

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v21r318

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЛЬЕФА ДНА  
В ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМАХ**

**А. И. Сухинов<sup>1</sup>, А. Е. Чистяков<sup>2</sup>, Е. А. Проценко<sup>3</sup>,  
В. В. Сидорякина<sup>4</sup>, С. В. Проценко<sup>5</sup>**

Предложена нестационарная 2D-модель транспорта донных отложений в прибрежной зоне мелководных водоемов, дополненная уравнениями Навье–Стокса, неразрывности и состояния водной среды. Дискретная модель транспорта наносов получена в результате аппроксимации соответствующей линеаризованной непрерывной модели. Поскольку задачи прогнозирования транспорта наносов требуют решения в реальном или ускоренном масштабах времени, на сетках, включающих  $10^6$ – $10^9$  узлов, необходима разработка параллельных алгоритмов задач гидродинамики на системах с массовым параллелизмом. Представлены результаты работы созданного эффективного программного обеспечения для выполнения гидродинамических вычислительных экспериментов, позволяющие проводить численное моделирование деформации дна в прибрежной зоне водоема. Приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** вычислительная гидродинамика, параллельные вычисления, гидрология, математическая модель, динамика морских наносов, рельеф дна.

**Введение.** Решение многих прикладных задач гидрологии требует инструментов для проведения исследований по трансформации рельефа береговой зоны с учетом большого числа физических факторов. Изучение динамики изменения донной поверхности вследствие процессов транспорта наносов и волнового воздействия на основе использования математических моделей можно отнести к интенсивно развивающейся научной области. Из-за сложной природы этих процессов, в частности транспорта донных отложений, на сегодняшний день не существует универсальных моделей и методов исследования. В работах [1–4] предложены эвристические модели, позволившие получить качественные оценки процессов транспорта наносов с учетом движения водной среды. Однако область применения наиболее широко используемых эвристических моделей часто ограничена с точки зрения гидравлических и седиментологических особенностей и потому вряд ли может быть применена к сложным ситуациям, когда одновременно происходят различные виды морфо- и литодинамических процессов. Значительный прогресс достигнут при изучении общих свойств и закономерностей моделирования динамики изменения донной поверхности при исследовании конкретных гидрологических объектов [5–7]. Особую трудность представляет моделирование рельефа дна прибрежных систем, где наиболее сильно проявляется влияние следующих факторов: волноприбойных явлений, приливов и отливов, вдольбереговых и поперечных течений, постепенное усиление турбулизации вод, взмучивание и перемещения донных наносов [8, 9]. В прибрежных районах индуцированные волной орбитальные скорости вместе с индуцированными волнами стационарными течениями являются доминирующими движущими силами транспорта наносов. Чем дальше в направлении

<sup>1</sup> Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону; чл.-корр. РАН, профессор, зав. кафедрой, e-mail: sukhinov@gmail.com

<sup>2</sup> Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону; профессор, e-mail: cheese\_05@mail.ru

<sup>3</sup> Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал Ростовского государственного экономического университета), ул. Инициативная, 48, 347936, г. Таганрог; доцент, e-mail: eapros@rambler.ru

<sup>4</sup> Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал Ростовского государственного экономического университета), ул. Инициативная, 48, 347936, г. Таганрог; зав. кафедрой, доцент, e-mail: cvv9@mail.ru

<sup>5</sup> Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону; аспирант, e-mail: gab55555@rambler.ru

моря, тем слабее влияние этих факторов. За пределами зоны прибоя волновые потоки не возникают, и влияние колебательных потоков волн становится менее важным. Отчетливые морфодинамические эффекты, наблюдаемые в переходной области между зоной прибоя и глубоким морем, где гидродинамическое воздействие очень слабое, являются результатом длительных литодинамических процессов низкой интенсивности. Поэтому в этой части водоема становится весьма затруднительным проведение экспериментальных и теоретических исследований по моделированию появления и движения песчаных пластов или накопления донных отложений. В работах [10–12] были предложены и развиты аналитические формулы транспорта донных наносов в прибрежных районах, проверка работоспособности которых показала, что получаемые по ним расчетные данные хорошо согласуются с экспериментом. Сравнительный анализ ряда моделей (как двумерных, так и трехмерных) представлен в работе [13].

Рассмотренный в настоящей статье комплекс моделей имеет ряд особенностей, отличающих их от вышеупомянутых. Модель транспорта наносов учитывает две пространственные переменные, а также следующие физические параметры и процессы: пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна. Формирование волн и ветровых течений описывается на основе разработанного авторами комплекса 3D-гидродинамических моделей, которые учитывают наряду с общепринятыми факторами (такими как ветровое напряжение на свободной поверхности, трение о дно и др.) также испарение и выпадение осадков не только в уравнении неразрывности, но и в уравнениях движения водной среды, что является существенным для мелководных водоемов [14, 15].

Выполнены численные эксперименты для задач транспорта наносов и волновой гидродинамики на супервычислительной системе с распределенной памятью при относительно небольшом количестве ядер (до 2048). Кроме того, авторами исследовано распараллеливание численного решения этих задач на массивно-параллельных системах, содержащих многие десятки тысяч ядер, обеспечивающее высокую эффективность алгоритмов. Для решения системы сеточных уравнений использовался адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод. Приведены результаты численных экспериментов. Представленные модели и методы расчетов могут быть использованы для прогноза транспорта донных отложений в прибрежной зоне в течение длительных промежутков времени, составляющих десятки и сотни тысяч часов [16].

### 1. Непрерывная 2D-модель транспорта наносов.

**1.1. Математическое описание начально-краевой задачи транспорта наносов.** Рассматривается уравнение транспорта наносов [17]

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div} \left( k \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right) - \operatorname{div}(k \bar{\tau}_b). \quad (1)$$

Здесь  $H = H(x, y, t)$  — глубина водоема;  $\varepsilon$  — пористость донных материалов;  $\bar{\tau}_b$  — вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема;  $\tau_{bc}$  — критическое значение тангенциального напряжения;  $\tau_{bc} = a \sin \varphi_0$ ,  $\varphi_0$  — угол естественного откоса грунта в водоеме;  $k = k(H, x, y, t)$  — нелинейный коэффициент, определяемый соотношением

$$k = \frac{A \tilde{\omega} d}{((\rho_1 - \rho)gd)^\beta} \left| \bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1}, \quad (2)$$

где  $\rho_1, \rho$  — плотности частиц донного материала и водной среды соответственно;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\tilde{\omega}$  — частота волны;  $A$  и  $\beta$  — безразмерные постоянные;  $d$  — характерные размеры частиц грунта.

Первое слагаемое правой части формулы (1) описывает изменение рельефа дна за счет случайного перемещения частиц благодаря суммарному действию сил тяжести и волновому движению водной среды, имеющему стохастическую природу. Второе слагаемое — описывает направленное движение частиц наносов под действием касательного напряжения вблизи дна, вызванного движением водной среды.

Пусть  $D \subset R^2$  — область, где происходит процесс, и  $S$  ее граница, которая является кусочно-гладкой линией. Областью задания уравнения (1) считаем трехмерный цилиндр  $CY_T = D \times (0, T)$  высоты  $T$  с основанием  $D$ . Его граница состоит из боковой поверхности  $S \times [0, T]$  и двух оснований: нижнего  $\bar{D} \times \{0\}$  и верхнего  $\bar{D} \times \{T\}$ . Далее для простоты уравнение (1) рассматривается в прямоугольной области  $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$ .

Дополним уравнение (1) начальным условием, предполагая, что функция начальных условий принадлежит соответствующему классу гладкости:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad H_0(x, y) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \quad \text{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\bar{D}), \quad (x, y) \in \bar{D}. \quad (3)$$

Сформулируем условия на границе области  $\bar{D}$ :

$$|\bar{\tau}_b|_{y=0} = 0, \quad (4)$$

$$H(L_x, y, t) = H_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad (5)$$

$$H(0, y, t) = H_1(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad (6)$$

$$H(x, 0, t) = H_3(x), \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad (7)$$

$$H(x, L_y, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x. \quad (8)$$

Дополнительно к граничным условиям (4)–(8) предполагаем выполнение условий их гладкости — существование непрерывных производных на границе области  $D$ :

$$\text{grad}_{(x,y)} H \in C(\overline{CY_T}) \cap C^1(CY_T).$$

Условие невырожденности оператора задачи имеет вид

$$k \geq k_0 = \text{const} > 0, \quad \forall (x, y) \in \bar{D} \quad 0 < t \leq T.$$

Вектор тангенциального напряжения на дне выражается с использованием единичных ортов системы координат естественным образом:

$$\bar{\tau}_b = \tau_{bx}\bar{i} + \tau_{by}\bar{j}, \quad \tau_{bx} = \tau_{bx}(x, y, t), \quad \tau_{by} = \tau_{by}(x, y, t).$$

**1.2. Построение линеаризованной начально-краевой задачи транспорта наносов.** Построим линеаризованную на равномерной временной сетке  $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\}$  цепочку задач транспорта наносов [18, 19], аппроксимирующих с погрешностью  $O(\tau)$  в пространстве  $L_1$  исходную начально-краевую задачу (1)–(8). Введем обозначения:

$$k^{(n-1)} \equiv \frac{A\tilde{\omega}d}{((\rho_1 - \rho)gd)^\beta} \left| \bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}) \right|^{\beta-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда уравнение (1) после линеаризации запишем в виде

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \text{div} \left( k^{(n-1)} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H^{(n)} \right) - \text{div} \left( k^{(n-1)} \bar{\tau}_b \right), \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (9)$$

и дополним его начальными условиями

$$H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y), \quad H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad n = 2, \dots, N. \quad (10)$$

Член вида  $\text{div} (k^{(n-1)} \bar{\tau}_b)$  является при такой линеаризации известной функцией правой части; граничные условия (4)–(8) предполагаются выполненными для всех промежутков времени  $t_{n-1} < t \leq t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Отметим, что коэффициенты  $k^{(n-1)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , зависят от пространственных переменных  $x$ ,  $y$  и временной переменной  $t_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , которая определяется выбором шага  $\tau$  сетки  $\omega_\tau$ , т.е.  $k^{(n-1)} = k^{(n-1)}(x, y, t_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

В работе [19] исследованы условия существования и единственности задачи транспорта наносов при условиях гладкости функции решения

$$H(x, y, t) \in C^2(CY_T) \cap C(\overline{CY_T}), \quad \text{grad} H \in C(\overline{CY_T}),$$

и необходимой гладкости границы области, а также получена априорная оценка решения в норме пространства  $L_1$  в зависимости от интегральных оценок правой части, граничных условий и нормы начального условия. Были приведены результаты исследования сходимости решения линеаризованной задачи

к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи транспорта наносов в норме пространства  $L_1$  при стремлении шага временной сетки, на которой осуществлялась линейаризация, к нулю [20].

**2. Пространственно-неоднородная 3D-модель гидродинамики.** Входными данными для модели транспорта наносов является вектор скорости водной среды. Для расчета тангенциальных напряжений в модели транспорта наносов необходима информация о векторе скорости водной среды на дне водоема. Исходными уравнениями модели гидродинамики являются [21, 22]:

— уравнения движения (Навье–Стокса):

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu u'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu v'_z)'_z, \\ w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\nu w'_z)'_z + g; \end{aligned} \tag{11}$$

— уравнение неразрывности в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \tag{12}$$

где  $\bar{V} = \{u, v, w\}$  — компоненты вектора скорости водного потока мелководного водоема,  $P$  — гидродинамическое давление,  $\rho$  — плотность водной среды,  $\mu, \nu$  — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Система уравнений (11)–(12) рассматривается при следующих граничных условиях:

— на входе (левая граница):

$$\bar{V} = \bar{V}_0, \quad P'_n = 0;$$

— донная граница:

$$\rho\mu (\bar{V}_\tau)'_n = -\bar{\tau}, \quad \bar{V}_n = 0, \quad P'_n = 0;$$

— боковая граница:

$$(\bar{V}_\tau)'_n = -\bar{\tau}, \quad \bar{V}_n = 0, \quad P'_n = 0;$$

— верхняя граница:

$$\rho\mu (\bar{V}_\tau)'_n = -\bar{\tau}, \quad w = -\omega - \frac{P'_t}{\rho g}, \quad P'_n = 0,$$

где  $\omega$  — интенсивность испарения жидкости,  $\bar{V}_n, \bar{V}_\tau$  — нормальная и тангенциальная составляющая вектора скорости,  $\bar{\tau} = \{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$  — вектор тангенциального напряжения,  $\bar{n}$  — вектор нормали к границе расчетной области.

Пусть  $\bar{\tau} = \rho_a C d_s |\bar{w}| \bar{w}$ ,  $C d_s = 0.0026$ , где  $\bar{w}$  — вектор скорости ветра относительно воды,  $\rho_a$  — плотность атмосферы.

Составляющие тангенциального напряжения для дна с учетом движения воды можно записать следующим образом:  $\bar{\tau} = \rho C d_b |\bar{V}| \{u, v\}$ ,  $C d_b = g l^2 / h^{1/3}$  — групповой коэффициент шероховатости в формуле Маннинга, рассматриваемый в диапазоне 0.025–0.2 ( $l = 0.04$ ).

**3. Дискретная модель.** Построим конечно-разностную схему, аппроксимирующую задачу (9), (10), (4)–(8). Покроем область  $D$  равномерной прямоугольной расчетной сеткой  $\omega = \omega_x \times \omega_y$ , считая, что сетка по времени  $\omega_\tau$  определена ранее:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, l_x = h_x(N_x - 1)\}, \\ \omega_y &= \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, l_y = h_y(N_y - 1)\}, \end{aligned}$$

где  $n, i, j$  — индексы узлов сеток, построенных по временному  $Ot$  и пространственным  $Ox, Oy$  направлениям соответственно,  $\tau, h_x, h_y$  — шаги сеток по временному и пространственным направлениям соответственно,  $N_t, N_x, N_y$  — количество узлов по временному и пространственным направлениям соответственно.

Для получения разностной схемы воспользуемся методом баланса. Проинтегрируем обе части уравнения (9) по области  $D_{txy}$ :

$$D_{txy} \in \{t \in [t_n, t_{n+1}], x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], y \in [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]\}.$$

В результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_{txy}} (1 - \varepsilon) H_t^{(n)'} dt dx dy &+ \iint\limits_{D_{txy}} \left( k^{(n-1)} \tau_{b,x} \right)'_x dt dx dy + \\ &+ \iint\limits_{D_{txy}} \left( k^{(n-1)} \tau_{b,y} \right)'_y dt dx dy = \iint\limits_{D_{txy}} \left( k^{(n-1)} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} H_x^{(n)'} \right)'_x dt dx dy + \quad (13) \\ &+ \iint\limits_{D_{txy}} \left( k^{(n-1)} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} H_y^{(n)'} \right)'_y dt dx dy. \end{aligned}$$

В равенстве (13) вычислим приближенно интегралы по формулам прямоугольников, разделим полученное уравнение на произведение множителей  $\tau$ ,  $h_x$ ,  $h_y$  и, заменяя приближенное равенство на точное, получим разностную схему, аппроксимирующую линеаризованную непрерывную задачу:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \frac{H_{i,j}^{(n+1)} - H_{i,j}^{(n)}}{\tau} &+ \frac{k_{i+1/2,j}^{(n)} (\tau_{b,x})_{i+1/2,j}^{(n)} - k_{i-1/2,j}^{(n)} (\tau_{b,x})_{i-1/2,j}^{(n)}}{h_x} + \\ &+ \frac{k_{i,j+1/2}^{(n)} (\tau_{b,y})_{i,j+1/2}^{(n)} - k_{i,j-1/2}^{(n)} (\tau_{b,y})_{i,j-1/2}^{(n)}}{h_y} = \quad (14) \\ &= \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \left( k_{i+1/2,j}^{(n)} \frac{H_{i+1,j}^{(n+\sigma)} - H_{i,j}^{(n+\sigma)}}{h_x^2} - k_{i-1/2,j}^{(n)} \frac{H_{i,j}^{(n+\sigma)} - H_{i-1,j}^{(n+\sigma)}}{h_x^2} \right) + \\ &+ \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \left( k_{i,j+1/2}^{(n)} \frac{H_{i,j+1}^{(n+\sigma)} - H_{i,j}^{(n+\sigma)}}{h_y^2} - k_{i,j-1/2}^{(n)} \frac{H_{i,j}^{(n+\sigma)} - H_{i,j-1}^{(n+\sigma)}}{h_y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \begin{cases} (\tau_{b,x})_{i+1/2,j}^{(n)} = \frac{(\tau_{b,x})_{i+1,j}^{(n)} + (\tau_{b,x})_{i,j}^{(n)}}{2}, & (\tau_{b,y})_{i,j+1/2}^{(n)} = \frac{(\tau_{b,y})_{i,j+1}^{(n)} + (\tau_{b,y})_{i,j}^{(n)}}{2}, \\ k_{i+1/2,j}^{(n)} = \frac{A \varpi d \left| (\bar{\tau}_b)_{i+1/2,j}^{(n)} - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} (\text{grad } H)_{i+1/2,j}^{(n)} \right|}{((\rho_1 - \rho)gd)^\beta} h \left( \left| (\bar{\tau}_b)_{i+1/2,j}^{(n)} - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} (\text{grad } H)_{i+1/2,j}^{(n)} - \tau_{bc} \right| \right). \end{cases}$$

Значение  $\text{grad } H|_{(x_{i+1/2}, y_j)}$  запишется в виде

$$(\text{grad } H)_{i+1/2,j} = \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h_x} \bar{i} + \frac{H_{i+1/2,j+1} - H_{i+1/2,j-1}}{2h_y} \bar{j}.$$

Аналогичным образом можно получить следующую аппроксимацию:

$$(\text{grad } H)_{i,j+1/2} = \frac{H_{i+1,j+1/2} - H_{i-1,j+1/2}}{2h_x} \bar{i} + \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{h_y} \bar{j}.$$

Разностные схемы исследованы на устойчивость при помощи сеточного принципа максимума. Построенные разностные схемы устойчивы при следующем ограничении на шаг по времени:

$$\tau < \frac{\sin \varphi_0 (1 - \varepsilon)}{\tau_{bc} (1 - \sigma) \max_{0 \leq m \leq N-1} \{k(t_m)\} \left( \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right)}.$$

Аппроксимацию граничных условий для краткости изложения не приводим.

Оценка сверху для сеточной функции, представляющей собой решение разностной задачи (13), в сеточной норме  $C_{h,\tau}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \|H^n\|_{C_{h,\tau}} &\leq \|H^0\|_{C_h} + \max(\|H_1\|_{C_{h,\tau}}, \|H_2\|_{C_{h,\tau}}, \|H_3\|_{C_{h,\tau}}) + \\ &+ \frac{\tau}{1 - \varepsilon} \sum_{m=0}^n \left\| \left( k(t_m) \tau_{b,x} \right)_x^m + \left( k(t_m) \tau_{b,y} \right)_y^m \right\|_{C_{h,\tau}}, \end{aligned}$$

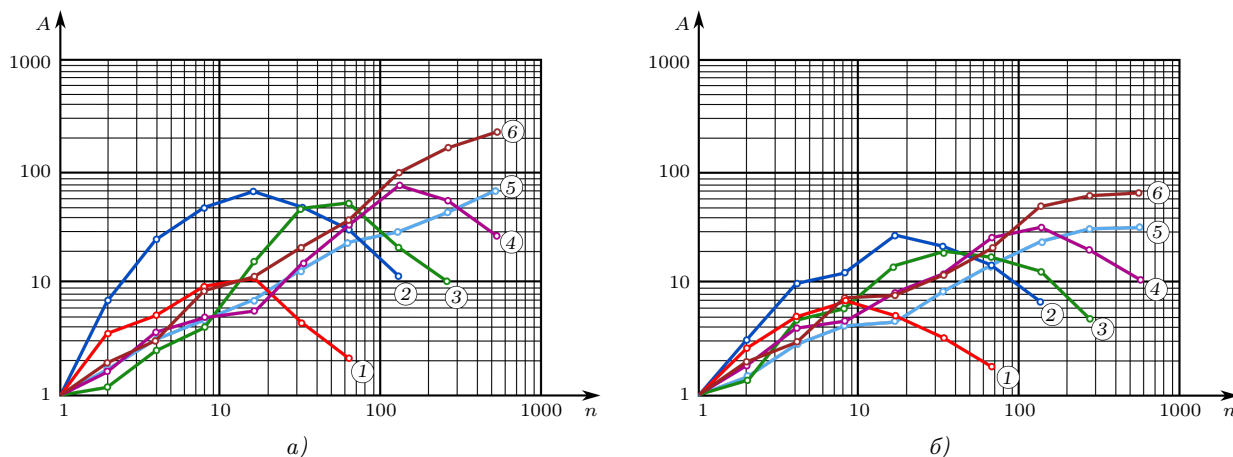


Рис. 1. График зависимости ускорения от количества процессоров, необходимых для решения модельной задачи на различных сетках: 1 — 100 × 100, 2 — 200 × 200, 3 — 500 × 500, 4 — 1000 × 1000, 5 — 2000 × 2000, 6 — 5000 × 5000: а) на основе явной схемы, б) на основе неявной схемы

что гарантирует устойчивость построенной разностной схемы по правой части, граничным и начальному условиям [23].

Получено, что погрешность аппроксимации дискретной модели транспорта наносов есть величина порядка  $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ .

**4. Описание параллельного алгоритма.** Разработан программный комплекс, реализованный на C++ и предназначенный для построения турбулентных потоков несжимаемого поля скоростей водной среды на сетках с высокой разрешающей способностью для прогнозирования транспорта наносов и возможных сценариев изменения геометрии донной области мелководных водоемов.

Для решения поставленной задачи использован адаптивный модифицированный попеременно-треугольный метод минимальных поправок. При параллельной реализации использованы методы декомпозиции сеточных областей для вычислительно трудоемких задач диффузии–конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы. Декомпозиция расчетной двумерной области выполнена по двум пространственным переменным  $x, y$ .

Параллельный алгоритм описан с учетом особенностей НРС-кластера, который представляет собой вычислительную систему с распределенной памятью из 128 узлов, объединенных сетью InfiniBand с пропускной способностью 20 Гбит/с, каждый узел в свою очередь является SMP-системой с 16-ю вычислителями (ядрами) и объемом ОЗУ 32 Гбайт. Параллельные вычисления с применением технологий MPI производились на кластере распределенных вычислений с использованием 128 процессоров. Для оценки характеристик параллельного алгоритма нам понадобятся некоторые фактические данные о производительности вычислительной системы. Данные получены в результате тестирования пакетами Linpack и Pallas MPI benchmark. Пиковая производительность МВС составляет 18.8 TFlops. МВС включает в себя 8 компьютерных стоек. Вычислительное поле многопроцессорной вычислительной системы построено на базе инфраструктуры HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используется 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3 GHz и оперативной памятью в объеме 32 ГБ. Общее количество вычислительных ядер в комплексе — 2048, суммарный объем оперативной памяти — 4 ТБ. Для управления МВС используется 3 управляющих сервера HP ProLiant DL385G5. Для задач резервного копирования используется библиотека MSL4048.

На рис. 1 приведены зависимости ускорения от количества процессоров, необходимых для решения модельной задачи на различных сетках. Нумерация графиков соответствует следующим размерам расчетных сеток: 1 — 100 × 100, 2 — 200 × 200, 3 — 500 × 500, 4 — 1000 × 1000, 5 — 2000 × 2000, 6 — 5000 × 5000.

На рис. 1а видно, что при использовании параллельного алгоритма на основе явной схемы максимальная эффективность достигалась на сетках 200 × 200. В этом случае возникает “суперлинейное ускорение”, вызванное тем, что с увеличением количества вычислителей растет суммарный объем их опе-

ративной и кэш-памяти. Поэтому большая часть данных задачи размещается в оперативной памяти и, более того, “помещается” в кэш-памяти.

На рис. 16 представлен график ускорения работы параллельного алгоритма на основе неявной схемы с использованием параллельного варианта попеременно-треугольный метода минимальных поправок. Построенные графики показывают, что для каждой из расчетных сеток ускорение принимает наибольшее значение при определенном значении числа вычислителей и при дальнейшем их увеличении ускорение уменьшается.

Отметим, что на графиках 5 и 6 максимальное ускорение достигается на 516 процессорах, дальнейшее падение ускорения обусловлено тем, что число выполняемых команд быстро входит в насыщение и процессоры начинают мешать друг другу. Параллельные алгоритмы на основе явной схемы лучше распараллеливаются, чем методы параллельного алгоритма на основе неявной схемы с использованием параллельного варианта попеременно-треугольный метод минимальных поправок. Несмотря на это, параллельный вариант модифицированного попеременно-треугольного метода минимальных поправок предпочтительнее для плохо обусловленных задач, так как требует значительно меньшего числа итераций при решении задачи транспорта донных материалов.

График зависимости ускорения от количества процессоров, необходимых для решения задач гидродинамики, представлен на рис. 2. Для расчета вектора скорости движения водной среды использовались расчетные сетки размером  $50 \times 250 \times 40$ . Максимальное ускорение, равное 43.668, достигалось на 128 процессорах. На 256 вычислителях наблюдалось падение ускорения.

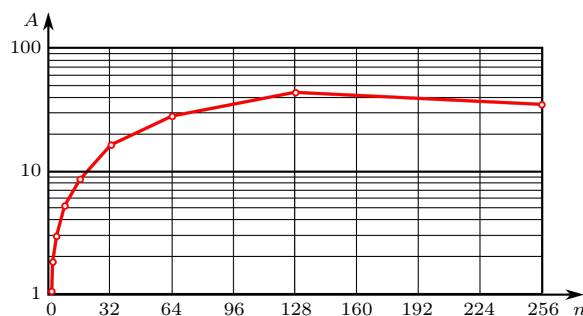


Рис. 2. График ускорения работы параллельного алгоритма для решения гидродинамических задач

**5. Численные эксперименты моделирования транспорта наносов и динамики изменения рельефа дна.** После разработки программного комплекса была выполнена серия численных экспериментов моделирования динамики изменения рельефа дна сложной конфигурации в прибрежной зоне водоема. В модельных задачах предполагалось присутствие на поверхности дна препятствий (валунов, подводных волнорезов, волноломов, отвалов, молов, шпор и т.п.) и различных неровностей, выступающих его поверхность. В качестве примера в нашей статье представлены результаты моделирования динамики изменения дна для случая, когда на его поверхности присутствуют препятствия в виде остроконечных структур — прерывистых бун. За счет удержания наносов, буны не только останавливают движение переносимого волнами материала вдоль берега, но и способствуют его осаждению. Такие сооружения являются одним из лучших средств для защиты берегов и предотвращения вторжения моря в материк.

Рассматриваемый участок моделирования имеет размеры  $55 \times 55$  м по горизонтали и 2 м по вертикали (в глубину). Предположим, что жидкость находится в состоянии покоя в начальный момент времени. Размер расчетной сетки равен  $110 \times 110$ , шаг по пространственным переменным 0.05 м, шаг по времени 0.01 с, скорость движения ветра 5 м/с и направлена слева-направо.

На рис. 3 представлено начальное положение изолиний функции глубин и рельефа дна, особенно стью которого является наличие трех донных бун. Колебания изолинии функции глубин наблюдаются в центральной части расчетной области. Эти структуры имеют длину до 15 м и расположены на расстоянии, не превышающем 10 м друг от друга. Структуры полностью погружены в водоем, а их максимальная высота составляет 1.25 м.

Моделирование процесса транспорта наносов показало, что с течением времени происходит “сглаживание” неровности на поверхности, образование наносов, уменьшение уровня глубины уклона дна береговой зоны и, как следствие, постепенное обмеление рассматриваемой зоны водоема. Численное моделирование показывает, что через 5–15 мин. после начала моделирования изолинии функции глубины в “центре” расчетной области начинают приобретать волнообразную форму, а в зоне расположения бун — извилистую. В межбунных отсеках происходит отложение наносов, а остроконечные вершины бун деформировались и приняли форму пологих горок. Вследствие указанных процессов наблюдается уменьшение уровня глубины береговой зоны и наращивание территории пляжа (рис. 4).

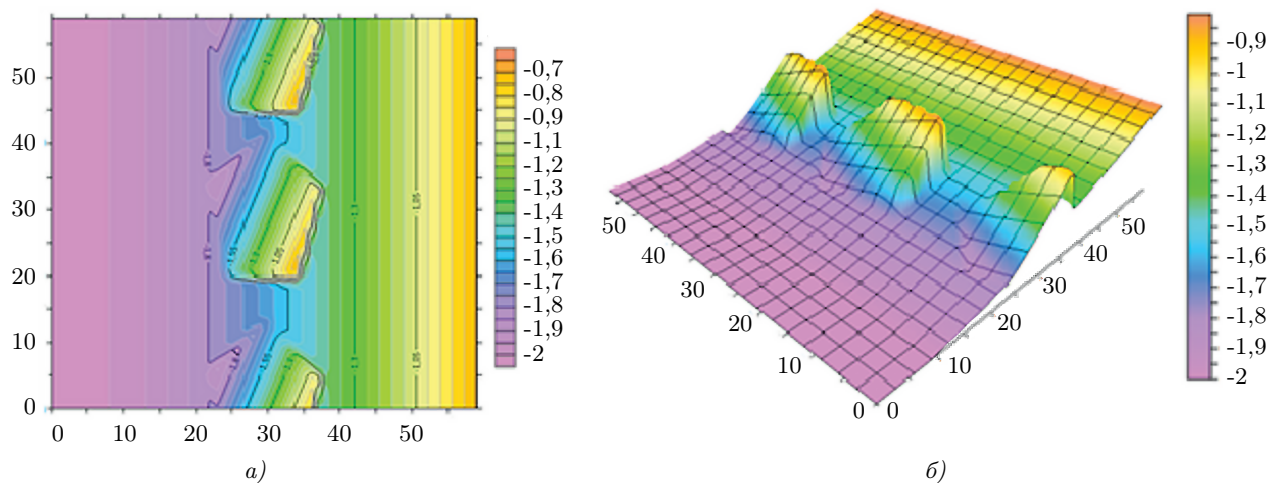


Рис. 3. Геометрия расчетной области в начальный момент моделирования:  
 а) положение изолиний функции глубин, б) рельефа дна

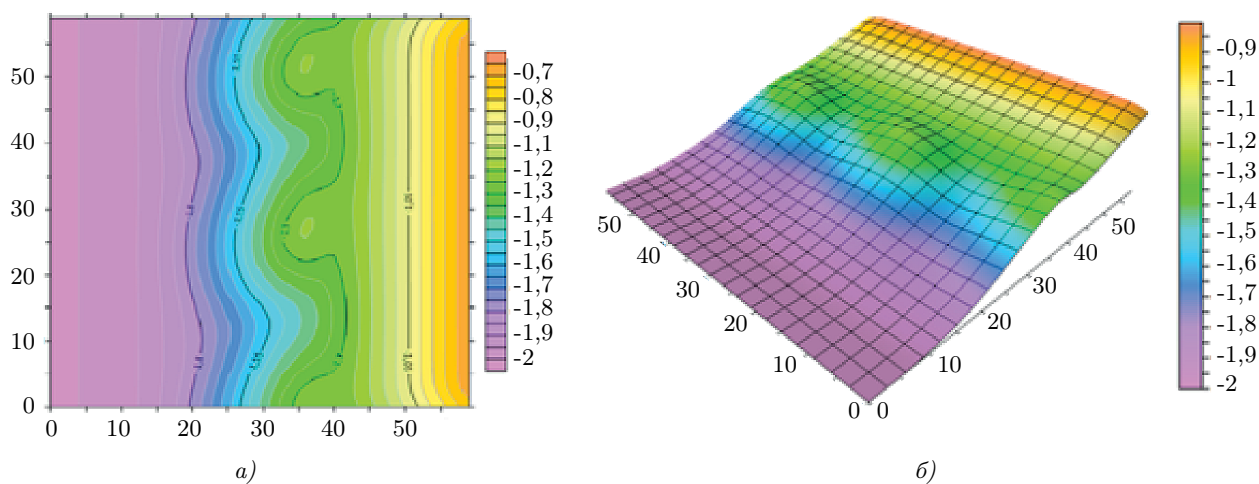


Рис. 4. Геометрия расчетной области через 5 мин. после начала моделирования:  
 а) положение изолиний функции глубин, б) рельефа дна

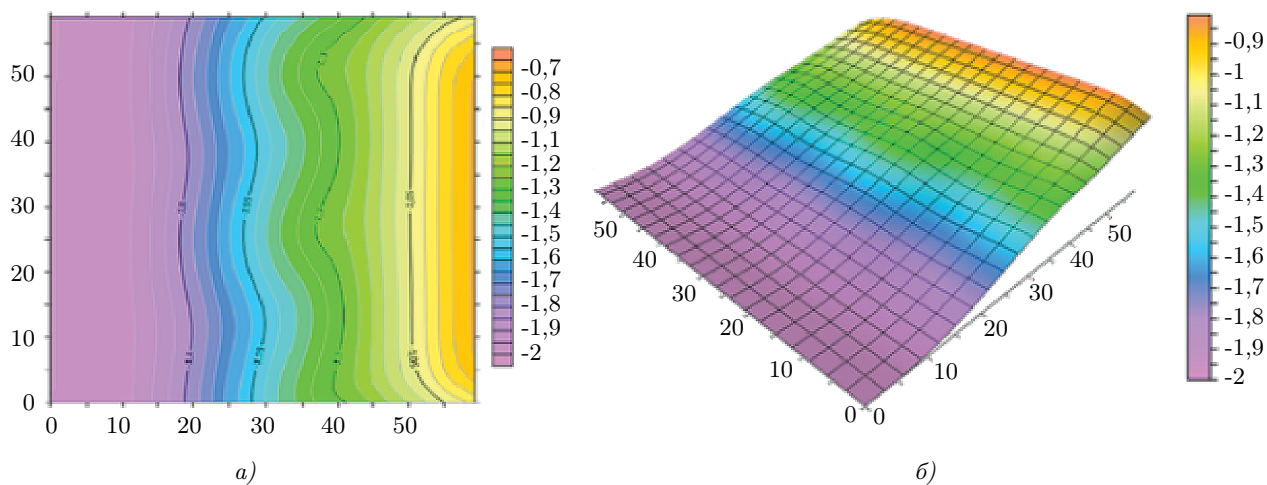


Рис. 5. Геометрия расчетной области через 15 мин. после начала моделирования:  
 а) положение изолиний функции глубин, б) рельефа дна



Более выражено результаты представлены на рис. 5, когда время моделирования составило 15 мин. Изолинии функции глубины приобретают мягкую волнообразную форму по всей расчетной области, включая области пиковых значений. Наблюдался активный процесс вдольберегового перемещения наносов и снижения уровня глубины. Так, в течение указанного расчетного времени в межбунных отсеках уменьшение глубины составило порядка 0.5 м. Высота горок снижается, а сами горки приобретают более “сглаженный” вид.

**6. Заключение.** В настоящей статье предложена и исследована дискретная 2D-модель транспорта наносов, полученная в результате аппроксимации соответствующей линеаризованной непрерывной модели. Для расчета скорости движения водной среды использована трехмерная модель гидродинамики. Необходимость моделирования указанных процессов на подробных сетках, содержащих  $10^6$ – $10^9$  узлов, потребовала использования параллельных вычислительных систем высокой производительности (более 100 терафлопс). Для предложенной модели разработаны параллельные алгоритмы, реализованные в виде комплекса программ. Выполнены численные эксперименты для модельных задач транспорта донных отложений и трансформации рельефа дна, результаты которых согласуются с реальными физическими экспериментами. Предложенная математическая модель и разработанный программный комплекс позволяют предсказать динамику поведения донной поверхности, появление морских кос и гряд, их рост и трансформацию.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19–01–00701).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоздат, 1987.
2. Callander R.A. Instability and river channels // J. Fluid Mech. 1969. **36**, N 3. 465–480.
3. Ikeda S., Parker G., Sawai K. Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development // J. Fluid Mech. 1981. **112**. 363–377.
4. Gic-Grusza G., Dudkowska A. Numerical modeling of hydrodynamics and sediment transport — an integrated approach // Ocean Dynamics. 2017. **67**. 1283–1292.
5. Liu X., Qi S., Huang Y., Chen Y., Du P. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing river basin of China // International Journal of Sediment Research. 2015. **30**, N 3. 250–255.
6. Ouda M., Toorman E.A. Development of a new multiphase sediment transport model for free surface flows // International Journal of Multiphase Flow. 2019. **117**. 81–102.
7. Aksoy H., Kavvas M.L. A review of hillslope and watershed scale erosion and sediment transport models // Catena. 2005. **64**, N 2–3. 247–271.
8. Подгорный К.А., Леонов А.В. Моделирование процессов распространения взвешенного вещества в морских прибрежных акваториях. I. Описание SM-модели // Океанологические исследования. 2017. **45**, № 1. 109–141.
9. Ashton A., Murray A.B., Arnoult O. Formation of coastline features by large-scale instabilities induced by high-angle waves // Nature. 2001. **414**. 296–300.
10. Andersen T.J., Pejrup M., Nielsen A.A. Long-term and high-resolution measurements of bed level changes in a temperate, microtidal coastal lagoon // Marine Geology. 2006. **226**, N 1–2. 115–125.
11. Francke T., López-Tarazón J.A., Vericat D., Bronstert A., Batalla R.J. Flood-based analysis of high-magnitude sediment transport using a non-parametric method // Earth Surface Processes and Landforms. 2008. **33**, N 13. 2064–2077.
12. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. Reconstruction of 2001 ecological disaster in the Azov sea on the basis of precise hydrophysics models // Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications. Amsterdam: Elsevier, 2005. 231–238.
13. Amoudry L. A review on coastal sediment transport modelling. POL Internal Document No. 189. Liverpool: Proudman Oceanographic Laboratory, 2008.
14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Матем. моделирование. 2011. **23**, № 3. 3–21.
15. Сухинов А.И. Прецизионные модели гидродинамики и опыт их применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Известия ТРТУ. 2006. **3**. 228–235.
16. Никитина А.В., Сухинов А.И., Угольницкий Г.А., Усов А.Б., Чистяков А.Е., Пучкин М.В., Семенов И.С. Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря // Матем. моделирование. 2016. **28**, № 7. 96–106.
17. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 328–338.

18. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V.* Parallel solution of sediment and suspension transportation problems on the basis of explicit schemes // Communications in Computer and Information Science. Vol. 910. Cham: Springer, 2018. 306–321.
19. *Сидорякина В.В., Сухинов А.И.* Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. **57**, № 6. 985–1002.
20. *Сухинов А.И., Сидорякина В.В.* О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов // Математическое моделирование. 2017. **29**, № 11. 19–39.
21. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001.
22. *Самарский А.А., Вабичевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Едиториал, 2004.
23. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шшшеня А.В.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Матем. моделирование. 2013. **25**, № 11. 53–64.

Поступила в редакцию  
18 марта 2020

---

### Parallel Algorithms for Solving the Problem of Coastal Bottom Relief Dynamics

A. I. Sukhinov<sup>1</sup>, A. E. Chistyakov<sup>2</sup>, E. A. Protsenko<sup>3</sup>,  
V. V. Sidoryakina<sup>4</sup>, and S. V. Protsenko<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Department, e-mail: [sukhinov@gmail.com](mailto:sukhinov@gmail.com)

<sup>2</sup> Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: [cheese\\_05@mail.ru](mailto:cheese_05@mail.ru)

<sup>3</sup> Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State Economical University; ul. Initsiativnaya 48, Taganrog, 347936, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: [eapros@rambler.ru](mailto:eapros@rambler.ru)

<sup>4</sup> Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State Economical University; ul. Initsiativnaya 48, Taganrog, 347936, Russia; Ph.D., Associate Professor, Head of Department, e-mail: [cvv9@mail.ru](mailto:cvv9@mail.ru)

<sup>5</sup> Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Graduate Student, e-mail: [rab55555@rambler.ru](mailto:rab55555@rambler.ru)

Received March 18, 2020

**Abstract:** A nonstationary 2D model of bottom sediment transport in the coastal zones of shallow water reservoirs is supplemented with the Navier–Stokes equations, the continuity equation, and the state equation of the water environment. A discrete model of sediment transport is obtained by approximating the corresponding linearized continuous model. Since the problems of predicting sediment transport need to be solved in real or accelerated time scales, parallel algorithms for hydrodynamic problems on systems with mass parallelism should be developed on grids with  $10^6$ – $10^9$  nodes. The paper contains the results obtained by an efficient software implemented to perform hydrodynamic computational experiments that allow the numerical modeling of bottom deformation in the coastal zones of reservoir. The results of numerical experiments are discussed.

**Keywords:** computational hydrodynamics, parallel computing, hydrology, mathematical model, sediment dynamics, bottom topography.

## References

1. G. I. Marchuk, V. P. Dymnikov, and V. B. Zalesny, *Mathematical Models in Geophysical Hydrodynamics and Numerical Methods for Their Implementation* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1987) [in Russian].
2. R. A. Callander, “Instability and River Channels,” *J. Fluid Mech.* **36** (3), 465–480 (1969).
3. S. Ikeda, G. Parker, and K. Sawai, “Bend Theory of River Meanders. Part 1. Linear Development,” *J. Fluid Mech.* **112**, 363–377 (1981).
4. G. Gic-Grusza and A. Dudkowska, “Numerical Modeling of Hydrodynamics and Sediment Transport — an Integrated Approach,” *Ocean Dyn.* **67**, 1283–1292 (2017).
5. X. Liu, S. Qi, Y. Huang, et al., “Predictive Modeling in Sediment Transportation across Multiple Spatial Scales in the Jialing River Basin of China,” *Int. J. Sediment Res.* **30** (3), 250–255 (2015).
6. M. Ouda and E. A. Toorman, “Development of a New Multiphase Sediment Transport Model for Free Surface Flows,” *Int. J. Multiphase Flow* **117**, 81–102 (2019).
7. H. Aksoy and M. L. Levent Kavvas, “A Review of Hillslope and Watershed Scale Erosion and Sediment Transport Models,” *Catena* **64** (2–3), 247–271 (2005).
8. K. A. Podgornyi and A. V. Leonov, “Modelling of Suspended Matter Distribution in Marine Coastal Areas: 1. Description of the SM-model,” *Okeanologich. Issled.* **45** (1), 109–141 (2017).
9. A. Ashton, A. B. Murray, and O. Arnoult, “Formation of Coastline Features by Large-Scale Instabilities Induced by High-Angle Waves,” *Nature* **414**, 296–300 (2001).
10. T. J. Andersen, M. Pejrup, and A. A. Nielsen, “Long-Term and High-Resolution Measurements of Bed Level Changes in a Temperate, Microtidal Coastal Lagoon,” *Marine Geol.* **226** (1–2), 115–125 (2006).
11. T. Francke, J. A. López-Tarazón, D. Vericat, et al., “Flood-Based Analysis of High-Magnitude Sediment Transport Using a Non-Parametric Method,” *Earth Surf. Process. Landf.* **33** (13), 2064–2077 (2008).
12. A. I. Sukhinov and A. A. Sukhinov, “Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models,” in *Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications* (Elsevier, Amsterdam, 2005), pp. 231–238.
13. L. Amoudry, *A Review on Coastal Sediment Transport Modelling*, POL Internal Document No. 189 (Proudman Oceanographic Lab., Liverpool, 2008).
14. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and E. V. Alekseenko, “Numerical Realization of Three-Dimensional Model of Hydrodynamics for Shallow Water Basins on High-Performance System,” *Mat. Model.* **23** (3), 3–21 (2011) [*Math. Models Comput. Simul.* **3** (5), 562–574 (2011)].
15. A. I. Sukhinov, “Precise Hydrodynamic Models and Their Applications to the Prediction and Reconstruction of Emergency Situations in the Sea of Azov,” *Izv. Taganrog Radiotekh. Univ.*, No. 3, 228–235 (2006).
16. A. V. Nikitina, A. I. Sukhinov, G. A. Ugolnitsky, et al., “Optimal Control of Sustainable Development in Biological Rehabilitation of the Azov Sea,” *Mat. Model.* **28** (7), 96–106 (2016) [*Math. Models Comput. Simul.* **9** (1), 101–107 (2017)].
17. A. I. Sukhinov, E. A. Protsenko, A. E. Chistyakov, and S. A. Shreter, “Comparison of Computational Efficiency of Explicit and Implicit Schemes for the Sediment Transport Problem in Coastal Zones,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 328–338 (2015).
18. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and V. V. Sidoryakina, “Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes,” in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2018), Vol. 910, pp. 306–321.
19. V. V. Sidoryakina and A. I. Sukhinov, “Well-Posedness Analysis and Numerical Implementation of a Linearized Two-Dimensional Bottom Sediment Transport Problem,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **57** (6), 985–1002 (2017) [*Comput. Math. Math. Phys.* **57** (6), 978–994 (2017)].
20. A. I. Sukhinov and V. V. Sidoryakina, “Convergence of Linearized Sequence Tasks to the Nonlinear Sediment Transport Task Solution,” *Mat. Model.* **29** (11), 19–39 (2017).
21. I. O. Leontiev, *Coastal Dynamics: Waves, Currents and Sediments Drifts* (GEOS, Moscow, 2001) [in Russian].
22. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Convection–Diffusion Problems* (Editorial, Moscow, 2004) [in Russian].
23. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and A. V. Shishenya, “Error Estimate for Diffusion Equations Solved by Schemes with Weights,” *Mat. Model.* **25** (11), 53–64 (2013) [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (3), 324–331 (2014)].