

УДК 519.6, 550.837

doi 10.26089/NumMet.v21r430

О МЕТОДЕ РАСЧЕТА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА И ЕГО МОДИФИКАЦИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

М. И. Шимелевич¹

Рассматриваются априорные оценки неоднозначности (погрешности) приближенных решений условно-корректных нелинейных обратных задач, основанные на модуле непрерывности обратного оператора и его модификациях. Установлена связь модуля непрерывности обратного оператора с разрешающей способностью геофизического метода. Показано, что в классе кусочно-постоянных решений, определенных на заданной сетке параметризации, модуль непрерывности обратного оператора и его модификации монотонно возрастают с увеличением размерности сетки. Предложен метод построения оптимальной сетки параметризации, которая имеет максимальную размерность при условии, что модуль непрерывности обратного оператора не превышает заданной величины. Представлен численный алгоритм расчета модуля непрерывности обратного оператора и его модификаций с использованием алгоритмов Монте-Карло, исследуются вопросы сходимости алгоритма. Предлагаемый метод применим также для расчета классических апостериорных оценок погрешности. Приводятся численные примеры для нелинейных обратных задач геоэлектрики.

Ключевые слова: обратная задача, модуль непрерывности оператора, априорные и апостериорные оценки, метод Монте-Карло, геоэлектрика.

1. Введение. Многие обратные задачи математической физики сводятся к решению операторного уравнения 1 рода с непрерывным оператором на компактных множествах — т.е. к решению условно-корректной задачи [1, 2]. Если известен уровень δ_0 погрешности данных, то для приближенного решения условно-корректной задачи могут быть определены априорные и апостериорные оценки погрешности. При отсутствии информации об уровне погрешности правой части (что, как правило, имеет место, например, в задачах геофизики) погрешность приближенного решения обратной задачи, в строгом смысле, определена быть не может, но возможно получение оценок *неоднозначности*, определяющих максимально возможное отклонение между приближенными решениями (квазирешениями), найденными с невязкой $\leq \delta$.

Хорошо известно, что конечно-параметрические задачи, рассматриваемые на ограниченных замкнутых подмножествах R^N с непрерывным взаимно-однозначным оператором, теоретически корректны и устойчивы. Однако при большом числе N искомых параметров такие задачи могут характеризоваться высокой степенью неоднозначности в указанном выше смысле. Наиболее распространенными *априорными оценками* степени неоднозначности являются оценки, основанные на использовании модуля непрерывности обратного оператора [1–3]. В настоящей статье показано, что модуль непрерывности обратного оператора и его локальные модификации для N -параметрической обратной задачи, рассматриваемой в классе кусочно-постоянных решений, монотонно возрастают с увеличением N . Отсюда следует неопределенность задачи: с ростом N формально растет детальность решений в заданной исследуемой области, но одновременно увеличивается степень их неоднозначности, что не позволяет надежно различать эти решения, и в итоге желаемая детальность фактически не достигается. Может быть построена *оптимальная сетка параметризации*, размерность $\bar{N}(\delta, \varepsilon)$ которой максимальна при условии, что значение модуля непрерывности (а значит, и степень неоднозначности) решений для заданного δ не превышает заданной величины ε . Предлагается метод расчета модуля непрерывности обратного оператора и его модификаций как функций параметра δ с использованием алгоритмов Монте-Карло. Рассматриваются примеры расчета модуля непрерывности и построения оптимальной сетки параметризации для обратной задачи геоэлектрики.

¹ Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, ул. Миклухо-Маклая, 23, 117997, Москва; доцент; e-mail: shimelevich-m@yandex.ru

2. Модуль непрерывности обратного оператора и его модификации. Рассмотрим операторное уравнение

$$Ag = f, \quad g \in G_1 \subset G, \quad f \in F, \tag{2.1}$$

где $G[\Omega]$, $F[\Omega_1]$ — заданные нормированные пространства искомых решений g (характеристик исследуемого объекта) и входных данных f (характеристик наблюдаемого физического поля); Ω — исследуемая пространственная область, в которой ищется решение, Ω_1 — пространственная область, в которой определены входные данные; $A: G \rightarrow F$ — непрерывный взаимно-однозначный оператор; $G_1[\Omega] \subset G[\Omega]$ — компактное подмножество. Модуль непрерывности обратного оператора $\beta(\delta)$ определяется из решения экстремальной задачи по функционалу [1, 2]:

$$\beta(\delta) = \max \{ \|g' - g\| : g, g' \in G_1, \|Ag' - Ag\| \leq \delta \}. \tag{2.2}$$

Если G_1 — выпуклое компактное множество, то функция $\beta(\delta)$ для задачи (2.1) существует и является неубывающей с ростом δ , $\beta(0) = 0$ [1].

Замечание 1.1. Если G_1 — компакт, а оператор A непрерывный и взаимно-однозначный, то для любого фиксированного $\delta > 0$ существуют элементы $g, g' \in G_1$ такие, что $\|g' - g\| = \beta(\delta)$ и $\|Ag' - Ag\| = \delta$ [3].

Пусть g_δ, g'_δ приближенные решения (2.1), полученные с невязкой $\leq \delta$ (δ -эквивалентные решения): $\|Ag_\delta - f\| \leq \delta$, $\|Ag'_\delta - f\| \leq \delta$ (не обязательно принадлежащие множеству значений оператора A), тогда из определения (2.2) и неравенства треугольника следует неравенство $\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta(2\delta)$ [1].

Функция $\beta(2\delta)$ определяет максимальный диаметр множества δ -эквивалентных решений задачи (2.1) и является оценкой степени неоднозначности, не зависящей от входных данных и находимых решений. Если известна погрешность δ_0 правой части (2.1), то величина $\beta(2\delta_0)$ представляет собой априорную оценку погрешности приближенного решения $g_\delta: \|g_\delta - g_T\| \leq \beta(2\delta_0)$, где g_T — точное решение (2.1). Иногда бывают полезны априорные оценки, “привязанные” к конкретному решению g , которые выражаются через модуль непрерывности обратного оператора $\beta(g, \delta)$ в фиксированной точке $g \in G_1$:

$$\beta(g, \delta) = \max \{ \|g' - g\| : g' \in G_1, \|Ag' - Ag\| \leq \delta \}.$$

Модуль непрерывности $\beta(g, \delta)$ позволяет априори оценить степень неоднозначности (погрешности) любого априори заданного решения $g_\delta \in G_1$ при заданной величине δ :

$$\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta(g_\delta, \delta) \leq \beta(2\delta). \tag{2.3}$$

В частности, часто используется модуль непрерывности при $g = 0$ [3, 4]. Некоторые оценки неоднозначности выражаются через модуль непрерывности $\gamma(r)$ прямого оператора A [5]:

$$\gamma(r) = \max \{ \|Ag' - Ag\| : g, g' \in G_1, \|g' - g\| \leq r \}. \tag{2.4}$$

Модуль непрерывности прямого оператора $\gamma(r)$ является непрерывной неубывающей функцией r , $\gamma(0) = 0$; он определяет чувствительность характеристик поля к изменениям характеристик объекта.

Для фиксированной правой части $f \in F$ уравнения (2.1) может быть определена апостериорная оценка степени неоднозначности фиксированного приближенного решения g_δ , найденного с невязкой, не превышающей δ [6–10]:

$$\beta_1(f, g_\delta, \delta) = \max \{ \|g' - g_\delta\| : g' \in G_1, \|Ag' - f\| \leq \delta \}. \tag{2.5}$$

При этом выполняются неравенства $\|g'_\delta - g_\delta\| \leq \beta_1(f, g_\delta, \delta) \leq \beta(2\delta)$. При $\delta = \delta_0$ величина $\beta_1(f, g_{\delta_0}, \delta_0)$ определяет классическую оценку погрешности решения g_{δ_0} [11–13].

Рассмотренные оценки неоднозначности (погрешности) решений обратных задач справедливы для условно-корректных задач на компактных подмножествах. Для получения оценок решений некорректных задач общего типа требуются иные подходы [14–18].

2.1. Локальный модуль непрерывности обратного оператора. Классический модуль непрерывности обратного оператора является скалярной величиной, которая характеризует неоднозначность приближенных решений обратной задачи интегрально по всему множеству априорных ограничений $G_1[\Omega]$

для всей исследуемой области Ω и используется в основном для предельных оценок при $\delta \rightarrow 0$. Скалярные оценки неоднозначности решений обратной задачи являются малоинформативными при решении практических задач. Например, в задачах геоэлектрики неоднозначность определения искомым параметров среды резко возрастает с глубиной вследствие затухания возбуждающего квазистационарного поля (скин-эффекта) и ослабления отклика от глубинных областей среды. В связи с этим предлагается использовать *локальный модуль непрерывности* обратного оператора $\beta^i(\delta)$, который определяет связь изменений характеристик поля с изменениями характеристик среды в пределах выделенного подмножества, ассоциированного с некоторой подобластью $\Omega_i \subset \Omega$ исследуемой области [8–10]:

$$\beta^i(\delta) = \max \{ \|g'_i - g\| : g, g'_i \in G_1, \|Ag'_i - Ag\| \leq \delta \}, \quad (2.6)$$

где $g'_i(r) = g(r) + \Delta g_i(r) \in G_1[\Omega]$, $g(r) \in G_1[\Omega]$, $\Delta g_i(r) = 0$ при $r \notin \Omega_i$.

Если $\|Ag_\delta - f\| \leq \delta$, $\|Ag'_{\delta i} - f\| \leq \delta$, где $g'_{\delta i}(r) = g_\delta(r) + \Delta g_i(r)$, то справедливо неравенство

$$\|g'_{\delta i} - g_\delta\| = \|\Delta g_i\| \leq \beta^i(2\delta).$$

Таким образом, локальный модуль непрерывности обратного оператора $\beta^i(2\delta)$ определяет априорную оценку степени неоднозначности приближенного решения задачи в подобласти Ω_i при любых значениях характеристик объекта в дополняющей области $\Omega \setminus \Omega_i$. Очевидно, что локальный модуль непрерывности по подобласти $\Omega_i \subset \Omega$ не может превышать модуля по всей области Ω :

$$\beta^i(\delta) \leq \beta(\delta). \quad (2.7)$$

Если в пределах всей области Ω выделено I подобластей Ω_i , $i = \overline{1, I}$, объединение которых составляет всю область $\Omega = \bigcup_{i=1}^I \Omega_i$, то может быть определен векторный аналог модуля непрерывности по совокупности выделенных подобластей Ω_i , $i = \overline{1, I}$, как набор локальных модулей: $\beta(\delta) = \{\beta^i(\delta)\}$, $i = \overline{1, I}$. Например, в задачах наземной геофизики, при отсутствии какой-либо специальной априорной информации, в качестве выделяемых подобластей Ω_i , $i = \overline{1, I}$, естественно выбирать наборы горизонтальных неоднородных слоев. Векторный модуль непрерывности $\beta(\delta)$ в этом случае определяет степень неоднозначности (погрешность) решений обратной задачи дифференцированно по глубине.

Аналогичным образом для подобласти $\Omega_i \subset \Omega$ определяется *локальный модуль непрерывности прямого оператора*:

$$\gamma^i(r) = \max \{ \|Ag'_i - Ag\| : g, g'_i \in G_1, \|g'_i - g\| \leq r \},$$

а также локальный аналог апостериорной оценки:

$$\beta_1^i(f, g_\delta, \delta) = \max \{ \|g'_{\delta i} - g_\delta\| : g'_{\delta i} \in G_1, \|Ag'_{\delta i} - f\| \leq \delta \}. \quad (2.8)$$

Каждая обратная задача (2.1) на заданном компактном множестве G_1 характеризуется модулем непрерывности обратного оператора $\beta(2\delta)$, большая величина которого при малых δ свидетельствует о высокой степени неоднозначности приближенных решений. В некоторых случаях в пределах компакта G_1 можно выделить подкомпакт $G'_1 \subset G_1$, на котором, при заданном значении δ , выполняется условие [8, 10]

$$\beta(G'_1, 2\delta) \leq \varepsilon, \quad (2.9)$$

где ε — заданная величина степени неоднозначности решений. Пример построения такого подкомпакта $G'_1 \subset G_1$ для конечно-параметрических задач приводится ниже в разделе 6.2.

2.2. Связь $\beta(2\delta)$ с разрешающей способностью метода. Разрешающей способностью метода (например, геофизического), связанного с уравнением (2.1), называют величину [19]

$$R(\delta) = \frac{\|Ag' - Ag\|}{\max \|g' - g\|}$$

при $\|Ag' - Ag\| = \delta$, $g, g' \in G_1$. Для задачи, линеаризованной в точке $g \in G_1$, справедлива оценка $\|g' - g\| \approx \|A_{Lg}^{-1}(Ag' - Ag)\| \leq \|A_{Lg}^{-1}\| \|(Ag' - Ag)\| = \|A_{Lg}^{-1}\| \delta$, где A_{Lg}^{-1} — обратный оператор линеаризованной задачи (предполагается существование оператора A_{Lg}^{-1}). Отсюда следует оценка разрешающей способности метода в линейном приближении в точке $g \in G_1$ [19]

$$R_1(g, \delta) \approx \frac{1}{\|A_{Lg}^{-1}\|}. \quad (2.10)$$

С помощью модуля непрерывности обратного оператора $\beta(g, 2\delta)$ в точке $g \in G_1$ понятие разрешающей способности метода может быть обобщено на нелинейный случай, без использования знания обратного оператора. В общем случае для любых данных $f \in F$ (не обязательно принадлежащих множеству значений оператора A) и любых решений g, g' , для которых $\|Ag - f\| \leq \delta, \|Ag' - f\| \leq \delta$, справедливо неравенство $\|Ag' - Ag\| \leq 2\delta$, а из него и определения $\beta(g, 2\delta)$ следует, что $\max \|g' - g\| = \beta(g, 2\delta)$. Определим разрешающую способность $R_1(g, \delta)$ в точке g в общем нелинейном случае как отношение $\frac{\|Ag'_\delta - Ag_\delta\|}{\max \|g' - g\|}$ при $\|Ag' - Ag\| = 2\delta$. Отсюда получаем

$$R_1(g, \delta) = \frac{2\delta}{\max \|g' - g\|} = \frac{2\delta}{\beta(\delta, 2\delta)}. \tag{2.11}$$

В линейном приближении в точке g для модуля непрерывности обратного оператора справедлива приближенная оценка: $\beta(g, 2\delta) \approx \|A_{Lg}^{-1}\| 2\delta$. Тогда из (2.11) следует приближенная оценка разрешающей способности для линеаризованной задачи, совпадающая с оценкой (2.10), предложенной в [19]. Так как при любых данных $f \in F$ и решениях g, g' , удовлетворяющих условиям $\|Ag - f\| \leq \delta, \|Ag' - f\| \leq \delta$, имеет место равенство $\max \|g' - g\| = \beta(2\delta)$, то полная разрешающая способность метода $R(\delta)$, в соответствии с определением, выражается через модуль непрерывности обратного оператора $\beta(2\delta)$ с помощью соотношения

$$R(\delta) = \frac{2\delta}{\beta(2\delta)}. \tag{2.12}$$

Аналогичным образом вводится *локальная разрешающая способность* на основе локального модуля непрерывности обратного оператора.

Замечание 1.2. Связь модуля непрерывности обратного оператора с разрешающей способностью метода обусловлена следующим важным его свойством. Зафиксируем $\delta > 0$. Если для заданной пары $g, g' \in G_1$ выполняется неравенство $\|g' - g\| \leq \beta(2\delta)$, то элементы g', g , согласно (2.3), могут являться δ -эквивалентными решениями уравнения (2.1) при некоторых входных данных $f \in F$. Пусть теперь $\|g' - g\| > \beta(2\delta)$, тогда g', g не могут являться δ -эквивалентными решениями при *каких-либо входных данных* $f \in F$, а значит — являются гарантированно различимыми при заданном δ (так как если предположить обратное, т.е. что существуют такие $g, g' \in G_1$, что $\|Ag - f\| \leq \delta, \|Ag' - f\| \leq \delta$ при некоторых входных данных $f \in F$, то, согласно (2.3), должно выполняться условие $\|g' - g\| \leq \beta(2\delta)$ и мы приходим к противоречию). Таким образом, величина $\beta(2\delta)$ определяет *предел разрешения метода* — минимальное расстояние между решениями g', g , начиная с которого решения перестают быть гарантированно различимыми при заданном δ . Величину, *обратную к пределу разрешения*, обычно (традиционно в оптике) называют *разрешающей способностью* метода, что и отражают приведенные выше соотношения (2.11), (2.12).

Так как разрешающая способность однозначно выражается через модуль непрерывности обратного оператора, то постановка обратной задачи (2.9) при заданной степени неоднозначности решения может трактоваться как постановка обратной задачи при заданной разрешающей способности, которая была предложена В. И. Дмитриевым [19].

3. Оценки степени неоднозначности в конечно-параметрических задачах. Наиболее распространенный на практике способ выделения компактного множества корректности основан на предварительной параметризации искомым характеристикам исследуемых объектов, что позволяет свести обратную задачу к конечномерному уравнению на ограниченном замкнутом подмножестве R^N [12, 20–22]. Этот способ является частным случаем общего подхода к решению некорректных обратных задач, когда используется априорная информация об истокорректности решения [10, 13, 14, 23].

Во многих задачах (например, геофизики) реальные физические характеристики исследуемых объектов определяются кусочно-непрерывными функциями и для их адекватного описания (аппроксимации) может использоваться сеточная (блочная, кусочно-постоянная) параметризация среды. Зададим некоторую сетку параметризации θ_{N_0} размерности N_0 , покрывающую исследуемую пространственную область Ω . Будем искать решение обратной задачи (2.1) в пространстве $G_{N_0}[\Omega] \subset G[\Omega]$ кусочно-постоянных функций, представимых в области Ω в виде суммы единичных ступенчатых финитных функций η_n , каждая

из которых отлична от нуля и равна 1 только в пределах n -й ячейки Ω_{θ_n} сетки параметризации θ_{N_0} :

$$g \in G_{N_0} : g = \Gamma_0 \mathbf{s} = \sum_1^{N_0} s^n \eta_n, \quad \mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{N_0}) \in R^{N_0}, \quad (3.1)$$

где $\eta_n(r) = 1$ при $r \in \Omega_{\theta_n}$, $\eta_n(r) = 0$ при $r \notin \Omega_{\theta_n}$, $n = \overline{1, N_0}$; $\Gamma_0: R^{N_0} \rightarrow G_{N_0}$ — линейный оператор сеточной параметризации, R^{N_0} — конечномерное пространство размерности N_0 . Функции $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{N_0}$ образуют базис в N_0 -мерном линейном нормированном пространстве $G_{N_0}[\Omega]$ и поэтому соответствие между элементами $\mathbf{s} \in R^{N_0}$ и $g \in G_{N_0}$, устанавливаемое оператором параметризации Γ_0 , является взаимно-однозначным и взаимно-непрерывным [24]. Проекции вектора $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{N_0})$ параметров в (3.1) равны значениям искомой физической характеристики g в ячейках заданной сетки параметризации θ_{N_0} и изменяются в конечных пределах, определяемых на основе априорных ограничений. Пусть $s^n \in [0, D_s]$, $n = \overline{1, N_0}$, где D_s — заданная величина; и обозначим через $S_{N_0} \subset R^{N_0}$ замкнутое множество, порожденное сеткой параметризации θ_{N_0} и априорными ограничениями:

$$S_{N_0} = \left\{ \mathbf{s} : \mathbf{s} \in R^{N_0}, s^n \in [0, D_s], n = \overline{1, N_0} \right\}. \quad (3.2)$$

Множеству $S_{N_0} \subset R^{N_0}$ соответствует компактное множество $\bar{G}_{N_0} = \Gamma_0 S_{N_0} \subset G_{N_0}$ в пространстве кусочно-постоянных функций. Таким образом, при заданных априорных ограничениях (3.2), кусочно-постоянное решение исходной задачи (2.1) ищется в пределах множества \bar{G}_{N_0} . Следуя [13] и подставляя представление $g = \Gamma_0 \mathbf{s}$ в уравнение (2.1), получаем новое операторное уравнение относительно вектора параметров $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{N_0})$:

$$A_0 \mathbf{s} = f, \quad \mathbf{s} \in S_{N_0} \subset R^{N_0}, f \in F. \quad (3.3)$$

Оператор новой задачи $A_0 = A\Gamma_0: R^{N_0} \rightarrow F$ является непрерывным и взаимно-однозначным [13], задача (3.3) является корректной. Решения уравнения (3.3) на множестве S_{N_0} и структура сетки параметризации θ_{N_0} однозначно определяют решения исходного уравнения на множестве \bar{G}_{N_0} кусочно-постоянных функций. При этом дополнительный пересчет фактически не обязателен, так как величины s^1, \dots, s^{N_0} являются значениями искомой физической характеристики g в ячейках заданной сетки параметризации θ_{N_0} и имеют самостоятельный физический смысл.

Для исследователя, решающего обратную задачу, желательно использовать сетку параметризации максимальной размерности. Чем больше N_0 , тем точнее может быть аппроксимирована искомая характеристика исследуемого объекта с помощью суммы (3.1) и тем большая детальность определения свойств объекта может быть достигнута в результате решения обратной задачи (3.3). Однако если при заданных значениях N_0, δ степень неоднозначности решений задачи (3.3) окажется слишком большой, то полученная в этом случае максимальная детальность решений фактически лишена практического смысла вследствие большой неопределенности решений. Исходя из физических соображений, можно ожидать, что при укрупнении сетки параметризации (за счет уменьшения ее размерности $N < N_0$ при фиксированных размерах области Ω) степень неоднозначности решений уменьшится, так как увеличится чувствительность физического поля, наблюдаемого на границе $\partial\Omega_1$ области, к изменениям свойств объекта в укрупненных ячейках сетки. Ниже показывается, что при использовании сеток θ_N параметризации меньшей размерности $N < N_0$ в пределах множества S_{N_0} можно выделить подмножества $S_N \subset S_{N_0}$, на которых априорные оценки степени неоднозначности решений будут меньше, чем для исходной сетки θ_{N_0} . Понятно, что при этом теряется детальность исследования свойств объекта, поэтому представляется целесообразным решение задачи построения оптимальной сетки параметризации [8–10], имеющей максимальную размерность при заданной степени неоднозначности в соответствии с (2.9).

3.1. Зависимость $\beta(N, \delta)$ от размерности N сетки параметризации. Определим некоторую опорную сетку параметризации θ_{N_0} достаточно большой размерности N_0 для рассматриваемого класса задач (в качестве такой сетки может быть использована, например, конечно-разностная сетка прямой задачи, обеспечивающая ее корректную разрешимость). На основе опорной сетки θ_{N_0} построим новую сетку параметризации θ_{N_1} , $N_1 = N_0 - 1$, у которой n -я и $(n+1)$ -я ячейки объединены в одну, а остальные ячейки совпадают с ячейками сетки θ_{N_0} . Объединение n -й и $(n+1)$ -й ячеек опорной сетки в одну ячейку новой сетки эквивалентно тому, что в представлении (3.1) коэффициенты, соответствующие объединенным ячейкам, одинаковы: $s^n = s^{n+1}$. Новая сетка θ_{N_1} параметризации порождает новое множество S_{N_1}

априорных ограничений задачи (3.3)

$$S_{N_1} = \left\{ \mathbf{s} : \mathbf{s} \in R^{N_0}, s^n \in [0, D_s], n = \overline{1, N_0}, s^n = s^{n+1} \right\}. \quad (3.4)$$

Из сравнения (3.2) и (3.4) следует, что за счет дополнительных ограничений $s^n = s^{n+1}$ множество S_{N_1} является подмножеством множества S_{N_0} :

$$S_{N_1} \subset S_{N_0} \subset R^{N_0}, \quad N_1 = N_0 - 1. \quad (3.5)$$

Модули непрерывности обратного оператора $\beta(N_0, \delta)$, $\beta(N_1, \delta)$ для уравнений вида (3.3), рассматриваемых на множествах S_{N_0} , S_{N_1} , согласно общему определению (2.2), являются решениями экстремальных задач

$$\beta(N_0, \delta) = \max \{ \| \mathbf{s}' - \mathbf{s} \| : \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S_{N_0}, \| A_0 \mathbf{s}' - A_0 \mathbf{s} \| \leq \delta \}, \quad (3.6)$$

$$\beta(N_1, \delta) = \max \{ \| \mathbf{s}' - \mathbf{s} \| : \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S_{N_1}, \| A_0 \mathbf{s}' - A_0 \mathbf{s} \| \leq \delta \}. \quad (3.7)$$

Задачи (3.6) и (3.7) отличаются множествами S_{N_0} , S_{N_1} , на которых ищется максимум функционала $\| \mathbf{s}' - \mathbf{s} \|$; при этом, согласно (3.5), $S_{N_1} \subset S_{N_0} \subset R^{N_0}$, откуда следует неравенство:

$$\beta(N_0, \delta) \geq \beta(N_1, \delta), \quad N_1 = N_0 - 1. \quad (3.8)$$

Замечание 3.1. При объединении ячеек опорной сетки θ_{N_0} число независимых элементов в представлении (3.1), а значит, и фактическая размерность векторов множества S_{N_1} (за счет условия $s^n = s^{n+1}$) равна размерности $N_1 = N_0 - 1$ сетки параметризации θ_{N_1} , порождающей это множество. Но при этом, так как S_{N_1} является подмножеством R^{N_0} , то для его элементов $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{N_0}) \in S_{N_1} \subset R^{N_0}$ определена заданная норма в R^{N_0} , а принадлежность элементов из R^{N_0} к множеству S_{N_1} обеспечивается условием $s^n = s^{n+1}$. Аналогичным образом дело обстоит и в том случае, когда объединяется несколько ячеек исходной сетки параметризации и соответственно уменьшается фактическая размерность получаемого подмножества решений.

Неравенство типа (3.8) справедливо для любой пары задач вида (3.3), рассматриваемых на множествах, порождаемых сетками, построенными по указанному выше принципу при любом числе объединяемых ячеек. Обозначим через $\Theta(N_0)$ конечный упорядоченный набор сеток параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta(N_0)$, $k = \overline{0, K}$, размерностей $N_0 > N_1 > \dots > N_k > \dots > N_K$, покрывающих исследуемую область Ω , в котором каждая $(k + 1)$ -я сетка образуется путем объединения (по какому-либо заданному правилу) некоторого числа ячеек k -й сетки в одну ячейку новой сетки (сетка θ_{N_0} размерности N_0 совпадает с исходной опорной сеткой). Данный принцип объединения ячеек сеток параметризации далее будем называть *основным*.

Рассуждая по аналогии с предыдущим, обозначим через S_{N_k} , $S_{N_{k+1}} \subset R^{N_0}$, $k = \overline{0, K}$, множества корректности задачи (3.3), порождаемые сетками параметризации θ_{N_k} , $\theta_{N_{k+1}} \in \Theta(N_0)$:

$$S_{N_k} = \left\{ \mathbf{s} : \mathbf{s} \in S_{N_k} \subset R^{N_k} \subset R^{N_0}, s^n \in [0, D_s], n = \overline{1, N_0} \right\},$$

$$S_{N_{k+1}} = \left\{ \mathbf{s} : \mathbf{s} \in S_{N_{k+1}} \subset R^{N_{k+1}} \subset R^{N_0}, s^n \in [0, D_s], n = \overline{1, N_0} \right\}, \quad N_{k+1} < N_k.$$

Каждая $(k + 1)$ -я сетка $\theta_{N_{k+1}}$ образуется путем объединения некоторого числа ячеек k -й сетки θ_{N_k} в одну ячейку, а это, как отмечалось выше, эквивалентно тому, что в представлении (3.1), порождаемом новой сеткой $\theta_{N_{k+1}}$, возрастает число членов с одинаковыми коэффициентами, что, в свою очередь, приводит к дополнительным ограничениям на коэффициенты s^n при формировании множества $S_{N_{k+1}}$ и, как следствие, к уменьшению фактической его размерности и сужению:

$$S_{N_{k+1}} \subset S_{N_k} \subset R^{N_0}, \quad N_{k+1} < N_k.$$

Лемма 1. Рассмотрим семейство обратных задач (3.3) на множествах $S_{N_k} \subset R^{N_0}$, $k = \overline{0, K}$, порождаемых сетками параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta(N_0)$. Справедливы следующие неравенства:

$$\beta(N_0, \delta) \geq \beta(N_1, \delta) \geq \dots \geq \beta(N_k, \delta) \geq \dots \geq \beta(N_K, \delta) \geq \beta(1, \delta),$$

$$N_0 > N_1 > \dots > N_k > \dots > N_K \geq 1, \quad (3.9)$$

где $\beta(N_k, \delta)$, $k = \overline{0, K}$, — модули непрерывности обратных операторов для рассматриваемого семейства задач, $\beta(1, \delta)$ — модуль непрерывности обратного оператора задачи (3.3), рассматриваемой на сетке параметризации размерности $N = 1$, у которой все ячейки опорной сетки объединены в одну, совпадающую со всей областью Ω .

Доказательство. Из вышеприведенных рассуждений следует, что множества S_{N_k} , порождаемые сетками $\theta_{N_k} \in \Theta(N_0)$, $k = \overline{0, K}$, образуют цепочку компактных подмножеств S_{N_k} , каждое из которых является подмножеством предыдущего:

$$S_{N_0} \supset S_{N_1} \supset \dots \supset S_{N_k} \supset \dots \supset S_{N_K}, \quad N_0 > N_1 > \dots > N_k > \dots > N_K \geq 1.$$

Для задач вида (3.3) на множествах S_{N_k} , $k = \overline{0, K}$, могут быть определены модули непрерывности обратных операторов $\beta(N_k, \delta)$, $k = \overline{0, K}$. Так как $S_{N_k} \supset S_{N_{k+1}}$, то, по аналогии с (3.8), для любой пары уравнений (3.3), рассматриваемых на множествах S_k, S_{k+1} , справедливо неравенство $\beta(N_k, \delta) \geq \beta(N_{k+1}, \delta)$, откуда следует утверждение леммы 1.

Следствие из леммы 1. Из (3.9) следует, что с уменьшением размерности сетки параметризации не возрастают априорные оценки неоднозначности (погрешности) решений, определяемые, согласно (2.3), величинами $\beta(N_k, 2\delta)$, $k = \overline{0, K}$.

Замечание 3.2. Каждая сетка параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta(N_0)$, покрывающая исследуемую область Ω , с учетом априорных ограничений порождает компактное подмножество $S_{N_k} \subset R^{N_0}$, которому соответствует подмножество $\bar{G}_{N_k} = \Gamma_0 S_{N_k} \subset \bar{G}_{N_0}$ в пространстве $G_{N_0}[\Omega]$ кусочно-постоянных функций вида (3.1). Так как при $N_{k+1} < N_k$ возрастает число членов с одинаковыми коэффициентами в представлении (3.1), то уменьшение размерности сетки параметризации приводит к снижению фактической размерности и сужению множества $\bar{G}_{N_{k+1}}: \bar{G}_{N_{k+1}} \subset \bar{G}_{N_k}$. Отсюда следует, что множества $\bar{G}_{N_k}[\Omega]$ кусочно-постоянных функций, порождаемые сетками параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta(N_0)$, также образуют цепочку сужающихся компактных подмножеств

$$\bar{G}_{N_0} \supset \bar{G}_{N_1} \supset \dots \supset \bar{G}_{N_k} \supset \dots \supset \bar{G}_{N_K}, \quad N_0 > N_1 > \dots > N_k > \dots > N_K \geq 1.$$

Соответственно, исходная обратная задача (2.1) при использовании сеток параметризации $\theta_{N_k} \in \Theta(N_0)$, $k = \overline{0, K}$, рассматривается на последовательности сужающихся компактов $\bar{G}_{N_k} \subset \bar{G}_{N_0}$, $k = \overline{0, K}$, а модули непрерывности обратных операторов $\bar{\beta}(N_k, \delta)$ соответствующих задач при уменьшении размерности сетки параметризации не возрастают (аналогично (3.9)):

$$\bar{\beta}(N_0, \delta) \geq \bar{\beta}(N_1, \delta) \geq \dots \geq \bar{\beta}(N_k, \delta) \geq \dots \geq \bar{\beta}(N_K, \delta), \quad N_0 > N_1 > \dots > N_k > \dots > N_K \geq 1.$$

В дальнейшем мы ограничимся исследованием оценок и свойств модулей непрерывности $\beta(N_k, \delta)$ и их модификаций для задачи (3.3), рассматриваемой в пространстве параметров R^{N_0} .

Замечание 3.3. Утверждение (3.9) леммы 1 означает, что увеличение детальности решений N может быть достигнуто ценой увеличения степени их неоднозначности $\beta(N, 2\delta)$ (уменьшения разрешающей способности метода $R(N, \delta)$), что фактически не приводит к желаемому результату: *детальные решения оказываются неразличимыми*. Таким образом, имеет место неопределенность N -параметрической

обратной задачи (3.3), которую можно охарактеризовать условием $\frac{N}{\beta(N, 2\delta)} \leq c$, где c — коэффициент

неопределенности задачи при заданном значении δ . Если $c < 1$, то степень неоднозначности $\beta(N, 2\delta)$ решений растет быстрее, чем увеличивается их детальность N . Указанное условие определяет степень неопределенности задачи (3.3) в целом по всему множеству решений $s \in S_N$. Степень неопределенности конкретного решения $s_0 \in S_N$ выражается через модуль непрерывности обратного оператора в точке

$\frac{N}{\beta(N, 2\delta, s_0)} \leq c(s_0)$. В частном случае для задачи, линеаризованной в точке s_0 , условие неопределенности

выражается через норму линеаризованного обратного оператора [19].

Можно показать, что неравенства, аналогичные (3.9), выполняются также для локального модуля непрерывности (2.6):

$$\beta^i(N_0^i, \delta) \geq \beta^i(N_1^i, \delta) \geq \dots \geq \beta^i(N_k^i, \delta) \geq \dots \geq \beta^i(N_K^i, \delta) \geq \beta^i(1, \delta),$$

$$N_0^i > N_1^i > \dots > N_k^i > \dots > N_K^i \geq 1, \quad (3.10)$$

где N_0^i — число ячеек опорной сетки θ_{N_0} параметризации, покрывающих выделенную подобласть Ω_i ; N_k^i — число ячеек k -й сетки параметризации, покрывающих выделенную подобласть Ω_i ; $\beta^i(N_k^i, \delta)$, $k = \overline{0, K}$, — локальные модули непрерывности обратных операторов по подобласти Ω_i , определенные для соответствующего семейства задач; $\beta^i(1, \delta)$ — локальный модуль непрерывности обратного оператора, соответствующий сетке параметризации, у которой все ячейки опорной сетки, расположенные в подобласти Ω_i , объединены в одну ячейку, совпадающую с подобластью Ω_i .

Для локальных апостериорных оценок неоднозначности вида (2.8) также справедливы неравенства, аналогичные (3.9), (3.10).

3.2. Оптимальная сетка параметризации. Зададим некоторое ν -е правило построения набора $\Theta_\nu(N_0)$ сеток параметризации, построенных в соответствии с указанным выше (*основным*) принципом объединения ячеек. На основе свойства (3.9) может быть решена задача построения оптимальной сетки $\bar{\theta}_{\bar{N}}(\delta, \varepsilon) \in \Theta_\nu(N_0)$, которая имеет максимальную размерность $\bar{N}(\delta, \varepsilon)$ при условии

$$\beta(\bar{N}, 2\delta) \leq \varepsilon, \tag{3.11}$$

где ε, δ — заданные величины. Размерность $\bar{N}(\delta, \varepsilon)$ оптимальной сетки является решением целочисленной экстремальной задачи

$$\bar{N}(\delta, \varepsilon) = \max \{N : \beta(N, 2\delta) \leq \varepsilon, \quad N \leq N_0\}. \tag{3.12}$$

Замечание 3.4. Решая обратную задачу на оптимальной сетке параметризации, мы получаем решения с максимально возможной детальностью \bar{N} при заданной степени их неоднозначности $\beta(\bar{N}, 2\delta)$ (заданной разрешающей способности $R(\delta) = 2\delta/\beta(\bar{N}, 2\delta)$).

Требование (3.12) можно ослабить и в качестве критерия оптимальности сетки использовать ограничение на локальные модули непрерывности $\beta^i(N, 2\delta)$, определяемые для подобластей $\Omega_i, i = \overline{1, I}, \bigcup_{i=1}^I \Omega_i = \Omega$, совпадающих со слоями $\theta_i, i = \overline{1, I}$, конструируемой сетки параметризации. Потребуем, чтобы каждый слой $\theta_i = \Omega_i$ новой сетки параметризации содержал максимальное число \bar{N}^i ячеек, при условии

$$\beta^i(\bar{N}^i, 2\delta) \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, I}. \tag{3.13}$$

Отметим, что из (3.11), согласно (2.7), следует (3.13). Максимальная размерность $\bar{N}^i(\delta, \varepsilon)$ для i -го слоя новой сетки параметризации при условии (3.13) определяется решением целочисленной экстремальной задачи

$$\bar{N}^i(\delta, \varepsilon) = \max \{N^i : \beta^i(N^i, 2\delta) \leq \varepsilon, \quad N^i \leq N_0^i\}, \tag{3.14}$$

где N_0^i — число узлов опорной сетки, расположенных в выделенной подобласти $\Omega_i = \theta_i$.

Из свойств (3.9), (3.10) следует, что модули непрерывности $\beta(N, 2\delta), \beta^i(N^i, 2\delta)$ монотонно убывают при уменьшении N, N^i соответственно, откуда вытекает существование и единственность решения задач (3.12), (3.14), если ε задается в пределах интервалов допустимых значений $\beta(N, 2\delta), \beta^i(N^i, 2\delta)$.

Замечание 3.5. Задачу построения оптимальной сетки параметризации можно трактовать как дополнительную адаптивную “практическую регуляризацию” условно-корректной обратной задачи, основанную на свойствах используемого поля: роль “стабилизаторов” выполняют функционалы $\beta(N, 2\delta), \beta^i(N, 2\delta)$, а “параметром регуляризации” является величина N размерности сетки параметризации. Оптимальную сетку $\bar{\theta}_{\bar{N}}(\delta, \varepsilon)$ можно назвать регуляризованной сеткой параметризации. Например, для квазистационарных электромагнитных полей, возбуждаемых вертикально падающей плоской волной, наиболее сильное поглощение поля происходит с глубиной. В этом случае регуляризованная сетка параметризации, построенная по указанному принципу, должна укрупняться с глубиной [8, 10].

4. Метод расчета модуля непрерывности и его модификаций на основе алгоритмов Монте-Карло. В работах [1, 3, 25, 26] и ряде других работ получены оценки модуля непрерывности обратного оператора в явном виде для некоторых нелинейных задач. В настоящей работе предлагается численный метод расчета модуля непрерывности прямого и обратного операторов и их модификаций, как функций параметра δ , для нелинейного операторного уравнения (3.3), рассматриваемого на подмножестве $S_N \subseteq S_{N_0} \subset R^{N_0}$ [27], порождаемом заданной сеткой параметризации $\theta_N \in \Theta(N_0)$ размерности $N \leq N_0$ (см. Замечание 3.1):

$$S_N = \left\{ \mathbf{s} : \mathbf{s} \in R^N, \quad s^n \in [0, D_s], \quad n = \overline{1, N} \right\}. \tag{4.1}$$

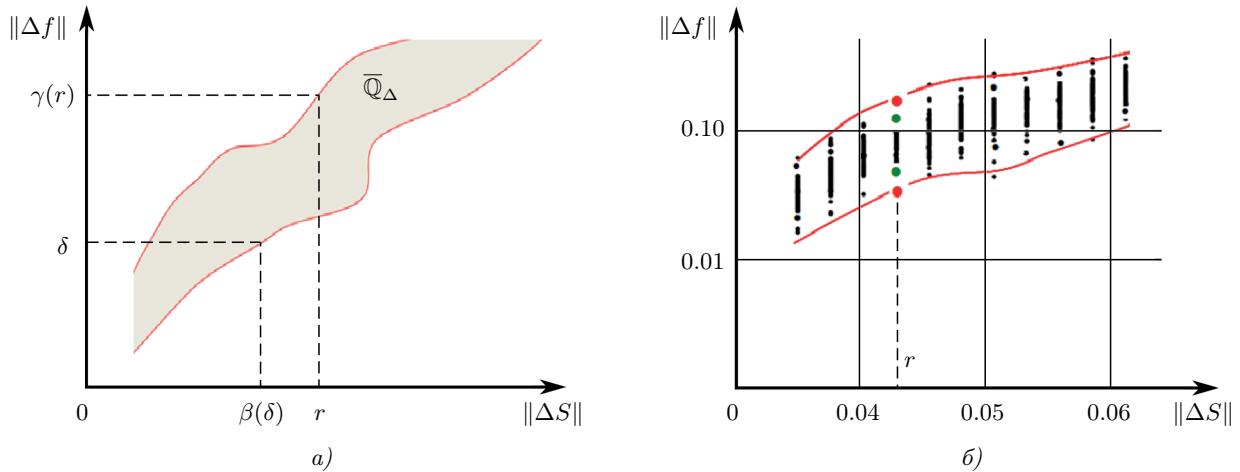


Рис. 1. Схематическая иллюстрация получения оценок $\beta(N, \delta)$, $\gamma(N, r)$ на основе множества \bar{Q}_Δ ; а) схематическое представление множества \bar{Q}_Δ ; б) фрагмент численно построенного (имитирующего) множества $\tilde{Q}_\Delta \subset \bar{Q}_\Delta$ для задачи геоэлектрики; красным цветом обозначены крайние точки вертикального сечения множества \tilde{Q}_Δ при $\|\Delta s\| = r$, зеленым цветом обозначены квантили по порогу значимости $\eta = 0.05$ (см. п. В.3 алгоритма)

Классический модуль непрерывности обратного оператора для задачи (3.3) на множестве (4.1) определяется решением нелинейной экстремальной задачи по функционалу:

$$\beta(N, \delta) = \max \{ \|s' - s\| : s, s' \in S_N, \|A_0 s' - A_0 s\| \leq \delta \}. \tag{4.2}$$

Перепишем (4.2) в эквивалентном виде:

$$\beta(N, \delta) = \max \left\{ \|\Delta s\| : \|\Delta f(s, \Delta s)\| \leq \delta, s \in S_N, \Delta s \in \hat{S}_N, s + \Delta s \in S_N \right\}, \tag{4.3}$$

где $\Delta s = s' - s$, $\Delta f(s, \Delta s) = A_0(s + \Delta s) - A_0 s$; $\hat{S}_N \subset R^N$ — множество векторов $\Delta s = (\Delta s^1, \dots, \Delta s^N)$:

$$\hat{S}_N = \left\{ \Delta s : \Delta s \in R^N, s^n \in [-D_s, D_s], n = \overline{1, N} \right\}. \tag{4.4}$$

Из (4.3) следует, что величина $\beta(N, \delta)$ при любом фиксированном δ определяется соотношением пары скалярных величин $\|\Delta s\|$ и $\|\Delta f(s, \Delta s)\|$, принимающих различные значения при всех допустимых изменениях $s, \Delta s$, определяемых в (4.3), (4.4). Каждую пару величин $\|\Delta s\|, \|\Delta f(s, \Delta s)\|$ можно рассматривать как точку $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|)$ в пространстве $R^2 : (\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \leftrightarrow \xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in R^2$. Точки $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|)$ при всех возможных изменениях $s, \Delta s$ образуют некоторое множество $\bar{Q}_\Delta \subset R^2$:

$$\bar{Q}_\Delta = \left\{ \xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{Q}_\Delta : s \in S_N, \Delta s \in \hat{S}_N, s + \Delta s \in S_N \right\}. \tag{4.5}$$

Множество \bar{Q}_Δ схематически представлено на рис. 1 а, где красным цветом обозначены *огбающие* множества \bar{Q}_Δ — *кривые, за пределами которых точки множества отсутствуют*. Конфигурация множества \bar{Q}_Δ отражает степень зависимости изменений откликов поля $\|\Delta f(s, \Delta s)\|$ от изменений $\|\Delta s\|$ параметров объекта. При тесной зависимости этих величин наблюдается “узость” и “вытянутость” множества \bar{Q}_Δ под некоторым углом к горизонтальной оси. Чем больше угол, тем в среднем лучше обусловленность задачи и меньше неоднозначность приближенных решений. При малых углах большим изменениям $\|\Delta s\|$ параметров могут соответствовать изменения откликов $\|\Delta f(s, \Delta s)\|$ меньше уровня погрешности данных, из-за чего задача (3.3), будучи теоретически корректной, является фактически неопределенной и неустойчивой. Фрагмент численно построенного (имитирующего) множества $\tilde{Q}_\Delta \subset \bar{Q}_\Delta$ для задачи геоэлектрики (см. также раздел 6.2) представлен на рис. 1 б.

Отвлекаясь от природы величин $\|\Delta s\|, \|\Delta f\|$, предположим, что мы умеем строить множество $\bar{Q}_\Delta \subset R^2$. Проблема нахождения $\beta(N, \delta)$ на множестве \bar{Q}_Δ , согласно (4.3), заключается в том, чтобы среди точек $\xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{Q}_\Delta$, ординаты которых удовлетворяют условию $\|\Delta f\| \leq \delta$, найти точку (возможно не единственную) с максимальной абсциссой (рис. 1 а):

$$\beta(N, \delta) = \max \left\{ \|\Delta s\| : \|\Delta f(s, \Delta s)\| \leq \delta, \xi(\|\Delta s\|, \|\Delta f\|) \in \bar{Q}_\Delta \right\}. \tag{4.6}$$

Существование хотя бы одной такой точки следует из существования модуля непрерывности $\beta(N, \delta)$ обратного оператора для задачи (3.3) (см. Замечание 1.1). Возможные участки вертикального изменения нижней огибающей, показанные на рис. 1 а, отражают свойство нестрогого возрастания $\beta(N, \delta)$ с ростом δ .

Модуль непрерывности $\gamma(N, r)$ прямого оператора для задачи (3.3) на множестве (4.1), в соответствии с общим определением (2.4), является решением нелинейной экстремальной задачи по функционалу:

$$\gamma(N, r) = \max \{ \|A_0 \mathbf{s}' - A_0 \mathbf{s}\| : \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S_N, \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\| \leq r \}. \quad (4.7)$$

Задача (4.7), по аналогии с предыдущим, преобразуется к задаче на множестве \tilde{Q}_Δ :

$$\gamma(N, r) = \max \{ \|\Delta f(\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s})\| : \|\Delta \mathbf{s}\| \leq r, \xi(\|\Delta \mathbf{s}\|, \|\Delta f\|) \in \tilde{Q}_\Delta \}. \quad (4.8)$$

Схема получения величины $\gamma(N, r)$ при заданном $\|\Delta \mathbf{s}\| = r$ показана на рис. 1 а. Возможные горизонтальные участки верхней огибающей отражают свойство неубывания $\gamma(N, r)$ с ростом r .

При рассматриваемом подходе численный метод расчета характеристик $\beta(N, \delta)$, $\gamma(N, \delta)$ заключается в следующем: сначала во всем диапазоне допустимых изменений \mathbf{s} , $\Delta \mathbf{s}$ с помощью прямого оператора задачи (3.3) моделируется имитирующее множество $\tilde{Q}_\Delta \subset Q_\Delta$ и проводятся его огибающие, а затем решаются задачи (4.6), (4.8) получения оценок функций $\beta(N, \delta)$, $\gamma(N, r)$ для любых заданных значений δ , r в соответствии со схемой, указанной на рис. 1 а. Алгоритм построения множества \tilde{Q}_Δ в своей основе опирается на решения экстремальных задач определения точек множества Q_Δ с минимальной $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ и максимальной $\Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ ординатами при фиксированном $\|\Delta \mathbf{s}\|$:

$$\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|) = \min_{\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s}} \{ \|\Delta f(\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s})\| : \mathbf{s} \in S_N, \Delta \mathbf{s} \in \hat{S}_N, \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s} \in S_N, \|\Delta \mathbf{s}\| = r \}, \quad (4.9)$$

$$\Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|) = \max_{\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s}} \{ \|\Delta f(\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s})\| : \mathbf{s} \in S_N, \Delta \mathbf{s} \in \hat{S}_N, \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s} \in S_N, \|\Delta \mathbf{s}\| = r \}. \quad (4.10)$$

Задачи (4.9), (4.10) решаются методом Монте-Карло. При любом фиксированном $\|\Delta \mathbf{s}\| = r$ точки множества Q_Δ вне отрезка $[\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|), \Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|)]$ отсутствуют, поэтому совокупность точек $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$, $\Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ при различных $\|\Delta \mathbf{s}\|$ образуют нижнюю и верхнюю огибающие множества Q_Δ , свойства которых рассмотрены ниже (раздел 5.1).

Представленный метод расчета классического модуля непрерывности с несущественными отличиями применим также для расчета локальных модулей (2.6), а также для расчета апостериорных оценок неоднозначности (2.5) решений обратных задач в конечно-параметрических классах.

Для задачи (3.3) на множестве (4.1) зададим нормы в пространстве решений R^{N_0} (см. Замечание 3.1) и в пространстве данных $F = L_{2,b}(\Omega_1)$:

$$\|\mathbf{s}\|_0 = \frac{1}{D_s} \cdot \max_{n=1, N_0} |s^n|; \quad \|f\|_{L_{2,b}[\Omega_1]} = \left[\sum_{m=1}^{M_1} \left(b_m \|f_m\|_{L_2[\Omega_1]} \right)^2 \right]^{1/2},$$

где f_m , $m = \overline{1, M_1}$, — набор используемых характеристик физического поля, b_m — веса используемых характеристик поля, которые подбираются с учетом физики задачи таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\|f\|_{L_{2,b}[\Omega_1]} \leq 1$. Для векторов параметров, принадлежащих множеству S_N (4.1), в пространстве решений R^{N_0} также выполняется неравенство для нормы: $\|\mathbf{s}\|_0 \leq 1$, $\mathbf{s} \in S_N$. При указанных нормах абсциссы и ординаты точек $\xi(\|\Delta \mathbf{s}\|, \|\Delta f\|)$ множества Q_Δ изменяются в пределах: $0 \leq \|\Delta \mathbf{s}\| \leq 1$, $\mathbf{s} \in S_N$ (при этом $0 \leq \beta(N, \delta) \leq 1$); $0 \leq \|\Delta f\| \leq 2$.

4.1. Схема алгоритма.

A. Построение имитирующего множества в соответствии с (4.5):

$$\tilde{Q}_\Delta = \left\{ \xi_q(\|\Delta \mathbf{s}_q\|, \|\Delta f_q\|) \in \tilde{Q}_\Delta : \mathbf{s}_q \in S_N, \Delta \mathbf{s}_q \in \hat{S}_N, \mathbf{s}_q + \Delta \mathbf{s}_q \in S_N \right\}, \quad q = \overline{1, Q}. \quad (4.11)$$

A.1. Задается сетка $r_1, \dots, r_\nu, \dots, r_{Q_2} \in [0, 1]$ значений величины $\|\Delta \mathbf{s}\|$: $\|\Delta \mathbf{s}\| = r_\nu$, $\nu = \overline{1, Q_2}$. При использовании нормы $\|\mathbf{s}\|_0 = \frac{1}{D_s} \cdot \max_{n=1, N_0} |s^n|$, требование $\|\Delta \mathbf{s}\| = r_\nu$ выполняется при условиях

$$(|\Delta s^n| \leq r_\nu D_s)^*, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.12)$$

где условие, помеченное звездочкой ($|x^{N+n}| \leq rD_s$)^{*} означает, что хотя бы для одной из проекций выполняется равенство $|\Delta s^n| = rD_s$, что обеспечивает выполнение требования $\|\Delta \mathbf{s}\| = r$.

А.2. Для каждого r_ν с помощью численного прямого оператора \tilde{A}_0 задачи (3.3) методом Монте-Карло строится подмножество $\tilde{Q}_{\Delta\nu}$ точек (рис. 1 б)

$$\xi_{q\nu}(\|\Delta \mathbf{s}_{q\nu}\|, \|\Delta f_{q\nu}\|) \in \tilde{Q}_{\Delta\nu}, \quad q = \overline{1, Q_1}, \quad \|\Delta \mathbf{s}_{q\nu}\| = r_\nu,$$

где $\Delta f_{q\nu} = \tilde{A}_0(\mathbf{s}_{q\nu} + \Delta \mathbf{s}_{q\nu}) - \tilde{A}_0 \mathbf{s}_{q\nu}$, $\mathbf{s}_{q\nu} \in S_N$, $\Delta \mathbf{s}_q \in \hat{S}_N$, $q = \overline{1, Q_1}$. Проекции $\mathbf{s}_{q\nu}$, $\Delta \mathbf{s}_{q\nu}^n$, $n = \overline{1, \bar{N}}$, векторов $\mathbf{s}_{q\nu}$, $\Delta \mathbf{s}_{q\nu}$ меняются независимо случайным образом с равномерной плотностью в границах, определяемых условиями $s^n \in [0, D_s]$, $|\Delta s^n| \leq r_\nu D_s$, $n = \overline{1, \bar{N}}$, соответственно. Пары векторов $\mathbf{s}_{q\nu}$, $\Delta \mathbf{s}_{q\nu}$, для которых условие $\mathbf{s}_{q\nu} + \Delta \mathbf{s}_{q\nu} \in S_N$ в (4.11), а также условие (4.12) не выполняются, отбрасываются. Объединение всех подмножеств $\tilde{Q}_{\Delta\nu}$ образует имитирующее множество $\tilde{Q}_\Delta = \bigcup_\nu \tilde{Q}_{\Delta\nu}$; общее число точек в \tilde{Q}_Δ равно $Q = Q_1 \cdot Q_2$.

В. Вычисление функций $\beta(N, \delta)$, $\gamma(N, \delta)$.

В.1. Для каждого r_ν определяются точки подмножества $\tilde{Q}_{\Delta\nu}$ с минимальной $\Delta_{\min}(r_\nu) = \left\| \Delta \tilde{f}_\nu \right\|_{\min}$ и максимальной $\Delta_{\max}(r_\nu) = \left\| \Delta \tilde{f}_\nu \right\|_{\max}$ ординатами (рис. 1 б) и затем, с помощью интерполяционных процедур, через все эти точки проводятся нижняя $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ и верхняя $\Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ огибающие для всего имитирующего множества \tilde{Q}_Δ .

В.2. Для любых заданных значений δ , r согласно (4.6), (4.8) (схема на рис. 1 а) определяются приближенные значения функций $\beta(N, \delta)$, $\gamma(N, r)$.

В.3. При получении оценок модулей непрерывности целесообразно отбрасывать маловероятные точки имитирующего множества \tilde{Q}_Δ . Для этого по каждой ν -й группе $\tilde{Q}_{\Delta\nu}$ точек строится эмпирическая функция распределения $\hat{F}(\Delta)$ случайной величины $\Delta = \|\Delta f\|$, на основании которой по заданному порогу значимости η находятся квантили Δ_{η_1} , Δ_{η_2} уровней значимости $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = 1 - \eta$, определяющие точки *нижней* $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ и *верхней* $\Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ огибающих при $\|\Delta \mathbf{s}\| = r_\nu$ с учетом порога значимости (зеленые точки на рис. 1 б для порога значимости $\eta = 0.05$).

Замечание 4.1. Огибающие имитирующего множества \tilde{Q}_Δ можно не проводить, тогда оценки $\beta(N, \delta)$, $\gamma(N, \delta)$ могут быть получены при значениях δ , соответствующих узлам сетки $r_1, \dots, r_\nu, \dots, r_{Q_2}$, и затем с помощью интерполяционных процедур построены полные кривые.

5. О сходимости алгоритма. Понятно, что чем гуще сетка $r_1, \dots, r_\nu, \dots, r_{Q_2}$ по горизонтальной оси, тем точнее проводятся огибающие множества \tilde{Q}_Δ и точнее определяются искомые оценки. Увеличение числа точек Q_2 , хотя и важный, но технически решаемый вопрос, так как приводит только к практическим издержкам, которые вызваны проведением дополнительных расчетов. Наиболее существенное влияние на точность получаемых оценок $\beta(N, \delta)$, $\gamma(N, \delta)$ оказывают результаты решения экстремальных задач (4.9), (4.10), определяющих точки огибающих множества \tilde{Q}_Δ (п. В.1. алгоритма). Для исследования сходимости алгоритма решения задач (4.9), (4.10) понадобится знание некоторых свойств множества \tilde{Q}_Δ .

5.1. Свойства множества \tilde{Q}_Δ .

Лемма 2. При любом фиксированном $\|\Delta \mathbf{s}\| \neq 0$ решения задач (4.9), (4.10) существуют, при этом

$$\begin{cases} \Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|) \neq 0, & \text{если } \|\Delta \mathbf{s}\| \neq 0; \\ \Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|) = \Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|) = 0, & \text{если } \|\Delta \mathbf{s}\| = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Доказательство. Зафиксируем $0 < \|\Delta \mathbf{s}\| = r \leq 1$. Выделяя внутренний и внешний циклы минимизации, перепишем (4.9) в виде

$$\Delta_{\min}(r) = \min_{\mathbf{s}} \{\Delta_{1 \min}(\mathbf{s}, r)\}, \quad \mathbf{s} \in S_N, \quad (5.2)$$

где величина $\Delta_{1 \min}(\mathbf{s}, r)$ в фигурных скобках является решением задачи минимизации по переменной $\Delta \mathbf{s}$ при фиксированном $\mathbf{s} \in S_N$:

$$\Delta_{1 \min}(\mathbf{s}, r) = \left\{ \min_{\Delta \mathbf{s}} \|\Delta f(\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s})\| : \Delta \mathbf{s} \in \hat{S}_N, \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s} \in S_N, \|\Delta \mathbf{s}\| = r \right\}. \quad (5.3)$$

В (5.2), (5.3) решаются задачи минимизации непрерывного функционала на замкнутых ограниченных подмножествах R^{N_0} и их пересечениях, откуда следует существование решений этих задач, а значит,

и существование решения $\Delta_{\min}(r)$ задачи (4.9) (отметим, что множество точек в (5.3) с различными $\Delta \mathbf{s} \in \hat{S}_N$, для которых $\|\Delta \mathbf{s}\| = r$, представляет собой сферу радиуса r с центром в нуле, которая, как известно [28], является ограниченным замкнутым множеством в R^N). Так как оператор A_0 является инъективным, то ординаты $\|\Delta f(\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s})\| = \|A_0(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) - A_0 \mathbf{s}\|$ точек множества \mathbb{Q}_Δ , в частности, точек огибающей $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$, не равны нулю при любом $\|\Delta \mathbf{s}\| \neq 0$, а если $\|\Delta \mathbf{s}\| = 0$, то $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|) = 0$, откуда следует утверждение леммы 2.

Аналогичным образом доказывается существование решения задачи (4.10).

Лемма 3. Ординаты точек $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$, $(\Delta_{\max}(\|\Delta \mathbf{s}\|))$ при различных $0 < \|\Delta \mathbf{s}\| = r \leq 1$, образующих нижнюю (верхнюю) огибающую множества \mathbb{Q}_Δ , удовлетворяют неравенствам:

$$\Delta_{\min}(r_2) > \Delta_{\min}(r_1) > 0 \quad (\Delta_{\max}(r_2) \geq \Delta_{\max}(r_1) > 0) \quad \text{при} \quad r_2 > r_1.$$

Зафиксируем $\delta > 0$. Пусть $\beta(N, \delta)$ является решением задачи (4.2). Это означает, что существуют элементы $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S_N$ такие, что $\|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\| = \|\Delta \mathbf{s}\| = \beta(N, \delta)$ и $\|A_0 \mathbf{s}' - A_0 \mathbf{s}\| = \|\Delta f\| \leq \delta$, а значит, существует точка $\xi(\|\Delta \mathbf{s}\|, \|\Delta f\|)$ с координатами $\|\Delta \mathbf{s}\| = \beta(N, \delta)$, $\|\Delta f\| \leq \delta$; отметим, что этому условию удовлетворяет точка с координатами $\|\Delta f\| = \delta$, $\|\Delta \mathbf{s}\| = \beta(N, \delta)$ (см. Замечание 1.1). Отсюда следует, что

$$\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|) \leq \delta \quad \text{при} \quad \|\Delta \mathbf{s}\| = \beta(N, \delta). \tag{5.4}$$

Зададим $\delta' > \delta$. Для рассматриваемой задачи модуль непрерывности обратного оператора является неубывающей функцией с ростом δ , поэтому при $\delta' > \delta$ возможны два варианта: $\beta(N, \delta') > \beta(N, \delta)$ и $\beta(N, \delta') = \beta(N, \delta)$. Рассмотрим сначала первый случай, когда $\beta(N, \delta') > \beta(N, \delta)$. Так как точки $\xi(\|\Delta \mathbf{s}\|, \|\Delta f\|)$ из множества \mathbb{Q}_Δ , у которых $\|\Delta \mathbf{s}\| > \beta$ при $\|\Delta f\| \leq \delta$ отсутствуют (что следует из определения величины $\beta(N, \delta)$), то для точки $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ при $\|\Delta \mathbf{s}\| = \beta(N, \delta') > \beta(N, \delta)$ выполняются условия

$$\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|) > \delta \tag{5.5}$$

Во втором случае выполняются условия

$$\beta(N, \delta') = \beta(N, \delta) \quad \text{при} \quad \delta' > \delta, \quad \|\Delta \mathbf{s}\| = \beta(N, \delta), \tag{5.6}$$

при которых заведомо существует точка, удовлетворяющая неравенству (5.4).

Так как величина δ была выбрана произвольно, то из (5.4), (5.5) с учетом леммы 2 следует первое неравенство леммы 3: $\Delta_{\min}(r_2) > \Delta_{\min}(r_1) > 0$ при $r_2 > r_1$.

Полученный результат означает, что ординаты точек нижней огибающей $\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|)$ строго возрастают с ростом $\|\Delta \mathbf{s}\|$, при этом для некоторых значений $\|\Delta \mathbf{s}\|$ может выполняться условие (5.6), которое обусловлено нестрогим монотонным возрастанием функции $\beta(N, \delta)$ при увеличении δ .

По аналогичной схеме доказывается второе неравенство леммы 3 для верхней огибающей: $\Delta_{\max}(r_2) \geq \Delta_{\max}(r_1) > 0$ при $r_2 > r_1$.

5.2. Сходимость алгоритма решения задач (4.9), (4.10). Целевой (непрерывный) функционал $\|\Delta f(\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s})\|$ в задачах (4.9) (4.10) зависит от двух векторов: $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^N) \in S_N$, $\Delta \mathbf{s} = (\Delta s^1, \dots, \Delta s^N) \in \hat{S}_N$ и, таким образом, является некоторой функцией $2N$ переменных x^1, \dots, x^{2N} , которые выражаются через проекции векторов $\mathbf{s}, \Delta \mathbf{s}$ в соответствии с (4.1), (4.4) следующим образом:

$$\begin{cases} x^n = s^n, & 0 \leq x^n \leq D_s \\ x^{N+n} = \Delta s^n, & -D_s \leq x^{N+n} \leq D_s \end{cases}, \quad n = \overline{1, N}. \tag{5.7}$$

Задача (4.9) в новых обозначениях принимает вид:

$$\Delta_{\min}(\|\Delta \mathbf{s}\|) = \{ \min \varphi(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in \Pi \}, \quad \mathbf{X} = (x^1, \dots, x^{2N}), \tag{5.8}$$

где $\varphi(\mathbf{X})$ — непрерывный функционал, определяемый оператором прямой задачи, а множество Π с учетом (4.12), (5.7) определяется так:

$$\Pi = \left\{ \mathbf{X} : \mathbf{X} \in R^{2N}, 0 \leq x^n \leq D_s, 0 \leq x^n + x^{N+n} \leq D_s, (|x^{N+n}| \leq r D_s)^*, n = \overline{1, N} \right\}. \tag{5.9}$$

Задача (5.8) решается методом Монте-Карло (случайного поиска) [29]. Обозначим через $\mathbf{X}^* \in \Pi$ точку, на которой достигается теоретический абсолютный минимум задачи: $\varphi(\mathbf{X}^*) \leq \varphi(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Pi$. Векторы

$\mathbf{X} = (x^1, \dots, x^{2N})$ будем рассматривать как $2N$ -мерные случайные векторы (точки) в соответствующем вероятностном пространстве, вероятностная мера в котором, как известно [30], задается с помощью $2N$ -мерной функции распределения $\mathbb{F}(x^1, \dots, x^{2N})$ случайных величин x^1, \dots, x^{2N} . Случайный поиск решения задачи (5.8) заключается в том, что в области минимизации Π строится множество пробных случайных точек $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_q, \dots, \mathbf{X}_{Q_1}$ с плотностью распределения

$$p(x^1, \dots, x^{2N}) = p_1(x^1)p_2(x^2) \dots p_{2N}(x^{2N}), \quad \mathbf{X} = (x^1, \dots, x^{2N}) \in \Pi, \quad (5.10)$$

где $p_n(x^n) > 0$ — одномерные плотности распределения величин x^1, \dots, x^{2N} , отличные от нуля в пределах Π ; далее находится точка $\tilde{\mathbf{X}}^*$, в которой $\varphi(\tilde{\mathbf{X}}^*) = \min_{1 \leq q \leq Q_1} \varphi(\mathbf{X}_q)$ и которая принимается за приближенное решение задачи (5.8). Если при минимизации использовать независимые пробные точки $\mathbf{X}_q \in \Pi$, $q = \overline{1, Q_1}$, с плотностью $p > 0$ вида (5.10), то процесс случайного поиска сходится *по вероятности* [29]:

$$\forall \varepsilon > 0: P\left(\|\tilde{\mathbf{X}}^* - \mathbf{X}^*\| > \varepsilon\right) \xrightarrow[Q_1 \rightarrow \infty]{} 0.$$

В частности, если никакой предварительной информации о расположении точки \mathbf{X}^* нет, то используются пробные точки, равномерно распределенные в области минимизации Π (*простейший случайный* или *слепой поиск*). Задача конструирования равномерной плотности распределения для произвольной области Π в общем случае является достаточно сложной. Существуют специальные методы моделирования равномерной плотности распределения для сложных областей [31]. Один из возможных подходов к ее решению состоит в том, что область минимизации Π окружается некоторой объемлющей областью, для которой задача конструирования равномерного распределения решается более просто, а в процессе минимизации отбираются лишь те точки, которые попали в область Π . Применительно к рассматриваемому нами алгоритму в качестве объемлющей области будем использовать параллелепипед $\Pi^* \supset \Pi$, который получается, если в (5.9) учитывать не все ограничения:

$$\Pi^* = \left\{ \mathbf{X} \in R^{2N}, \quad 0 \leq x^n \leq D_s, \quad |x^{N+n}| \leq rD_s, \quad n = \overline{1, N} \right\}.$$

Равномерные плотности $p_n(x^n)$ в (5.10) для области Π^* определяются условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n(x^n) = \frac{1}{D_s}, \quad x^n \in [0, D_s], \quad p_n(x^n) = 0, \quad x^n \notin [0, D_s] \\ p_{n+N}(x^{N+n}) = \frac{1}{2rD_s}, \quad x^{N+n} \in [-rD_s, rD_s], \quad p_{n+N}(x^{N+n}) = 0, \quad x^{N+n} \notin [-rD_s, rD_s] \end{array} \right., \quad n = \overline{1, N}.$$

Аналогичным образом доказывается сходимость алгоритма решения задачи (4.10).

5.3. Пример тестирования алгоритма. Рассмотрим простейший случай уравнения (3.3) с оператором возведения в квадрат:

$$s^2 = f, \quad s \in [0, 1], \quad s, f \in R^1. \quad (5.11)$$

Зададимся нормой в R^1 : $\|x\|_{R^1} = |x|$. В этом случае классический модуль непрерывности обратного оператора для уравнения (5.11) определяется следующим образом:

$$\beta(\delta) = \max |s' - s| \quad \text{при} \quad |(s')^2 - s^2| \leq \delta, \quad s, s' \in [0, 1], \quad s' = s + \Delta s;$$

отсюда, как нетрудно убедиться,

$$\beta(\delta) = \sqrt{\delta}.$$

На рис. 2 а представлено имитирующее множество, на рис. 2 б — расчетная функция $\beta(\delta)$. Кривая зависимости ошибки $\Delta\bar{\beta}$ (модуль разности расчетной и истинной величин $\beta(\delta)$, осредненный по всем точкам кривой) от числа Q_1 точек в группе аппроксимируется (методом наименьших квадратов) функцией a/Q_1^b (рис. 2 в, бежевая кривая). Лучшее совпадение достигнуто при $a = 0.3, b = 0.94$; таким образом, скорость сходимости для данного примера составляет $\Delta\bar{\beta} \approx (1/Q_1)$. Расчетные данные показывают, что величина ошибки $\Delta\bar{\beta} < 0.01$ достигается уже при $Q_1 \approx 40$.

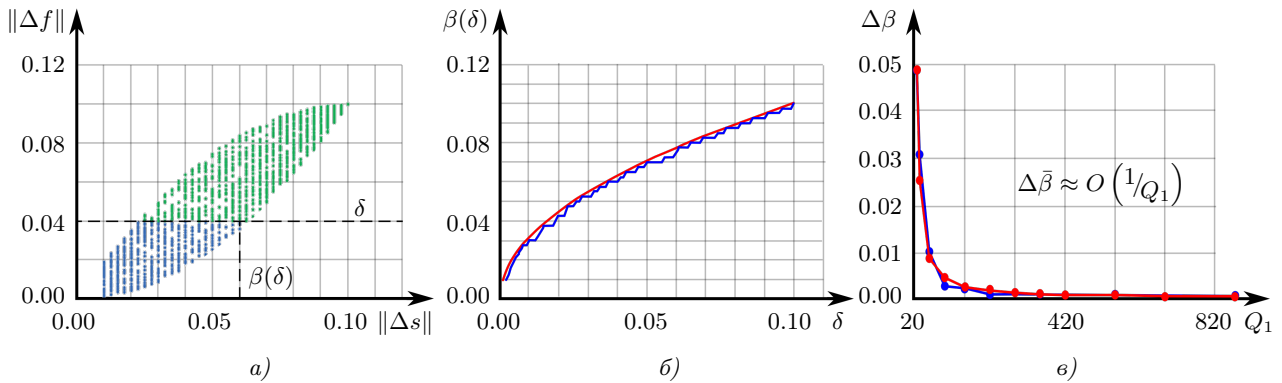


Рис. 2. Иллюстрация расчета модуля непрерывности обратного оператора $\beta(\delta)$ для уравнения $s^2 = f$; а) имитирующее множество \mathbb{Q}_Δ ; синим цветом обозначены точки, удовлетворяющие условию $\|\Delta f\| \leq \delta$; б) теоретическая (красная) и расчетная (синяя) кривые $\beta(\delta)$; в) зависимость средней ошибки $\Delta\bar{\beta}$ от числа Q_1 точек в одной группе

6. Численные приложения к задачам геоэлектрики. Приводятся примеры расчета локальных модулей непрерывности и построения оптимальной (регуляризованной) сетки параметризации для обратной 2D задачи геоэлектрики магнитотеллурическим методом (МТЗ) в смешанном АМТ–МТ диапазоне частот, обеспечивающем глубину исследований до первых километров. Методика такого типа отражена в работе [32].

6.1. Прямая и обратная задачи геоэлектрики.

Рассмотрим постановку обратной задачи геоэлектрики МТЗ, впервые предложенную А. Н. Тихоновым [33] и далее развиваемую в работах [19, 34–39] и ряде других работ. В магнитотеллурических методах используются электромагнитные (ЭМ) поля, возбуждаемые в Земле удаленными источниками токов ионосферного происхождения (МТ поля). Если линейные размеры области исследований (порядка 400–500 км) значительно меньше расстояния до ионосферных источников (расположенных в приполярных областях Земли), то первичное ЭМ поле этих источников в области исследований можно аппроксимировать полем однородной плоской ЭМ волны $\mathbf{E}^0 = (E_x^0, E_y^0)$, $\mathbf{H}^0 = (H_x^0, H_y^0)$ (с неизвестной амплитудой), *нормально* падающей с фазовой скоростью \mathbf{u} на земную поверхность. Эти условия приближенно выполняются для средних широт и периодов поля, не превышающих первые минуты. Для исключения неизвестной амплитуды волны используются *характеристики МТ поля*, определяемые некоторыми отношениями компонент векторов МТ поля, в результате чего, в силу линейности уравнений поля, неизвестный множитель, определяющий амплитуду волны (в общем случае векторный), сокращается. Классической характеристикой такого типа является тензор импеданса \hat{Z} МТ поля. Зададим правовинтовую систему координат (x, y, z) , ось z в которой направлена в Землю (рис. 3). В области, где отсутствуют сторонние токи и заряды, в рамках плоской модели Земли, МТ поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла в диффузном (квазистационарном) приближении для немагнитной изотропной неполяризуемой среды (при гармоническом изменении поля $e^{-i\omega t}$):

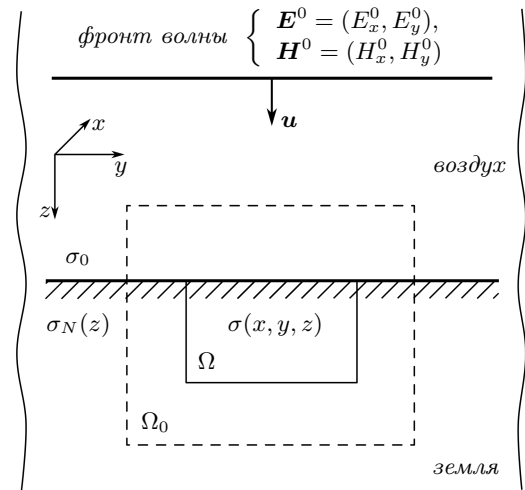


Рис. 3. Схема классической модели геоэлектрики

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \\ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \end{cases} \quad (6.1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$; $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ – векторы ЭМ поля; $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$ – электропроводность (удельная) среды; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота поля,

T — период колебаний. Тензор импеданса $\hat{Z}(x, y, \omega)$ связывает тангенциальные компоненты электрического $\mathbf{E}_\tau(x, y, z = 0, \omega) = (E_x, E_y)$ и магнитного $\mathbf{H}_\tau(x, y, z = 0, \omega) = (H_x, H_y)$ полей на поверхности Земли $z = 0$: $\mathbf{E}_\tau = \hat{Z}\mathbf{H}_\tau$, где матрица импеданса имеет вид $\hat{Z} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix}$. Решая прямую задачу для системы (6.1) для каждой заданной функции удельной электропроводности $\sigma(x, y, z)$ и сопоставляя расчетный импеданс $\hat{Z}[x, y, \omega, \sigma]$ с импедансом $\hat{Z}^{izm}(x, y, \omega)$, измеренным в некоторой области $x, y \in \Omega_1$ на поверхности Земли $z = 0$ в заданном диапазоне частот Δ_ω , получаем функциональное уравнение *обратной задачи МТЗ* относительно искомой функции $\sigma(x, y, z)$ удельной электропроводности среды:

$$\hat{Z}[x, y, \omega, \sigma] = \hat{Z}^{izm}(x, y, \omega), \quad x, y \in \Omega_1, \quad \omega \in \Delta_\omega. \quad (6.2)$$

Другой важной характеристикой МТ поля, не зависящей от амплитуды первичной плоской волны, является вектор-типпер $\hat{\mathbf{W}}(x, y, \omega) = (W_x, W_y)$, который связывает вертикальную компоненту $\mathbf{H}_z(x, y, z = 0, \omega)$ магнитного поля с $\mathbf{H}_\tau(x, y, z = 0, \omega) = (H_x, H_y)$: $\mathbf{H}_z = \hat{\mathbf{W}}\mathbf{H}_\tau = W_x H_x + W_y H_y$. Для типпера может быть получено функциональное уравнение, аналогичное (6.2).

При математической постановке прямой задачи источник поля задается в виде бесконечно протяженной по горизонтали плоской волны, поэтому рассматривать прямую задачу изначально приходится во всем пространстве и использовать для этого идеализированные модели исследуемой неоднородной среды, которые представляют собой неоднородную ограниченную область с электропроводностью $\sigma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$, расположенную в некоторой неограниченной фоновой среде с известным более простым распределением электропроводности, для которой относительно легко решается прямая задача для источника плоской волны при отсутствии неоднородности. Знание фоновой среды и соответствующего ей *фонового поля* позволяют “избавиться” от бесконечных областей и сформулировать численную задачу в конечной части пространства. Достаточно полные обзоры по методам численного решения прямых задач геоэлектрики представлены в работах [37, 39, 40] и ряде других работ. Для численного решения прямой задачи применяются *интегральные и дифференциальные методы*.

В *интегральных методах* основной является модель среды, состоящая из *неоднородной области* с кусочно-непрерывной электропроводностью $\sigma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$, расположенной в *безграничной горизонтально-слоистой среде* с известной кусочно-постоянной электропроводностью $\sigma_N(z)$ (играющей роль фоновой среды). Обозначим через $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ решение системы (6.1) для данной модели среды для источника вида однородной плоской ЭМ волны, нормально падающей на земную поверхность, а через $\mathbf{E}^N(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{H}^N(\mathbf{r}, \omega)$ — решение этой же задачи в слоистой среде при отсутствии неоднородности (нормальное поле), которое представляется в аналитическом виде (с помощью рекуррентных формул [37]). Для данной модели среды для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ в любой точке трехмерного пространства справедливо интегральное представление [19, 41]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \int_{\Omega} \hat{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)(\sigma(\mathbf{r}') - \sigma_N(z))\mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)d\Omega_{r'} = \mathbf{E}^N(\mathbf{r}, \omega), \quad (6.3)$$

где $\hat{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ — тензор Грина электрического типа, который определяется из решения системы уравнений Максвелла в слоистой среде. Для точек $\mathbf{r} \in \Omega$ соотношение (6.3) представляет собой интегральное уравнение относительно поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ в области Ω . Решив это уравнение, можно рассчитать поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ (а значит, и поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ из второго уравнения (6.1)) в любой точке пространства. Многократно решая уравнение (6.3) при различных $\sigma(\mathbf{r})$, можно вычислить поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ и тензор импеданса $\hat{Z}(\mathbf{r}, \omega)$ в области измерений в заданном интервале частот и получить функциональное уравнение обратной задачи вида (6.2). Аналогичным образом может быть получено интегральное уравнение вида (6.3) для магнитного поля с использованием тензора Грина $\hat{G}_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ магнитного типа. Методы и численные схемы расчета тензоров Грина и решения интегрального уравнения вида (6.3) для задач геоэлектрики представлены в работах [39, 41, 42, 43, 44] и ряде других работ.

В *дифференциальных методах* при постановке прямых краевых задач исследуемая неоднородная область Ω со всех сторон (в общем случае включая нижнюю часть воздушного пространства, примыкающего к Земле) дополняется переходной областью Ω_{TD} , обрамляющей область неоднородности Ω (обозначена пунктиром на рис. 3). Краевая задача формулируется для построенной таким образом полной области $\Omega_0 = \Omega \cup \Omega_{TD}$, границы которой устанавливаются настолько далеко от области Ω , чтобы можно было приближенно считать, что искомое полное поле на границе $\partial\Omega_0$ совпадает с известным нормальным полем

слоистой среды, что позволяет поставить краевые условия 1 рода на границе $\partial\Omega_0$ [37, 39]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^N(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{H}^N(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_0. \quad (6.4)$$

Следует отметить, что условия (6.4) близости полного и нормального полей на границе $\partial\Omega_0$, строго говоря, следует понимать как предельные $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \mathbf{E}^N(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \mathbf{H}^N(\mathbf{r}, \omega)$ при неограниченном расширении области Ω_0 [45], так как они нигде не выполняются точно.

Таким образом, система (6.1) в совокупности с условием (6.4) определяют краевую задачу для электромагнитного поля. Помимо условий 1 рода, могут использоваться также краевые условия 2 и 3 родов [37, 39]. Размеры переходной области Ω_{TD} , при которых условия (6.4) выполняются с “приемлемой” точностью, заранее не известны, и их приходится подбирать в ходе решения краевой задачи. Опыт расчетов показывает, что переходная область при этом может превышать аномальную область в несколько раз [39]. Более эффективным представляется использование асимптотических краевых условий, учитывающих скорость убывания аномального поля на бесконечности в фоновой среде (аналогов условий Зоммерфельда) [37, 39, 46], что позволяет сократить размеры переходной области Ω_{TD} . Универсальность дифференциальных методов может быть повышена за счет использования более сложных переходных областей Ω_{TD} , состоящих из разных слоистых сред, окружающих область Ω с различных сторон (асимметричное обрамление [37, 45]) или обеспечивающих плавный переход от неоднородной среды к фоновой [45].

Обычно для численного решения система (6.1) преобразуется к уравнениям второго порядка относительно электрического или магнитного полей, для которых формулируются соответствующие краевые задачи [39, 46, 47, 48]. Например, в 2D приближении $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0\right)$ система уравнений (6.1) (для источника плоской волны) распадается на две независимые группы полей [45]:

- 1) **H-поляризация**, определяемая набором компонент поля $H_x(y, z, \omega)$, $E_y(y, z, \omega)$, $E_z(y, z, \omega)$; компонента H_x удовлетворяет скалярному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + i\omega\mu_0 H_x = 0, \quad (6.5)$$

проекции E_y, E_z выражаются через H_x соотношениями $E_y = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z}$, $E_z = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y}$;

- 2) **E-поляризация**, определяемая набором компонент поля $E_x(y, z, \omega)$, $H_y(y, z, \omega)$, $H_z(y, z, \omega)$; компонента E_x удовлетворяет скалярному уравнению

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + i\omega\mu_0\sigma E_x = 0, \quad (6.6)$$

H_y, H_z выражаются через E_x соотношениями $H_y = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}$, $H_z = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}$.

Для скалярных уравнений (6.5), (6.6) формулируются краевые задачи в соответствии с рассмотренными выше принципами.

Для обратных задач геоэлектрики методом МТЗ доказан ряд теорем единственности [38, 39]. Наиболее общие результаты за последнее время получены в работах В. И. Дмитриева [49, 50]. В этих работах доказаны теоремы единственности решений обратных задач, которые заключаются в определении электропроводности трехмерных (двумерных) локальных тел с кусочно-непрерывной электропроводностью $\sigma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$, расположенных в безграничной горизонтально-слоистой среде с известной кусочно-постоянной электропроводностью $\sigma_N(z)$, при определенных ограничениях на параметры задачи. Таким образом, с учетом рассмотренных выше постановок прямых задач, обратная задача геоэлектрики методом МТЗ в строгой постановке может решаться при наличии *априорной информации* о том, что исследуемая неоднородная область расположена в слоистой среде. Такая модель среды является достаточно широко распространенной в геофизической практике. Электропроводность слоистой среды должна быть задана; однако при некоторых подходах к решению обратной задачи электропроводность может определяться в процессе ее решения. В случае, когда априорная информация о наличии обрамляющей слоистой среды отсутствует, она может быть сконструирована как математическая абстракция, согласованная с результатами наблюдений на границе исследуемой области и в прилежащих областях [45].

6.2. Пример расчета локального модуля непрерывности обратного оператора. Обратная коэффициентная 2D задача геоэлектрики в классе кусочно-постоянных сред сводится к уравнению типа (3.3) на множестве (4.1). Область Ω , для которой решается обратная задача, схематически представлена на рис. 4 а; тонкими линиями показана опорная сетка θ_{N_0} (на которой решается прямая задача), жирными линиями — сетка параметризации θ_N . Входные данные обратной задачи представляют собой тензор $\hat{Z}(y, \omega)$ двумерного электромагнитного поля, определенный на верхней границе Ω_1 ($z = 0$) области Ω в заданном диапазоне частот. Искомыми параметрами являются логарифмы удельных сопротивлений ρ_n среды, задаваемые в ячейках сетки параметризации θ_N : $s_n = \lg \rho_n$; $s_n \in [0, D_s]$, $n = \overline{1, N}$; $D_s = 4$. Оператор прямой задачи геоэлектрики конструируется на основе решения соответствующей краевой задачи в области Ω для системы уравнения Максвелла в квазистационарном 2D приближении [10]. Расчет прямых 2D задач геоэлектрики в настоящей статье проводился на основе конечно-разностного метода (вычислительный комплекс МТ-Геос, авторы: М. И. Шимелевич, М. В. Дмитриева). В нем применяются методы, аналогичные приведенным в работах [51–53]. Расчеты множества прямых задач проводились с использованием технологий параллельных вычислений на суперкомпьютерных кластерах.

Локальный модуль непрерывности обратного оператора (2.6) для задачи (3.3) строится для подобласти Ω_i среды, соответствующей 3-му ярусу (рис. 4 б) заданной сетки параметризации θ_N .

На рис. 5 а представлено имитирующее множество $\mathbb{Q}_{\Delta i}$, $q = \overline{1, Q}$, пробных точек для заданных значений $\|\Delta s\| = r_\nu$, $\nu = \overline{1, Q_2}$, и его огибающие. На рис. 5 б представлены итоговые сглаженные графики функций $\beta^i(N, 2\delta)$; зеленая кривая — с учетом порога значимости $\eta = 0.05$, красная — без учета. На рис. 5 в приводятся примеры зависимостей верхних и нижних квантилей от числа Q_1 точек в ν -й группе для порога значимости $\eta = 0.05$. Дополнительные расчеты квантилей при объемах выборки, достигающих $Q_1 = 5000$, показали, что вид зависимостей практически оставался неизменным. Представленная зависимость является типичной для всех $\|\Delta s\| = r_\nu$, $\nu = \overline{1, Q_2}$, и позволяет сделать вывод о практической сходимости алгоритма при числе точек в группе $Q_1 \approx 150\text{--}200$.

6.3. Пример построения оптимальной сетки параметризации для обратной задачи геоэлектрики. Рассмотрим обратную 2D задачу типа (3.3) на множестве S_{N_0} , порождаемом исходной опорной сеткой θ_{N_0} (рис. 4 а), и приведем пример построения оптимальной сетки параметризации на основе условий (3.13), (3.14). Число искомых параметров при использовании опорной сетки θ_{N_0} составляет $N_0 = 120 \times 48 = 5760$. Зададимся величиной $\delta_0 = 0.02$ и допустимой величиной степени неоднозначности $\varepsilon_0 = 0.06$. Рассчитаем функции $\beta^i(N, 2\delta_0)$, $i = \overline{1, 48}$, для всех 48 слоев опорной сетки θ_{N_0} . Из анализа графиков (рис. 6 а) следует, что при фиксированном δ_0 величина $\beta^i(N, 2\delta_0)$ закономерно увеличивается с глубиной расположения слоев (на графике большие номера соответствуют более глубоким слоям сетки), а значит — растет степень неоднозначности определения параметров этих слоев. При этом видно, что для слоев сетки с номерами $i \geq 5$ величина $\beta^i(N, 2\delta_0) > 0.06$ при $\delta_0 = 0.02$ и желаемая оценка $\varepsilon_0 = 0.06$ на данной опорной сетке θ_{N_0} не достигается.

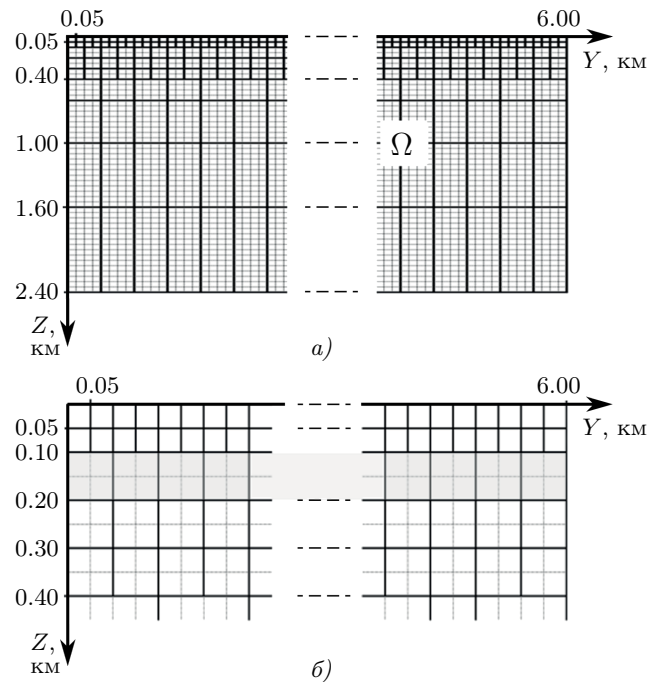


Рис. 4. Схематическое представление 2D области Ω исследований; а) опорная сетка θ_{N_0} в области Ω (показана тонкими линиями) и построенная на ее основе сетка θ_N параметризации (жирные линии); б) укрупненный фрагмент верхней части области Ω ; выделена подобласть, соответствующая 3-му слою сетки параметризации θ_N

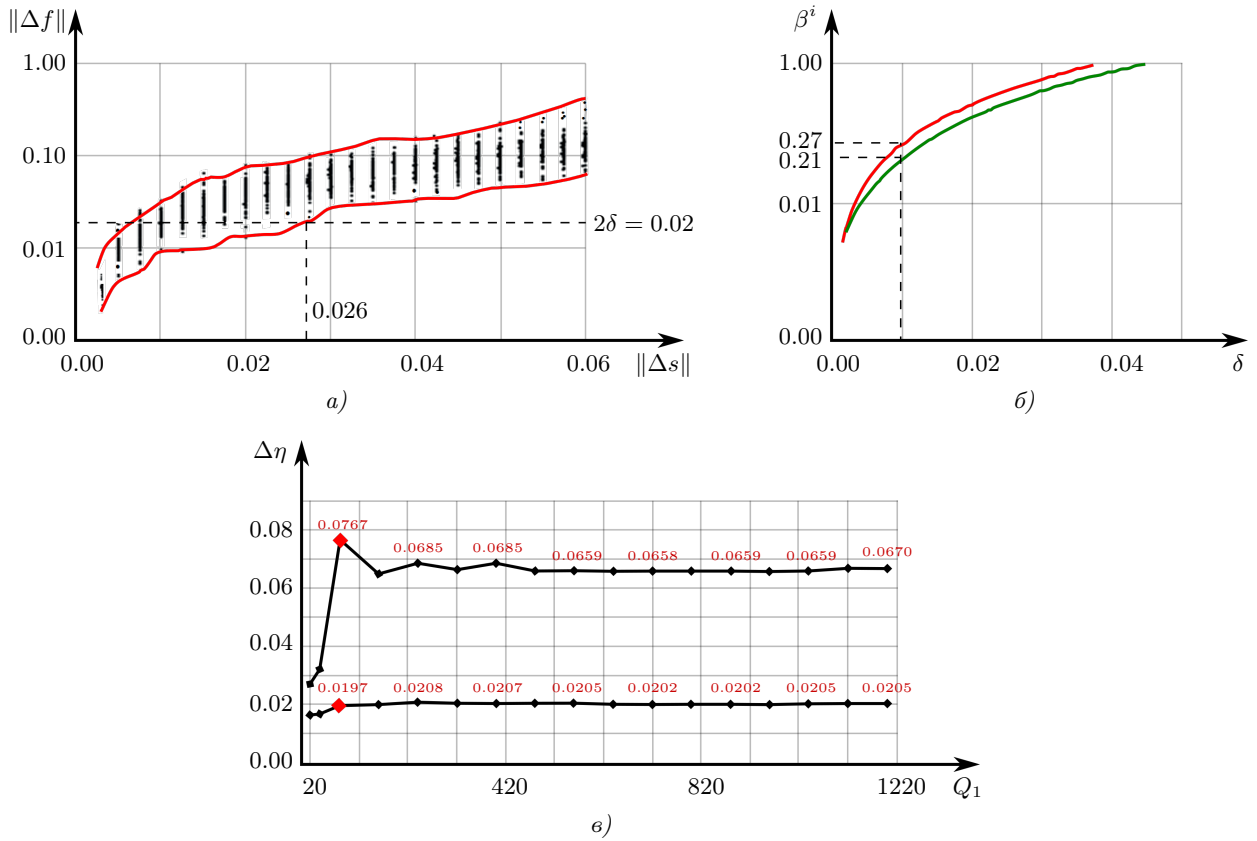


Рис. 5. Пример расчета локального модуля $\beta^i(N, 2\delta)$ для 3-го яруса сетки параметризации модели, представленной на рис. 4 б; а) имитирующее множество $\tilde{Q}_{\Delta i}$ при числе точек в группе $Q_1 = 80$; б) графики smoothed функций $\beta^i(N, 2\delta)$, красным цветом обозначена кривая, полученная на основе всех точек имитирующего множества, зеленая кривая — с учетом порога значимости $\eta = 0.05$; е) пример зависимости верхнего Δ_{η_2} и нижнего Δ_{η_1} квантилей от числа Q_1 точек в ν -й группе, $\nu = 7$, для порога значимости $\eta = 0.05$

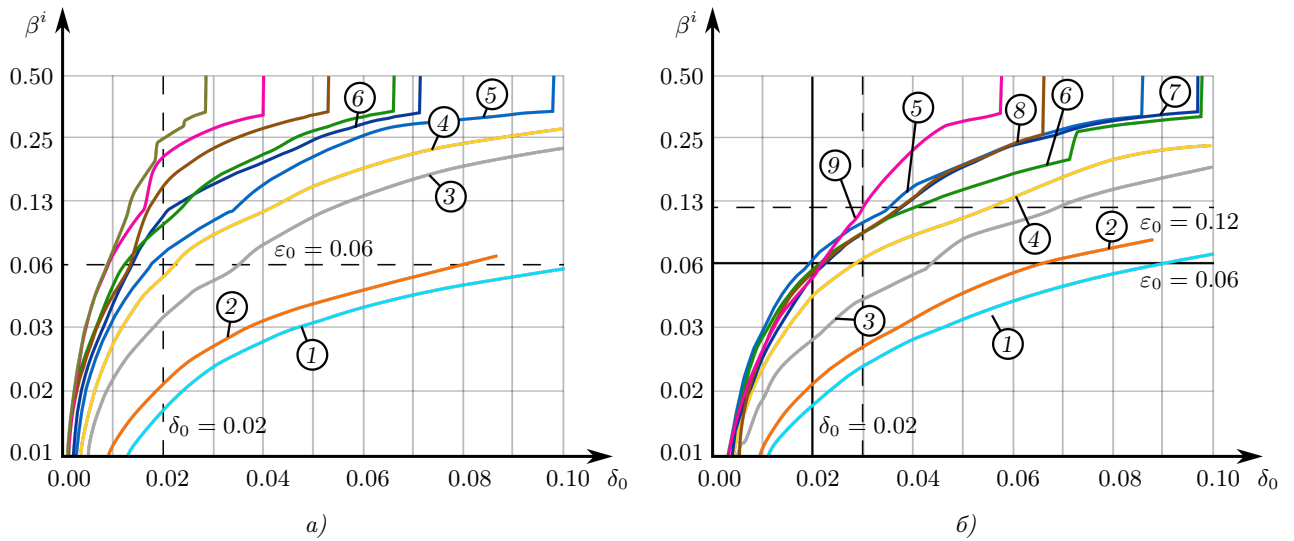


Рис. 6. Графики (smoothed) характеристик $\beta^i(N, 2\delta_0)$ с учетом порога значимости $\eta = 0.05$; а) для слоев опорной сетки θ_{N_0} ; б) для слоев укрупненной оптимальной сетки параметризации $\bar{\theta}_{\bar{N}}(\delta_0, \epsilon_0)$. Большим номерам соответствуют более глубоко расположенные слои сеток

Последовательно укрупняя опорную сетку по горизонтали и вертикали, начиная с 5-го слоя, добьемся приближенного выполнения условия $\beta^i(\bar{N}, 2\delta_0) \leq 0.06$ при $\delta_0 = 0.02$ для всех слоев $i = \bar{1}, 9$ (рис. 6 б) новой сетки параметризации $\bar{\theta}_{\bar{N}}(\delta_0, \varepsilon_0)$, представленной жирными линиями на рис. 4 а. Отметим, что при $\delta_0 = 0.03$ неоднозначность задачи возрастает более чем в два раза: $\beta^i(\bar{N}, 2\delta_0) \approx 0.13$. Размерность оптимальной сетки $\bar{\theta}_{\bar{N}}(\delta_0, \varepsilon_0)$ составляет $\bar{N}(\delta_0, \varepsilon_0) = 120 \times 2 + 60 \times 3 + 30 \times 4 = 540$.

7. Заключение. Для нелинейных операторных уравнений 1 рода, рассматриваемых в классе сеточных (кусочно-постоянных) решений, показано, что модуль непрерывности обратного оператора и его локальные модификации монотонно возрастают с увеличением размерности сетки параметризации. Из этого свойства следует неопределенность конечно-параметрической обратной задачи, вследствие которой степень неоднозначности ее решений уменьшить можно только за счет уменьшения детальности решений в рассматриваемой области (при отсутствии дополнительной априорной информации). Представлен алгоритм расчета модулей непрерывности прямого и обратного операторов и их модификаций, основанный на методе Монте-Карло; доказывается сходимость алгоритма. Приведен пример построения оптимальной сетки параметризации для задачи геоэлектрики при заданных ограничениях на модуль непрерывности обратного оператора.

Автор признателен проф., д.ф.-м.н. В. И. Дмитриеву и д.ф.-м.н. О. Б. Новику за полезные обсуждения и советы.

Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. 1963. **61**, № 2. 211–223.
3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989.
5. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шшиатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
6. *Новик О.Б.* Математические вопросы сокращения числовой геофизической информации при поисках нефти и газа. Деп. в ВИЭМС РАН 02.11.87, № 485–МГ. М.: ВИЭМС РАН, 1987.
7. *Шимелевич М.И.* Некоторые оптимизационные алгоритмы решения обратных задач электромагнитных зондирований. Деп. в ВИЭМС РАН 16.10.89, № 796–МГ–89. М.: ВИЭМС РАН, 1989.
8. *Шимелевич М.И.* Методы повышения устойчивости инверсии данных геоэлектрики на основе нейросетевого моделирования // Геофизика. 2013. № 4. 49–55.
9. *Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А.* Численные методы оценки степени практической устойчивости обратных задач геоэлектрики // Физика Земли. 2013. № 3. 58–64.
10. *Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А.* Аппроксимационный нейросетевой метод решения многомерных нелинейных обратных задач геофизики // Физика Земли. 2017. № 4. 100–109.
11. *Гончарский А.В., Ягола А.Г.* О равномерном приближении монотонного решения некорректных задач // Докл. АН СССР. 1969. **184**, № 4. 771–773.
12. *Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г.* Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978.
13. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
14. *Yagola A.G., Dorofeev K.Yu.* Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications. Vol. 25. Providence: AMS Press, 2000. 543–550.
15. *Dorofeev K.Yu., Yagola A.G.* The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. **12**, N 6. 627–636.
16. *Леонов А.С.* Для каких обратных задач априорная оценка точности приближенного решения может иметь порядок ошибки данных // Сиб. журн. вычисл. матем. 2014. **17**, № 4. 339–348.
17. *Леонов А.С.* Апостериорные оценки точности решения некорректно поставленных обратных задач и экстраоптимальные регуляризирующие алгоритмы их решения // Сиб. журн. вычисл. матем. 2012. **15**, № 1. 85–102.
18. *Бакушинский А.Б., Леонов А.С.* Новые апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 359–369.

19. *Дмитриев В.И.* Обратные задачи геофизики. М.: МАКС Пресс, 2012.
20. *Гласко В.Б., Старостенко В.И.* Регуляризирующий алгоритм решения системы нелинейных уравнений в обратных задачах геофизики // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1976. № 3. 44–53.
21. *Страхов В.Н.* О проблеме параметризации в обратных задачах гравиметрии // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1978. № 6. 39–49.
22. *Шимелевич М.И., Оборнев Е.А.* Применение оптимизационного подхода в методике интерпретации данных МГЗ // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. 1997. № 2. 109–115.
23. *Леонов А.С., Ягола А.Г.* Оптимальные методы решения некорректных задач с истокообразно представимыми решениями // Журнал фундаментальной и прикладной математики. 1998. 4, № 5. 1029–1046.
24. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
25. *Табаринцева Е.В.* Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения // Сиб. журн. вычисл. матем. 2018. 21, № 3. 291–310.
26. *Васин В.В.* Модифицированный метод наискорейшего спуска для нелинейных нерегулярных операторных уравнений // Доклады АН. 2015. 462, № 3. 264–267.
27. *Шимелевич М.И.* Алгоритмы расчета модуля непрерывности обратного оператора и его модификаций с использованием методов Монте-Карло в приложении к геоэлектрике // Тезисы Международной конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019”. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2019. <https://elibrary.ru/item.asp?id=41893341>.
28. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I. М.: ФАЗИС, 1997.
29. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
30. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М: Изд-во МЦНМО, 2007.
31. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
32. *Варенцов И.М., Куликов В.А., Яковлев А.Г., Яковлев Д.В.* Возможности методов магнитотеллурики в задачах рудной геофизики // Физика Земли, 2013. № 3, 9–29.
33. *Тихонов А.Н.* Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // Докл. АН СССР. 1950. 73, № 2. 295–297.
34. *Wiese H.* Geomagnetische Tiefentellurik. Berlin: Geomagnet. Inst. Deutsch. Akad. Wiss., 1965.
35. *Schmucker U.* Anomalies of geomagnetic variations in the southwestern United States. Berkley: Univ. California Press, 1970.
36. *Weidelt P.* The inverse problem of geomagnetic induction // Zeitschrift für Geophysik. 1972. 38. 257–289.
37. *Бердичевский М.Н., Жданов М.С.* Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. М.: Недра, 1981.
38. *Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.* Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009.
39. *Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007.
40. *Hohtann G.W.* Three-dimensional EM modeling // Geophys. Surv. 6. 27–53. 1983.
41. *Дмитриев В.И.* Прямые и обратные задачи электромагнитного зондирования трехмерной неоднородной среды // Физика Земли. 2013. № 3. 46–51.
42. *Дмитриев В.И.* Электромагнитные поля в неоднородных средах. М: Изд-во МГУ, 1969.
43. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008.
44. *Авдеев Д.Б.* Метод интегральных уравнений для решения прямых задач геоэлектрики // Электромагнитные исследования земных недр. М.: Научный мир, 2005. 11–32.
45. *Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.* Обратные задачи магнитотеллурики в современной постановке // Физика Земли. 2004. № 4. 12–29.
46. *Спичак В.В.* Магнитотеллурические поля в трехмерных моделях геоэлектрики. М.: Научный мир, 1999.
47. *Юдин М.Н.* Расчет магнитотеллурического поля методом сеток в трехмерно-неоднородных средах // Проблемы морских электромагнитных исследований. М.: ИЗМИР АН СССР, 1980. 96–101.
48. *Юдин М.Н.* Альтернирующий метод численного решения прямых задач геоэлектрики // Математические методы в геоэлектрике. М.: ИЗМИР АН СССР, 1982. 47–52.
49. *Дмитриев В.И.* О двумерной обратной задаче магнитотеллурического зондирования неоднородной среды // Прикладная математика и информатика. Серия Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Том 56. М.: МАКС Пресс, 2017. 5–17.
50. *Дмитриев В.И.* О единственности решения трехмерной обратной задачи электромагнитного зондирования // Прикладная математика и информатика. Серия Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Том 57. М.: МАКС Пресс, 2018. 5–20.

51. *Дмитриева М.В.* Численное моделирование физических процессов в плазме установок токамак при воздействии электромагнитных волн альфвеновского диапазона частот. Автореферат дисс. . . к.ф.-м.н. М.: ИПМ АН СССР, 1985.
52. *Eisenstat S.C., Schultz M.H., Sherman A.H.* Algorithms and data structures for sparse symmetric Gaussian elimination // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1981. **2**, N 2. 225–237.
53. *Дмитриева М.В., Елфимов А.Г., Некрасов Ф.М. и др.* Численное моделирование альфвеновского нагрева плазмы в торе. Препринт № 51. М.: ИПМ АН СССР, 1988.

Поступила в редакцию
29 июня 2020

On a Method of Calculating the Modulus of Continuity of the Inverse Operator and Its Modifications with Applications to Nonlinear Problems of Geoelectrics

M. I. Shimelevich¹

¹ *Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting, Faculty of Geology and Geophysics of Oil and Gas; ulitsa Miklukho-Maklaya 23, Moscow, 117997, Russia; Ph.D., Associate Professor; e-mail: shimelevich-m@yandex.ru*

Received June 29, 2020

Abstract: A priori estimates of the ambiguity (error) of approximate solutions of conditionally well-posed nonlinear inverse problems based on the modulus of continuity of the inverse operator and its modifications are considered. The connection between the modulus of continuity of the inverse operator and the resolution of the geophysical method is established. It is shown that, in the class of piecewise constant solutions defined on a given parametrization grid, the modulus of continuity of the inverse operator and its modifications increase monotonically with increasing grid dimension. A method for constructing an optimal parametrization grid having the maximum dimension provided that the modulus of continuity of the inverse operator does not exceed a given value is proposed. A numerical algorithm for calculating the modulus of continuity of the inverse operator and its modifications using Monte Carlo algorithms is presented, and the convergence of the algorithm is investigated. The proposed method is also applicable for calculating classical a posteriori error estimates. Numerical examples of nonlinear inverse problems of geoelectrics are given.

Keywords: inverse problem, modulus of continuity of an operator, a priori and a posteriori estimates, Monte Carlo, geoelectrics.

References

1. M. M. Lavrent'ev, *On Certain Ill-Posed Problems of Mathematical Physics* (Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1962) [in Russian].
2. V. K. Ivanov, "On Ill-Posed Problems," *Mat. Sb.* **61** (2), 211–223 (1963).
3. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications* (Nauka, Moscow, 1978; VSP Press, Utrecht, 2002).
4. A. B. Bakushinsky and A. V. Goncharky, *Ill-Posed Problems. Numerical Methods and Applications*. (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1989) [in Russian].
5. M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatskii, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis* (Nauka, Moscow, 1980; AMS Press, Providence, 1986).
6. O. V. Novik, *Mathematical Problems in the Reduction of the Number of Geophysical Data Necessary for Oil and Gas Exploration*, available from VIEMS, No. 485–MG (VIEMS Ross. Akad. Nauk, Moscow, 1987).
7. M. I. Shimelevich, *Optimization Algorithms for Solving the Inverse Problems of electromagnetic sounding*, available from VIEMS, No. 796–MG–89 (VIEMS Ross. Akad. Nauk, 1989).
8. M. I. Shimelevich, "Methods for Increasing the Stability of the Geoelectrics Inverse Problems on the Base of Neural Network Modeling," *Geofizika*, No. 4, 49–56 (2013).

9. M. I. Shimelevich, E. A. Osborne, I. E. Osborne, and E. A. Rodionov, "Numerical Methods for Estimating the Degree of Practical Stability of Inverse Problems in Geoelectrics," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Fiz. Zemli*, No. 3, 58–64 (2013) [*Izv., Phys. Solid Earth* **49** (3), 356–362 (2013)].
10. M. I. Shimelevich, E. A. Osborne, I. E. Osborne, and E. A. Rodionov, "The Neural Network Approximation Method for Solving Multidimensional Nonlinear Inverse Problems of Geophysics," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Fiz. Zemli*, No. 4, 100–109 (2017) [*Izv., Phys. Solid Earth* **53** (4), 588–597 (2017)].
11. A. V. Goncharskii and A. G. Yagola, "Uniform Approximation of Monotone Solutions of Ill-Posed Problems," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **184** (4), 771–773 (1969).
12. A. V. Goncharskii, A. M. Cherepashchuk, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Astrophysics* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
13. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow 1990) [in Russian].
14. A. G. Yagola and K. Yu. Dorofeev, "Sourcewise Representation and a Posteriori Error Estimates for Ill-Posed Problems," in *Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications* (AMS Press, Providence, 2000), Vol. 25, pp. 543–550.
15. K. Yu. Dorofeev and A. G. Yagola, "The Method of Extending Compacts and a Posteriori Error Estimates for Nonlinear Ill-Posed Problems," *J. Inverse Ill Posed Probl.* **12** (6), 627–636 (2004).
16. A. S. Leonov, "Which of Inverse Problems Can Have a Priori Approximate Solution Accuracy Estimates Comparable in Order with the Data Accuracy," *Sib. Zh. Vych. Mat.* **17** (4), 339–348 (2014) [*Numer. Anal. Appl.* **7** (4), 284–292 (2014)].
17. A. S. Leonov, "A Posteriori Accuracy Estimations of Solutions to Ill-Posed Inverse Problems and Extra-Optimal Regularizing Algorithms for Their Solution," *Sib. Zh. Vych. Mat.* **15** (1), 85–102 (2012) [*Numer. Anal. Appl.* **5** (1), 68–83 (2012)].
18. A. B. Bakushinskii and A. S. Leonov, "New a Posteriori Error Estimates for Approximate Solutions to Irregular Operator Equations," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 359–369 (2014).
19. V. I. Dmitriev, *Inverse Problems of Geophysics* (MAKS Press, Moscow, 2012) [in Russian].
20. V. B. Glasko and V. I. Starostenko, "Regularizing Algorithm for Solving a System of Nonlinear Equations in Inverse Problems of Geophysics," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 3, 44–53 (1976).
21. V. N. Strakhov, "On the Parameterization in the Inverse Problems of Gravimetry," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 6, 39–49 (1978).
22. M. I. Shimelevich and E. A. Osborne, "Application of the Optimization Approach in the Interpretation of MTS Data," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Geol. Razved.*, No. 2, 109–115 (1997).
23. A. S. Leonov and A. G. Yagola, "Optimal Methods for the Solution of Ill-Posed Problems with Sourcewise Represented Solutions," *Fundam. Prikl. Mat.* **4** (3), 1029–1046 (1998).
24. L. A. Lyusternik and V. I. Sobolev, *A Short Course on Functional Analysis* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1982) [in Russian].
25. E. V. Tabarintseva, "Estimating the Accuracy of a Method of Auxiliary Boundary Conditions in Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Equation," *Sib. Zh. Vych. Mat.* **21** (3), 291–310 (2018) [*Numer. Anal. Appl.* **11** (3), 236–255 (2018)].
26. V. V. Vasin, "Modified Steepest Descent Method for Nonlinear Irregular Operator Equations," *Dokl. Akad. Nauk* **462** (3), 264–267 (2015) [*Dokl. Math.* **91** (3), 300–303 (2015)].
27. M. I. Shimelevich, "Algorithms for Calculating the Modulus of Continuity of the Inverse Operator and Its Modifications Using Monte Carlo Methods as Applied to Geoelectrics," in *Proc. Int. Conf. on Advanced Mathematics, Computations and Applications, Novosibirsk, Russia, July 1–5, 2019* (Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk, 2019).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=41893341>. Cited October 14, 2020.
28. V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I* (Fazis, Moscow, 1997; Springer, Berlin, 2004).
29. I. M. Sobol', *Monte Carlo Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
30. A. N. Shiryaev, *Probability* (MCCME, Moscow, 2007; Springer, New York, 2008).
31. S. M. Ermakov, *Monte Carlo Method and Related Topics* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
32. I. M. Varentsov, V. A. Kulikov, A. G. Yakovlev, and D. V. Yakovlev, "Possibilities of Magnetotelluric Methods in Geophysical Exploration for Ore Minerals," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Fiz. Zemli*, No. 3, 9–29 (2013) [*Izv., Phys. Solid Earth* **49** (3), 309–328 (2013)].

33. A. N. Tikhonov, "Determining the Electrical Characteristics of Deep-Lying Layers in the Earth's Crust," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **73** (2), 295–297 (1950).
34. H. Wiese, *Geomagnetische Tiefentellurik* (Geomagnet.Inst. Deutsch. Akad. Wiss., Berlin, 1965).
35. U. Schmucker, *Anomalies of Geomagnetic Variations in the Southwestern United States* (Univ. California Press, Berkley, 1970).
36. P. Weidelt, "The Inverse Problem of Geomagnetic Induction," *Zeitschrift für Geophysik* **38**, 257–289 (1972).
37. M. N. Berdichevskii and M. S. Zhdanov, *Interpretation of Earth's Electromagnetic Field Anomalies* (Nedra, Moscow, 1981) [in Russian].
38. M. N. Berdichevskii and V. I. Dmitriev, *Models and Methods of Magnetotellurics* (Nauch. Mir, Moscow, 2009) [in Russian].
39. M. S. Zhdanov, *Theory of Inverse Problems and Regularization in Geophysics* (Nauch. Mir, Moscow, 2007) [in Russian].
40. G. W. Hohmann, "Three-Dimensional EM Modeling," *Geophys. Surv.* **6**, 27–53 (1983).
41. V. I. Dmitriev, "Direct and Inverse Problems in Electromagnetic Sounding of Three-Dimensional Heterogeneous Medium," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Fiz. Zemli*, No. 3, 46–51 (2013) [*Izv., Phys. Solid Earth* **49** (3), 344–349 (2013)].
42. V. I. Dmitriev, *Electromagnetic Fields in Nonhomogeneous Media* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1969) [in Russian].
43. V. I. Dmitriev and E. V. Zakharov, *Integral Equation Method in Computational Electrodynamics* (MAKS Press, Moscow, 2008) [in Russian].
44. D. B. Avdeev, "The Integral Equation Method for the Solution of Direct Problems in Geoelectrics," in *Electromagnetic Studies of the Earth's Interior* (Nauch. Mir, Moscow, 2005), pp. 11–32.
45. M. N. Berdichevskii and V. I. Dmitriev, "Inverse Problems of Magnetotellurics: A Modern Formulation," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Fiz. Zemli*, No. 4, 12–29 (2004) [*Izv., Phys. Solid Earth* **40** (4), 276–292 (2004)].
46. V. V. Spichak, "Magnetotelluric Fields in Three-Dimensional Geoelectric Models," (Nauch. Mir, Moscow, 1999) [in Russian].
47. M. N. Yudin, "Calculation of the Magnetotelluric Field by the Grid Method in Three-Dimensional Inhomogeneous Media" in *Marine Electromagnetic Studies* (IZMIR AN SSSR, Moscow, 1980), pp. 96–101.
48. M. N. Yudin, "Alternating Method for the Numerical Solution of Direct Geoelectric Problems," in *Mathematical Methods in Geoelectrics* (IZMIR AN SSSR, Moscow, 1982), pp. 47–52.
49. V. I. Dmitriev, "Two-Dimensional Inverse Problem of Magnetotelluric Sounding in a Nonhomogeneous Medium," in *Applied Mathematics and Informatics* (MAKS Press, Moscow, 2017), Vol. 56, pp. 5–17.
50. V. I. Dmitriev, "Unique Solvability of the Three-Dimensional Inverse Problem of Electromagnetic Sounding," in *Applied Mathematics and Informatics* (MAKS Press, Moscow, 2018), Vol. 57, pp. 5–20.
51. M. V. Dmitrieva, *Numerical Modeling of Physical Processes in the Plasma of Tokamak Installations under the Influence of Electromagnetic Waves in the Alfvén Frequency Range*, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 1985).
52. S. C. Eisenstat, M. H. Schultz, and A. H. Sherman, "Algorithms and Data Structures for Sparse Symmetric Gaussian Elimination," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **2** (2), 225–237.
53. M. V. Dmitrieva, A. G. Elfimov, A. A. Ivanov, et al., *Numerical Simulation of Alfvén Plasma Heating in a Torus*, Preprint No. 51 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 1988).