УДК 519.622 doi 10.26089/NumMet.v21r321

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕННОГО С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА

О. Б. Арушанян[1], С. Ф. Залеткин[2]

Рассматривается приближенный метод решения задачи Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, основанный на применении смещенных рядов Чебышёва и квадратурной формулы Маркова. Приведены способы оценки погрешности приближенного решения, выраженного в виде частичной суммы ряда некоторого порядка. Погрешность оценивается с помощью второго приближенного решения, вычисленного специальным образом и представленного частичной суммой ряда более высокого порядка. На основе предложенных способов оценки погрешности построен алгоритм автоматического разбиения промежутка интегрирования на элементарные сегменты, делающие возможным вычисление приближенного решения с наперед заданной точностью. Работа метода проиллюстрирована примерами, в том числе примером из небесной механики.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова, полиномиальная аппроксимация, контроль точности, оценки ошибок, автоматический выбор шага.

Введение. Решается задача Коши для нормальной системы M нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X = x_f, \tag{1}$$

при условии, что функция $f(x, y)$ имеет в области определения системы непрерывные ограниченные частные производные по переменным x, y. Предполагается, что на отрезке $[x_0,\, x_f]$ задача (1) имеет единственное решение. Тогда это решение и его производная $y'(x_0+\alpha X) = f\big(x_0+\alpha X,\, y(x_0+\alpha X)\big) = \Phi(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, разлагаются на промежутке интегрирования $[x_0,\, x_f]$ в равномерно сходящиеся ряды по смещенным многочленам Чебышёва первого рода

$$y(x_0 + \alpha X) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad a_i^*[y] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{y(x_0 + \alpha X) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha, \tag{2}$$

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha, \tag{3}$$

Здесь: штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$, $T_i^*(\alpha)$ — смещенный многочлен Чебышёва первого рода на [0, 1]: $T_i^*(\alpha) = T_i(2\alpha - 1)$, $T_i(t)$ — многочлен Чебышёва первого рода на [-1, 1].

Если ряды (2), (3) быстро сходятся на всем интервале интегрирования $[x_0,\, x_f]$, то их использование не создает каких-либо трудностей и с такими рядами удобно иметь дело на практике для фактического вычисления их сумм, непосредственно заменяя бесконечные суммы частичными суммами некоторого порядка и принимая последние в качестве приближенного аналитического представления решения задачи (1) и его производной. В противном случае, т.е. когда сходимость этих рядов на всем интервале интегрирования медленная, получение аналитического решения задачи в виде одной частичной суммы на всем отрезке

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: arush@srcc.msu.ru
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: iraz@srcc.msu.ru

$[x_0,\, x_f]$ может быть затруднено. В этом случае рекомендуется поступить следующим образом. Следует разбить интервал интегрирования $[x_0,\, x_f]$ на элементарные (частичные) сегменты $[x_s,\, x_s+h]$, $s=0,1,\,\dots,$ $0<h\leqslant X$, так, чтобы на каждом таком элементарном сегменте соответствующие ряды Чебышёва (2), (3) быстро сходились. Чем меньше длина h элементарного сегмента, тем быстрее стремится к нулю на этом сегменте остаточный член r_k ряда Чебышёва при $k\to\infty$.

Справедливость этого утверждения можно показать, если обратиться к оценке остаточного члена r_k смещенного ряда Чебышёва. Предположим, что некоторая функция $g(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_s,\, x_s+h]$ $p+1$ раз и $(p+1)$-я производная удовлетворяет условию $|g^{(p+1)}(x)|\leqslant M_{p+1}$, и пусть $r_k(x,g)$ — остаточный член смещенного ряда Чебышёва функции $g(x)$ на $[x_s,\, x_s+h]$:

$$g(x)=g(x_s+\alpha h)=\sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[g]T_i^*(\alpha)+r_k(x,g),\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

Тогда для остатка ряда справедливо следующее неравенство [1]

$$\max_{x\in[x_s,x_s+h]}|r_k(x,g)|\leqslant\frac{c_pM_{p+1}\ln k}{k^{p+1}}\,h^{p+1},\qquad k>p, \tag{4}$$

где c_p — постоянная, зависящая от p и независящая от k. Оно получено на основании неравенства Лебега для остаточного члена ряда Чебышёва и прямых теорем о наилучшем приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами. Из (4) видно, что, если функция $g(x)$ достаточно гладкая, то $r_k(x,g)$ стремится к нулю очень быстро при $k\to\infty$.

Еще одна оценка для остатка $r_k(x,g)$ ряда вытекает из теории интерполирования:

$$\max_{x\in[x_s,x_s+h]}|r_k(x,g)|\leqslant\frac{c_1M_{k+1}\ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\,h^{k+1},\qquad c_1=\mathrm{const}, \tag{5}$$

в предположении, что $g(x)$ имеет на сегменте $[x_s,\, x_s+h]$ производную $(k+1)$-го порядка, причем $|g^{(k+1)}(x)|\leqslant M_{k+1}$. Обе оценки показывают порядок остаточного члена r_k ряда Чебышёва функции относительно длины h частичного сегмента при $h\to 0$. Из (5) также следует, что, чем меньше длина h частичного сегмента, на котором функция раскладывается в ряд Чебышёва, тем меньше остаточный член этого ряда.

В [1–7] нами предложен и подробно описан приближенный метод решения задачи (1) с помощью данных рядов Чебышёва. Сущность метода состоит в следующем. Замена рядов для $f(x,y(x))$ и $y(x)$ на элементарных сегментах их частичными суммами k-го и $(k+1)$-го порядков соответственно

$$\Phi(\alpha)=f\big(x_s+\alpha h,y(x_s+\alpha h)\big)\approx\sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\Phi]T_i^*(\alpha),\qquad y(x_s+\alpha h)\approx\sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha),$$

применение формулы численного интегрирования Маркова [1, 2] для вычисления интегралов $a_i^*[\Phi]$ в (3), а также использование связи между коэффициентами Чебышёва $a_i^*[y]$ решения $y(x)$ и коэффициентами Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ его производной $\Phi(\alpha)$ приводят к системе конечных уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части $f\big(x,y(x)\big)$, которая решается методом последовательных приближений. Вместе с решением этой системы определяются также и приближенные коэффициенты Чебышёва $a_i^*[y]$ функции $y(x)$.

Цель же настоящей статьи заключается в том, чтобы оценить погрешность полученного в виде частичной суммы приближенного решения $y(x)$ на одном элементарном сегменте длиной h и по этой оценке погрешности выбрать такую длину h^* элементарного сегмента, чтобы найти на нем приближенное решение также в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышёва, удовлетворяющее наперед заданной точности.

1. Оценка погрешности приближенного решения. Рассмотрим первый элементарный сегмент $[x_0,x_0+h]$, где $h\leqslant X$. Пусть на этом сегменте приближенное решение $U_{k+1}(x)=U_{k+1}(x_0+\alpha h)\approx y(x_0+\alpha h)$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, задачи Коши (1) представляется в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k=k_1$:

$$U_{k_1+1}(x_0+\alpha h)=\sum_{i=0}^{k_1+1}{}' a_i^*[U_{k_1+1}]T_i^*(\alpha),$$

которая имеет порядок точности $O(h^{k_1+2})$ относительно h при $h \to 0$. Допустим, что на этом же сегменте рассматривается еще одно приближенное решение, которое также представляется в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = k_2$, причем $k_2 > k_1$:

$$U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k_2+1}{}' a_i^*[U_{k_2+1}]T_i^*(\alpha),$$

и имеет порядок точности $O(h^{k_2+2})$ относительно h при $h \to 0$. Таким образом, имеют место следующие равенства

$$y(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) = O(h^{k_1+2}), \qquad y(x_0 + \alpha h) - U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h) = O(h^{k_2+2}).$$

Отсюда следует, что погрешность приближенного решения $U_{k_1+1}(x)$ на элементарном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) &= U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) + O(h^{k_2+2}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+1}] - a_i^*[U_{k_1+1}]\big)T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U_{k_2+1}]T_i^*(\alpha) + O(h^{k_2+2}). \end{aligned}$$

Отбрасывая остаточный член $O(h^{k_2+2})$, получаем оценку погрешности на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$

$$y(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) \approx \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+1}] - a_i^*[U_{k_1+1}]\big)T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U_{k_2+1}]T_i^*(\alpha). \tag{6}$$

В частности, в конце элементарного сегмента, т.е. для значения решения в точке $x_0 + h$, погрешность приближенного решения можно оценить величиной

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - U_{k_1+1}(x_0 + h) &\approx U_{k_2+1}(x_0 + h) - U_{k_1+1}(x_0 + h) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+1}] - a_i^*[U_{k_1+1}]\big) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U_{k_2+1}]. \end{aligned} \tag{7}$$

Из (6) следует еще одна оценка погрешности для l-й компоненты приближенного решения $U_{k_1+1}(x)$ на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$:

$$\big|y^l(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}^l(x_0 + \alpha h)\big| \leqslant \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' \big|a_i^{*l}[U_{k_2+1}] - a_i^{*l}[U_{k_1+1}]\big| + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} \big|a_i^{*l}[U_{k_2+1}]\big|. \tag{8}$$

Сделаем некоторые замечания относительно порядка величин, фигурирующих в полученных оценках.

Если только одна граничная точка элементарного сегмента $[x_0,\, x_0+h]$, а именно, начальная точка x_0, входит в число узлов применяемой на данном сегменте квадратурной формулы Маркова [1] для вычисления интеграла $a_i^*[\Phi]$ в (3), то разность коэффициентов $a_i^*[U_{k_2+1}]$ и $a_i^*[U_{k_1+1}]$, стоящая под знаком первой суммы в (6)–(8), имеет порядок $O(h^{k_1+2})$ относительно h при $i = 0,\, k_1-1,\, k_1+1$, и порядок $O(h^{k_1+3})$ при всех остальных i. Приведенные оценки верны, если $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k_2 + 1$ включительно. Если же обе граничные точки элементарного сегмента $[x_0,\, x_0+h]$, а именно, точки x_0 и x_0+h, входят в множество узлов используемой на данном сегменте квадратурной формулы Маркова [2], то указанные разности коэффициентов $a_i^*[U_{k_2+1}]$ и $a_i^*[U_{k_1+1}]$ имеют порядок $O(h^{k_1+3})$ при всех $0 \leqslant i \leqslant k_1+1$. Независимо от того, входит или не входит граница x_0+h элементарного сегмента в число узлов применяемой формулы Маркова, вторая сумма в (6)–(8) всегда имеет порядок относительно h на ниже $O(h^{k_1+2})$. Приведенные оценки верны, если $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k_2 + 2$ включительно.

Подробное определение оценивающего решения U_{k_2+1} приводится ниже в п. 3.

2. Автоматическое разбиение промежутка интегрирования на элементарные сегменты. Имея в распоряжении способы (7), (8) оценки погрешности приближенного решения на одном элементарном сегменте, величину элементарного (частичного) сегмента можно выбирать автоматически в процессе счета. При этом можно исходить из того, чтобы на каждый элементарный сегмент $[x_s,\, x_s+h]$ приходилась приблизительно одинаковая погрешность ε.

Обозначим величину погрешности для l-й компоненты приближенного решения $U^l_{k_1+1}$, определяемую по формуле (7) или (8), через E^l, $l = 1, \dots, M$. Если для всех компонент решения, которые требуются проверять на точность, выполняется неравенство $|E^l| \leqslant \varepsilon$ (или $\|E\|_\infty \leqslant \varepsilon$), то считается, что полученная частичная сумма $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, удовлетворяет на элементарном сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ заданной точности ε, и она принимается в качестве приближенного решения задачи Коши (1) на данном элементарном сегменте. Вместо коэффициентов $a^*_i[U_{k_1+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k_1 + 1$, можно взять коэффициенты $a^*_i[U_{k_2+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k_1 + 1$, частичной суммы $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, поскольку последние имеют более высокий порядок точности относительно h по сравнению с коэффициентами $a^*_i[U_{k_1+1}]$. Тогда в качестве приближенного решения на сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ берется следующая сумма

$$S_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_1+1}}' a^*_i[U_{k_2+1}]T^*_i(\alpha),$$

которая, по-прежнему, будет иметь тот же порядок точности $O(h^{k_1+2})$, что и $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$. В качестве приближения в конце элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h]$, т.е. в точке $x_1 = x_0 + h$, можно также взять значение этой суммы $S_{k_1+1}(x_0 + h)$ в точке x_1 либо значение $U_{k_2+1}(x_0 + h)$, как имеющее более высокий порядок точности $O(h^{k_2+2})$ по сравнению с приближенным решением $U_{k_1+1}(x_0 + h)$ или $S_{k_1+1}(x_0 + h)$. Так как погрешность E имеет порядок $O(h^{k_1+2})$, то справедливо представление $E = ch^{k_1+2}$, где $c = \text{const}$. Длина следующего элементарного сегмента $[x_1, x_1 + h_\varepsilon]$ определяется с помощью соотношения

$$h_\varepsilon = \xi h, \tag{9}$$

где ξ находится из условия выполнения равенства $\|ch_\varepsilon^{k_1+2}\|_\infty = \varepsilon$ или $\|c\xi^{k_1+2}h^{k_1+2}\|_\infty = \varepsilon$. Отсюда получаем

$$\xi = \sqrt[k_1+2]{\frac{\varepsilon}{\|E\|_\infty}}\,. \tag{10}$$

Здесь $\xi \geqslant 1$ и значение длины следующего элементарного сегмента $[x_1,\, x_1+h_\varepsilon]$ больше длины предыдущего элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h]$.

Если оценка погрешности приближенного решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ превосходит наперед заданную границу ε: $\|E\|_\infty > \varepsilon$, то считается, что на данном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$ приближенное решение $U_{k_1+1}(x_0+\alpha h)$ не достигает требуемой точности. В этом случае выбирается новая длина элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h_\varepsilon]$ по формулам (9), (10). Теперь $\xi < 1$ и новая длина элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h_\varepsilon]$ меньше предыдущей.

В действительности берется несколько меньшее, чем (10), значение ξ, например $\xi^* = 0,9\xi$, и соответственно меньшее, чем (9), значение длины элементарного сегмента $h^*_\varepsilon = \xi^* h$. Это делается для того, чтобы избежать тех элементарных сегментов, на которых не достигается требуемая точность.

3. Вычисление оценивающего решения U_{k_2+1}. Допустим, что в результате выполнения указанного во введении итерационного процесса (подробно изложенного в предыдущих работах [3–7]) на элементарном сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ за k_1 итераций получено приближенное решение в виде частичной суммы $U_{k_1+1}(x_0+\alpha h)$, имеющее порядок точности $O(h^{k_1+2})$. Рассмотрим теперь, как экономичней (с точки зрения числа арифметических операций) построить на этом же сегменте второе приближенное решение $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ более высокого порядка точности $O(h^{k_2+2})$, $k_2 > k_1$, избегая повторения дополнительного итерационного процесса длиной k_2 итераций. Напомним, что коэффициенты Чебышёва $a^*_i[U_{k+1}]$ приближенного решения $U_{k+1}(x)$ на элементарном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$ определяются через коэффициенты $a^*_i[\tilde{J}_k]$ Чебышёва его производной, а эти последние вычисляются с помощью квадратурной формулы Маркова с числом узлов $k + 1$ или $k + 2$ в зависимости от того, одна или две граничные точки элементарного сегмента являются узлами используемой квадратурной формулы Маркова. Например, в первом случае узлы квадратурной формулы есть:

$$x_0 + \alpha_j h, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_j = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big), \quad j = 1, \dots, k; \tag{11}$$

во втором случае узлами являются следующие точки:

$$x_0 + \alpha^{(2)}_j h, \quad \alpha^{(2)}_0 = 0, \quad \alpha^{(2)}_j = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{j\pi}{k+1}\Big), \quad j = 1, \dots, k, \quad \alpha^{(2)}_{k+1} = 1.$$

При вычислении первого приближенного решения $U_{k_1+1}(x_0+\alpha_j h)$ значение k полагается равным k_1. Далее, не теряя общности, ограничимся только первым случаем.

Будем соблюдать следующую последовательность действий.

1) Вычисляем значения приближенного решения $U_{k_1+1}(x_0+\alpha h)$ в узлах (11) той же квадратурной формулы, что была использована при вычислении первого решения $U_{k_1+1}(x_0+\alpha h)$, но при $k=k_2$. Таких значений будет k_2+1 (с учетом значения $U_{k_2+1}(x_0)=U_{k_1+1}(x_0)$) и погрешность этих значений имеет порядок $O(h^{k_1+2})$ при $h\to 0$.

2) Вычисляем значения правой части уравнений (1) в узлах (11) квадратурной формулы с погрешностью $O(h^{k_1+2})$:

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j)=f\big(x_0+\alpha_j h,\, U_{k_1+1}(x_0+\alpha_j h)\big),\qquad j=0,1,\,\ldots\,,k_2.$$

3) Вычисляем приближенные коэффициеты Чебышёва $a_i^{*(0)}[\tilde{J}_{k_2}]$ правой части дифференциального уравнения (1) по квадратурной формуле Маркова с $k=k_2$:

$$a_i^{*(0)}[\tilde{J}_{k_2}]=\frac{4}{2k_2+1}{\sum_{j=0}^{k_2}}{}' f\big(x_0+\alpha_j h,\, U_{k_1+1}(x_0+\alpha_j h)\big)T_i^*(\alpha_j),\qquad i=0,1,\,\ldots\,,k_2,$$

порядок точности которых есть

$$a_i^*[\Phi]-a_i^{*(0)}[\tilde{J}_{k_2}]=O(h^{k_1+2}).$$

Эти значения коэффициентов мы рассматриваем как <u>начальное (нулевое) приближение</u> коэффициентов Чебышёва правой части, взятой на решении $U_{k_2+1}(x_0+\alpha h)$: $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_{k_2}]$ при $\nu=0$. Здесь: $\tilde{J}_{k_2}(\alpha)$ — многочлен степени k_2, являющийся приближенным представлением производной $\Phi(\alpha)$:

$$\tilde{J}_{k_2}(\alpha)={\sum_{i=0}^{k_2}}{}' a_i^*[\tilde{J}_{k_2}]T_i^*(\alpha).$$

4) Используя связи между коэффициентами Чебышёва функции и коэффициентами Чебышёва ее производной, по найденным значениям приближенных коэффициентов Чебышёва правой части вычисляем ν-е приближение коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]$, $i=0,1,\,\ldots\,,k_2+1$, приближенного решения $U_{k_2+1}(x_0+\alpha h)$, где $U_{k_2+1}(x_0+\alpha h)$ — многочлен степени k_2+1:

$$U_{k_2+1}(x_0+\alpha h)={\sum_{i=0}^{k_2+1}}{}' a_i^*[U_{k_2+1}]T_i^*(\alpha).$$

Порядок этих коэффициентов есть

$$a_i^*[y]-a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]=O(h^{k_1+3})\quad\text{при}\quad \nu=0.$$

5) По найденным приближенным коэффициентам Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]$ вычисляем ν-е приближение для значений решения $U_{k_2+1}(x_0+\alpha_j h)$ в узлах (11) по формулам

$$U_{k_2+1}^{(\nu)}(x_0+\alpha_j h)={\sum_{i=0}^{k_2+1}}{}' a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]T_i^*(\alpha_j),\qquad j=0,1,\,\ldots\,,k_2,\tag{12}$$

и значения правой части дифференциального уравнения (1)

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j)=f\big(x_0+\alpha_j h,\, U_{k_2+1}^{(\nu)}(x_0+\alpha_j h)\big),\qquad j=0,1,\,\ldots\,,k_2.\tag{13}$$

6) Теперь по квадратурной формуле Маркова с узлами (11) находим следующее, $(\nu+1)$-е, приближение для коэффициентов Чебышёва правой части уравнения (1), а именно:

$$\begin{aligned}a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_{k_2}]&=\frac{4}{2k_2+1}{\sum_{j=0}^{k_2}}{}'\tilde{\Phi}(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j)=\\&=\frac{4}{2k_2+1}{\sum_{j=0}^{k_2}}{}' f\big(x_0+\alpha_j h,\, U_{k_2+1}^{(\nu)}(x_0+\alpha_j h)\big)T_i^*(\alpha_j),\qquad i=0,1,\,\ldots\,,k_2.\end{aligned}\tag{14}$$

Дальнейшие приближения для коэффициетов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_{k_2}]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, вычисляются по такой же схеме с повторением шагов 4, 5, 6 и использованием формул (12)–(14) для $\nu = 1, 2, \ldots$.

Данный итерационный процесс полностью аналогичен итерационному процессу, применяемому для построения решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$, и его сходимость вытекает из исследований, проведенных в работах [3, 4, 6, 7]. В частности, в [7] разобрана теорема, позволяющая не только провести с полной строгостью и наиболее просто доказательство сходимости рассматриваемых итерационных процессов, но и приводящую вместе с тем к весьма удобному практическому приему для нахождения приближенного решения. Для того, чтобы погрешность приближенного решения $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ имела порядок $O(h^{k_2+2})$ при $h \to 0$, необходимо выполнить в данном итерационном процессе не менее $k_2 - k_1$ итераций. Таким образом, для вычисления обоих решений $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ и $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ требуется всего k_2 итераций, что меньше суммарного числа итераций, которое понадобилось бы выполнить для определения обоих решений в том случае, когда решение $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ вычисляется независимо от решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$.

4. Примеры. Работа изложенного метода рядов с контролем точности и автоматическим разбиением промежутка интегрирования на элементарные сегменты демонстрируется двумя примерами. В обоих примерах вычисления проводились с 15 - 16 значащими десятичными цифрами.

1) Решить задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y \ln y}{1 + x}\,, \quad y(0) = e^q, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_f\,, \quad x_f = 7, \quad q = 4. \tag{15}$$

Решением задачи является быстрорастущая функция с большой производной $y(x) = e^{q(1+x)}$. Уравнение (15) интегрировалось при нескольких значениях наперед заданной точности. Разбиение интервала интегрирования на элементарные сегменты заранее не задавалось, а автоматически строилось в процессе интегрирования этого уравнения. Задавалась только длина начального (первого) элементарного сегмента, равная 1. Приближенное решение представлялось на элементарных сегментах в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = k_1 = 18$, а оценивающее решение — в виде частичной суммы при $k = k_2 = 25$. При этом число итераций для вычисления приближенного решения U_{k_1+1} было равно 28, а число дополнительных итераций, которое необходимо было выполнить для нахождения оценивающего решения U_{k_2+1}, равнялось 3. Сведения, относящиеся к интегрированию задачи (15) (наперед заданная относительная точность ε, с которой требовалось вычислить решение; фактически полученная относительная погрешность δ вычисленного приближенного решения в конце интервала интегрирования x_f; число элементарных сегментов N_h, на которые автоматически разбивался промежуток интегрирования $[0, x_f]$ в процессе счета; количество N_f вычислений правой части дифференциального уравнения (15)), приведены в табл. 1.

Таблица 1

N	ε	δ	N_h	N_f
1	$0,5 \times 10^{-11}$	$-0,99 \times 10^{-13}$	6	3996
2	$0,5 \times 10^{-12}$	$0,32 \times 10^{-13}$	6	3996
3	$0,5 \times 10^{-13}$	$-0,12 \times 10^{-14}$	7	4662
4	$0,5 \times 10^{-14}$	$0,69 \times 10^{-14}$	9	5994
5	$0,5 \times 10^{-11}$	$-0,28 \times 10^{-14}$	7	4662

Сведения, представленные в первых четырех строках таблицы, относятся к случаю, когда погрешность приближенного решения определяется с помощью оценки (7). Указанные в пятой строке таблицы данные соответствуют тому случаю, когда для нахождения погрешности приближенного решения применяется оценка (8). Из сравнения первой и пятой строк видно, что использование второй оценки приводит к уменьшению погрешности приближенного решения.

Программа, в основу работы которой положены описанные здесь оценки погрешности вместе с алгоритмом автоматического разбиения промежутка интегрирования на элементарные сегменты, выбрала следующие длины элементарных сегментов, начиная со второго (длины сегментов приводятся округленными до четырех цифр). Для наперед заданной точности $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-11}$ и оценки (7): 1,343; 1,374; 1,424; 1,443; 0,416. Последний указанный элементарный сегмент нестандартный; рекомендованный программой элементарный сегмент равен 1,455. Для той же заданной точности и оценки (8) программа выбрала следующие элементарные сегменты: 1,080; 1,148; 1,131; 1,115; 1,186; 0,340. Как и в предыдущем варианте, последний указанный сегмент нестандартный; рекомендовнный той же программой элементарный сегмент равен 1,215.

Отметим плавное изменение длины выбираемых элементарных сегментов при том, что скорость возрастания решения увеличивается на порядки на протяжении данных сегментов. Способность алгоритма обеспечить такой характер изменения длины элементарных сегментов в процессе интегрирования дифференциальных уравнений является весьма ценным свойством программы.

Во всех вариантах, приведенных в таблице, число отклоненных элементарных сегментов равно нулю.

В табл. 2 приведены результаты интегрирования задачи (15), полученные одношаговыми методами Фельберга, Инглэнда пятого порядка точности [8, 9], многошаговым методом Адамса пятого порядка точности с автоматическим выбором шага [10], многозначным методом Гира с автоматическим выбором шага и переменным порядком (с максимальным допустимым порядком семь [11]).

Таблица 2

Метод	δ	N_h	N_f
Фельберга	$0,28 \times 10^{-11}$	4480	26910
Инглэнда	$0,34 \times 10^{-11}$	5940	35682
Адамса	$0,47 \times 10^{-11}$	9037	18447
Гира	$0,79 \times 10^{-13}$	2024	5830

Во втором столбце таблицы показана относительная погрешность δ приближенного значения решения, отвечающая наилучшей фактически достигнутой точности в точке x_f. В третьем и четвертом столбцах даны число выполненных шагов N_h и количество вычислений правой части N_f уравнения (15), использованных для достижения такой точности.

Как видно, приближенное решение задачи Коши (15) методом рядов Чебышёва с автоматическим разбиением промежутка интегрирования на элементарные сегменты получено с намного бо́льшей точностью за значительно меньшее число шагов и с существенно меньшим количеством вычислений правой части уравнения, чем указанными численными методами.

2) Для иллюстрации работы метода мы также выбрали пример из небесной механики. Рассматривается ограниченная плоская круговая задача трех тел. Она заключается в следующем. Требуется найти движение тела с бесконечно малой массой, притягиваемого двумя телами (первичными телами), имеющими конечные массы и описывающими круговые орбиты вокруг общего центра инерции. Дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел могут быть написаны в следующем нормализованном виде во вращающейся системе координат с началом в центре масс первичных тел (в безразмерных единицах массы, длины и времени):

$$\begin{cases} y_1'' - 2y_2' - y_1 = -\mu' \, \dfrac{y_1 + \mu}{r_1^3} - \mu \, \dfrac{y_1 - \mu'}{r_2^3}\,, \\ y_2'' + 2y_1' - y_2 = -\mu' \, \dfrac{y_2}{r_1^3} - \mu \, \dfrac{y_2}{r_2^3}\,, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$r_1^2 = (y_1 + \mu)^2 + y_2^2, \quad r_2^2 = (y_1 - \mu')^2 + y_2^2, \quad \mu = 0,012277471, \quad \mu' = 1 - \mu,$$

μ — масса наименьшего первичного тела, μ' — масса другого первичного тела, r_1, r_2 — расстояния между телом нулевой массы и первичными телами. Начальные условия

$$\begin{aligned} &y_1(0) = 0,994, && y_1'(0) = 0, \\ &y_2(0) = 0, && y_2'(0) = -2,00158510637908252240537862224, \end{aligned}$$

выбраны так, чтобы решение данных уравнений получилось периодическим с периодом $x_f = 17,0652165601579625588917206249$ [8]. Такова, например, задача о движении искусственного спутника или, вообще, какого-либо искусственного небесного тела под действием притяжения Земли и Луны, движущейся вокруг Земли по круговой орбите с постоянной угловой скоростью.

Заменой переменных $y_1 = z_1$, $y_1' = z_2$, $y_2 = z_3$, $y_2' = z_4$, два уравнения (16) второго порядка могут быть записаны в виде нормальной системы

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_1 + 2z_4 - \mu' \, \dfrac{z_1 + \mu}{r_1^3} - \mu \, \dfrac{z_1 - \mu'}{r_2^3}\,, \\ z_3' = z_4, \\ z_4' = -2z_2 + z_3 - \mu' \, \dfrac{z_3}{r_1^3} - \mu \, \dfrac{z_3}{r_2^3}\,, \end{cases} \tag{17}$$

где $r_1^2 = (z_1 + \mu)^2 + z_3^2,\ r_2^2 = (z_1 - \mu')^2 + z_3^2,$ с начальными условиями

$$z_1(0) = 0,994, \quad z_2(0) = 0,$$
$$z_3(0) = 0, \quad z_4(0) = -2,00158510637908252240537862224.$$

Итак, решается задача Коши для системы (17) на промежутке $[0,\ x_f]$. Решение этой задачи в конечной точке x_f интервала интегрирования вполне известно, поскольку решение задачи является периодическим с периодом x_f. Поэтому мы можем определить абсолютные погрешности численного решения в точке x_f.

Система (17) интегрировалась при нескольких значениях наперед заданной точности ε. Разбиение интервала интегрирования $[0,\ x_f]$ на элементарные сегменты заранее не задавалось, а автоматически строилось в процессе интегрирования этой системы. Задавалась только длина начального сегмента, равная 0,01. Приближенное решение представлялось на элементарных сегментах в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = k_1 = 20$, а оценивающее решение — в виде частичной суммы при $k = k_2 = 30$. В итерационном процессе для определения приближенного решения $U_{k_1+1}(x_s + \alpha h)$ выполнялось IM итераций, а в итерационном процессе для определения оценивающего решения $U_{k_2+1}(x_s + \alpha h)$ — IM2 итераций.

Также применялись два способа выбора начального приближения в итерационном процессе вычисления приближенного решения $U_{k_1+1}(x_s + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, на каждом элементарном сегменте $[x_s,\ x_s + h]$. Здесь речь идет о выборе начального приближения для коэффициентов Чебышёва производной решения. В первом способе (этому способу соответствует значение IA=1) начальное приближение коэффициентов Чебышёва производной $\widetilde{J}_{k_1}(\alpha)$ решения $U_{k_1+1}(x_s+\alpha h)$ определяется по начальному значению, т.е. по значению $U_{k_1+1}(x_s)$ приближенного решения в начальной точке x_s сегмента $[x_s,\ x_s + h]$. Во втором способе (ему соответствует значение IA=2) начальное приближение коэффициентов Чебышёва производной $\widetilde{J}_{k_1}(\alpha)$ решения $U_{k_1+1}(x_s+\alpha h)$ на сегменте $[x_s,\ x_s+h]$, начиная со второго элементарного сегмента, определяется путем экстраполяции коэффициентов Чебышёва производной, полученных на предыдущем элементарном сегменте. При этом на первом элементарном сегменте начальное приближение всегда определяется исключительно первым способом.

Все данные, относящиеся к интегрированию задачи (17), такие, как наперед заданная точность ε, с которой требовалось вычислить решение $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$; способ выбора начального приближения IA; число итераций в каждом из двух итерационных процессов IM, IM2; фактически полученная абсолютная погрешность Δ_l вычисленной l-й компоненты приближенного решения z_l, $l = 1, 2, 3, 4$, в конце интервала интегрирования x_f; число элементарных сегментов N_h, на которые автоматически разбивался промежуток интегрирования $[0,\ x_f]$ в процессе счета; число отклоненных элементарных сегментов N_R; количество N_f вычислений правой части системы дифференциальных уравнений (17), — все эти сведения приведены в табл. 3.

Таблица 3

ε	IA	IM	IM2	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	N_h	N_R	N_f
$0,5 \times 10^{-7}$	1	15	10	$0,20 \times 10^{-13}$	$0,11 \times 10^{-10}$	$0,67 \times 10^{-13}$	$0,31 \times 10^{-11}$	23	13	25223
$0,5 \times 10^{-8}$	1	15	16	$-0,48 \times 10^{-13}$	$-0,13 \times 10^{-10}$	$-0,78 \times 10^{-13}$	$-0,75 \times 10^{-11}$	26	10	31706
$0,5 \times 10^{-9}$	1	15	16	$-0,29 \times 10^{-13}$	$-0,15 \times 10^{-10}$	$-0,92 \times 10^{-13}$	$-0,44 \times 10^{-11}$	30	13	37870
$0,5 \times 10^{-9}$	1	15	10	$-0,55 \times 10^{-13}$	$-0,21 \times 10^{-10}$	$-0,13 \times 10^{-12}$	$-0,86 \times 10^{-11}$	31	14	31531
$0,5 \times 10^{-7}$	2	10	10	$-0,78 \times 10^{-13}$	$-0,39 \times 10^{-10}$	$-0,24 \times 10^{-12}$	$-0,12 \times 10^{-10}$	31	12	25211
$0,5 \times 10^{-9}$	2	10	10	$-0,94 \times 10^{-14}$	$-0,52 \times 10^{-11}$	$-0,32 \times 10^{-13}$	$-0,15 \times 10^{-11}$	37	16	31017
$0,1 \times 10^{-9}$	2	10	10	$-0,21 \times 10^{-13}$	$-0,98 \times 10^{-11}$	$-0,60 \times 10^{-13}$	$-0,32 \times 10^{-11}$	39	15	31599
$0,2 \times 10^{-5}$	2	10	10	$0,71 \times 10^{-14}$	$0,25 \times 10^{-11}$	$0,20 \times 10^{-13}$	$0,85 \times 10^{-12}$	27	15	24627

Приведенные результаты показывают, что метод рядов Чебышёва с автоматическим разбиением интервала интегрирования на элементарные сегменты вычисляет приближенное решение со стабильно высокой точностью, изменяющееся для различных указанных в таблице вариантов на незначительную величину вычислительной погрешности.

Заметим, что начальные условия задачи Коши (16) заданы в окрестности одной из двух особых точек. Особыми точками системы (16) являются точки, в которых находятся два тела с конечными массами: $y_1 = \mu'$, $y_2 = 0$ — точка локализации наименьшего первичного тела, и $y_1 = -\mu$, $y_2 = 0$ — точка локализации другого первичного тела. Поэтому элементарные сегменты мельчатся более всего в тех частях вычисляемой орбиты ИНТ, которые близки к особой точке, т.е. вблизи начала и вблизи конца отрезка интегрирования $[0,\ x_f]$. Для наглядности приведем, например, последовательность длин элементарных сегментов, выбранных вычислительной программой в процессе интегрирования нашей системы (17) для входных параметров ε, IA, IM, IM2, соответствующих первой строке табл. 3 (длины приводятся с тремя цифрами после десятичной запятой): 0,012; 0,026; 0,055; 0,127; 0,891; 0,898; 1,006; 2,131; 1,018; 0,993; 1,457; 1,799; 0,989; 0,947; 1,526; 1,542; 0,686; 0,758; 0,098; 0,053; 0,025; 0,008. Последний элементарный сегмент нестандартный. Первые три элементарных сегмента этой последовательности (вместе с начальным сегментом 0,01), равные каждый нескольким сотым, составляют начальную часть интервала интегрирования, а последние четыре сегмента, также равные каждый нескольким сотым, составляют конечную часть интервала интегрирования.

Данная задача Коши (17) также решалась для различных значений наперед заданной точности многозначным методом Гира с автоматическим выбором шага и переменным порядком (с максимально допустимым порядком семь) [11]. Ниже приводятся абсолютные погрешности для всех четырех компонент z_l, $l = 1, 2, 3, 4$, приближенного решения, отвечающие наилучшей фактически достигнутой этим методом точности в конце интервала интегрирования x_f: $\Delta_1 = -0,30 \times 10^{-12}$, $\Delta_2 = -0,37 \times 10^{-9}$, $\Delta_3 = -0,23 \times 10^{-11}$, $\Delta_4 = -0,46 \times 10^{-10}$. При этом было выполнено 4261 шагов и 10257 вычислений правой части (17). Сравнивая эти результаты с данными из таблицы 3, видим, что метод рядов Чебышёва с автоматическим разбиением интервала интегрирования на элементарные сегменты позволяет получить на одной и той же разрядной сетке приближенное решение с бóльшей точностью и за значительно меньшее число шагов по сравнению с известным методом Гира.

Анализируя указанные в табл. 3 погрешности решения и погрешности, полученные по методу Гира, надо иметь в виду, что начальные условия задачи Коши (17) и значение периода определяемого решения задавались в вычислительной программе с ограниченной точностью, соответствующей 15–16 десятичным значащим цифрам, и что все вычисления так же осуществлялись с ограниченной точностью.

Заключение. Возможность вычислять с высокой точностью приближенное решение задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва на основе изложенного здесь алгоритма контроля точности и автоматического разбиения области интегрирования на элементарные сегменты наглядно подтверждена примерами. При этом убедительно показана достоверность предложенной оценки погрешности, ее близость к истинной погрешности. Также продемонстрирована способность метода превосходить по точности традиционные методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и при этом использовать существенно меньшее число элементарных сегментов по сравнению с числом шагов в них и, как следствие, меньшее число обращений к правой части дифференциальных уравнений. Все это не только позволяет использовать метод рядов Чебышёва в тех же областях, в которых находят применение традиционные численные методы, но и делает данный метод особенно перспективным в таких научных приложениях, где требуется высокая точность решения обыкновенных дифференциальных уравнений (эфемеридная астрономия, небесная механика, космическая геодезия и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**. 44–70.
2. *Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**. 141–157.
3. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышёва // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 5. 24–30.
4. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышёва // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 203–214.
5. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О одном приближенном аналитическом методе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 235–241.
6. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва // Вычислительные методы и программирование 2016. **17**. 121–131.
7. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* К вопросу о разрешимости системы нелинейных уравнений относительно коэффициентов Фурье–Чебышёва в задаче решения обыкновенных дифференциальных уравнений на основе рядов Чебышёва // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 80–85.
8. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

9. *England R.* Error estimates for Runge–Kutta type solutions to systems of ordinary differential equations // The Computer Journal. 1969, **12**, № 2. 166–170.
10. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
11. *Gear C.W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.

Поступила в редакцию
11.03.2020

An Error Estimate for an Approximate Solution to Ordinary Differential Equations Obtained Using the Chebyshev Series

O. B. Arushanyan[1] **and S. F. Zaletkin**[2]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: arush@srcc.msu.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: iraz@srcc.msu.ru*

Received March 11, 2020

Abstract: An approximate method of solving the Cauchy problem for nonlinear first-order ordinary differential equations is considered. The method is based on using the shifted Chebyshev series and a Markov quadrature formula. Some approaches are given to estimate the error of an approximate solution expressed by a partial sum of a certain order series. The error is estimated using the second approximation of the solution expressed by a partial sum of a higher order series. An algorithm of partitioning the integration interval into elementary subintervals to ensure the computation of the solution with a prescribed accuracy is discussed on the basis of the proposed approaches to error estimation.

Keywords: ordinary differential equations, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov quadrature formulas, polynomial approximation, precision control, error estimate, automatic step size control.

References

1. S. K. Tatevyan, N. A. Sorokin, and S. F. Zaljotkin, "Markov's Formula for Numerical Integration and Its Application in Orthogonal Expansions," Vychisl. Metody Programm. **2**, 131–158 (2001).

2. S. F. Zaletkin, "Markov's Formula with Two Fixed Nodes for Numerical Integration and Its Application in Orthogonal Expansions," Vychisl. Metody Programm. **6**, 1–17 (2005).

3. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of Expansion Coefficients of Series in Chebyshev Polynomials for a Solution to a Cauchy Problem," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 24–30 (2012) [Moscow Univ. Math. Bull. **67** (5–6), 211–216 (2012)].

4. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "A Method of Solving the Cauchy Problem for Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series," Vychisl. Metody Programm. **14**, 203-214 (2013).

5. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "On an Approximate Analytical Method of Solving Ordinary Differential Equations," Vychisl. Metody Programm. **16**, 235–241 (2015).

6. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "Approximate Solution of the Cauchy Problem for Ordinary Differential Equations by the Method of Chebyshev Series," Vychisl. Metody Programm. **17**, 121–131 (2016).

7. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "On Solvability of a Nonlinear System of Equations for the Fourier–Chebyshev Coefficients in the Problem of Solving Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series," Vychisl. Metody Programm. **18**, 169–174 (2017).

8. E. Hairer, S. P. Nörsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. I. Nonstiff Problems* (Springer, Berlin, 1987; Mir, Moscow, 1990).

9. R. England, "Error Estimates for Runge–Kutta Type Solutions to Systems of Ordinary Differential Equations," Comput. J. **12** (2), 166–170 (1969).

10. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Numerical Methods* (Binom, Moscow, 2007) [in Russian].

11. C. W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971).