

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v21r214

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ МИНКОВСКОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

О. А. Богоявленская¹

Функционалы Минковского являются важным инструментом для изучения морфологии пористых сред. Настоящая работа посвящена построению алгоритма вычисления функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений, возникающих, в частности, при описании динамики изменения порового пространства среды. В работе впервые программно реализован алгоритм вычисления функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений.

Ключевые слова: вычислительная геометрия, функционалы Минковского, морфология пористых сред.

1. Введение. Функционалы Минковского играют все более заметную роль в приложениях благодаря тому, что могут быть использованы для эффективной оценки морфологии материалов [1–4]. Например, пусть в трехмерном случае имеется четыре функционала Минковского: объем, площадь поверхности среды, интеграл от средней кривизны по поверхности и эйлерова характеристика. Первые два функционала, по существу, оценивают пористость и удельную площадь поверхности материала, а интеграл от средней кривизны характеризует тип системы пор: интеграл положителен при преобладании корпускулярной системы пор и отрицателен при доминировании губчатой системы пор (если среднюю кривизну считать относительно внешней нормали). Эйлерова характеристика оценивает топологию среды: в приложениях положительный знак эйлеровой характеристики свидетельствует о преобладании изолированных пор, отрицательный — о высокой степени связанности пор и большом количестве каналов между ними. С точки зрения теории случайных сред функционалы Минковского не определяются только первыми несколькими многоточечными корреляционными функциями, но зависят от всех n -точечных корреляционных функций, поэтому несут дополнительную информацию по отношению к часто используемым в приложениях 2- и 3-точечным корреляционным функциям.

Эффективность использования функционалов Минковского обусловлена быстротой алгоритмов их вычисления — для цифровых пространств, например, существующие алгоритмы линейны по числу вокселей/пикселей области рассматриваемого цифрового изображения [5]. Для двумерных и трехмерных цифровых изображений вычисление сводится к проходу по целочисленным вершинам и суммированию с весами, которые заранее посчитаны, например, в [1, 5].

В некоторых приложениях возникает необходимость оценки морфологических свойств четырехмерных цифровых изображений. Как правило, это связано с ситуацией, когда цифровое изображение среды (матрица материала) подвергается изменению во времени, например взаимодействует с химически активным флюидом [6]. Для характеристики всего процесса изменения можно организовать четырехмерное изображение, порожденное трехмерными слоями в последовательные моменты дискретного времени, и его функционалы Минковского можно использовать для исследования динамики процесса изменения порового пространства.

На данный момент в литературе не описаны алгоритмы вычисления функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений. Детальному описанию такого алгоритма, пригодного для практической реализации, посвящена предлагаемая статья.

2. Определение и основные свойства функционалов Минковского. Для выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^4$ рассмотрим множество K_ε , состоящее из тех точек, которые находятся на расстоянии от K меньше, чем $\varepsilon > 0$. Функционалы Минковского возникают как коэффициенты $V_\nu(K)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, в

¹ Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, проспект Коптога, 4, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: k.olka.06@gmail.com

разложении объема K_ε по степеням ε (формула Штейнера [7]):

$$\text{Vol}(K_\varepsilon) = V_0(K) + 8V_1(K)\varepsilon + 6\pi V_2(K)\varepsilon^2 + \frac{16\pi}{3} V_3(K)\varepsilon^3 + \frac{\pi^2}{2} V_4(K)\varepsilon^4.$$

Здесь $V_0(K)$ — это четырехмерный объем K , $8V_1(K)$ — трехмерная площадь поверхности K , эйлерова характеристика K : $\pi^2 V_4(K)/2 = \chi(K) = 1$, а оставшиеся функционалы V_2, V_3 в случае гладкой границы ∂K могут быть интерпретированы следующим образом:

$$V_2(K) = \frac{1}{12\pi} \int_{\partial K} (k_1 + k_2 + k_3) d\mu, \quad V_3(K) = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial K} (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1) d\mu,$$

где k_1, k_2, k_3 — главные кривизны поверхности ∂K и μ — трехмерная форма объема на поверхности ∂K (обобщение формулы Крофтона [7]). Функционалы Минковского обладают следующими важными свойствами [1]:

- 1) *аддитивности* — если K_1, K_2 и $K_1 \cap K_2$ выпуклы, то

$$V_\nu(K_1 \cup K_2) = V_\nu(K_1) + V_\nu(K_2) - V_\nu(K_1 \cap K_2);$$

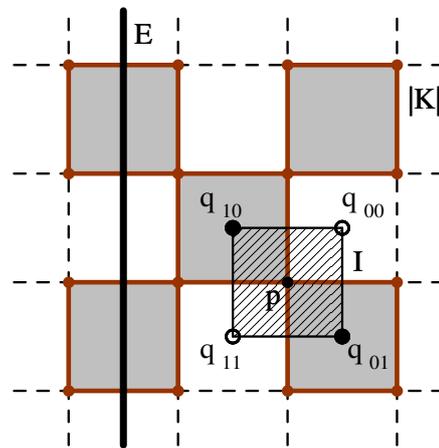
- 2) *инвариантности* — для любого движения $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ и для любого выпуклого множества K выполнено $V_\nu(\varphi(K)) = V_\nu(K)$;
- 3) *непрерывности* — если $K_n \rightarrow K$ в метрике Хаусдорфа для выпуклых множеств K_n и K , то $V_\nu(K_n) \rightarrow V_\nu(K)$.

Примечательна теорема Хадвигера [8], которая говорит, что любой функционал $F(K)$, удовлетворяющий перечисленным выше свойствам аддитивности, инвариантности и непрерывности является линейной комбинацией функционалов Минковского $F(K) = \sum_\nu c_\nu V_\nu(K)$, где c_ν не зависят от K (естественно, эта теорема верна для любой размерности).

Для приложений необходимо расширить определение функционалов Минковского на более широкий класс множеств, чем класс выпуклых подмножеств. Обычно таким классом выступает класс множеств, которые можно представить как конечное объединение выпуклых подмножеств [2]. При этом удается продолжить определение функционалов Минковского на рассмотренный класс. Однако самым удобным для приложений является класс цифровых изображений, который мы рассматриваем в следующем разделе настоящей статьи.

3. Функционалы Минковского цифровых пространств. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 рассмотрим решетку \mathbb{Z}^4 , состоящую из точек с целочисленными координатами. Решетка \mathbb{Z}^4 определяет разбиение всего пространства \mathbb{R}^4 на четырехмерные *воксели* — кубы с единичной длиной ребра, вершины которых расположены в узлах решетки \mathbb{Z}^4 (см. рисунок). Очевидно, что любые два вокселя могут пересекаться лишь по целой трехмерной грани, двумерной грани, ребру либо по вершине. *Цифровым пространством* размерности 4 называется конечный набор 4-мерных вокселей $K = \{Q_1, \dots, Q_N\}$. Каждому цифровому пространству K отвечает подмножество $|K| \subset \mathbb{R}^4$, являющееся объединением всех вокселей $Q_i \in K$ и наделенное индуцированной из евклидова пространства топологией [9]. Удобно считать, что $|K|$ содержится в некоторой ограниченной области M пространства \mathbb{R}^4 (например, в четырехмерном параллелепипеде).

Плоскость E_ν размерности ν в \mathbb{R}^4 назовем *допустимой*, если она параллельна какому-то ν из четырех осей координат и проходит через точку с полуцелыми координатами (см. рисунок). Обозначим через Π_ν



Фрагмент цифрового изображения, иллюстрация в размерности два: бинарный куб I в окрестности точки p состоит из четырех точек, при этом $a_{00} = a_{11} = 0$, $a_{01} = a_{10} = 1$

Плоскость E_ν размерности ν в \mathbb{R}^4 назовем *допустимой*, если она параллельна какому-то ν из четырех осей координат и проходит через точку с полуцелыми координатами (см. рисунок). Обозначим через Π_ν

множество всех допустимых плоскостей. Функционалы Минковского цифрового изображения K могут быть определены следующим образом [3, 10]:

$$V_\nu(K) = \frac{\nu!(4-\nu)!}{24} \sum_{E_\nu} \chi(|K| \cap E_\nu), \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad V_4(K) = \chi(|K|),$$

где χ — эйлерова характеристика [9].

Определим бинарный куб $I = I^4 = (\mathbb{Z}_2)^4$ (мы рассматриваем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ как группу по сложению по модулю 2):

$$I = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_4) \mid \sigma_i \in \mathbb{Z}_2, i = 1, \dots, 4 \right\}.$$

Гранью $F \subset I$ коразмерности r будем называть подмножество куба

$$F = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_4) \in I \mid \sigma_{i_1} = \varepsilon_1, \dots, \sigma_{i_r} = \varepsilon_r \right\}$$

для некоторого набора индексов $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq 4$ и некоторого набора чисел ε_i , принимающих значение 0 или 1. Аналогичным образом определяется грань $F' \subset F$ грани F коразмерности s , которая является гранью коразмерности $r+s$ первоначального куба I . Множество всех подграней коразмерности r грани F будем обозначать через $\partial_r F$.

Для любой целочисленной точки $p = (m_1, \dots, m_4) \in \mathbb{Z}^4$ мы отождествим множество всех 16 соседних вокселей с I^4 очевидным образом, задав центры этих вокселей как

$$q_\sigma = q_{\sigma_1, \dots, \sigma_4} = p + \frac{1}{2} \left((-1)^{\sigma_1}, \dots, (-1)^{\sigma_4} \right) \mapsto \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_4) \in I.$$

Таким образом, локальная структура цифрового пространства K в окрестности целочисленной точки p может быть представлена набором величин $a_\sigma = a_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}$, принимающих значение 1 (если соответствующий воксель с центром q_σ лежит в K) или 0 в противном случае (см. рисунок).

Рассмотрим грань $F \subset I$ коразмерности r . Припишем этой грани значение a_F , равное 0 или 1 следующим образом. Если $r = 4$, то $F = \{\sigma\} \subset I$ (вершина бинарного куба) и значение $a_F = a_\sigma$ уже определено выше. Если $r > 0$, то положим $a_F = 1$, если существует вершина $\sigma \in F$ такая, что $a_\sigma = 1$. В противном случае полагаем $a_F = 0$. Теперь положим

$$\theta(F) = \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^i}{2^i} \sum_{F' \in \partial_i F} a_{F'}. \quad (1)$$

Для $p \in \mathbb{Z}^4$ и $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ определим следующую величину:

$$\chi_\nu(p) = \sum_{F \in \partial_{4-\nu} I} \frac{\theta(F)}{2^{4-\nu}}. \quad (2)$$

Основным теоретическим результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Для цифрового изображения K , целиком расположенного в ограниченной области $M \subset \mathbb{R}^4$, функционалы Минковского V_ν , $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, могут быть вычислены в соответствии со следующей формулой:*

$$V_\nu(K) = \frac{\nu!(4-\nu)!}{24} \sum_{p \in \mathbb{Z}^4 \cap M} \chi_\nu(p). \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\nu = 4$. Тогда в (2) сумма состоит из одного слагаемого, отвечающего грани F , совпадающей со всем кубом I , и $\chi_4(p) = \theta(I)$. В (1) суммирование ведется по всем граням F' куба I коразмерности i . Фиксируем i . Если $a_{F'} = 1$, то одна из вершин F' лежит в вокселе, принадлежащем K . Следовательно, грань G этого вокселя, ортогональная к F' и пересекающая F' в центре, также лежит в $|K|$ и имеет размерность i . У грани G ровно 2^i вершин, следовательно она возникнет в сумме (3) ровно 2^i раз. Итого (с учетом дробного коэффициента в (1)), грань G войдет в сумму (3) ровно один раз со знаком $(-1)^i$. Повторив те же рассуждения для каждой грани F' , мы получим, что сумма (3) состоит из общего числа всех граней $|K|$ размерности i с учетом знака $(-1)^i$ — это и есть определение эйлеровой характеристики $\chi(|K|) = V_4(K)$.

Пусть теперь $0 \leq \nu \leq 3$. Выбор грани F в (2) означает выбор допустимой плоскости размерности ν , пересекающей воксели, соседние с точкой p : каждая такая плоскость пересекает I в точности по грани F коразмерности $4 - \nu$. Поскольку каждая такая грань F попадает ровно в $2^{4-\nu}$ плоскостей, то формула (2), по существу, проводит суммирование по всем допустимым $E_\nu \in P_\nu$. Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что для каждой такой E_ν формула (3) дает эйлерову характеристику $\chi(E_\nu \cap |K|)$, что доказывает теорему. \square

4. Описание алгоритма вычисления функционалов Минковского четырехмерных цифровых пространств. Изначально для построения алгоритма вычисления функционалов Минковского цифровых пространств перед автором стояла возможность воспользоваться идеей работы [1] и попытаться перенести ее из размерности три в размерность четыре. Коротко опишем эту идею. Из формулы (3) (а вернее, ее аналога в пространстве \mathbb{R}^3) следует, что для вычисления функционала Минковского данного цифрового изображения необходимо проделать вычисление локальных величин χ_ν , зависящих только от типа окрестности точки, и затем их просуммировать. В [1] авторы пошли по следующему пути: они “вручную” провели классификацию всех 256 возможных типов окрестностей с точностью до симметрии (их оказалось 22) и для каждого типа указали χ_ν . Подобная классификация с точностью до симметрии в размерности четыре является нетривиальной теоретической задачей, которая осложняется невозможностью визуализации окрестности четырехмерного цифрового изображения. Однако для практической реализации такая классификация, с моей точки зрения, является излишней. В данной работе приводится алгоритм, вычисляющий χ_ν для всех типов окрестностей. Это вычисление необходимо провести один раз перед вычислением функционалов Минковского, и в дальнейшем происходит суммирование по формуле (3) с использованием посчитанных коэффициентов. Это тем более представляется разумным, поскольку размер самой таблицы коэффициентов χ_ν в размерности четыре становится существенно больше, и неудобно приводить данные вычислений в статье — гораздо удобнее привести алгоритм их вычисления. Далее следует описание алгоритма вычисления коэффициентов χ_ν и самих функционалов Минковского при помощи этих коэффициентов.

Алгоритм 1. Перебор подмножеств множества $S = \{a_1, \dots, a_n\}$

```

1:  $S \leftarrow \emptyset$ ;
2: while  $a_{n+1} \notin S$  do
3:    $console \leftarrow S$ ;
4:    $i \leftarrow 1$ ;
5:   while  $a_i \in S$  do
6:      $S \leftarrow S \setminus \{a_i\}$ ;
7:      $i \leftarrow i + 1$ 
8:   end while
9:    $S \leftarrow S \cup \{a_i\}$ ;
10: end while
11: return  $K$ 

```

Вершину бинарного куба I^4 мы представляем мультииндексом $K = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in \mathbb{Z}_2^4$. Все такие мультииндексы взаимно однозначно перечисляются целыми числами от 0 до 15. Функция $\sigma \mapsto a_\sigma$, определяющая локальную структуру цифрового пространства, задается массивом $A[K]$, состоящим из значений 0 или 1. Для реализации вычислений по формулам (1)–(3) необходимо создать структуру, способную работать с гранями куба I^4 всех размерностей. Пусть $S = \{1, 2, 3, 4\}$ — множество из четырех элементов, нумерующих координатные оси в \mathbb{R}^4 . Каждое подмножество $F \subset S$ задает набор граней, ортогональных координатным осям с номерами из F . Значит, $\#F$ (мощность множества) равна коразмерности каждой из этих граней. Выбор любого элемента F равносильен выбору конкретной грани, и этот выбор может быть сделан указанием мультииндекса I , состоящего из последовательности $\#F$ нулей или единиц. Поэтому грань определяется парой (F, I) , где $F \subset S$ и $I = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\#F}) \in \mathbb{Z}_2^{\#F}$. Чтобы работать с функциями на гранях, мы заводим структуру вида $Name[F].face[I]$, где $Name$ — имя структуры.

При реализации алгоритма нам требуется перебор подмножеств данного множества. Подобные ал-

Алгоритм 2. Вычисление значений a_F на всех гранях F

```

1: function FaceIndex(A)
2:   for  $F \subset S$  do
3:      $B[F].face \leftarrow Null$ ;
4:      $k = \#F$ ;
5:      $F' = S \setminus F$ ;
6:      $m = \#F'$ 
7:     for  $I = [i_1, \dots, i_k] \in \mathbb{Z}_2^k$  do
8:        $faceState \leftarrow false$ ;
9:       for  $J = [j_1, \dots, j_m] \in \mathbb{Z}_2^m$  do
10:         $K \leftarrow Collect(F, I, F', J)$ ;
11:        if  $A[K] = 1$  then
12:           $faceState \leftarrow true$ ;
13:        end if
14:      end for
15:      if  $faceState$  then
16:         $B[F].face[I] \leftarrow 1$ ;
17:      end if
18:    end for
19:  end for
20:  return  $B$ 
21: end function

```

Алгоритм 3. Функция $Collect$, собирающая мультииндекс

```

1: function Collect( $F, I, F', J$ )
2:    $K \leftarrow Null$ ;
3:    $k \leftarrow 0$ ;
4:    $m \leftarrow 0$ ;
5:   for  $i \in S$  do
6:     if  $i \in F$  then
7:        $k \leftarrow k + 1$ ;
8:        $K[i] \leftarrow I[k]$ ;
9:     else
10:       $m \leftarrow m + 1$ ;
11:       $K[i] \leftarrow J[m]$ ;
12:    end if
13:  end for
14:  return  $K$ 
15: end function

```

горитмы давно известны [11], но для полноты мы приводим алгоритм 1 перебора подмножеств множества S . В этом алгоритме элемент a_{n+1} является фиктивным элементом, введенным для удобства.

В разделе 3 мы ввели функцию a_F , определенную на всех гранях бинарного куба I^4 . Алгоритм 2 производит вычисление этой функции, которая представлена структурой B . Отметим, что во внутреннем цикле происходит перебор мультииндексов J , отвечающих элементам дополнительного к F в S множества F' , что означает проход по всем вершинам грани (F, I) .

Алгоритм 2 использует функцию $Collect$, которая собирает (F, I, F', J) в один мультииндекс, отвечающий выбранной при помощи указания J вершине куба I^4 . Алгоритм 3 описывает эту функцию.

При помощи функции a_F , представленной структурой B , вычисляется функция θ из формулы (1), что описывается в алгоритме 4.

Алгоритм 4. Вычисление функции θ

```

1: function Construct_θ(B)
2:   for  $F \subset S$  do
3:      $k = \#F$ ;
4:     for  $I = [i_1, \dots, i_k] \in \mathbb{Z}_2^k$  do
5:        $\theta[F].\text{face}[I] \leftarrow 0$ ;
6:       for  $i \in \{0, \dots, k\}$  do
7:          $sum \leftarrow 0$ 
8:         for  $F' \subset F$  do
9:           if  $\#F' = i$  then
10:             $sum \leftarrow sum + B[F'].\text{face}[I]$ ;
11:          end if
12:        end for
13:         $\theta[F].\text{face}[I] \leftarrow \theta[F].\text{face}[I] + sum \cdot (-1)^i / 2^i$ ;
14:      end for
15:    end for
16:  end for
17:  return  $\theta$ 
18: end function

```

Алгоритм 5. Вычисление коэффициентов χ_p

```

1: function Construct_χ(θ)
2:    $\chi \leftarrow$  0 to 4 array of zeros;
3:   for  $\nu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  do
4:     for  $F \subset S$  do
5:       if  $\#F = 4 - \nu$  then
6:         for  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathbb{Z}_2^k$  do
7:            $\chi[\nu] \leftarrow \chi[\nu] + \theta[F, I] / 2^{4-\nu}$ ;
8:         end for
9:       end if
10:    end for
11:  end for
12:  return  $\chi$ 
13: end function

```

Алгоритм 6. Нахождение таблицы коэффициентов X для функционалов Минковского

```

1:  $X \leftarrow$  (0 to 65535)  $\times$  (0 to 4) array of zeros;
2: for  $A \in \{0, 1, \dots, 65535\} = \mathbb{Z}_2^{16}$  do
3:    $B \leftarrow \text{FaceIndex}(A)$ ;
4:    $\theta \leftarrow \text{Construct}_\theta(B)$ ;
5:    $\chi \leftarrow \text{Construct}_\chi(\theta)$ ;
6:    $X(A, -) \leftarrow \chi$ ;
7: end for
8: return  $X$ 

```

Алгоритм 5 описывает функцию, вычисляющую массив χ из пяти элементов, представляющих коэффициенты χ_p — формула (2).

Предварительный расчет всех коэффициентов χ_p , о котором шла речь выше, может быть представлен в виде алгоритма 6. Массив A , определяющий локальную структуру цифрового изображения, может

Алгоритм 7. Вычисление функционалов Минковского

```

1:  $MF \leftarrow 0$  to 4 array of zeros
2: for  $(i, j, k, l) \in \{0, \dots, N_1\} \times \{0, \dots, N_2\} \times \{0, \dots, N_3\} \times \{0, \dots, N_4\}$  do
3:    $A \leftarrow 0$  to 15 array of zeros;
4:   for  $K = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in \mathbb{Z}_2^4$  do
5:      $A[K] \leftarrow M[i + \sigma_1, j + \sigma_2, k + \sigma_3, l + \sigma_4]$ ;
6:   end for
7:    $MF \leftarrow MF + X(A, -)$ ;
8: end for
9: for  $\nu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  do
10:   $MF[\nu] \leftarrow MF[\nu] \cdot \nu!(4 - \nu)!/24$ ;
11: end for
12: return  $MF$ 

```

быть представлен как мультииндекс $L = (i_1, \dots, i_{16}) \in \mathbb{Z}_2^{16}$, занумерованный целыми числами от 0 до $2^{16} - 1 = 65535$. Поэтому итоговая таблица коэффициентов хранится в массиве X размера 65536×5 .

Опишем теперь алгоритм вычисления функционалов Минковского $4D$ цифровых пространств с использованием предварительно построенного массива X . Допустим, что цифровое пространство задано как массив M размера $N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$, заполненный элементами двух видов: 0 (данный воксель лежит в изображении) или 1 (данный воксель отсутствует в изображении). Окаймим массив нулями, после чего можно считать, что размеры массива $(N_1 + 2) \times (N_2 + 2) \times (N_3 + 2) \times (N_4 + 2)$ и на границе расположены нули. Формула (3) реализована в алгоритме 7, результатом является массив MF , содержащий 5 функционалов Минковского.

Обсудим вычислительную сложность представленных алгоритмов. Если область M состоит из N узлов, то потребуется $17N + 5$ операций (для каждого узла нужно 16 операций для определения типа окрестности и одна операция суммирования).

Оценим количество операций, необходимое для вычисления $\chi_\nu(p)$ для каждого из типов окрестностей целочисленного узла p . Требуется перебрать

$$2^{4-\nu} \frac{24}{\nu!(4-\nu)!}$$

граней размерности ν куба I . Для каждой грани надо перебрать все ее подграни, число которых равно

$$\sum_{i=0}^{\nu} 2^{\nu-i} \frac{\nu!}{i!(\nu-i)!}.$$

Итоговая сложность равна

$$\sum_{\nu=0}^4 2^{4-\nu} \frac{24}{(4-\nu)!} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{2^{\nu-i}}{i!(\nu-i)!} < 6144$$

для каждого из 2^{16} типов окрестностей узлов.

Таким образом, требуемое число операций для построения функционалов Минковского цифрового $4D$ изображения можно оценить как $\sim 17N$.

Работа поддержана Программой фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314-2019-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arns C.H., Knackstedt M.A., Pinczewski W.V., Mecke K.R. Euler–Poincaré characteristics of classes of disordered media // Phys. Rev. E. 2001. **63**. doi: 10.1103/PhysRevE.63.031112.
2. Arns C.H., Knackstedt M.A., Mecke K.R. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures // Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects. 2004. **241**, N 1–3. 351–372.
3. Mecke K.R. Additivity, convexity, and beyond: applications of Minkowski functionals in statistical physics // Lecture Notes in Physics, Vol. 554. Berlin: Springer, 2000. 111–184.

4. Bazaikin Ya., Gurevich B., Iglauer S., Khachkova T., Kolyukhin D., Lebedev M., Lisitsa V., Reshetova G. Effect of CT image size and resolution on the accuracy of rock property estimates // Journal of Geophysical Research — Solid Earth. 2017. **122**, N 5. 3635–3647.
5. Базайкин Я.В. Лекции по вычислительной топологии. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2017.
6. Хачкова Т.С., Базайкин Я.В., Лисица В.В. Применение методов вычислительной топологии для анализа изменения порового пространства породы в процессе химического растворения // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**. 41–55.
7. Santaló L.A. Integral geometry and geometric probability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
8. Hadwiger H. Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin: Springer, 1957.
9. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
10. Mecke K. Integralgeometrie in der Statistischen Physik: Perkolation, komplexe Flüssigkeiten und die Struktur des Universums. Frankfurt: Deutsch, 1994.
11. Reingold E.M., Nievergelt J., Deo N. Combinatorial algorithms. Theory and practice. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977.

Поступила в редакцию
12 декабря 2019

Computing the Minkowskii Functionals for Four-Dimensional Digital Images

O. A. Bogoyavlenskaya¹

¹ Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences;
Acad. Koptyug Prospekt 4, 630090 Novosibirsk, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail:
bogoyavlenskaya@math.nsc.ru

Received December 12, 2019

Abstract: The Minkowskii functionals are important for studying the morphology of porous media. This paper is devoted to constructing an algorithm for computing the Minkowskii functionals for four-dimensional digital images used to describe the dynamics of porous media. This algorithm is implemented as a software package.

Keywords: computing geometry, Minkowskii functionals, morphology of porous media.

References

1. C. H. Arns, M. A. Knackstedt, W. V. Pinczewski, and K. R. Mecke, “Euler–Poincaré Characteristics of Classes of Disordered Media,” Phys. Rev. E **63** (2001). doi: 10.1103/PhysRevE.63.031112
2. C. H. Arns, M. A. Knackstedt, and K. R. Mecke, “Characterisation of Irregular Spatial Structures by Parallel Sets and Integral Geometric Measures,” Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects **241** (1–3), 351–372 (2004).
3. K. R. Mecke, *Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of Minkowski Functionals in Statistical Physics* in *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin, 2000), Vol. 554, pp. 111–184.
4. Y. Bazaikin, B. Gurevich, S. Iglauer, et al., “Effect of CT Image Size and Resolution on the Accuracy of Rock Property Estimates,” J. Geophys. Res. Solid Earth **122** (5), 3635–3647 (2017).
5. Ya. V. Bazaikin, *Lectures on Computational Topology* (Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk, 2017) [in Russian].
6. T. S. Khachkova, Ya. V. Bazaikin, and V. V. Lisitsa, “Use of the Computational Topology to Analyze the Pore Space Changes during Chemical Dissolution,” Vychisl. Metody Programm. **21**, 41–55 (2020).
7. L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004).
8. H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Springer, Berlin, 1957).
9. A. T. Fomenko and D. B. Fuks, *A Course in Homotopic Topology* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
10. K. Mecke, *Integralgeometrie in der Statistischen Physik: Perkolation, komplexe Flüssigkeiten und die Struktur des Universums* (Deutsch, Frankfurt, 1994).
11. E. M. Reingold, J. Nievergelt, and N. Deo, *Combinatorial Algorithms. Theory and Practice* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977).