УДК 519.83 doi 10.26089/NumMet.v21r322

ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕСУРСОВ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРАТЕГИЙ В ИГРОВОЙ МОДЕЛИ ПРОТИВОБОРСТВА

М. А. Мусаева[1]

Сформулирована игровая модель противоборства в виде модели “нападение и защита”, указаны способы вычисления ресурсов сторон, анализированы эффективность их стратегий и установлены условия существования оптимального решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: игровая модель противоборства, оптимальное решение, эффективность стратегий, модель “нападение и защита”, седловые точки.

1. Введение. Противоборство является наиболее ярко выраженной формой конфликта и встречается в таких явлениях, как военные действия, в нападениях и защите территорий и объектов, защите информации от нападений хакеров и др. Игровая модель “нападение и защита” составляет основу изучения процессов с признаками противоборства. Вопросы моделирования и исследования проблем противоборства затрагивают как национальные и государственные интересы, так и актуальные научно-технические и практические стороны современной жизни.

Ниже сформулированы условия игровой модели “нападение–защита” и на основе этой модели указаны методы анализа эффективности стратегий сторон. При этом нападение и защита рассматриваются как стороны сложной системы. Игровая модель этого процесса состоит из двух ветвей, т.е. из двух подсистем, являющихся сторонами игры. Эти ветви модели взаимодействуют и образуют процесс противоборства, действуют друг против друга. Нападение и защита используют различные средства для приобретения определенных ресурсов. В каждом случае эти средства имеют свои назначения. Ресурсы нападения и защиты считаются ограниченными. Для нападения выигрышем считается преодоление всех средств защиты. При физической защите объектов считается, что ресурсы, потраченные на организацию защиты объектов, должны быть намного меньше стоимости потерь при успешной реализации злоумышленниками атак на эти объекты. Теоретические и практические вопросы защиты объектов рассматривались в исследованиях [1–5] и др., где даны характеристики созданных устройств, классифицированы параметры защищаемых территорий и объектов, типы нарушений и нападений и т.д. Система “нападение–защита” является многокритериальной. Неопределенности в исходных данных этой системы создает немало трудностей для принятия решения по этой системе. Ниже используется преимущество игрового подхода для моделирования этих процессов. Составленная модель преобразуется к удобному виду для анализа эффективности стратегий сторон. Кроме того, ниже указаны способы для вычисления стратегий сторон. С этой целью модель разбивается на стандартные задачи и их блоки, которые решаются известными способами и используются для выбора стратегий сторон. Вычисления могут быть проведены известными методами с использованием программных средств и пакетов оптимизации.

2. Игровая модель противоборства. Рассмотрим противоборство как процесс нападения и защиты с соответствующими задачами, стоящими перед сторонами этой системы. Задачей нападения является преодоление защиты. Основная задача защиты заключается в противодействии нападению, предотвращении наступательных действий и ликвидации последствий нанесенного от нападения ущерба. Эффективность нападения и защиты обеспечивается комплексом мероприятий по достижению целей, стоящих перед ними, и выражается в реализации их стратегий.

К оценке эффективности стратегий нападения и защиты применяются различные подходы и методики. Целесообразность, полнота, целостность, гибкость, экономическая рациональность, техническая надежность, достоверное обнаружение нарушителя, конфиденциальность, удобства эксплуатации, устойчивость, возможность дистанционного контроля и другие качества являются наиболее распространенными требованиями, предъявляемыми к системам нападения и защиты объектов [1–4]. Выбор стратегий подчиняется задачам, стоящим перед сторонами противоборства.

Ради конкретности изложения из перечисленных выше показателей системы нападения и защиты ниже подробно рассматриваются лишь экономическая рациональность и техническая надежность. Эти

[1] Азербайджанский государственный педагогический университет, Uzeyir Hacibeyli str., 68, AZ-1000, Baku; доцент, доктор философии по математике, e-mail: musayeva08@inbox.ru

показатели не только часто встречаются, но и во многих случаях другие показатели системы могут быть выражены через них. Учет некоторых других показателей системы в модели проводится аналогичным образом.

Методы анализа эффективности нападения и защиты часто базируются на традиционных методах экспертных оценок, которые имеют высокую степень субъективности и содержат трудоемкие экспериментальные исследования [1–4]. Поэтому применение методов вычислительного моделирования и информационных технологий к оценкам эффективности систем “нападение и защита” повышает качество этой работы.

Сформулируем основные условия функционирования рассматриваемой ниже модели нападения и защиты. Пусть имеется n типов средств нападения и N — их общее количество. Предположим, что для размещения этих средств территория нападения разбита на k частей. Пусть имеется m типов средств защиты и M — их общее количество; территория защиты разбита на l частей.

Предположим, что средства нападения i-го типа размещаются на j-м участке территории в количестве x_{ij}, а стоимость одного i-го типа средств на этом участке территории есть α_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Аналогично, допустим, что из s-го типа средств защиты в r-м участке защищаемой территории потребуется в количестве y_{sr}, стоимость одного s-го типа средств защиты в r-м участке охраняемой территории обозначим через β_{sr}, $s = 1, 2, \ldots, m$, $r = 1, 2, \ldots, l$. Определим множества

$$X_1 = \left\{ x = x_{ij} : x_{ij} \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = N,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, k \right\},$$

$$Y_1 = \left\{ y = y_{sr} : y_{sr} \geqslant 0,\ \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{m} y_{sr} = M,\ s = 1, 2, \ldots, m,\ r = 1, 2, \ldots, l \right\}.$$

Очевидно, что для приобретения средств нападения и защиты будут потрачены ресурсы в следующих количествах:

$$A_1(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_{ij}, \tag{1}$$

$$B_1(y) = \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{m} \beta_{sr} y_{sr}. \tag{2}$$

Функции $A_1(x)$ и $B_1(y)$ рассматриваются на множествах X_1 и Y_1 соответственно.

Теперь рассмотрим вопрос о технической надежности средств нападения и защиты. Известно, что надежность приборов и устройств является характеристикой их безотказной работы за определенное время [3, 4]. Это свойство зависит не только от устройств, но и от условий их эксплуатации. Для описания надежности используется время их безотказной работы в принятых нормальными условиях. Пусть p_{ij} — вероятность безотказной работы за определенное время i-го типа средств нападения в j-м участке территории. Аналогично, пусть q_{sr} — вероятность безотказной работы за определенное время s-го типа средств защиты в r-м участке территории.

Исходя из общей теории надежности [3, 4], можем утверждать, что техническая надежность всех средств системы нападения выражается функцией

$$A_2(x) = \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{n} \left[1 - (1 - p_{ij})^{x_{ij}} \right], \tag{3}$$

которая рассматривается на множестве

$$X_2 = \left\{ x = x_{ij} : x_{ij} \in X_1,\ \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_{ij} \leqslant a_{1j},\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} x_{ij} \leqslant a_{2i},\ i = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

где w_{ij}, ω_{ij} — заданные величины, которые выражают ограничения на параметры средств нападения, a_{1j}, a_{2i} — заданные числа. Указанные ограничения на параметры средств, размещенных на территории нападения, могут быть условиями их хранения, на их габариты, физические и другие характеристики. В зависимости от изучаемого процесса возможны другие способы задания множества X_2.

Аналогично рассматривается вопрос о технической надежности системы защиты. Согласно принятым выше обозначениям, техническая надежность всей системы защиты будет выражаться функцией

$$B_2(y) = \prod_{r=1}^{l}\prod_{s=1}^{m}\left[1-(1-q_{sr})^{y_{sr}}\right], \tag{4}$$

которая рассматривается на множестве

$$Y_2 = \left\{ y = y_{sr} : y_{sr} \in Y_1,\ \sum_{s=1}^{m} v_{sr}y_{sr} \leqslant b_{1r},\ r = 1,2,\ldots,l,\ \sum_{r=1}^{l} u_{sr}y_{sr} \leqslant b_{2s},\ s = 1,2,\ldots,m \right\},$$

где v_{sr}, u_{sr} — заданные величины, которые выражают ограничения на параметры средств защиты, b_{1r}, b_{2s} — заданные числа. В случае защиты также возможны другие способы задания множества Y_2.

Теперь рассмотрим взаимодействие сторон нападения и защиты. Пусть величина c_{is} есть вероятность преодоления одним i-м типом средства нападения одного s-го типа средства защиты. Тогда, следуя [5] и [8], нетрудно проверить, что вероятность преодоления i-м типом средства нападения в количестве t_i s-х типов средств защиты в количестве z_s будет задаваться формулой

$$R_{is}(t_i, z_s) = \left[1-(1-c_{is})^{t_i}\right]^{z_s}. \tag{5}$$

Очевидно, что $t_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,n$, есть общее количество i-го типа средств нападения. Аналогично, величина $z_s = \sum_{r=1}^{l} y_{sr}$, $s = 1,2,\ldots,m$, равна общему количеству s-го типа средств защиты. Если все средства защиты будет преодолены средствами нападения, то считается, что стратегия нападения преодолела стратегию защиты. Из соотношения (5) следует, что вероятность преодоления всех средств защиты средствами нападения в имеющихся количествах будет выражаться функцией

$$W(t,z) = \prod_{s=1}^{m}\left\{1-\prod\left[1-\left(1-(1-c_{is})^{t_i}\right)^{z_s}\right]\right\}, \tag{6}$$

которая рассматривается на множестве $V = \left\{(t,z) : t \in \mathbb{R}_+^n,\ z \in \mathbb{R}_+^m,\ \sum_{s=1}^{m} z_s = M,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = N\right\}$. Если обозначим $T = \left\{t : t \in \mathbb{R}_+^n,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = N\right\}$, $Z = \left\{z : z \in \mathbb{R}_+^m,\ \sum_{s=1}^{m} z_s = M\right\}$, то получим, что $V = T \times Z$.

Таким образом, для описания модели нападения и защиты получаются соотношения (1)–(6) с несколькими критериями качества. Нападение и защита стремятся минимизировать экономические расходы и одновременно максимизировать техническую надежность имеющихся средств. Противоборство обеих сторон порождает задачу максимина для функции $W(t,z)$ на множестве $V = T \times Z$.

Рассмотренная выше игровая математическая модель “нападение–защита” по ряду своих элементов отличается от традиционно изученных в литературе соответствующих моделей (см. [1–5, 8–10] и др.). Прежде всего это относится к обобщению понятия эффективности этой системы, которая в данном случае включает в себя не только экономическую рациональность, но и техническую надежность. При необходимости она может включать в себя также и другие показатели (параметры системы). Действительно, в реальных условиях эффективность системы зависит не только от экономической рациональности системы, но и от множества других факторов.

3. Вычисление ресурсов и анализ стратегий. В предыдущем разделе для описания противоборства между сторонами нападения и защиты была составлена игровая модель в виде соотношений (1)–(6). Сформулируем эту модель в виде отдельных задач. Вышеизложенное указывает, что сформулированная модель основана на решениях следующих задач, решения которых могут быть использованы для вычисления ресурсов сторон игры и анализа эффективности их стратегий.

Задача A. Для подсистемы нападения необходимо:

A_1) расчет экономической рациональности средств подсистемы нападения требует решения задачи

$$A_1(x) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}x_{ij} \to \min \quad \text{на множестве } X_1; \tag{7}$$

A_2) расчет технической надежности средств нападения требует решения задачи

$$A_2(x) = \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=1}^{n} \left[1 - (1-p_{ij})^{x_{ij}}\right] \to \max \quad \text{на множестве}\, X_2. \tag{8}$$

Задача B. Для подсистемы защиты необходимо:
B_1) расчет экономической рациональности средств подсистемы защиты требует решения задачи

$$B_1(y) = \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{m} \beta_{sr} y_{sr} \to \min \quad \text{на множестве}\, Y_1; \tag{9}$$

B_2) расчет технической надежности средств защиты требует решения задачи

$$B_2(x) = \prod_{r=1}^{k} \prod_{s=1}^{m} \left[1 - (1-q_{sr})^{y_{sr}}\right] \to \max \quad \text{на множестве}\, Y_2. \tag{10}$$

Задача C. Характеризует взаимодействие подсистем нападения и защиты и решает задачу

$$W(t,z) = \prod_{s=1}^{m} \left\{1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \left(1 - (1-c_{is})^{t_i}\right)^{z_s}\right]\right\} \to \max_t \min_z \tag{11}$$

на множестве $V = T \times Z$, где переменные t_i и z_s связаны с переменными x_{ij} и y_{sr} следующими формулами:

$$t_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}, \quad z_s = \sum_{r=1}^{l} y_{sr}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad s = 1,2,\ldots,m.$$

Выбор стратегий нападения и защиты зависит от результатов решения задач A, B, C. Эти задачи являются задачами математического программирования [6–10]. Задачи A и B состоят из двух блоков. В этих блоках задачи A_1 и B_1 являются задачами линейного программирования. Предположим, что множества X_1, X_2, Y_1, Y_2, V ограничены и замкнуты. Очевидно, что оптимизируемые функции $A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $W(t,z)$ в указанных выше задачах являются непрерывными функциями на этих множествах. Поэтому из известной теоремы Вейерштрасса [7] следует, что задачи A_1, A_2, B_1, B_2 имеют хотя бы одно решение. Заметим, что в [7] указаны несколько обобщений теоремы Вейерштрасса на классы функций, заданных в некомпактных множествах. Утверждения этих вариантов теоремы Вейерштрасса для задач A_1, A_2, B_1, B_2 остаются в силе.

Задача C связана с матричной игрой с элементами матрицы платежей, которые определяются по формуле $a_{is} = W(t_i, z_s)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $s = 1,2,\ldots,m$. Эта задача является задачей максимина для функции $W(t,z)$. Она рассмотрена также в работах [5, 8] и др. В [8] изучены вопросы оптимального решения этой задачи в чистых и смешанных стратегиях. Доказывается, что если игра с элементами матрицы платежей $a_{is} = W(t_i, z_s)$ имеет решение в чистых стратегиях, то и задача C имеет решение в этих стратегиях. Кроме того, в [8] выявлены соответствующие интервалы вогнутости и выпуклости функции $W(t,z)$, доказаны существования седловой точки и оптимального решения для рассматриваемой там задачи. Отметим, что условия вогнутости и выпуклости, которым удовлетворяют оптимизируемые функции, могут быть выражены дифференциальными условиями на эти функции [7]. Укажем также следующее более общее утверждение о существовании седловой точки функции $W(t,z)$ на множестве $T \times Z$. Седловые точки функции $W(t,z)$ на $T \times Z$ будут оптимальными решениями задачи C на этом множестве.

Утверждение. *Пусть функция $W(t,z)$ на множестве $T \times Z$ является квазивогнутой относительно t на T для любого выбранного z из Z и квазивыпуклой относительно z на Z для любого выбранного t из T. Тогда функция $W(t,z)$ на множестве $T \times Z$ имеет хотя бы одну седловую точку.*

Проверка справедливости этого утверждения проводится следуя работам [7–9]. Действительно, множества T и Z являются выпуклыми компактами. Используя эти множества, составим функцию $g(t,z)$ как точечно-множественное многозначное отображение множества $T \times Z$ на множество $2^{T \times Z}$ в следующем виде:

$$g(t,z) = \left\{t_0 \in T : W(t_0, z) = \max_{\theta \in T} W(\theta, z)\right\} \times \left\{z_0 \in Z : W(t, z_0) = \min_{\eta \in Z} W(t, \eta)\right\}.$$

Нетрудно проверить, что при принятых выше условиях функция $g(t,z)$ выпукла. Кроме того, функция $W\big(t,z^0\big) = \min\limits_{z\in Z} W(t,z)$ по t в T непрерывна и квазивогнута, а функция $W\big(t^0,z\big) = \max\limits_{t\in T} W(t,z)$ по z в Z непрерывна и квазивыпукла при определенных z^0 и t^0. Отсюда следует, что [9, 11] отображение $g(t,z)$ полунепрерывно сверху на множестве $T\times Z$. Тогда, согласно известной теореме Какутани (см. [11], стр. 97), отображение $g(t,z)$ имеет неподвижную точку, которая является седловой точкой функции $W(t,z)$ на множестве $T\times Z$. Седловая точка функции $W(t,z)$ на множестве $T\times Z$ является решением задачи C [7].

Для оптимизационных задач A, B, C имеются множества численных алгоритмов решения, разработаны программные комплексы и пакеты [5–10]. Решение задач (7), (8), (11) раскрывает эффективность стратегий нападения. Таким же образом, решение задач (9), (10), (11) дает основание оценить эффективность стратегий защиты. Решая оптимизационные задачи (7), (8), (11) (точно или приближенно), находятся оптимальные значения стратегий для подсистемы “нападения”, а именно: для экономической рациональности (решение обозначим через x^{1*}), для технической надежности (решение обозначим через x^{*2}), а также для преодоления нападением средств защиты (решение обозначим через t^*). Одновременно с этими значениями находятся экстремальные значения функций $A_1(x)$, $A_2(x)$, $W(t,z)$, которые обозначим через A_1^* , A_2^*, W_*^*. Эти тройки, т.е. величины (x^{1*}, x^{2*}, t^*) и (A_1^*, A_2^*, W_*^*), которые находим из решения задач (7), (8), (11), сравниваем и анализируем. В результате такой работы делаются выводы об эффективности стратегий системы нападения.

Аналогично вышесказанному, для защиты решаются оптимизационные задачи (9), (10), (11) и находятся оптимальные значения стратегий: для экономической рациональности средств защиты — y^{1*}, для их технической надежности — y^{2*} и для предотвращения атаки средств нападения — z^* соответственно. Одновременно с этим находятся экстремальные значения функций $B_1(y)$, $B_2(y)$, $W(t,z)$, т.е. значения величин B_1^*, B_2^*, W_*^*. Тройки (y^{1*}, y^{2*}, z^*) и (B_1^*, B_2^*, W_*^*) как решения задач (9), (10), (11) дают информацию для блока защиты. Решением задачи (11) является пара (t^*, z^*) и W_*^*. Эта пара и величина W_*^* дают информацию для обеих сторон игры.

Теперь остановимся на одном варианте игровой модели (1)–(6). В задачах A и B введем новые переменные $t_i = \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}$ и $z_s = \sum\limits_{r=1}^{l} y_{sr}$, $i = 1,2,\dots,n$, $s = 1,2,\dots,m$. Этой заменой выражения для критерия качества в блоках, относящихся к нападению и к защите, будут приведены к единой форме без учета размещения средств по занятым территориям. Предположим, что средняя стоимость одного i-го типа средства нападения есть α_i, $i = 1,2,\dots,n$, и средняя стоимость одного s-го типа средства защиты есть β_s, $s = 1,2,\dots,m$. Очевидно, что в этих обозначениях ресурсы, потраченные на средства нападения и средства защиты, будут выражаться соответственно следующими функциями:

$$A_{01}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i, \quad B_{01}(z) = \sum_{s=1}^{m} \beta_s z_s.$$

Эти функции определены на множествах T и Z соответственно.

Теперь в новых обозначениях рассмотрим вопрос о технической надежности средств нападения и защиты. Пусть p_i — вероятность безотказной работы за определенное время i-го типа средства нападения и q_s — вероятность безотказной работы за определенное время s-го типа средства защиты. Тогда из общей теории надежности технических систем [3, 4] следует, что техническая надежность системы нападения будет выражаться функцией

$$A_{02}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - (1-p_i)^{t_i}\right],$$

которая рассматривается на множестве $T_1 = \left\{t : t\in T,\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i t_i \leqslant a\right\}$, где w_i, $i = 1,2,\dots,n$, — заданные числа, являющиеся ограничениями на параметры средств нападения i-го типа, a — заданное число. Аналогично, техническая надежность системы защиты будет выражаться функцией

$$B_{02}(z) = \prod_{s=1}^{m} \left[1 - (1-q_s)^{z_s}\right],$$

которая рассматривается на множестве $Z_1 = \left\{z : z\in Z,\ \sum\limits_{s=1}^{m} v_s z_s \leqslant b\right\}$, где v_s, $s = 1,2,\dots,m$, — заданные числа, являющиеся ограничениями на параметры средства защиты s-го типа, b — заданное число.

Множества T_1 и Z_1 могут быть заданы другими ограничениями вида равенств или неравенств. При принятых выше предположениях для модели с новыми независимыми переменными можем указать следующие задачи (по аналогии с введением задач A, B, C).

Задача A_0**.** Для подсистемы нападения необходимо:

A_{01}) расчет экономической рациональности средств подсистемы нападения требует решения задачи

$$A_{01}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i \to \min \quad \text{на множестве}\, T;$$

A_{02}) расчет технической надежности средств нападения требует решения задачи

$$A_{02}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - (1 - p_i)^{t_i}\right] \to \max \quad \text{на множестве}\, T_1.$$

Задача B_0**.** Для подсистемы защиты необходимо:

B_{01}) расчет экономической рациональности средств подсистемы защиты требует решения задачи

$$B_{01}(z) = \sum_{s=1}^{m} \beta_s z_s \to \min \quad \text{на множестве}\, Z;$$

B_{02}) расчет технической надежности средств защиты требует решения задачи

$$B_{02}(z) = \prod_{s=1}^{m} \left[1 - (1 - q_s)^{z_s}\right] \to \max \quad \text{на множестве}\, Z_1.$$

Задача C остается неизменной, так как выше она была выражена в новых независимых переменных.

Следует учитывать, что выражение модели в виде задач A_0, B_0, C имеет единообразную форму, однако оно не учитывает распределений средств по участкам и пунктам территорий нападения и защиты.

Приведенные выше факты, утверждения и методы решения для задач A_1, A_2, B_1, B_2, C остаются в силе для решения задач A_{01}, A_{02}, B_{01}, B_{02}, C соответственно. Для этих задач методика вычисления ресурсов и анализ эффективности стратегий сторон проводятся таким же образом, как в случае задач A_1, A_2, B_1, B_2.

4. Заключение. Изложенные выше модели игры являются антагонистическими играми с нулевой суммой. Значения функции $W(t, z)$ выражают вероятность выигрыша нападения. Пусть $\lambda \in (0, 1)$ и $\mu \in (0, 1)$ — нижние и верхние значения этой игры. Из теории игр известно, что выигрыш нападения не меньше λ, а проигрыш защиты не больше μ. Так как λ есть гарантированный выигрыш нападения, а μ есть гарантированный проигрыш защиты, то ущерб, нанесенной защите от атаки нападения, будет зависеть от этих чисел. Другими словами, верхнее и нижнее значения игры дают информацию о пределах расходов защиты. Более точные оценки о расходах сторон дают расчеты по вышеуказанным моделям, точнее по решениям задач A, B, C или же A_0, B_0, C соответственно.

Встречаются случаи, когда нападение и защита не стремятся минимизировать экономические расходы и максимизировать технические надежности их средств, а стремятся лишь, чтобы эти величины были в определенных пределах, например удовлетворялись бы ограничения

$$0 < A_1(t) \leqslant d_1, \quad 0 < d_2 \leqslant A_2(t), \quad 0 < B_1(z) \leqslant d_3, \quad 0 < d_4 \leqslant B_2(z),$$

где d_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — заданные постоянные. В этом случае предлагается поступить таким образом. Прежде всего, необходимо ввести в рассмотрение множества

$$T_0 = \bigl\{t : t \in T,\, 0 < A_1(t) \leqslant d_1,\, 0 < d_2 \leqslant a_2(t)\bigr\}, \quad Z_0 = \bigl\{z : z \in Z,\, 0 < B_1(z) \leqslant d_3,\, 0 < d_4 \leqslant B_2(z)\bigr\},$$

а затем решить следующую задачу.

Задача C_0**:**

$$W(t, z) = \prod_{s=1}^{m} \left\{1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \bigl(1 - (1 - c_{is})^{t_i}\bigr)^{z_s}\right]\right\} \to \max_t \min_z, \quad \text{на множестве}\, V_0 = T_0 \times Z_0.$$

Приведенные выше утверждения о решении задачи C для решения задачи C_0 остаются в силе. Кроме того, вместо множеств T_0 и Z_0 можно брать T_1 и Z_1 соответственно, и указанные утверждения в этом случае тоже останутся в силе. Вычисление ресурсов и анализ стратегий сторон в случае задачи C_0 проводится аналогично вышеизложенному на основе решения задачи C_0 с задачами A, B или A_0, B_0.

Приведем результаты численных расчетов для решения следующего варианта задачи C:

$$W(t,z)=\prod_{s=1}^{2}\left\{1-\prod_{i=1}^{2}\left[1-\left(1-(1-c_{is})^{t_i}\right)^{z_s}\right]\right\}\to\max_t\min_z$$

на множестве $V=\left\{(t,z): t\in\mathbb{R}_+^2,\ z\in\mathbb{R}_+^2,\ \sum_{i=1}^{2}t_i=3,\ \sum_{s=1}^{2}z_s=3\right\}$, где $c_{is}=(0.2,0.4;0.3,0.5)$. Эта задача решена в пакете MATLAB и имеет следующие результаты: $t^*=(1.9973,1.0027)$, $z^*=(1.0064,1.9936)$, $W_*^*=0.1121$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измайлов А.В.* Методы проектирования и анализа эффективности систем физической защиты ядерных материалов и установок. Учебное пособие. М.: МИФИ, 2002.
2. *Рыкунов В.Д.* Охранные системы и технические средства физической защиты объектов. М.: Security Focus, 2011.
3. *Ямпурин Н.П., Баранова А.В.* Основы надежности электронных средств. М.: Академия, 2010.
4. *Острейковский В.А.* Теория надежности. М.: Высшая школа, 2003.
5. *Дрешер М.* Стратегические игры. Теория и приложения. М.: Советское радио, 1964.
6. *Батищев Д.И.* Методы оптимального проектирования. М.: Радио и связь, 1984.
7. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
8. *Морозов В.В., Шалбузов К.Д.* Игровая модель распределения ресурсов при защите объекта // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. **5**, № 4. 66–83.
9. *Гермейер Ю.Б., Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Задачи по исследованию операций. М.: Изд. МГУ, 1979.
10. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
11. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию
01.04.2020

Calculation of Resources and an Efficiency Analysis of Strategies in a Game Model of Confrontation

M. A. Musayeva [1]

[1] *Azerbaijan State Pedagogical University, Department of Computer Sciences;
Uzeyir Hacibeyli Str. 68, Baku, AZ-1000, Azerbaijan; Ph.D. in Mathematics, Assistant Professor;
e-mail: musayeva08@inbox.ru*

Received April 1, 2020

Abstract: A game model of confrontation is formulated in the form of an attack and defense model, methods for calculating the resources of the confrontation parties are discussed, their efficiency is analyzed, and the existence conditions are given for an optimal solution to the considering problems.

Keywords: game model of confrontation, optimal solution, efficiency of strategies, attack and defense model, saddle points.

References

1. A. V. Izmailov, *Methods to Design and Analyze the Efficiency of Physical Protection Systems of Nuclear Materials and Devices* (National Research Nuclear Univ., Moscow, 2002) [in Russian].

2. V. D. Rykunov, *Security Systems and Technical Devices for the Physical Protection of Objects* (Security Focus, Moscow, 2011) [in Russian].

3. N. P. Yampurin and A. V. Baranova, *Fundamentals of Reliability of Electronic Equipment* (Akademiya, Moscow, 2010) [in Russian].

4. V. A. Ostreykovskii, *Reliability Theory* (Vysshaya Shkola, Moscow, 2003) [in Russian].

5. M. Dresher, *Games of Strategy: Theory and Applications* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961; Sov. Radio, Moscow, 1964).

6. D. I. Batishchev, *Methods of Optimal Design* (Radio Svyaz, Moscow, 1984) [in Russian].

7. F. P. Vasil'ev, *Optimization Methods* (Factorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].

8. V. V. Morozov and K. D. Shalbuzov, "Zero-Sum Game of Resource Allocation: Attacker Against Defender," Matem. Teoriya Igr Prilozh. **5** (4), 66–83 (2013) [Autom. Rem. Contr. **76** (11), 2045–2055 (2015)].

9. Yu. B. Germeier, V. V. Morozov, A. G. Sukharev, and V. V. Fedorov, *Operations Research Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1979) [in Russian].

10. V. F. Dem'yanov and V. N. Malozemov, *Introduction to Minimax* (Nauka, Moscow, 1972; Wiley, New York, 1974).

11. H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory* (Academic Press, New York, 1968; Mir, Moscow, 1972).