УДК 004.932 doi 10.26089/NumMet.v21r216

ВЫДЕЛЕНИЕ ТРЕХ УРОВНЕЙ ЯРКОСТИ НА ЗАШУМЛЕННОМ ИЗОБРАЖЕНИИ

А. В. Лихачев[1]

Предложен новый метод восстановления изображений, имеющих три неизвестные градации яркости. Для их определения используются фрагменты изображения, гистограммы которых согласуются с заданным распределением шума. Далее все пиксели распределяются по найденным уровням яркости посредством бинарной классификации. Выполнен вычислительный эксперимент, по результатам которого оказалось, что ошибка оценки исходных яркостей не превысила 3%. При относительно низком уровне шума доля неверно классифицированных пикселей от их общего числа составила менее 0.006.

Ключевые слова: восстановление изображений, проверка статистических гипотез, бинарная классификация.

1. Введение. В приложениях часто возникает задача выделения на зашумленном изображении множества пикселей, имеющих в отсутствии шума определенные яркости [1, 2]. Она является частным случаем классификации — бинарной, когда рассматривается одно значение яркости, или многоклассовой, если таких значений несколько. Первая из них к настоящему времени достаточно хорошо изучена [3, 4]. Наиболее простой является классификация по одному признаку. В настоящей статье таковым является яркость, которая определяется следующим образом. Сопоставим имеющемуся изображению функцию $G(i, j)$, заданную на сетке, каждый узел которой взаимно однозначно связан с некоторым пикселем. Пусть ее значение в узле с индексами i, j ($1 \leqslant i \leqslant i_{\max}$, $1 \leqslant j \leqslant j_{\max}$) равно $x_{i,j}$. Яркостью соответствующего пикселя назовем величину $I(x_{i,j})$, где $I(x)$ — известное неубывающее преобразование, т.е. $I(x_1) \leqslant I(x_2)$, если $x_1 < x_2$.

На практике широко используются байесовские классификаторы (см., например, [5]). В частности, в [6] приводится описание такого классификатора для изображения, состоящего из объекта и фона с яркостями $I(a)$ и $I(b)$ соответственно. К объекту относятся те фрагменты, средняя яркость которых не меньше величины $I(x_{\rm th})$. При этом значение порога $x_{\rm th}$ для нормально распределенного шума выражается как

$$x_{\rm th} = \frac{\sigma^2}{a-b}\,\ln(\eta) + \frac{N}{2}\,(a+b). \tag{1}$$

Здесь σ^2 — дисперсия шума; N — количество пикселей, составляющих фрагмент. Критерий отношения правдоподобия η имеет вид

$$\eta = \frac{P_{\rm ob}}{P_{\rm bk}}\,\frac{L_{2,1}-L_{2,2}}{L_{1,2}-L_{1,1}}\,, \tag{2}$$

где $P_{\rm ob}$ и $P_{\rm bk}$ — вероятности того, что взятый фрагмент является частью объекта и фона соответственно. Второе отношение в (2) характеризует потери классификатора (подробности см. в [6]). Коэффициенты $L_{p,q}$ находятся исходя из конкретных условий, часто с применением обучения.

Исходя из (1), можно заключить, что для реализации байесовского классификатора изображения требуется, чтобы были известны яркости выделяемых уровней. В противном случае необходимо получить их оценки. Решение этой задачи и является основной целью предлагаемой работы. Рассматривается изображение, имеющее три градации I_1, I_2 и I_3 (причем $I_1 < I_2 < I_3$), на которое наложен аддитивный шум. При этом предполагается наличие следующей априорной информации: для каждого уровня яркости имеется оценка количества составляющих его пикселей; шум является некоррелированным, а функция его плотности известна с точностью до параметров.

---

[1] Институт автоматики и электрометрии СО РАН (ИАЭ СО РАН), просп. Коптюга, 1, 630090, г. Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: ipm1@iae.nsk.su

2. Описание метода. Пусть $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, $\hat{n}_3$ — оценки количества пикселей исходного изображения с яркостями I_1, I_2, I_3. Положим, что $G(i,j)$ имеет три значения: x_1, x_2, x_3 и $I_1 = I(x_1)$, $I_2 = I(x_2)$, $I_3 = I(x_3)$. Проведем разбиение на K прямоугольных фрагментов D_k. Предположим, что характер изображения таков, что часть из них имеет постоянную яркость. В дальнейшем такие фрагменты будут обозначаться через D_k^1, D_k^2 и D_k^3 в соответствии со значениями I_1, I_2, I_3. Наложение аддитивного шума означает, что в каждом узле к функции $G(i,j)$ добавляется реализация случайной величины ξ, имеющей непрерывное распределение с функцией плотности $f_\xi(t)$. Будем считать, что математическое ожидание ξ равно нулю. Тогда нетрудно видеть, что значения $x_{i,j} = G(i,j) + \xi_{i,j}$ в узлах сетки, связанных с пикселями фрагмента D_k^l $(l = 1,2,3)$, являются выборкой случайной величины с функцией плотности $f_\xi(t - x_l)$. В связи с этим для нахождения D_k^l предлагается для всех фрагментов провести проверку статистической гипотезы о принадлежности выборки заданному распределению.

Возьмем для определенности нормально распределенный шум. В этом случае

$$f_\xi(t-\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3}$$

Поскольку наличия информации о дисперсии шума не предполагается, неизвестными в (3) являются μ и σ. В настоящей работе гипотезы проверялись по критерию Пирсона. Суть проверки, применительно к данному случаю, заключается в следующем [7]. Область значений величин $x_{i,j}$ в рассматриваемом фрагменте разбивается на M интервалов. Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_M$ — частоты попаданий в эти интервалы, $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_M$ — оценки вероятностей попадания в те же интервалы, вычисленные по распределению (3), причем его параметры μ и σ определяются по тем же $x_{i,j}$. Для этого здесь использовался метод максимального правдоподобия [7], который дает

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{D_k} x_{i,j}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{D_k} \left(x_{i,j}-\mu\right)^2}. \tag{4}$$

В (4) суммирование ведется по узлам сетки, связанным с пикселями, составляющими фрагмент D_k (их число равно N).

Далее вычисляется величина

$$Z = N\sum_{m=1}^{M} \frac{\left(\nu_m - \hat{P}_m\right)^2}{\hat{P}_m}.$$

Если выполняются определенные условия, то при $n \to \infty$ величина Z имеет χ^2 распределение с $M-3$ степенями свободы. Чтобы использовать Z в качестве критерия, выбирается достаточно малая вероятность p и вычисляется соответствующий квантиль $z_{\rm th}(p)$, принимаемый за пороговое значение, также называемое $100p$-процентным уровнем значимости отклонения выборки от распределения. При этом p является вероятностью события $z_{\rm th}(p) \leqslant Z$:

$$P\big(z_{\rm th}(p) \leqslant Z\big) = \int\limits_{z_{\rm th}(p)}^{\infty} f_{\chi^2}(t)\,dt = p. \tag{5}$$

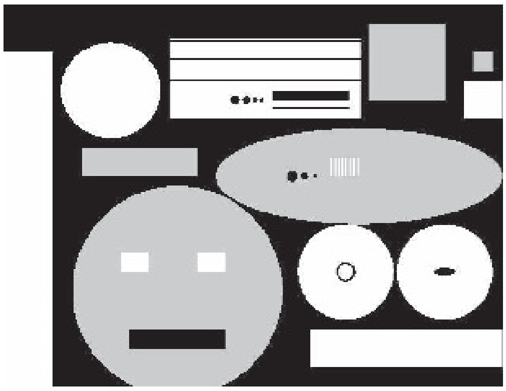
Здесь $f_{\chi^2}(t)$ — функция плотности распределения χ^2. Если выполняется неравенство $z_{\rm th}(p) > Z$, то гипотеза принимается. В противном случае она отклоняется.

Пусть гипотеза оказалась принятой для $K_0 \geqslant 3$ фрагментов. Для каждого из них известно среднее значение μ_k. Расположим эти μ_k по возрастанию. Получившийся упорядоченный массив разделим на три части пропорционально числам $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, $\hat{n}_3$. В частности, если $\hat{n}_1 \approx \hat{n}_2 \approx \hat{n}_3$, т.е., если все уровни яркости занимают на изображении примерно одинаковые площади, то к первой группе мы отнесем $K_0/3$ начальных элементов массива, ко второй — следующие $K_0/3$ элементов, остальные помещаются в третью группу. Обозначим средние значения μ_k в каждой из групп через $\overline{\mu}_1$, $\overline{\mu}_2$ и $\overline{\mu}_3$, а соответствующие им яркости примем за оценки неизвестных величин I_1, I_2, I_3. Таким образом решается первая часть задачи.

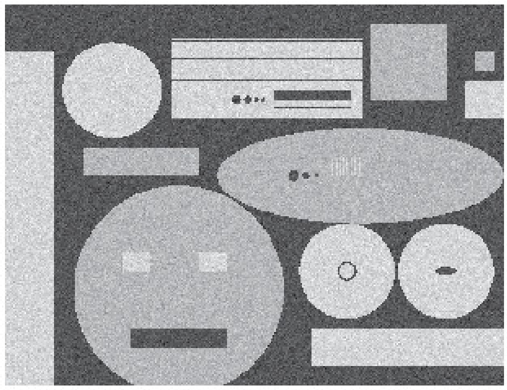
На втором этапе разработанного метода проводится классификация пикселей — определяется их принадлежность какому-либо из найденных уровней. Сначала обрабатываются те K_0 фрагментов, для которых подтвердилась гипотеза. Пусть рассматривается фрагмент, для которого μ_k принадлежит первой группе. Являясь суммой нормально распределенных случайных величин, μ_k тоже имеет нормальное распределение. Его дисперсия σ_μ^2 оценивается как σ^2/N, где σ вычисляется по формуле (4). За математическое ожидание примем $\overline{\mu}_1$. Тогда с большой вероятностью должно выполняться неравенство

$|\mu_k - \overline{\mu}_1| \leqslant 3\sigma_\mu$. Если это действительно так, то полагается, что фрагмент принадлежит первому уровню. Поэтому всем его пикселям приписывается яркость $I\left(\overline{\mu}_1\right)$. В противном случае считается, что фрагмент отнесен к уровню ошибочно, и в дальнейшем он обрабатывается так же, как и те, для которых гипотеза не подтверждена. Для фрагментов из двух других групп проводятся аналогичные процедуры.

Чтобы разделить оставшиеся пиксели, используется подход, когда многоклассовая классификация сводится к бинарной [8]. Здесь этот подход был реализован следующим образом. Вычислялись два пороговых значения $x_{\mathrm{th}\,1}$ и $x_{\mathrm{th}\,2}$ (причем $x_{\mathrm{th}\,1} < x_{\mathrm{th}\,2}$). Пиксели с яркостями из интервалов $]-\infty; x_{\mathrm{th}\,1}]$, $]x_{\mathrm{th}\,1}; x_{\mathrm{th}\,2}]$, $]x_{\mathrm{th}\,2}; \infty[$, относились к уровням $I\left(\overline{\mu}_1\right)$, $I\left(\overline{\mu}_2\right)$ и $I\left(\overline{\mu}_3\right)$ соответственно.



a)



b)

Рис. 1. Модельное изображение без шума (a) и с шумом $\sigma = 0.1$ (b)

Величины $x_{\mathrm{th}\,1}$ и $x_{\mathrm{th}\,2}$ определялись из условия минимальности суммы вероятностей ошибок первого и второго рода, как это было сделано ранее для бинарных изображений [9, 10]. Получающиеся при этом выражения для нормально распределенного шума являются частным случаем (1):

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{th}\,1} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\overline{\mu}_2 - \overline{\mu}_1} \ln\left(\frac{1-\hat{P}_2}{\hat{P}_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_1\right), \\ x_{\mathrm{th}\,2} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\overline{\mu}_3 - \overline{\mu}_2} \ln\left(\frac{1-\hat{P}_3}{\hat{P}_3}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\mu}_3 + \overline{\mu}_2\right). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{P}_2$ и $\hat{P}_3$ — оценки вероятностей того, что произвольно взятый пиксель принадлежит второму и третьему яркостному уровню соответственно; $\hat{\sigma}$ получается путем усреднения оценок (4) для K_0 фрагментов, где была подтверждена гипотеза.

3. Вычислительный эксперимент. Разработанный алгоритм исследовался путем вычислительного эксперимента. Изучалось влияние дисперсии шума σ^2 на точность оценок исходных яркостей и на качество классификации. Шум предполагался аддитивным, с равным нулю математическим ожиданием и имеющим в каждом пикселе нормальное распределение. Использовалось изображение с разрешением 640×490, которое представлено на рис. 1a. Значения функции $G(i,j)$, соответствующие уровням яркости, равны $x_1 = 0$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.3$. Число пикселей, составляющих каждый из уровней: $n_1 = 112116$ (35.75%), $n_2 = 101349$ (32.32%), $n_3 = 100135$ (31.93%). В скобках указаны процентные отношения $n_1/(n_1+n_2+n_3)$, $l = 1, 2, 3$. На рис. 1b приведено изображение с наложенным на него шумом, абсолютное значение стандартного отклонения которого σ равно 0.1.

Изображение разбивалось на 64×49 квадратных фрагментов по 100 пикселей в каждом. Вероятность p при проверке статистической гипотезы о принадлежности выборки распределению бралась равной 0.05. Исходя из соотношений чисел n_1, n_2 и n_3, вероятности для произвольного пикселя принадлежать заданному яркостному уровню полагались равными, т.е. $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \hat{P}_3 = 1/3$. Ошибки оценок значений x_1, x_2 и x_3 вычислялись по формулам $\delta_l = |x_l - \overline{\mu}_l|/x_2$, $l = 1, 2, 3$. Таким образом, нормировка проводилась на значение, соответствующее второму уровню. Точность восстановления l-го уровня определялась нормированными ошибками первого и второго рода:

$$\Delta_{1,l} = \frac{1}{n_l} \sum_{(i,j)\in S_l} \gamma_l(i,j), \quad \Delta_{2,l} = \frac{1}{n_l} \sum_{(i,j)\in S_l} \gamma_l^*(i,j). \tag{6}$$

В (6) для ошибки $\Delta_{1,l}$ суммирование ведется по пикселям, принадлежащим на модельном изображении уровню с яркостью $I(x_l)$, а для $\Delta_{2,l}$ — по пикселям, не принадлежащим ему. Функция $\gamma_l(i,j)$ принимает значение 0, если $\hat{G}(i,j) = \overline{\mu}_l$, и 1 в противном случае. Напротив, $\gamma_l^*(i,j) = 1$, если $\hat{G}(i,j) = \overline{\mu}_l$, и $\gamma_l^*(i,j) = 0$, если $\hat{G}(i,j) \neq \overline{\mu}_l$. Здесь $\hat{G}(i,j)$ — функция, связанная с изображением, полученным в результате классификации пикселей по яркости (она может быть равна $\overline{\mu}_1$, $\overline{\mu}_2$ или $\overline{\mu}_3$). Ошибка $\Delta_{1,l}$ показывает относительное количество пикселей, первоначально имеющих яркость $I(x_l)$, которые не были идентифицированы. Ошибка $\Delta_{2,l}$ выражает отношение числа пикселей, которым была неверно, приписана яркость $I\left(\overline{\mu}_l\right)$ к числу n_l.

На рис. 2 приведены зависимости ошибок δ_l от значения σ, выраженного в абсолютных единицах (таким образом, в частности, $\sigma = 1.3$ равно максимальному значению функции $G(i,j)$). Кривые *1, 2, 3* показывают поведение δ_1, δ_2, δ_3 соответственно. Из рисунка, в первую очередь, видно, что полученные оценки амплитуд уровней $\overline{\mu}_l$ близки к их истинным значениям x_l. Ошибка не превосходит трех процентов от величины x_2. Кроме того, можно заключить, что в рассмотренном интервале, относящемся к области слабого и умеренного шума, ошибки практически не зависят от его дисперсии. Это связанно с тем, что при данных условиях гипотеза о принадлежности распределению выполняется более чем для двух тысяч двухсот фрагментов. Поэтому $\overline{\mu}_l$ являются средними достаточно больших выборок, из-за чего шум оказывает слабое влияние на их значения. Осцилляции кривых вызваны случайными причинами, в том числе индивидуальными свойствами модельного изображения.

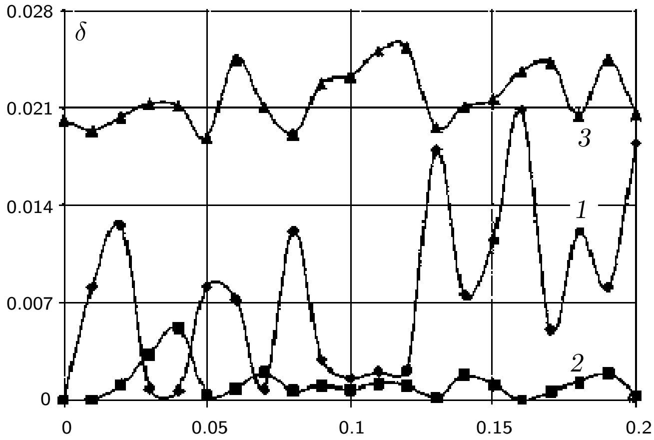


Рис. 2. Зависимости ошибки оценки яркости уровней от стандартного отклонения шума

На рис. 3 показаны зависимости ошибок первого и второго рода, см. (6), от σ. Рис. 3a–3c относятся к пикселям с исходными яркостями $I(x_1)$, $I(x_2)$, $I(x_3)$ соответственно. Кривые *1* и *2* являются графиками функций $\Delta_{1,\,l}$ и $\Delta_{2,\,l}$, $l = 1, 2, 3$. Наблюдается естественный рост ошибок с увеличением дисперсии шума.

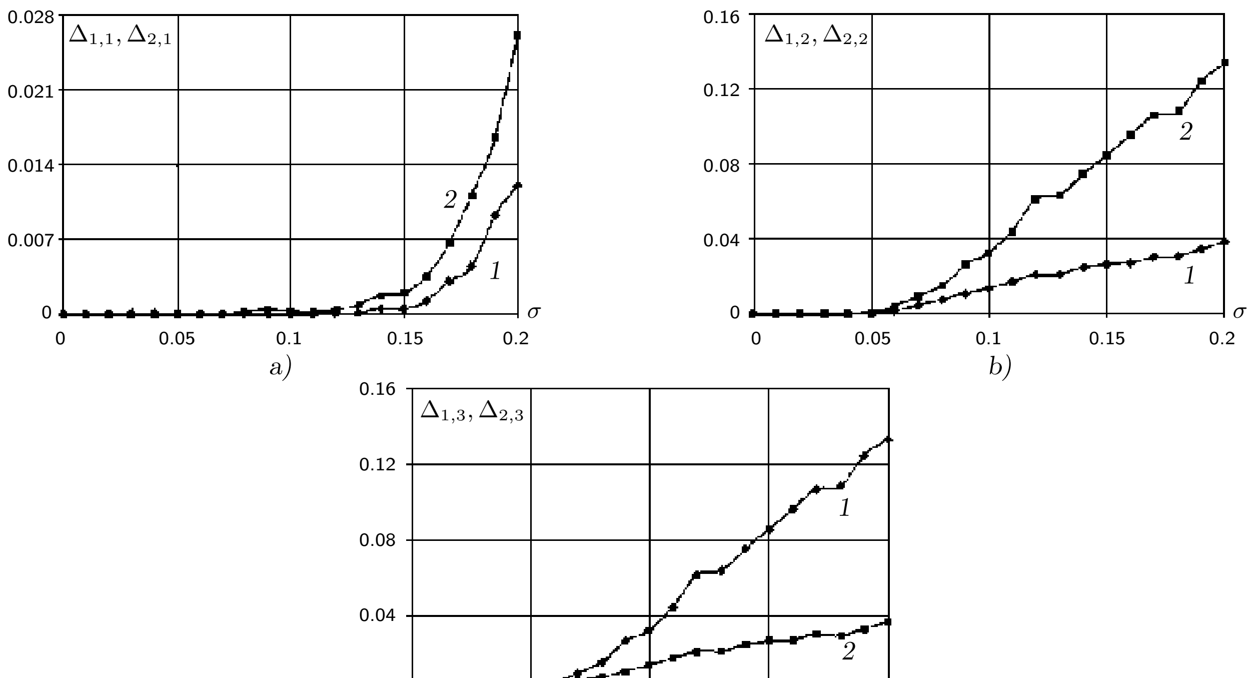


Рис. 3. Зависимости ошибок первого и второго рода от стандартного отклонения шума при определении областей первого (a) второго (b) и третьего (c) уровней яркости

При этом $\Delta_{1,1}$ и $\Delta_{2,1}$ оказались в среднем почти на два порядка ниже, чем остальные ошибки. Причина состоит в том, что разность $x_2 - x_1$ значительно больше, чем $x_3 - x_2$. Поэтому вероятность правильной классификации пикселей, принадлежащих первому уровню, выше.

Влияние вероятности p (см. формулу (5)) на точность оценки величин x_1, x_2, x_3 иллюстрирует рис. 4. Стандартное отклонение шума составляет 0.1. На приведенном графике по оси ординат откладывается ошибка δ, которая вычисляется для используемых на практике значений p, равных 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005 и 0.001. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют зависимостям $\delta_1(p)$, $\delta_2(p)$, $\delta_3(p)$. Согласно рис. 4, при всех p ошибка по-прежнему не превосходит трех процентов от величины x_2. Таким образом, для вычислений может быть использовано любое из приведенных выше значений.

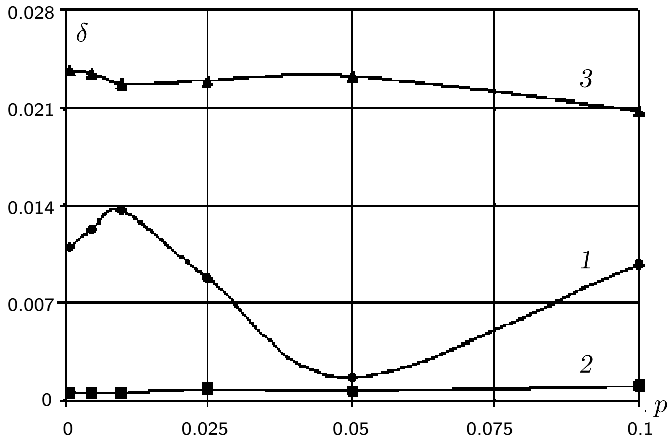
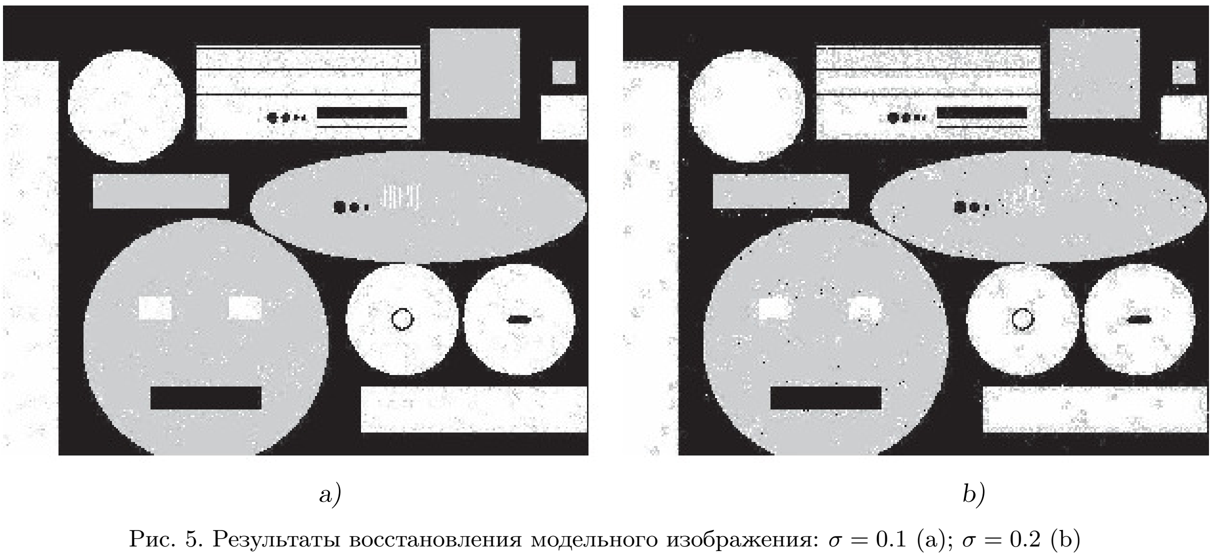


Рис. 4. Зависимости ошибки оценки яркости уровней от вероятности p

На рис. 5a и 5b представлены изображения, восстановленные предлагаемым методом. Для рис. 5a величина σ равна 0.1, т.е. реконструкция проводится из зашумленного изображения, показанного на рис. 1b. Для рис. 5b стандартное отклонение шума вдвое больше: $\sigma = 0.2$. По этим рисункам видно, что при умеренном шуме качество восстановления достаточно высокое. В частности, различимы все малоразмерные элементы, присутствующие на модельном изображении.

4. Заключение. В настоящей статье предложен метод восстановления изображений, имеющих три уровня яркости, после наложения на них аддитивного шума. При этом предполагается, что исходные яркости неизвестны. Чтобы их найти, изображение разбивается на фрагменты и для каждого проверяется гипотеза о принадлежности яркостей составляющих его пикселей к сдвинутому распределению шума. Неизвестные значения определяются путем усреднения по тем фрагментам, для которых гипотеза подтверждается. Далее, с применением двух бинарных классификаторов, все пиксели разделяются на три группы и, в соответствии с принадлежностью к определенной группе, каждому приписывается одна из найденных яркостей.

Был выполнен вычислительный эксперимент, показавший, что при умеренно интенсивном шуме ошибка оценок яркостей уровней не превосходит 3%. Проведенная классификация пикселей по уровням так же дала хороший результат. В частности, для шума со стандартным отклонением $\sigma \leqslant 0.05$ (что приблизительно соответствует 3.5% от максимальной яркости исходного изображения) число ошибочно классифицированных пикселей было менее пятисот при общем их количестве более чем 310 тысяч.



a) *b)*

Рис. 5. Результаты восстановления модельного изображения: $\sigma = 0.1$ (a); $\sigma = 0.2$ (b)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов А.А., Пахомов А.А., Никитов С.А., Гуляев Ю.В.* Новейшие методы обработки изображений. М.: Физматлит, 2008.
2. *Дабагов А.Р., Малютина И.А., Филист С.А.* Системы искусственного интеллекта для рентгенологических исследований в цифровой медицине. Курск: Университетская книга, 2019.
3. *Голубков А.М.* Бинарная классификация изображений на примере задачи распознавания лиц // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2018. № 7. 26–30.
4. *Румянцев А.А., Минязев Р.Ш., Дыганов С.А., Голованов Р.А., Перухин М.Ю.* Оценка влияния размера архитектуры нейросети на скорость обучения в задаче бинарной классификации // Вестник Технологического университета. 2018. **21**, №8. 124–127.
5. *Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989.
6. *Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А.* Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
7. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002.
8. *Карасиков М.Е., Максимов Ю.В.* Поиск эффективных методов снижения размерности при решении задач многоклассовой классификации путем ее сведения к решению бинарных задач // Машинное обучение и анализ данных. 2014. **1**, № 9. 1273–1290.
9. *Лихачев А.В.* Томографическая реконструкция области, имеющей заданное значение плотности // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**, № 4. 516–521.
10. *Лихачев А.В.* Модифицированный метод обнаружения мелких структур на зашумленных изображениях // Автометрия. 2019. **55**, № 6. 55–63.

Поступила в редакцию
2 марта 2020

Allocation of Three Brightness Levels on a Noisy Image

A. V. Likhachov[1]

[1] *Institute of Automation and Electrometry, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Senior Scientist, e-mail: ipm1@iae.nsk.su*

Received March 2, 2020

Abstract: A new recovery method for images with three unknown brightness levels is proposed. In order to determine these levels, we use the image fragments whose histograms correspond to a given noise distribution. All pixels are distributed over the found brightness levels by a binary classification. The numerical results show the error in the estimate of the original brightnesses is no more than 3%. When the noise level is relatively low, the fraction of wrong classified pixels in their total amount is less than 0.006.

Keywords: image reconstruction, verification of statistical hypotheses, binary classification.

References

1. A. A. Potapov, A. A. Pakhomov, S. A. Nikitov, and Yu. V. Gulyaev, *Novel Methods of Image Processing* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].

2. A. R. Dabagov, I. A. Malyutina, and S. A. Filist, *Artificial Intelligence Systems for X-Ray Examinations in Digital Medicine* (Universitetskaya Kniga, Kursk, 2019).

3. A. M. Golubkov, "Face Recognition Using Images Binary Classification Methods," Izv. Saint Petersburg Eletrotekh. Univ., No. 7, 26–30 (2018).

4. A. Rumyantsev, R. Minyazev, S. Dyganov, et al., “Assessment of the Influence of the Neural Network Architecture Size on the Training Rate in the Problem of Binary Classification,” Vestn. Tekhnol. Univ. **21** (8), 124–127 (2018).

5. S. A. Aivazian, V. M. Buchstaber, I. S. Yenyukov, and L. D. Meshalkin, *Applied Statistics*. Vol. 3: *Classification and Reduction of Dimensionality* (Financy i Statistika, Moscow, 1989) [in Russian].

6. I. S. Gruzman, V. S. Kirichuk, V. P. Kosykh, et al., *Digital Processing of Images in Information Systems* (Novosibirsk Gos. Tekh. Univ., Novosibirsk, 2002) [in Russian].

7. V. S. Pugachev, *Theory of Probability and Mathematical Statistics* (Nauka, Moscow, 2002) [in Russian].

8. M. E. Karasikov and Y. V. Maximov, “Dimensionality Reduction for Multi-Class Learning Problems Reduced to Multiple Binary Problems,” Mashinnoe Obuchenie Analiz Dannykh **1** (9), 1273–1290 (2014).

9. A. V. Likhachov, “Tomographic Reconstruction of a Region with a Given Density Value,” Vychisl. Metody Programm. **19**, 516–521 (2018).

10. A. V. Likhachev, “Modified Method for Detecting Small Structures in Noisy Images,” Avtometriya **55** (6), 55–63 (2019) [Optoelectr., Instrum. Data Process. **55** (6), 580–586 (2019)].