, t^1 + \Delta t\right]$ $\big(t^1 = t^0 + \Delta t\big)$, $t' \in \left[t^2, t^2 + \Delta t\right]$ $\big(t^2 = t^1 + \Delta t\big)$ и т.д., устанавливаем соответствующие оценки для $\left\{\psi(x,t'), \vartheta(x,t')\right\}$ на всем отрезке времени $[0,T]$, завершая тем самым доказательство леммы 1.

5.2. Для доказательства разрешимости сопряженной задачи (31)–(35) в классе гладких функций воспользуемся методом прямых Ротэ, заменяя ее дифференциально-разностной системой определения $\left\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\right\}$ — приближенных значений функций $\psi(x,t')$ и $\vartheta(x,t')$ в области $\overline{Q}_\tau = \left\{0 \leqslant x \leqslant l, t_n \in \overline{\omega}_\tau\right\}$ (t_n — узлы равномерной сетки $\overline{\omega}_\tau = \{t_n\} \in\ [0,T]$ с шагом $\tau = TN^{-1}$):

$$c_n \rho_n \psi_{n\bar{t}} - (a_n \psi_{nx})_x - \mathcal{B}_{0n} \psi_{nx} + \left\{(c_n\rho_n)_{\bar{t}} + \mathcal{B}_{1n} - (\mathcal{B}_{0n})_x\right\} \psi_n = \gamma_{un} \vartheta_n, \qquad (44)$$

$$(x,t_n) \in Q_\tau = \{0 < x < l\} \times \omega_\tau,$$

$$\psi_n\big|_{x=0} = 0, \quad \psi_n\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t_n \leqslant T, \qquad (45)$$

$$\psi_0(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (46)$$

$$\vartheta_{n\bar{t}}(x) = c_n u_{n\bar{t}} \psi_{n-1}, \quad (x,t_n) \in Q_\tau, \qquad (47)$$

$$\vartheta_0(x) = 2\Big(\rho_n(x)\big|_{n=0} - g(x)\Big), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \qquad (48)$$

В этих соотношениях a_n, c_n, $\mathcal{B}_{0n}$, $\mathcal{B}_{1n}$, γ_{un} — значения соответствующих функций в точке (x,t_n,u_n); кроме того, $u_n(x)$ и $\rho_n(x)$ — известные решения исходной системы (1)–(4), т.е. функции $u(x,t')$ и $\rho(x,t')$ на временно́м слое $t' = t_n$:

$$u_{n\bar{t}} = \big(u_n(x) - u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad u_{nx} = du_n(x)/dx, \quad \rho_{n\bar{t}} = \big(\rho_n(x) - \rho_{n-1}(x)\big)\tau^{-1},$$

$$\psi_{n-1}=\psi(x,t_{n-1},u_{n-1}),\quad \psi_{n\bar t}=\big(\psi_n(x)-\psi_{n-1}(x)\big)\tau^{-1},\quad \psi_{nx}=\psi_n(x)/dx,\quad \vartheta_{n\bar t}=\big(\vartheta_n(x)-\vartheta_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}.$$

Доказательство разрешимости сопряженной задачи (31)–(35) методом Ротэ включает в себя несколько основных этапов.

Этап 1. Исследование дифференциально-разностной краевой задачи (44)–(46) в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ в предположении, что $\vartheta_n(x)$ — известная функция. Цель этого этапа — доказать однозначную разрешимость такой задачи и получить соответствующие априорные оценки для ее решения $\psi_n(x)$, не зависящие от x, τ, n.

Этап 2. Доказательство существования и единственности решения $\big\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\big\}$ дифференциально-разностной системы (44)–(48) в соответствующих функциональных пространствах на основе результатов этапа 1.

Этап 3. Предельный переход при $n\to\infty$ в условиях (44)–(48) в силу компактности семейства $\big\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\big\}$ на основе априорных оценок, полученных на этапе 2. Завершение доказательства однозначной разрешимости сопряженной задачи (31)–(35) в классе гладких функций.

Переходя к этим этапам, будем более подробно останавливаться лишь на тех моментах, которые связаны со спецификой сопряженной задачи (31)–(35). При рассмотрении же тех моментов, которые являются общими для метода Ротэ, ограничимся ссылками на известные результаты.

5.3. Следующая лемма устанавливает однозначную разрешимость в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ линейной дифференциально-разностной краевой задачи (44)–(46) в предположении, что функция $\vartheta_n(x)$ в правой части уравнения (44) равномерно ограничена в $\overline{Q}_\tau$ и принадлежит $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$:

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\vartheta_n(x)\big|\leqslant\overline{\mathcal{M}}_0,\quad \big|\widehat{\vartheta}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}\leqslant\overline{\mathcal{M}}_1,\quad \overline{\mathcal{M}}_0,\overline{\mathcal{M}}_1=\mathrm{const}>0.$$

Лемма 2. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 4, *и пусть* $\vartheta_n(x)$ — *известная функция с указанными выше свойствами. Тогда линейная дифференциально-разностная краевая задача* (44)–(46) *имеет единственное решение* $\psi_n(x)$ *в области* $\overline{Q}_\tau$ *при любом достаточно малом шаге* τ *сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *и для него справедливы оценки*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\psi_n(x)\big|\leqslant\overline{M}_0,\qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\psi_{nx}(x)\big|\leqslant\overline{M}_1,\quad \big|\widehat{\psi}(x)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}\leqslant\overline{M}_2,\tag{49}$$

в которых $\overline{M}_0$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ — *положительные постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Доказательство. Утверждение леммы 2 основано на результатах теоремы 4.2.8 из [4, 5] об однозначной разрешимости в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ краевой задачи первого рода для линейного дифференциально-разностного уравнения. Эти результаты являются аналогами известных результатов [10] для линейных параболических уравнений. Возможность применения теоремы 4.2.8 обеспечивается принадлежностью коэффициентов уравнения (44) классу $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ в силу требований теоремы 4 к входным данным, а также в силу оценок теоремы 1 для решения $\big\{u(x,t),\ \rho(x,t)\big\}$ исходной задачи (1)–(4) (см. вид коэффициентов $\mathcal{B}_{0x}$ и $\mathcal{B}_1$ в (21)).

Применительно к задаче (44)–(46) постоянная $\overline{M}_0$ из оценки принципа максимума для $\psi_n(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\overline{M}_0=c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\vartheta_n(x)\big|T\exp(K_{11}T),\\
&K_{11}\geqslant(1+\varepsilon)\left\{c_{\max}\rho_{t\max}+(c_{t\max}+c_{u\max}u_{t\max})\rho_{\max}+\max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_1|+\max_{(x,t')\in\overline{Q}}|\mathcal{B}_{0x}|\right\},\\
&\varepsilon>0\ \text{любое},\quad \tau\leqslant\tau_0=\varepsilon K_{11}^{-1}.
\end{aligned}\tag{50}$$

Для получения оценки для $\big|\psi_{nx}(x)\big|$ мы применяем к задаче (44)–(46) дискретный аналог известного метода из [11]. Такой подход позволяет избежать дифференцирования уравнения (44) по x и тем самым не требует дополнительной гладкости от входных данных.

Кратко суть подхода состоит в следующем — мы используем нечетное расширение функции $\psi_n(x)$ в области $Q_\tau^-=\{-l<x<0\}\times\omega_\tau$ и $Q_\tau^+=\{l<x<2l\}\times\omega_\tau$ с последующим введением дополнительной пространственной переменной z и функции $W_n(x,z)=\psi_n(x)-\psi_n(z)$. Для этой функции устанавливается оценка $\big|W_n(x,z)\big|\leqslant\overline{M}_1|x-z|$, которая приводит к искомой оценке $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\psi_{nx}(x)\big|\leqslant\overline{M}_1$ в (49). Постоянная $\overline{M}_1>0$ зависит от $\overline{M}_0$ и от $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\vartheta_n(x)\big|$ (подробнее см. лемму 4.3.5 в [4, 5]).

Оценка для $\left|\widehat{\psi}(x)\right|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}$ следует из соответствующей оценки теоремы 4.2.8 из [4, 5], которая применительно к задаче (44)–(46) принимает вид:

$$\left|\widehat{\psi}(x)\right|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant K_{12}\left|\widehat{\vartheta}(x)\right|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}, \tag{51}$$

где $K_{12} > 0$ — постоянная, зависящая от норм в $H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ коэффициентов уравнения (44), а следовательно, и от норм в соответствующих сеточно-непрерывных классах Гельдера функций $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ (см. вид коэффициентов $\mathcal{B}_{0x}$ и $\mathcal{B}_1$ в (21)).

5.4. Переходя к этапу 2, заметим, что сеточно-непрерывная функция $\vartheta_n(x)$ заранее не известна и ищется одновременно с $\psi_n(x)$ из системы (44)–(48). Существование решения $\left\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\right\}$ этой системы устанавливает

Лемма 3. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 4, *и пусть шаг сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \tau \leqslant \min(\tau_0, \tau_{00}), \quad 0 < \tau_0 = \varepsilon K_{11}^{-1}, \quad 0 < \tau_{00} = \varepsilon K_{13}^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое},$$

где $K_{11} > 0$ *— постоянная, определенная в* (50), $K_{13} > 0$ *— постоянная вида*

$$K_{13} = c_{\max} u_{t\max} c_{\min}^{-1} \rho_{\min}^{-1} \gamma_{u\max} T \exp(K_{11}T).$$

Тогда в области $\overline{Q}_\tau$ *дифференциально-разностная система* (44)–(48) *имеет единственное решение* $\left\{\psi_n(x), \vartheta_n(x)\right\}$, *обладающее свойствами*

$$\psi_n(x) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau), \quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\psi_n(x)\right| \leqslant \overline{M}_0, \quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\psi_{nx}(x)\right| \leqslant \overline{M}_1, \quad \left|\widehat{\psi}(x)\right|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant \overline{M}_2,$$

$$\vartheta_n(x) \in H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau), \quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_n(x)\right| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0, \quad \left|\widehat{\vartheta}(x)\right|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant \overline{\mathcal{M}}_1, \tag{52}$$

где $\overline{M}_0$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{\mathcal{M}}_0$ *и* $\overline{\mathcal{M}}_1$ *— положительные постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Доказательство. Исходя из начального момента времени $t_0 = 0$, предположим, что вплоть до момента $t' = t_{n-1}$ решения $\left\{\psi_j(x), \vartheta_j(x)\right\}$ $(j = \overline{1, n-1})$ уже найдены и соответствующие оценки для них уже установлены, в частности $\max\limits_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_{n-1}(x)\right| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0$, $\overline{\mathcal{M}}_0 = (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max})$.

Из соотношения (47) следует, что

$$\left|\vartheta_n(x)\right| \leqslant \max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_{n-1}(x)\right| + \tau c_{\max} u_{t\max} \max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}\left|\psi_{n-1}(x)\right|.$$

Заметим, что применение принципа максимума с учетом граничных и начальных условий для $\psi_{n-1}(x)$ позволяет установить, что

$$\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}\left|\psi_{n-1}(x)\right| \leqslant c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max} T \exp(K_{11}T) \max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_{n-1}(x)\right|.$$

Учитывая эту оценку и выбирая величину шага сетки $\overline{\omega}_\tau$ из условия

$$\tau \leqslant \varepsilon\left\{c_{\max} u_{t\max} c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max} T\exp(K_{11}T)\right\}^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое},$$

получаем неравенства

$$\left|\vartheta_n(x)\right| \leqslant (1+\varepsilon)\max_{(x,t_{n-1})\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_{n-1}(x)\right| \leqslant (1+\varepsilon)\overline{\mathcal{M}}_0,$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_n(x)\right| \leqslant \overline{\mathcal{M}}_0, \quad \overline{\mathcal{M}}_0 = (1+\varepsilon)(\rho_{\max} + g_{\max}).$$

Наличие оценки для $\left|\vartheta_n(x)\right|$ позволяет применить принцип максимума уже для $\psi_n(x)$ и установить, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\psi_n(x)\right| \leqslant c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max} T\exp(K_{11}T) \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_n(x)\right|,$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \left|\psi_n(x)\right| \leqslant \overline{M}_0, \quad \overline{M}_0 = (1+\varepsilon)c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max}(\rho_{\max}+g_{\max})T\exp(K_{11}T).$$

Заметим, что постоянные $\overline{M}_0$ и $\overline{\mathcal{M}}_0$ из оценок для $\left|\psi_n(x)\right|$ и $\left|\vartheta_n(x)\right|$ не зависят от x, τ, n и совпадают с соответствующими постоянными из оценок (36), (37) леммы 1.

Продолжая доказательство леммы 3, укажем, что полученные оценки для $\left|\psi_n(x)\right|$ и $\left|\vartheta_n(x)\right|$ позволяют использовать дискретный аналог метода из [11] для оценки производной $\left|\psi_{nx}(x)\right|$. Схема его применения изложена кратко при доказательстве леммы 2. Соответствующая постоянная $\overline{M}_1$ в (52) зависит от постоянных $\overline{M}_0$ и $\overline{\mathcal{M}}_0$.

Переходя к получению оценки $\left|\widehat{\psi}(x)\right|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant \overline{M}_2$, заметим, что эта оценка связана в силу (51) с получением оценки $\left|\widehat{\vartheta}(x)\right|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}$. Из соотношения (47) сразу следует, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \left|\vartheta_{n\bar{t}}(x)\right| \leqslant c_{\max}u_{t\max}\overline{M}_0.$$

Кроме того, в силу (47) справедливо представление

$$\vartheta_n(x) = \vartheta_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \tau c_j u_{j\bar{t}}(x)\psi_{j-1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Это представление позволяет оценить величину $\left\langle\widehat{\vartheta}(x)\right\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_\tau}$, исходя из ее определения и учитывая условие (48) для $\vartheta_0(x)$, а также соответствующую гладкость функции $\rho(x,t)$ и принадлежность финальной функции $g(x)$ пространству $C^1[0,l]$. Кроме того, оценка $\left\langle\widehat{\vartheta}(x)\right\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_\tau}$ связана с соответствующей гладкостью коэффициента $c(x,t,u)$ в силу требований теоремы 4, с принадлежностью производных $u_{j\bar{t}}(x)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ классу $H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ (см. теорему 1), а также с оценками производных $\psi_{jx}(x)$ в $\overline{Q}_\tau$ $\left(j=\overline{1,n-1}\right)$, т.е. с величиной $\overline{M}_1$.

Полученные оценки для $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_n(x)\right|$, $\left\langle\widehat{\vartheta}(x)\right\rangle^{\lambda}_{x,\overline{Q}_\tau}$ и для $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\left|\vartheta_{n\bar{t}}(x)\right|$ позволяют в силу определения нормы в классе $H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ установить искомую оценку (52) для $\left|\widehat{\vartheta}(x)\right|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}$.

Таким образом, сеточно-непрерывная функция $\vartheta_n(x)$, найденная из соотношения (47) по известным $\vartheta_{n-1}(x)$ и $\psi_{n-1}(x)$, удовлетворяет требованиям, при которых в силу леммы 2 дифференциально-разностная краевая задача первого рода (44)–(46) имеет в классе $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ единственное решение $\psi_n(x)$ с соответствующими оценками (49). Лемма 3 доказана.

5.5. Результаты леммы 3 позволяют перейти к этапу 3.

Лемма 4. *При выполнении входными данными требований теоремы* 4 *существует единственное гладкое решение* $\left\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\right\}$ *сопряженной задачи* (31)–(35)*, такое, что*

$$\psi(x,t')\in C(\overline{Q}), \quad \psi_x(x,t')\in C(\overline{Q}), \quad \psi(x,t')\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q),$$
$$\vartheta(x,t')\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \vartheta_t(x,t')\in C(\overline{Q}). \tag{53}$$

Его можно получить как предел решения $\left\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\right\}$ *дифференциально-разностной системы* (44)–(48) *при стремлении шага сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *к нулю.*

Доказательство. Равномерные оценки (52) (не зависящие от x, τ, n) означают компактность семейства $\left\{\psi_n(x),\vartheta_n(x)\right\}$ в соответствующих функциональных пространствах. Это позволяет, проводя обычные рассуждения при совершении предельного перехода в условиях (44)–(48) при $\tau\to 0$ (т.е. при $n\to\infty$), установить, что сопряженная задача (31)–(35) (в переменных (x,t'), $t'=T-t$) имеет по крайней мере одно гладкое решение $\left\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\right\}$ в указанных выше классах (см. (53)).

Остановимся более подробно на гладкости функции $\psi(x,t')$. Используя понятия согласования начальных и граничных данных [2] применительно к сопряженной задаче (31)–(35), отметим, что $\psi(x,t')\big|_{x=0,t'=0}=0$, $\psi(x,t')\big|_{x=l,t'=0}=0$, т.е. выполнены условия согласования нулевого порядка. Однако условия согласования первого порядка, вообще говоря, не выполнены.

Действительно, уравнение (31) не удовлетворяется в граничных точках $x=0$, $x=l$ при $t'=0$, так как, в отличие от условий (32) и (33) для $\psi(x,t')$, для функции $\vartheta(x,t')$, входящей в правую часть уравнения (31), не выполнено требование $\vartheta(x,t')\big|_{x=0,t'=0}= 0$, $\vartheta(x,t')\big|_{x=l,t'=0}= 0$. Это связано с тем, что в начальном условии (35) $\rho(x,t')\big|_{x=0,t'=0}\neq g\big|_{x=0}$, $\rho(x,t')\big|_{x=l,t'=0}\neq g\big|_{x=l}$. Учитывая это, заключаем на основе оценок (52) леммы 3, что решение $\psi(x,t')$ и его производная $\psi_x(x,t')$ непрерывны в замкнутой области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t' \leqslant T\}$, однако $\psi(x,t')$ принадлежит классу Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}$ только в области $Q = \{0 < x < l, 0 \leqslant t' \leqslant T\}$ — из-за невыполнения условий согласования первого порядка.

Покажем теперь, что решение $\big\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\big\}$ единственно в классе гладких функций

$$\sup_{(x,t')\in\overline{Q}} |\psi,\psi_x,\psi_{xx},\psi_t| < \infty, \qquad \sup_{(x,t')\in\overline{Q}} |\vartheta,\vartheta_t| < \infty.$$

Кратко изложим доказательство этого утверждения, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство оценок (36) леммы 1.

Предположим, что при $t' \in \big[0,t^0\big]$, $0 \leqslant t^0 < T$, единственность решения $\big\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\big\}$ уже установлена. Докажем, что тогда единственность имеет место и для $t' \in \big[t^0,t^0+\Delta t\big]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина, что позволяет за конечное число шагов исчерпать весь отрезок $[0,T]$.

Допустим противное, т.е. что при $t' \in \big[t^0,t^0+\Delta t\big]$ существуют два решения сопряженной задачи (31)–(35): $\big\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\big\}$ и $\big\{\overline{\psi}(x,t'),\overline{\vartheta}(x,t')\big\}$. Выражения для $\vartheta(x,t')$ и $\overline{\vartheta}(x,t')$ при таком t' имеют вид (см. (34)):

$$\vartheta(x,t') = \int\limits_{t^0}^{t'} c(x,\tau,u)u_{t'}(x,\tau)\psi(x,\tau)\,d\tau + \vartheta\big(x,t^0\big), \quad \overline{\vartheta}(x,t') = \int\limits_{t^0}^{t'} c(x,\tau,u)u_{t'}(x,\tau)\overline{\psi}(x,\tau)\,d\tau + \overline{\vartheta}\big(x,t^0\big).$$

Так как по предположению $\vartheta\big(x,t^0\big) = \overline{\vartheta}\big(x,t^0\big)$, то для разностей

$$\eta(x,t') = \psi(x,t') - \overline{\psi}(x,t'), \quad \zeta(x,t') = \vartheta(x,t') - \overline{\vartheta}(x,t')$$

в области $\overline{Q}_{t^0} = \big\{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t' \leqslant t^0+\Delta t\big\}$ следует оценка

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t')\big| \leqslant \Delta t c_{\max} u_{t\max} \max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t')\big|. \tag{54}$$

Кроме того, для $\eta(x,t')$ имеет место линейная краевая задача вида (31)–(33) с соответствующей правой частью уравнения:

$$c\rho\eta_{t'} - (a\eta_x)_x - \mathcal{B}_0\eta_x + \big\{(c\rho)_{t'} + \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{0x}\big\}\eta = \gamma_u\zeta(x,t'), \quad (x,t')\in Q_{t^0},$$

$$\eta(x,t')\big|_{x=0}= 0, \quad \eta(x,t')\big|_{x=l} = 0, \quad t^0 < t' \leqslant t^0+\Delta t, \quad \eta\big(x,t^0\big) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Применение принципа максимума в области $\overline{Q}_{t^0}$ позволяет получить оценку

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t')\big| \leqslant \Delta t \exp(K_{11}\Delta t) c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max} \max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t')\big|,$$

где $K_{11} > 0$ — постоянная, определенная в (37). Отсюда и из (54) следует, что

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t')\big| \leqslant \Delta t \exp(K_{11}\Delta t) c_{\min}^{-1}\rho_{\min}^{-1}\gamma_{u\max} c_{\max} u_{t\max} T \max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t')\big|.$$

Выбирая затем величину $\Delta t > 0$ из условия (41) леммы 1, приходим к соотношению

$$\max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t')\big| \leqslant (1-\mu) \max_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t')\big|, \quad 0 < \mu < 1 \text{ любое}.$$

Это означает, что $\max\limits_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t')\big| = 0$, а следовательно, и $\max\limits_{(x,t')\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t')\big| = 0$ в силу (54).

Таким образом, предположение о неединственности решения сопряженной задачи (31)–(35) при $t' \in \big[t^0,t^0+\Delta t\big]$ приводит к противоречию. Повторение подобных рассуждений для последующих отрезков времени вплоть до конечного момента T позволяет установить единственность решения $\big\{\psi(x,t'),\vartheta(x,t')\big\}$ на всем отрезке $[0,T]$. Лемма 4 доказана.

6. Вид дифференциала $d\,J_g(v)$**.** Для завершения доказательства теоремы 4 возвращаемся к сопряженной задаче (16)–(20) в переменных (x,t) и установим справедливость представления (15) для дифференциала минимизируемого функционала $J_g(v)$.

Покажем, что приращение функционала $J_g(v)$ можно представить в виде

$$\Delta J_g(v) = -\int\limits_0^T \big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt + \int\limits_0^l \big(\Delta\rho(x,T)\big)^2\,dx, \tag{55}$$

где $\mathcal{F}(x,t)$ — правая часть уравнения (26), для которой справедливо неравенство (30). Рассмотрим вспомогательное выражение

$$I = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi\{c\rho\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u + cu_t\Delta\rho\}\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u\big\{(c\rho\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi + \gamma_u\vartheta\big\}\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l (\vartheta\Delta\rho)_t\,dx\,dt, \tag{56}$$

в котором операторы $\mathcal{L}\Delta u$ и $\mathcal{L}^*\psi$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Delta u &\equiv \big(a(x,t,u)\Delta u_x\big)_x - \mathcal{B}_0(x,t,u)\Delta u_x - \mathcal{B}_1(x,t,u)\Delta u,\\ \mathcal{L}^*\psi &\equiv \big(a(x,t,u)\psi_x\big)_x + \big(\mathcal{B}_0(x,t,u)\psi\big)_x - \mathcal{B}_1(x,t,u)\psi\end{aligned}$$

с коэффициентами $\mathcal{B}_0(x,t,u)$ и $\mathcal{B}_1(x,t,u)$, определенными в (21).

С одной стороны, в силу уравнения (16) для $\psi(x,t)$ и уравнения (26) для $\Delta u(x,t)$ и с учетом условий (20) для $\vartheta(x,t)$ и (29) для $\Delta\rho(x,t)$ имеем

$$I = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt - 2\int\limits_0^l \big(\rho(x,T) - g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx.$$

С другой стороны, представим I в виде $I = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \big\{\psi c\rho\Delta u_t + \Delta u(c\rho\psi)_t\big\}\,dx\,dt, \quad I_2 = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \big\{-\psi\mathcal{L}\Delta u + \Delta u\mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt,$$

$$I_3 = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi cu_t\Delta\rho\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u\gamma_u\vartheta\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l (\vartheta\Delta\rho)_t\,dx\,dt.$$

Учитывая соотношения (16)–(18) для $\psi(x,t)$, (26)–(28) для $\Delta u(x,t)$, а также уравнения (19) для $\vartheta(x,t)$ и (29) для $\Delta\rho(x,t)$, заключаем, что

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\limits_0^l [\psi c\rho\Delta u]_{t=0}^{t=T}\,dx = 0,\\ I_2 &= -\int\limits_0^T [\psi a\Delta u_x]_{x=0}^{x=l}\,dt + \int\limits_0^T [\psi\mathcal{B}_0\Delta u]_{x=0}^{x=l}\,dt + \int\limits_0^T [\Delta u a\psi_x]_{x=0}^{x=l}\,dt = \int\limits_0^T (a\psi_x)\big|_{x=l}\Delta v\,dt,\\ I_3 &= \int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi cu_t\Delta\rho\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u\gamma_u\vartheta\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l \vartheta_t\Delta\rho\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l \vartheta\Delta\rho_t\,dx\,dt =\\ &= \int\limits_0^T\int\limits_0^l (\psi cu_t - \vartheta_t)\Delta\rho\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l \vartheta(\Delta\rho_t - \gamma_u\Delta u)\,dx\,dt = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, используя вспомогательное выражение I, получаем

$$2\int\limits_0^l \big(\rho(x,T) - g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx = -\int\limits_0^T \big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt,$$

т.е. представление (55) с учетом (22), действительно, имеет место. Из этого представления на основании оценки $\left|\psi(x)\right|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant \overline{M}_2$ (см. леммы 3, 4), оценок (25) для $\Delta\rho(x,t)$ и оценки (30) для $\mathcal{F}(x,t)$ заключаем, что справедливо равенство

$$\Delta J_g(v) = -\int\limits_0^T \big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt + o\big(\|v\|_{W_2^2[0,T]}\big).$$

Интеграл в этом равенстве является линейным функционалом в $W_2^2[0,T]$ относительно Δv, т.е. функционал $J_g(v)$ дифференцируем на множестве V_R и его дифференциал $d\,J_g(v)$ в точке $v \in V_R$ представим в виде (15). Этим утверждением доказательство теоремы 4 завершено.

7. Оптимальное управление системой (1)–(4) **с другим финальным наблюдением.** Рассмотрим вариационную задачу о граничном управлении данной системой с финальным наблюдением другого вида:

$$\inf_{v\in V_R} J(v), \quad J(v) = \int\limits_0^l \big(\rho(x,T;v) - g(x)\big)^2\,dx + \int\limits_0^l \big(u(x,T;v) - h(x)\big)^2\,dx, \tag{57}$$

где $\big\{u(x,t;v),\rho(x,t;v)\big\}$ — решение системы (1)–(4), соответствующее граничной функции $v(t)$ из множества допустимых граничных управлений V_R ($R = \mathrm{const} > 0$):

$$V_R = \Big\{v(t) \in W_2^2[0,T], c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t - L\varphi\big|_{x=l,t=0} = f(x,0)\big|_{x=l}, v(t)\big|_{t=T} = h(x)\big|_{x=l}, \|v\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant R\Big\}, \tag{58}$$

$g(x)$ и $h(x)$ — заданные функции, такие, что $g(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $g(x) \in C^1[0,l]$, $h(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]$ $(0 < \lambda < 1)$.

Для функционала $J(v)$ справедливо аналогичное теореме 2 утверждение о корректности постановки (57). Оно основано на компактности множества V_R в классе Гельдера $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ и на следующей теореме.

Теорема 5. *При выполнении входными данными системы* (1)–(4) *требований теоремы* 1 *функционал* $J(v)$ *непрерывен в* $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ *и слабо непрерывен в* $W_2^2[0,T]$ *на множестве* V_R.

Доказательство основано на оценках (см. (11))

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\Delta u(x,t)\big| \leqslant K_1 \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta v(t)\big|, \quad \max_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\Delta\rho(x,t)\big| \leqslant K_2 \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\Delta v(t)\big|, \quad K_1, K_2 = \mathrm{const} > 0,$$

установленных в теореме 3 для

$$\Delta v(t) = v^s(t) - v(t), \quad \Delta u(x,t) = u^s(x,t) - u(x,t), \quad \Delta\rho(x,t) = \rho^s(x,t) - \rho(x,t),$$

где $\big\{v^s(t)\big\} \subset V_R$ — произвольная последовательность, сходящаяся в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ к некоторой функции $v(t) \in V_R$, $\big\{u^s(x,t),\rho^s(x,t)\big\}$ и $\big\{u(x,t),\rho(x,t)\big\}$ — решения нелинейной системы (1)–(4), соответствующие граничным функциям $v^s(t)$ и $v(t)$. Действительно, если рассмотреть минимизируемый функционал в виде $J(v) = \big\|\rho(x,T) - g(x)\big\|_{L_2[0,l]} + \big\|u(x,T) - h(x)\big\|_{L_2[0,l]}$, то

$$\Big|J\big(v^s\big) - J(v)\Big| \leqslant \big\|\Delta\rho(x,T)\big\|_{L_2[0,l]} + \big\|\Delta u(x,T)\big\|_{L_2[0,l]}.$$

Следовательно, оценки (11) позволяют заключить, что $\lim\limits_{s\to\infty} J\big(v^s\big) = J(v)$. Доказательство слабой непрерывности в $W_2^2[0,T]$ для функционала $J(v)$ повторяет соответствующее рассуждение теоремы 3.

Условия дифференцируемости функционала $J(v)$ устанавливает

Теорема 6. *Пусть входные данные системы* (1)–(4) *удовлетворяют требованиям теоремы* 4, *и пусть, кроме того, для функций финального наблюдения* $g(x)$ *и* $h(x)$ *выполнены условия*

$$g(x) \in C^1[0,l], \quad g(x) > 0 \ \text{при}\ 0 \leqslant x \leqslant l, \quad h(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]\ (0 < \lambda < 1), \quad h(x)\big|_{x=0} = w(t)\big|_{t=T}.$$

Тогда функционал $J(v)$ *в вариационной задаче* (57) *дифференцируем в смысле Фреше в* $W_2^2[0,T]$ *в каждой точке* v *множества* V_R *и его дифференциал можно представить в виде*

$$d\,J_g(v) = -\int\limits_0^T \big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt, \quad \Delta v \in V_R,$$

где $\{\psi(x,t),\vartheta(x,t)\}$ *— решение сопряженной задачи, являющейся системой вида*

$$\begin{gathered}\big(c(x,t,u)\rho(x,t)\psi\big)_t+\big(a(x,t,u)\psi_x\big)_x+\mathcal{B}_0(x,t,u)\psi_x+\big(\mathcal{B}_{0x}(x,t,u)-\mathcal{B}_1(x,t,u)\big)\psi=\\=-\gamma_u(x,t,u)\vartheta(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0\leqslant t<T,\end{gathered}\tag{59}$$

$$\psi(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad \psi(x,t)\big|_{x=l}=0,\quad 0\leqslant t<T,\tag{60}$$

$$\psi(x,t)\big|_{t=T}=2\Big(c(x,t,u)\rho(x,t)\big|_{t=T}\Big)^{-1}\big(u(x,T)-h(x)\big),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{61}$$

$$\vartheta_t(x,t)=c(x,t,u)u_t(x,t)\psi(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0\leqslant t<T,\tag{62}$$

$$\vartheta(x,t)\big|_{t=T}=2\big(\rho(x,T)-g(x)\big),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{63}$$

в которой коэффициенты $\mathcal{B}_0(x,t,u)$ *и* $\mathcal{B}_1(x,t,u)$ *имеют вид* (21) *и где* $\{u(x,t),\rho(x,t)\}$ *— решение нелинейной системы* (1)–(4), *соответствующее граничному управлению* $v(t)\in V_R$.

Ограничимся изложением схемы доказательства этой теоремы, так как оно проводится подобно доказательству теоремы 4 о дифференцируемости функционала $J_g(v)$.

Пусть $\{u,\rho\}$ и $\{u+\Delta u,\rho+\Delta\rho\}$ — решения системы (1)–(4), соответствующие граничным функциям v и $v+\Delta v$ из множества допустимых граничных управлений V_R. Приращение функционала $J(v)$ относительно приращения Δv имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta J(v)=J(v+\Delta v)-J(v)=2\int\limits_0^l\big(\rho(x,T)-g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx+2\int\limits_0^l\big(u(x,T)-h(x)\big)\Delta u(x,T)\,dx+\\+\int\limits_0^l\big(\Delta\rho(x,T)\big)^2\,dx+\int\limits_0^l\big(\Delta u(x,T)\big)^2\,dx.\end{gathered}$$

Для доказательства дифференцируемости $J(v)$ необходимо показать, что приращение $\Delta J(v)$ можно представить в виде

$$\Delta J(v)=d\,J(v)+o(\Delta v,v),$$

где $d\,J(v)$ — линейный функционал относительно Δv и $\big|o(\Delta v,v)\big|\big(\|v\|_{W_2^2[0,T]}\big)^{-1}\to 0$ при $\|v\|_{W_2^2[0,T]}\to 0$.

Прежде всего заметим, что для приращений $\Delta u(x,t)$, $\Delta\rho(x,t)$ установлены оценки (см. (25)):

$$\big|\Delta u(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2}\leqslant K_8\big\|\Delta v(t)\big\|_{W_2^2[0,T]},\quad \big|\Delta\rho(x,t)\big|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2}\leqslant K_9\big\|\Delta v(t)\big\|_{W_2^2[0,T]},\quad K_8,K_9=\mathrm{const}>0.$$

В силу этих оценок приращения $\Delta u(x,t)$, $\Delta\rho(x,t)$ удовлетворяют соотношениям (26)–(29) с точностью до членов второго порядка относительно $\big\|\Delta v(t)\big\|_{W_2^2[0,T]}$: для функции $\mathcal{F}(x,t)$ в правой части уравнения (26) справедливо неравенство (см. (30))

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\mathcal{F}(x,t)\big|\leqslant K_{10}\big\|\Delta v(t)\big\|^2_{W_2^2[0,T]},\quad K_{10}=\mathrm{const}>0.$$

Решение $\{\psi(x,t),\vartheta(x,t)\}$ сопряженной задачи (59)–(63) обладает свойствами, аналогичными свойствам сопряженной задачи (16)–(20):

$$\psi(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad \psi_x(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad \psi(x,t)\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q),$$

$$\vartheta(x,t)\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),\quad \vartheta_t(x,t)\in C(\overline{Q}).$$

Доказательство однозначной разрешимости сопряженной задачи (59)–(63) в этих классах гладких функций и получение оценок для ее решения проводится подобно доказательству соответствующих утверждений теоремы 4. Отметим только, что выполнение условий согласования нулевого порядка для начальных и граничных данных в сопряженной задаче (59)–(63) обеспечивается требованием теоремы 6 к функции $h(x)$: $h(x)\big|_{x=0}=w(t)\big|_{t=T}$, а также дополнительным требованием к допустимым граничным режимам: $v(t)\big|_{t=T}=h(x)\big|_{x=l}$ (ср. определение множества V_R в (7) и (58)). Действительно, из граничных условий (2) для $u(x,t)$ следует, что $u(x,t)\big|_{x=0,t=T}=w(t)\big|_{t=T}$, $u(x,t)\big|_{x=l,t=T}=v(t)\big|_{t=T}$, т.е. $\psi(x,t)\big|_{x=0,t=T}=0$,

$\psi(x,t)\big|_{x=l,t=T}=0$ (см. (61)). С учетом граничных условий (60) для $\psi(x,t)$ это и означает согласование нулевого порядка [2] и тем самым непрерывность решения $\psi(x,t)$ во всей замкнутой области $\overline{Q}$.

Покажем, что приращение функционала $J(v)$ можно представить в виде

$$\Delta J(v)=-\int\limits_0^T\big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_0^l\big(\Delta\rho(x,T)\big)^2\,dx+\int\limits_0^l\big(\Delta u(x,T)\big)^2\,dx. \tag{64}$$

Для этого используем вспомогательное выражение I (см. (56)), которое с учетом уравнения (59) для $\psi(x,t)$ и уравнения (26) для $\Delta u(x,t)$, а также с учетом условий (62) для $\vartheta(x,t)$ и (29) для $\Delta\rho(x,t)$ можно привести к виду

$$I=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\mathcal{F}(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt-2\int\limits_0^l\big(\rho(x,T)-g(x)\big)\Delta\rho(x,T)\,dx.$$

С другой стороны, представим I в виде $I=I_1+I_2+I_3$, где

$$I_1=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\big\{\psi c\rho\Delta u_t+\Delta u(c\rho\psi)_t\big\}\,dx\,dt,\quad I_2=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\big\{-\psi\mathcal{L}\Delta u+\Delta u\mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt,$$
$$I_3=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\psi cu_t\Delta\rho\,dx\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Delta u\gamma_u\vartheta\,dx\,dt-\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\vartheta\Delta\rho)_t\,dx\,dt.$$

Из соотношения (28) для $\Delta u(x,t)$ при $t=0$ и из соотношения (61) для $\psi(x,t)$ при $t=T$ следует, что

$$I_1=\int\limits_0^l\big[\psi c\rho\Delta u\big]_{t=0}^{t=T}\,dx=2\int\limits_0^l\big(u(x,T)-h(x)\big)\Delta u(x,T)\,dx.$$

Интегрирование по частям с учетом граничных условий (27) для $\Delta u(x,t)$ и граничных условий (60) для $\psi(x,t)$ позволяет получить

$$I_2=-\int\limits_0^T[\psi a\Delta u_x]_{x=0}^{x=l}\,dt+\int\limits_0^T[\psi\mathcal{B}_0\Delta u]_{x=0}^{x=l}\,dt+\int\limits_0^T[\Delta ua\psi_x]_{x=0}^{x=l}\,dt=\int\limits_0^T(a\psi_x)\big|_{x=l}\Delta v\,dt.$$

Интеграл I_3 с учетом уравнения (62) для $\vartheta(x,t)$ и уравнения (29) для $\Delta\rho(x,t)$ можно привести к виду

$$I_3=\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\psi cu_t-\vartheta_t)\Delta\rho\,dx\,dt-\int\limits_0^T\int\limits_0^l\vartheta(\Delta\rho_t-\gamma_u\Delta u)\,dx\,dt=0.$$

Таким образом, для вспомогательного выражения I справедливо и такое равенство

$$I=2\int\limits_0^l\big(u(x,T)-h(x)\big)\Delta u(x,T)\,dx+\int\limits_0^T\big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt,$$

т.е. искомое представление (64) для $\Delta J(v)$ получено. Рассматривая это представление, заметим, что решение $\psi(x,t)$ сопряженной задачи (59)–(63) и его производная $\psi_x(x,t)$ равномерно ограничены в области $\overline{Q}$; кроме того, имеют место оценки (25) для $\Delta u(x,t)$ и $\Delta\rho(x,t)$, а также оценка (30) для $\mathcal{F}(x,t)$. Это позволяет заключить из (64), что приращение функционала $J(v)$ имеет вид

$$\Delta J(v)=-\int\limits_0^T\big(a(x,t,u)\psi_x(x,t)\big)\big|_{x=l}\Delta v(t)\,dt+o\big(\|v\|_{W_2^2[0,T]}\big).$$

Так как интеграл в этом представлении является линейным функционалом в $W_2^2[0,T]$ относительно Δv, то, следовательно, функционал $J(v)$ дифференцируем на множестве V_R. Его дифференциал $d\,J(v)$ в каждой точке $v \in V_R$ — главная линейная часть приращения $\Delta J(v)$. Теорема 6 доказана.

8. Множество допустимых граничных управлений. В рассмотренных постановках вариационных задач множество допустимых граничных режимов V_R определено в (7) для постановки (8) и, соответственно, в (58) для постановки (57).

Оптимальным управлением в задаче минимизации (8) функционала $J_g(v)$

$$\inf_{v\in V_R} J_g(v), \quad J_g(v) = \int\limits_0^l \big(\rho(x,T;v) - g(x)\big)^2\,dx,$$

является множество

$$V_R^* = \big\{v_R \in V_R,\ J_g(v_R) = \inf_{v\in V_R} J_g(v)\big\}.$$

Соответственно, оптимальным управлением в задаче минимизации (57) функционала $J(v)$

$$\inf_{v\in V_R} J(v), \quad J(v) = \int\limits_0^l \big(\rho(x,T;v) - g(x)\big)^2\,dx + \int\limits_0^l \big(u(x,T;v) - h(x)\big)^2\,dx,$$

является множество

$$V_R^* = \big\{v_R \in V_R,\ J(v_R) = \inf_{v\in V_R} J(v)\big\}.$$

Любая граничная функция из V_R^* является оптимальным управляющим воздействием в соответствующей вариационной задаче, оно может быть неединственным. Это показывает следующий пример.

Пусть функция $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ и коэффициент $\rho(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ удовлетворяют соотношениям

$$\rho(t)u_t - u_{xx} = f(x,t,u), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=1} = v(t), \quad 0 < t \leqslant 1,$$
$$u(x,t)\big|_{t=0} = x(1-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и дополнительному условию

$$\rho_t(t) = \gamma(x,t,u), \quad 0 < t \leqslant 1, \quad \rho(t)\big|_{t=0} = 0.25,$$

в которых граничный режим $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, является управляющим воздействием; функции $f(x,t,u)$ и $\gamma(x,t,u)$ имеют вид

$$f(x,t,u) = \big\{2 + 1.5x(1-t) - 1.125x(1-t)^3\big\}h_1(x,t,u) - \big\{2 + 0.125x(1+t)^3\big\}h_2(x,t,u),$$
$$\gamma(x,t,u) = 1.5(1-t)h_1(x,t,u) - 0.5(1+t)h_2(x,t,u),$$

где $h_1(x,t,u)$ и $h_2(x,t,u)$ заданы следующим образом:

$$h_1(x,t,u) = \frac{u - x\big(0.75 + 0.25(1+t)^2 - x\big)}{xt(1-t)}, \quad h_2(x,t,u) = \frac{u - x\big(1.75 - 0.75(1-t)^2 - x\big)}{xt(1-t)}.$$

Требуется найти оптимальное граничное управление $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, при котором решение данной системы $\big\{u(x,t;v), \rho(t;v)\big\}$ совпадает при $t = 1$ с финальным наблюдением:

$$u(x,t;v)\big|_{t=1} = h(x), \quad \rho(t;v)\big|_{t=1} = g(x), \quad h(x) = x(1.75 - x), \quad g(x) = 1.$$

Решением задачи минимизации соответствующего функционала $J(v)$ являются два граничных режима:

$$v_1(t) = 0.25t(2+t), \quad v_2(t) = 0.75t(2-t).$$

Соответствующие этим граничным управляющим воздействиям решения $\big\{u_1(x,t), \rho_1(t)\big\}$ и $\big\{u_2(x,t), \rho_2(t)\big\}$ имеют вид

$$u_1(x,t) = x\big\{0.75 + 0.25(1+t)^2 - x\big\}, \quad \rho_1(t) = 0.25(1+t)^2,$$
$$u_2(x,t) = x\big\{1.75 - 0.75(1-t)^2 - x\big\}, \quad \rho_2(t) = 1 - 0.75(1-t)^2,$$

и совпадают при $t = 1$ с финальным наблюдением.

Заметим, что множество V_R может включать не только требования гладкости и согласования допустимых граничных режимов. Оно может использовать априорные представления о качественной структуре искомых управлений (знание участков знакоопределенности, монотонности, выпуклости, расположения точек экстремумов и перегибов и т.п.). Учет таких априорных представлений позволяет сузить соответствующим образом множество допустимых управляющих воздействий, в частности может привести к единственности оптимального управления. Кроме того, такие ограничения качественного характера обладают стабилизирующими свойствами (см., например, [12]–[15]), что позволяет использовать их для приближенного решения широкого круга задач, в том числе задач минимизации. Так, в [16, глава 6] априорная информация о качественном поведении допустимых управляющих воздействий использована для численного решения методом проекции сопряженных градиентов различных вариационных задач. Возможность эффективного применения этого метода для минимизации функционалов $J_g(v)$ и $J(v)$ в постановках (8) и (57) основана на явном представлении градиентов этих функционалов через решение соответствующих сопряженных задач (теоремы 4, 6).

9. Математические модели физико-химического процесса с изменяющимися внутренними свойствами. Различные постановки нелинейной параболической задачи (1)–(4) возникают при моделировании физико-химических процессов, в которых внутренние характеристики материалов подвергаются изменениям. Соответствующие вариационные задачи вида (8) и (57) с управляющим воздействием в граничном условии связаны с возможностью управлять такими процессами в самых разнообразных приложениях. В качестве одного из приложений можно привести изменение фильтрационных свойств пластов при современных способах разработки нефтегазовых месторождений. Еще одно из возможных приложений связано с современными методами диагностики и лечения в медицине.

Остановимся на других приложениях, связанных с использованием композиционных материалов в системах теплозащиты технических объектов, подвергающихся воздействию высоких температур (аэрокосмические аппараты, энергоустановки и т.п.). При высокотемпературном нагреве теплозащитный композиционный материал испытывает разнообразные физико-химические превращения и подвергается деструкции — необратимым изменениям внутренних параметров (таких как плотность, концентрация компонентов композита и т.п.).

Приведем математическую модель процесса разложения термодеструктирующего материала пластины конечной толщины под воздействием граничной температуры. В основе модели — представление этого процесса с помощью аппроксимации суммой нескольких стадий (реакций) с различными кинетическими параметрами [17]. Соответствующая задача термодеструкции состоит в нахождении функций $\big\{u(x,t), \rho(x,t)\big\}$ — температуры и концентрации компонентов композита из условий

$$c(u)\rho(x,t)u_t(x,t) - \big(\lambda(u)u_x\big)_x = 0, \quad (x,t) \in Q = \{0 < x < l, 0 < t \leqslant T\}, \tag{65}$$

$$u\big|_{x=0} = w(t), \quad u\big|_{x=l} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{66}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{67}$$

$$\rho(x,t) = \sum_{s=1}^{S} \rho^s(x,t), \quad \rho^s(x,t) = \rho_0^s(x) \exp\left(-A^s \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{E^s}{u(x,\tau)}\right) d\tau\right), \tag{68}$$

в которых $c(u)$ и $\lambda(u)$ — теплофизические характеристики пластины (коэффициенты теплоемкости и теплопроводности), $w(t)$ и $v(t)$ — температурные режимы, действующие на поверхности пластины, S — число стадий (реакций) композита, A^s и E^s — кинетические параметры s-й стадии, $\rho^s(x,t)$ — концентрация s-й стадии, $\varphi(x) > 0$ и $\rho_0^s(x) > 0$ — начальные распределения температуры и концентраций стадий, l — толщина пластины, T — время теплового воздействия.

Математические модели, описывающие процесс разложения других параметров композиционного материала, отличаются видом условия (68). Например, если $\rho(x,t)$ — распределение плотности этого материала, то условие (68) принимает вид

$$\rho(x,t) = \rho_0(x) \exp\left(-A \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{E}{u(x,\tau)}\right) d\tau\right), \quad \rho_0(x) > 0,$$

где $\rho_0(x)$ —начальная плотность композиционного материала (до теплового воздействия).

На примере модели (65)–(68) приведем постановку вариационной задачи — найти граничный температурный режим $v(t)$, действующий на поверхность образца $x = l$, при котором значения концентраций стадий ρ^s близки в конечный момент времени $t = T$ к заданным значениям g^s:

$$\inf_{v\in V_R} J_g(v), \quad J_g(v) = \sum_{s=1}^{S}\sum_{k=1}^{K}\bigl(\rho^s(l_k,T) - g_k^s\bigr)^2. \tag{69}$$

Здесь g_k^s — значения концентраций при $t = T$, заданные для каждой s-й стадии в точках $x = l_k$, $0 \leqslant l_k \leqslant l$, K — число таких точек вдоль толщины пластины; V_R — множество температурных режимов на поверхности образца $x = l$.

Если модель (65)–(68) описывает управляемый процесс термодеструкции с управляющим воздействием граничной температуры $v(t)$ (например, для совершенствования системы теплозащиты технического объекта), то g_k^s представляют собой желаемые значения концентраций. Соответственно, множество V_R в постановке (69) — множество допустимых граничных температурных режимов. При его задании могут учитываться требования как количественного, так и качественного характера к граничному температурному режиму.

Вариационная задача (69) для модели (65)–(68) возникает также при восстановлении истории теплового воздействия на термочувствительный образец по его конечному состоянию. Применительно к аэрокосмической технике постановка (69) связана с исследованием состояния системы теплозащиты спускаемого аппарата — требуется определить граничную температуру $v(t)$, под воздействием которой произошли необратимые изменения термодеструктирующего композиционного материала. В данной постановке g_k^s — значения концентраций стадий при $t = T$ (т.е. после окончания теплового воздействия), полученные при микроструктурном анализе. Множество V_R содержит априорную информацию об искомой граничной температуре (данные об участках ее монотонного возрастания и убывания и т.п., а также данные количественного характера). Некоторые вопросы численного восстановления граничных режимов по конечному состоянию теплозащитного композиционного материала см. в [16, глава 6].

10. Заключение. Исследованы вопросы управления системой, которая состоит из краевой задачи первого рода для квазилинейного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, а также из уравнения изменения по времени этого коэффициента. Управляющим воздействием является граничный режим на одной из границ области. Обоснованы две постановки вариационных задач о граничном управлении с финальным наблюдением. Для этих постановок доказаны свойства непрерывности и дифференцируемости минимизируемых функционалов в соответствующих функциональных пространствах на основе оценок в классах Гельдера, полученных для решения исходной нелинейной параболической системы. Дано явное представление для дифференциалов через решение соответствующих сопряженных задач. Установлено, что каждая из них является системой, которая включает в себя первую краевую задачу для линейного параболического уравнения с неизвестной функцией в правой части, а также уравнение изменения по времени этой функции. Доказаны условия однозначной разрешимости этих систем в классе гладких функций на основе метода Ротэ и соответствующих априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера.

Указаны области практического применения, связанные с моделированием и управлением физико-химическими процессами с изменяющимися внутренними свойствами материалов. Возможность эффективного применения численных методов минимизации в задачах управления конкретными процессами основана на доказанном явном представлении градиента соответствующего функционала через решение сопряженной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдман Н.Л.* О некоторых постановках нелинейных параболических задач с краевыми условиями первого рода и о методах их приближенного решения // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 314–326.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
4. *Gol'dman N.L.* Inverse Stefan problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
5. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во МГУ, 1999.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
7. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации (в 2-х томах). М.: МЦНМО, 2011.
10. *Ciliberto C.* Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per soluzioni delle equazioni paraboliche in due varabili // Ricerche Mat. 1954. **3**. 40–75.
11. *Кружков С.Н.* Априорная оценка для производной решения параболического уравнения // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 1967. **30**, № 2. 41–48.
12. *Гончарский А.В., Ягола А.Г.* О равномерном приближении монотонного решения некорректных задач // ДАН СССР. 1969. **184**, № 4. 771–773.
13. *Морозов В.А., Гольдман Н.Л., Самарин М.К.* Метод дескриптивной регуляризации и качество приближенных решений // Инженерно-физический журнал. 1977. **33**, № 6. 1117–1124.
14. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
15. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
16. *Gilyazov S.F., Gol'dman N.L.* Regularization of ill-posed problems by iteration methods. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
17. *Алексеев А.К.* О восстановлении истории нагрева пластины из термодеструктирующего материала по профилю плотности в конечном состоянии // Теплофизика высоких температур. 1993. **31**, № 6. 975–979.

Поступила в редакцию
12.01.2020

On a Nonlinear Parabolic Problem with a Boundary Control and on Its Applications

N. L. Gol'dman[1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: nata@srcc.msu.ru*

Received January 12, 2020

Abstract: We consider the optimal control in a system consisting of the boundary value problem of the first kind for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient and an additional equation describing a time dependence of this coefficient. Two variational problems with a boundary control regime are substantiated for the given final observations. Some conditions of continuity and differentiability of the corresponding minimization functionals are formulated and proved. An exact representation for the differentials in terms of the solutions of the conjugate problems is obtained. The form of these conjugate problems and their unique solvability in a class of smooth functions are shown. This study is connected with modeling and control of physical-chemical processes in which the inner properties of materials are subjected to changes.

Keywords: quasilinear parabolic equations, boundary value problem of the first kind, variational problems, final observation, boundary control, conjugate problems, unique solvability, mathematical models of thermodestruction.

References

1. N. L. Goldman, "On Some Statements of Nonlinear Parabolic Problems with Boundary Conditions of the First Kind and on Methods of Their Approximate Solution," Vychisl. Metody Programm. **19**, 314–326 (2018).
2. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; AMS Press, Providence, 1968).
3. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964; Mir, Moscow, 1968).
4. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
5. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems. Theory and Methods of Solution* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1999) [in Russian].
6. S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems* (Nauka, Moscow, 1969; Springer, New York, 1975).

7. J.-L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* (Springer, Berlin, 1971; Mir, Moscow, 1972).

8. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1977; Pergamon, New York, 1982).

9. F. P. Vasil'ev, *Optimization Methods*, Vols. 1, 2 (MTsNMO, Moscow, 2011) [in Russian].

10. C. Ciliberto, "Formule di Maggiorazione e Teoremi di Esistenza per Soluzioni delle Equazioni Paraboliche in Due Varabili," Ricerche Mat. **3**, 40–75 (1954).

11. S. N. Kruzhkov, "A Priori Estimate for the Derivative of a Solution to a Parabolic Equation," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 2, 41–48 (1967).

12. A. V. Goncharsky and A. G. Yagola, "The Uniform Approximation of a Monotonic Solution of Ill-Posed Problems," Dokl. Akad. Nauk SSSR **184** (4), 771–773 (1969).

13. V. A. Morozov, N. L. Gol'dman, and M. K. Samarin, "Method of Descriptive Regularization and Quality of Approximate Solutions," Inzh. Fiz. Zh. **33** (6), 1117–1124 (1977) [J. Eng. Phys. **33** (6), 1503–1508 (1977)].

14. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Regularizing Algorithms and a Priori Information* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].

15. V. V. Vasin and A. L. Ageev, *Ill-Posed Problems with a Priori Information* (Nauka, Yekaterinburg, 1993; VSP, Utrecht, 1995).

16. S. F. Gilyazov and N. L. Gol'dman, *Regularization of Ill-Posed Problems by Iteration Methods* (Kluwer, Dordrecht, 2000).

17. A. K. Alekseev, "On the Restoration of the Heating History of a Plate Made of a Thermodestructible Material from the Density Profile in the Final State," Teplofiz. Vysok. Temp. **31** (6), 975–979 (1993) [High Temp. **31** (6), 897–901 (1993)].