

УДК 514.174.2:519.6

doi 10.26089/NumMet.v21r213

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ШАРОВ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ В ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО С НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ

А. Л. Казаков<sup>1</sup>, А. А. Лемперт<sup>2</sup>, Ч. Т. Та<sup>3</sup>

Рассматривается задача упаковки шаров двух типов в замкнутое ограниченное множество в трехмерном пространстве как с евклидовой, так и со специальной неевклидовой метрикой. Требуется максимизировать радиус шаров при известном количестве шаров каждого типа и заданном отношении между радиусами. Предложен вычислительный алгоритм, основанный на комбинации метода бильярдного моделирования и оптико-геометрического подхода, базирующегося на фундаментальных физических принципах Ферма и Гюйгенса. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

**Ключевые слова:** оптимальная упаковка шаров разных радиусов, вычислительный алгоритм, бильярдное моделирование, оптико-геометрический метод, программный комплекс.

**1. Введение.** Проблема упаковки шаров является классической задачей математической оптимизации и находит приложения в различных областях: в пищевой промышленности, логистике и задачах безопасности, материаловедении, медицине и др. [1]. Так, в материаловедении проблема упаковки шаров используется для моделирования некоторых процессов поглощения молекул [2], в радиохирургии упаковка неравных шаров используется в планировании автоматизированного радиохирургического лечения [3], в задачах безопасности — при организации охраны территории, воздушного и водного пространства.

Задачи упаковки, как определено в работе [4], состоят в расположении набора геометрических объектов фиксированных размеров и/или формы в заданной области. При этом, как правило, либо максимизируется число упаковываемых объектов при фиксированном размере, либо их размеры (площадь поверхности, объем, радиус и др.) при заданном количестве, также можно рассматривать задачу минимизации объема контейнера. В настоящей статье мы рассматриваем объекты, имеющие вид шаров.

Хотя проблема упаковки равных шаров в бесконечное пространство решена — показано, что плотнейшими упаковками являются гранецентрированная кубическая (ГЦК) и гексагональная плотная (ГП) с плотностью  $\pi/(3\sqrt{2})$ , однако для случая ограниченного контейнера эта проблема остается открытой [5]. Следует отметить, что в большинстве работ в качестве контейнеров выступают множества простой формы: сфера, куб, тетраэдр и др. Приведем краткий обзор известных научных результатов по данной тематике.

В работах [6, 7] рассмотрена задача упаковки одинаковых шаров заданного радиуса в параллелепипед минимальной высоты (длина и ширина известны) и в цилиндр с известным радиусом и минимальной высотой, предложена стратегия ее решения, которая включает в себя построение специального дерева поиска, модификацию метода возможных направлений для вычисления локальных минимумов и модификацию метода сужающихся окрестностей для поиска приближения к глобальному минимуму.

Для решения задачи упаковки равных шаров в [8] предложен алгоритм последовательного симметричного перемещения, представлены плотные упаковки до 200 шаров в сферу и до 150 шаров в куб. В [9] решается задача упаковки шаров в бесконечно длинный цилиндр с заданным радиусом с использованием метода имитации отжига. Проблема нахождения плотнейшей упаковки шаров в цилиндр рассматривается и в [10], где она решается с помощью адаптивно-сжимающейся ячейки и метода последовательного линейного программирования.

В работах [11] и [12] рассматриваются задачи упаковки неравных шаров в различные контейнеры с помощью модификации алгоритма JA (jump-алгоритм), реализующей плавный переход от одного локального минимума к другому, при этом минимизируется размер контейнера. Алгоритм JA также используется

<sup>1</sup> Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, 664033, Иркутск; главный науч. сотр., e-mail: kazakov@icc.ru

<sup>2</sup> Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, 664033, Иркутск; вед. науч. сотр., e-mail: lempert@icc.ru

<sup>3</sup> Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, 664074, Иркутск; аспирант, e-mail: tatrungthanh@mail.ru

в работе [13] для решения задачи упаковки неравных сфер в круговой контейнер минимального размера, результаты демонстрируют работоспособность алгоритма даже в случае, когда упакованные объекты и контейнер являются сфероидами.

В работах [14, 15] предложен параллельный жадный алгоритм (алгоритм B1.6\_3DSPP) для задачи упаковки разных шаров в куб или в прямоугольный параллелепипед (кубоид). Этот алгоритм является результатом некоторых важных усовершенствований алгоритмов B1.0 и B1.5 в [16]. На основе жадных алгоритмов в работе [17] представлены методы широколучевого поиска (width-beam search) и рассмотрены задачи упаковки различных шаров в прямоугольный параллелепипед минимальной длины при фиксированной ширине и высоте.

Задача упаковки шаров двух разных типов в различные контейнеры также рассматривалась в [18], здесь размер больших шаров во много раз больше размера маленьких. Для получения наибольшей плотности предложена формула вычисления размера больших шаров при заданном размере маленьких.

Следует отметить, что в большинстве известных работ решаются задачи упаковки шаров в выпуклые контейнеры с использованием евклидова расстояния.

В настоящей работе авторы рассматривают задачу упаковки шаров двух разных типов в замкнутое множество произвольной формы в трехмерном пространстве как с евклидовой, так и со специальной неевклидовой метрикой. Для ее решения предлагается вычислительный алгоритм, который основан на методе бильярдного моделирования и на фундаментальных физических принципах Ферма и Гюйгенса. Применение этих физических принципов при решении задач оптимального размещения логистических объектов представлено в работах [19–22], а для решения задач упаковки кругов в двумерные контейнеры — в статьях [23, 24].

**2. Постановка задачи.** Пусть в трехмерном метрическом пространстве задано замкнутое ограниченное множество  $P \subset \mathbb{R}^3$  с непрерывной границей. Расстояние между двумя точками пространства задается следующим образом:

$$\rho(a, b) = \min_{G \in G(a, b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y, z)}.$$

Здесь  $G(a, b)$  — множество всех непрерывных кривых, лежащих в  $P$  и соединяющих точки  $a$  и  $b$ ;  $0 < \alpha \leq f(x, y, z) \leq \beta$  — непрерывная функция, задающая мгновенную скорость движения в каждой точке множества  $P$ . В частном случае, когда  $f(x, y, z) \equiv 1$ , получаем обычное евклидово расстояние.

Как и в классической задаче об упаковке, нам необходимо расположить известное количество шаров двух различных типов внутри заданного множества  $P$  так, чтобы они не пересекались друг с другом нигде кроме, быть может, граничных точек, а их радиусы были максимальными.

Пусть имеется  $m$  шаров  $S_i$  с центрами  $s_i(x_i, y_i, z_i)$  и радиусом  $R_1$ ,  $n$  шаров  $S_j$  с центрами  $s_j(x_j, y_j, z_j)$  и радиусом  $R_2$ , где  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{m + 1, m + n}$  и  $R_2 = \frac{1}{k} R_1$ ,  $k \in \mathbb{Q}^+$ . Необходимо найти такое расположение  $s = (s_1, s_2, \dots, s_{m+n}) \in P$ , чтобы значение радиуса  $R_1$  (и, следовательно,  $R_2$ ) достигло максимума. Шары с радиусом  $R_1$  будем называть базовыми или шарами первого типа. Шары с радиусом  $R_2$  — шары второго типа. Тогда задача примет следующий вид:

$$R_1 \rightarrow \max, \quad R_2 = \frac{1}{k} R_1, \quad k \in \mathbb{Q}^+, \tag{1}$$

$$\rho(s_i, \partial P) \geq R_1 \quad \forall i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq 2R_1 \quad \forall i, j = \overline{1, m}, \quad i \neq j, \tag{3}$$

$$\rho(s_j, \partial P) \geq \frac{R_1}{k} \quad \forall j = \overline{m + 1, m + n}, \tag{4}$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq \frac{2R_1}{k} \quad \forall i, j = \overline{m + 1, m + n}, \quad i \neq j, \tag{5}$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq R_1 + \frac{R_1}{k} \quad \forall i, j = \overline{m + 1, m + n}, \quad i \neq j, \tag{6}$$

$$s_i \in P \quad \forall i = \overline{1, m + n}, \tag{7}$$

где  $\rho(s_i, \partial P)$  — расстояние от точки  $s_i$  до границы множества  $P$ .

Отметим, что при  $k = 1$  все шары имеют одинаковый радиус (задача упаковки равных шаров); при  $k < 1$  радиус шаров первого типа меньше радиуса шаров второго типа; при  $k > 1$  радиус шаров первого типа больше радиуса шаров второго типа.

**3. О методе решения.** Для решения задачи упаковки равных шаров авторы предложили алгоритмы, основанные на физических аналогиях: в [25] — на принципах распространения света Ферма и Гюйгенса, в [26] — на методе бильярдного моделирования.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что при использовании метода бильярдного моделирования относительная погрешность оказывается меньше, чем при использовании алгоритма распространения света, однако время вычислений быстро увеличивается с увеличением количества шаров. При этом время работы бильярдного алгоритма моделирования можно существенно сократить, если начальное положение центров шаров выбрать в окрестности оптимального решения.

В настоящей работе авторы представляют новый метод, который, во-первых, объединяет указанные подходы: сначала используется алгоритм распространения света для нахождения приближенного решения, затем алгоритм бильярдного моделирования — для улучшения полученных результатов; во-вторых, дает возможность работать с шарами разных радиусов. Кроме того, используется традиционная процедура мултистарта для отыскания наилучшего (best of known) решения.

Таким образом, стратегия решения поставленной задачи следующая.

1. Задается максимальное количество случайных генераций начальных точек, значение счетчика итерации полагается равным единице.
2. Выполняется упаковка шаров методом волнового спуска (алгоритм 1).
3. Производится улучшение упаковки методом бильярдного моделирования (алгоритм 2).

Если полученный результат лучше рекордного, то он сохраняется в качестве рекордного решения.

4. Значение счетчика количества итерации увеличивается на единицу. Если значение достигло заданной величины, то работа алгоритма завершается, в противном случае осуществляется переход к шагу 2.

Далее опишем алгоритмы 1 и 2 более подробно.

**3.1. Алгоритм упаковки шаров с помощью волнового спуска (алгоритм 1).** Предлагаемый алгоритм является обобщением алгоритма из [25], одним из базовых элементов которого является построение диаграммы Вороного–Дирихле [27]. В основе модификации лежит естественное утверждение: если одна волна движется со скоростью в  $k$  раз большей другой, выпущенной из той же точки, то ее фронт через одинаковый промежуток времени окажется в  $k$  раз дальше от исходной точки. Таким образом, задавая скорость движения волны, мы можем обеспечить выполнение соотношений (1).

Процесс построения обобщенной диаграммы Вороного–Дирихле для наглядности показан в двумерном случае (рис. 1). Здесь скорость волн отличается в два раза. Можно видеть, что, в отличие от случая одинаковых волн, границы подмножеств даже в случае евклидовой метрики образованы не отрезками прямых, а элементами дуг окружностей. Более того, здесь подмножества — зоны Дирихле — могут быть неодносвязными.

Для работы с нижеследующим алгоритмом введем равномерную сетку и аппроксимируем множество  $P$  с помощью алгоритма, описанного в [25]. Далее, говоря о множестве  $P$ , мы подразумеваем его сеточную аппроксимацию.

#### Алгоритм 1.

Шаг 1. Генерируется случайное начальное расположение центров кругов  $s_i$ , из них  $m$  для кругов первого типа,  $n$  — для второго. Радиус  $R_1$  полагается равным нулю.

Шаг 2. Осуществляется построение обобщенной диаграммы Вороного–Дирихле: из  $n$  центров выпускаются “медленные” световые волны, из  $m$  — “быстрые” — со скоростью в  $k$  раз больше скорости “медленных”; для каждой точки  $A \in P$  вычисляется время ее достижения всеми световыми волнами

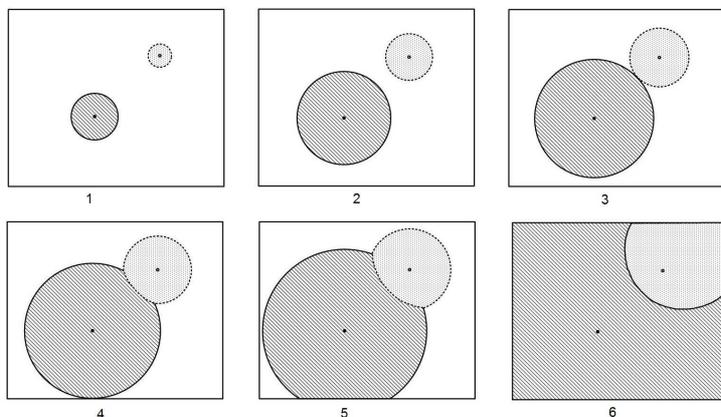


Рис. 1. Процесс разбиения замкнутого множества на подмножества

$t_A = \{t_A^1, \dots, t_A^{m+n}\}$ ; минимальная компонента вектора  $t_A$  дает номер зоны Дирихле, которой принадлежит точка  $A$ , а равенство (с точностью до  $\varepsilon$ ) компонент определяет границу между зонами.

Таким образом, получаем разбиение множества  $P$  на  $(m+n)$  подмножеств  $P_i, i = \overline{1, m+n}$ .

Шаг 3. Для каждого  $P_i$  находится вписанный шар максимального радиуса  $R_i$ : с границы  $\partial P_i$  выпускается волна и строятся волновые фронты внутрь множества, процесс продолжается до вырождения фронта в точку, которая и будет центром искомого шара  $\bar{s}_i, i = \overline{1, m+n}$ .

Шаг 4. Определяется значение радиуса  $\bar{R}_1 = \min \{R_i, kR_j | i = \overline{1, m}, j = \overline{m+1, m+n}\}$ .

Шаг 5. Если  $\bar{R}_1 > R_1$ , то осуществляется переход к шагу 2 с  $s_i = \bar{s}_i$  и  $R_1 = \bar{R}_1$ . В противном случае работа алгоритма завершается.

Найденное решение будем пытаться улучшить с помощью алгоритма бильярдного моделирования.

**3.2. Алгоритм упаковки шаров методом бильярдного моделирования (алгоритм 2).** Ниже следующие алгоритмы построены на основе метода бильярдного моделирования [28]. Идея метода заключается в том, что шары могут двигаться внутри замкнутого множества  $P$ , отталкиваясь друг от друга. Во время движения радиусы шаров постепенно увеличиваются после каждого шага, при этом условия (2)–(7) не должны нарушаться.

Пусть имеются  $m+n$  шаров с центрами  $s_i$ . Необходимо определить направление сдвига шаров, чтобы радиусы шаров не уменьшались после каждого шага сдвига. Нетрудно видеть, что в найденной упаковке всегда найдется по крайней мере один шар, касающийся либо другого шара, либо границы множества  $P$ . Если нам удастся оттолкнуть этот шар от точки (или точек) касания, то его радиус можно увеличить.

Радиус базовых шаров  $R_0$  вычисляется по формуле

$$R_0 = \min \left\{ \rho(s_i, \partial P), \frac{\rho(s_i, s_l)}{2}, k\rho(s_j, \partial P), \frac{k\rho(s_t, s_j)}{2}, \frac{k\rho(s_i, s_j)}{1+k} \right\}, \quad (8)$$

где  $i, l = \overline{1, m}$  и  $i \neq l$ ;  $\forall j, t = \overline{(m+1), (m+n)}, j \neq t$ . В этой формуле  $s_i, s_l$  — центры шаров первого типа,  $s_j, s_t$  — центры шаров второго типа.

Отметим, что, если точки  $s_i$  получены с помощью алгоритма 1, то  $R_0 = R_1$ .

Осуществляются построения шаров  $S_i$  с центром в  $s_i$  и радиусом  $r_i$ , где  $r_i = R_0$ , если  $i = \overline{1, m}$ , и  $r_i = R_0/k$ , если  $i = \overline{m+1, m+n}$ . Для каждого  $i$ -го шара определяются граница  $\partial S_i$  и множество точек касания  $M_i$ :

$$M_i = \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial P\} \cup \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial S_j\}, \quad i, j = \overline{1, m+n}, \quad i \neq j. \quad (9)$$

Для определения направления движения шаров авторы предлагают два метода, первым из которых является следующий алгоритм.

**Алгоритм сдвига шаров по заданному направлению.**

Шаг 1. Находится множество шаров  $S^*$ , имеющих непустое множество точек касания:

$$S^* = \{S_i | M_i \neq \emptyset, i = \overline{1, n^*}\}.$$

Шаг 2. Множество  $S^*$  сортируется по убыванию значения радиуса.

Шаг 3. Для первого (самого большого) шара из множества  $S^*$  строятся векторы с началом в точке  $s_1$  и концами в точках  $q \in M_1$ . Определяется суммарный вектор  $\vec{c}_1 = \sum_{q \in M_1} s_1 \vec{q}$ .

Шаг 4. Производится сдвиг центра  $s_1 \in S^*$  на расстояние  $h$  — шаг сетки — в направлении, противоположном вектору  $\vec{c}_1$ . Полученная точка  $s'_1$  после полагается новым временным центром первого шара.

Шаг 5. Находится радиус базовых шаров  $\bar{R}_0$  по формуле (8). Если  $\bar{R}_0 < R_0$ , то переходим к шагу 3 с множеством  $\bar{S}^* = S^* \setminus s_1$ ; если  $\bar{R}_0 \geq R_0$ , то находим множества точек касания  $\bar{M}_i$  по формуле (9) и переходим к шагу 1.

Шаги 1–5 повторяются до тех пор, пока  $\bar{S}^* \neq \emptyset$ . В результате работы алгоритма решение, найденное с помощью волнового спуска, не может быть ухудшено.

По построению равномерной сетки для каждой точки, кроме точек на границах множества  $P$ , существуют 26 соседних точек. Во втором алгоритме шар может двигаться в любую точку из них. Этот алгоритм имеет следующие шаги.

**Алгоритм сдвига шаров в произвольном направлении.**

- Шаг 1. Задается максимальное число итераций, значение счетчика количества итерации равно 1.
- Шаг 2. Аналогично предыдущему алгоритму, определяется множество  $S^*$  из шаров, имеющих непустое множество точек касания  $S^* = \{S_i | M_i \neq \emptyset, i = \overline{1, n^*}\}$ , которое сортируется по убыванию значения радиуса.
- Шаг 3. Для центра  $s_1$  первого (самого большого) шара из множества  $S^*$  найдем множество  $C$ , состоящее из 26 соседних точек сетки; случайным образом выберем одну из них  $c_i \in C$  и переместим в нее центр шара  $\bar{s}_1$ .
- Шаг 4. Вычисляется значение  $d_{\min} = \min \{\rho(\bar{s}_1, \partial P), \rho(\bar{s}_1, s_j) - r_j\}, j = \overline{2, n + m}$ .  
 Если  $d_{\min} \geq R_i$ , то временный центр  $\bar{s}_1$  сохраняется в качестве нового центра текущего шара и выполняется переход к шагу 3 с множеством  $\bar{S}^* = S^* \setminus s_1$ .  
 Если  $d_{\min} < R_i$ , то осуществляется переход к шагу 3 с множеством  $\bar{C} = C \setminus c_i$ . Если  $\bar{C} = \emptyset$ , т.е. все 26 точек были рассмотрены, то производится переход к шагу 3 с множеством  $\bar{S}^* = S^* \setminus s_1$ . Исходный центр шара  $s_1$  сохраняется. Шаги 3 и 4 выполняются до тех пор, пока  $\bar{S}^* \neq \emptyset$ .
- Шаг 5. Определяется радиус базовых шаров  $\bar{R}_0$  по формуле (8).

Если  $\bar{R}_0 \geq R_0$ , то значение  $\bar{R}_0$  и новые координаты всех шаров сохраняются в качестве приближения к решению задачи. Осуществляется переход к шагу 2.

Если  $\bar{R}_0 < R_0$ , то значение счетчика количества итерации увеличивается на единицу. Если значение счетчика количества итерации достигло наперед заданной величины, то работа алгоритма завершается, в противном случае осуществляется переход к шагу 2.

Алгоритм 2 для решения задачи упаковки шаров в трехмерном пространстве имеет следующий вид.

**Алгоритм бильярдного моделирования.**

- Шаг 1. Вычисляется значение радиуса базовых шаров. Для каждого шара определяется множество точек касания с другими шарами и с границами множества  $P$ .
- Шаг 2. Осуществляется сдвиг центров шаров по заданному направлению.
- Шаг 3. Осуществляется сдвиг центров шаров в случайном направлении.

Шаги 1–3 повторяются до тех пор, пока радиус базовых шаров не ухудшается (не изменяется либо увеличивается). Если значение радиуса текущей итерации меньше, чем значение предыдущей, то в качестве результатов сохраняется значение предыдущей итерации.

Перейдем к описанию вычислительного эксперимента.

**4. Численные эксперименты.** Алгоритмы реализованы на языке программирования C# с помощью пакета Visual Studio 2012. Расчеты выполнены с использованием ПК следующей конфигурации: Intel(R) Core(TM) i5-3570K (частота 3.4 ГГц, 8 Гб ОЗУ) и операционная система Windows 7.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу упаковки шаров двух типов в единичный шар. Пусть  $f(x, y, z) \equiv 1$  (евклидово расстояние) и коэффициент отношения радиусов  $k = 1.5$  (рис. 2). Результаты вычисления

Таблица 1  
Упаковка шаров в единичный шар

$m$	$n$	$R_1$	$D(\%)$	$t$ (сек.)
1	1	0.2910	27.9356	54
	2	0.2827	28.7858	172
	3	0.2786	32.6655	209
	4	0.2699	34.3833	296
	5	0.2615	35.5128	375
2	1	0.2492	28.4975	111
	2	0.2492	32.1746	190
	3	0.2492	35.8517	305
	4	0.2492	39.5288	627
	5	0.2492	43.2059	885
3	1	0.2245	29.8375	222
	2	0.2245	32.5195	434
	3	0.2245	35.2015	613
	4	0.2209	36.0939	684
	5	0.2163	36.2978	804
4	1	0.2154	34.3527	818
	2	0.2154	36.7219	1532
	3	0.2130	37.7804	2054
	4	0.2105	38.4160	2974
	5	0.2084	39.6617	3118
5	1	0.2010	34.4016	1248
	2	0.2010	36.3309	1836
	3	0.2005	37.6889	2058
	4	0.1990	39.0061	2775
	5	0.1944	38.1066	3245

представлены в табл. 1, где  $m$  и  $n$  — количество шаров первого и второго типов соответственно,  $R_1$  — радиус шаров первого типа,  $D$  — плотность упаковки,  $t$  — время работы алгоритма.

Результаты расчетов показывают, что при использовании предложенного алгоритма время вычисления увеличивается с увеличением количества шаров не так быстро, как при использовании только алгоритма бильярдного моделирования (по сравнению с результатами из [26]). В этом примере максимальная плотность получается в случае  $m = 2$  и  $n = 5$ . Отметим, что при  $m = 2$  радиус шаров первого типа практически достигает максимального возможного значения — 0.25. Кроме того, плотность упаковки, за исключением нескольких случаев, превосходит 25%, что является хорошим показателем при решении трехмерных задач.

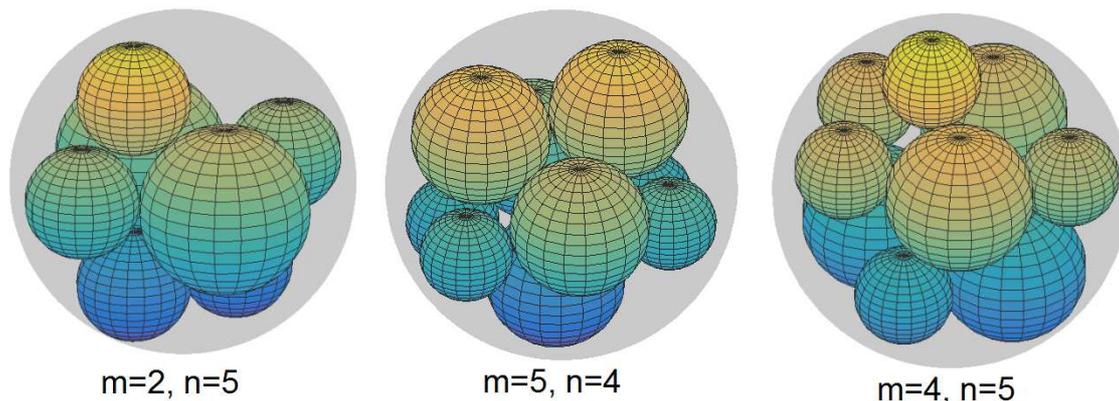


Рис. 2. Пример 1. Упаковка шаров в единичный шар

**Пример 2.** В задаче из примера 1 в качестве контейнера вместо единичной сферы возьмем единичный куб. Коэффициент отношения между радиусами  $k > 1$ , т.е. шары первого типа больше шаров второго типа. Результаты расчетов представлены в табл. 2 и на рис. 3.

Таблица 2

Упаковка шаров в единичный куб

		$k = 1.05$		$k = 1.1$		$k = 1.2$		$k = 1.5$	
$m$	$n$	$R_1$	$D(\%)$	$R_1$	$D(\%)$	$R_1$	$D(\%)$	$R_1$	$D(\%)$
1	1	0.3098	26.873	0.3020	26.894	0.2882	27.354	0.2542	30.102
	2	0.2855	30.780	0.2780	29.978	0.267	29.723	0.2441	32.747
	3	0.2850	40.315	0.278	38.977	0.267	37.696	0.2361	35.145
	4	0.2555	35.823	0.255	37.027	0.2515	38.169	0.2361	40.657
2	1	0.28	30.485	0.268	29.527	0.2482	28.539	0.208	29.213
	2	0.2800	39.680	0.267	37.170	0.2482	34.944	0.208	32.983
	3	0.2535	36.270	0.251	37.504	0.243	38.804	0.208	36.752
	4	0.2510	41.831	0.250	43.603	0.243	44.814	0.2074	40.195
3	1	0.2785	40.471	0.266	39.364	0.2437	37.482	0.1953	34.693
	2	0.256	38.461	0.2465	37.600	0.2322	37.674	0.1953	37.812
	3	0.25	42.365	0.240	40.494	0.2305	41.982	0.1953	40.930
	4	0.2438	45.361	0.238	45.137	0.228	45.596	0.1953	44.048
4	1	0.246	35.111	0.242	37.543	0.231	40.852	0.1951	45.105
	2	0.244	40.346	0.238	41.359	0.228	44.245	0.1951	48.216
	3	0.2381	43.090	0.238	47.006	0.227	48.566	0.1951	51.327
	4	0.2381	48.795	0.238	52.653	0.227	53.465	0.1951	54.438

Из табл. 2 можно видеть, что с увеличением количества шаров одного типа плотность упаковки, как правило, монотонно возрастает, однако в ряде случаев (например, при  $k = 1.1$ ,  $m = 1$ ,  $n = 3$  и  $m = 2$ ,  $n = 3$ ) добавление шара может ухудшить конфигурацию. Это объясняется ограничением на отношение радиусов, поскольку, если новый шар невозможно поместить в контейнер без существенного уменьшения радиуса, то это приводит к мультипликативному эффекту для плотности.

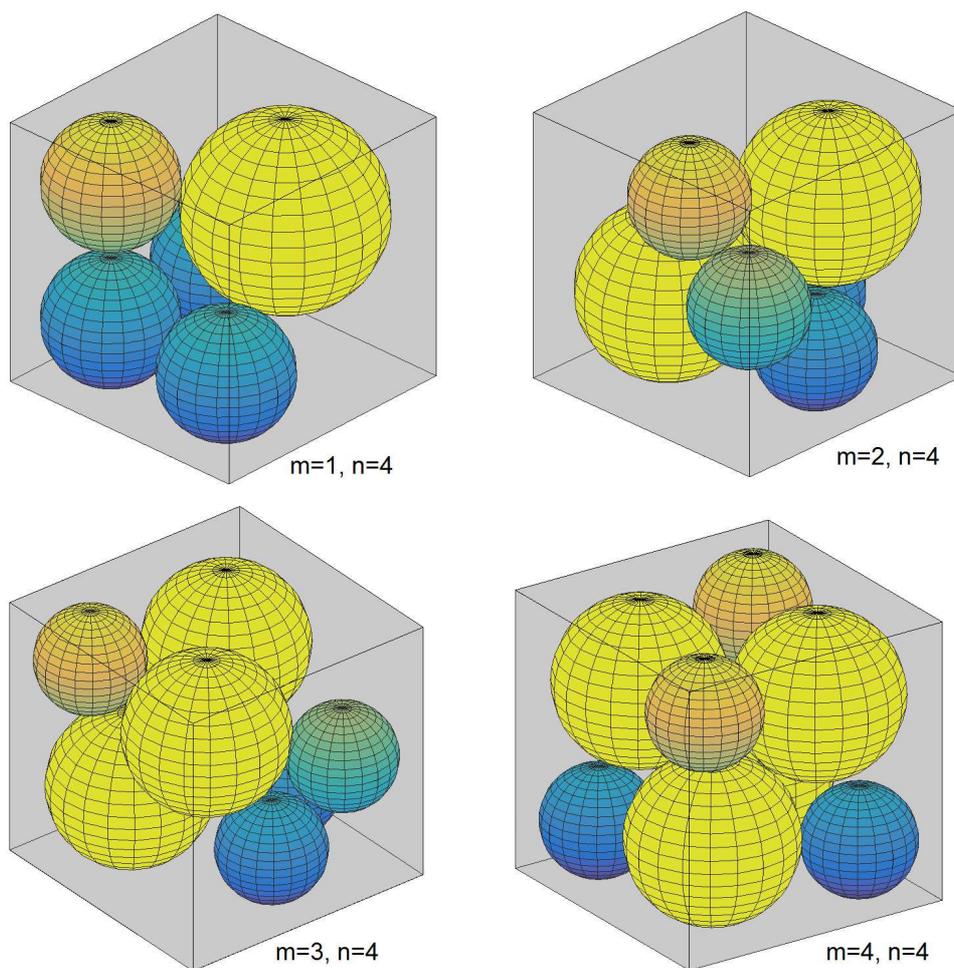
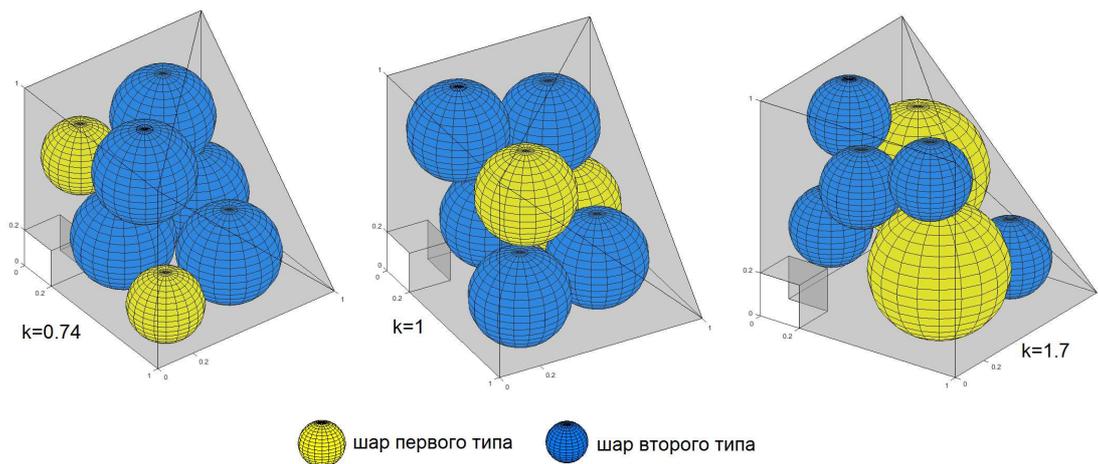
Рис. 3. Пример 2. Результаты вычисления при  $k = 1.5$ 

Рис. 4. Пример 3. Упаковка шаров в невыпуклое множество

Отметим интересные случаи при  $k = 1.5$ ,  $m = 3$  и  $m = 4$ . Здесь добавление второго, третьего и четвертого маленьких шаров не приводит к уменьшению радиуса упаковки. Подобный эффект можно наблюдать, когда большие шары располагаются в ГЦК- или ГП-упаковках, а маленькие помещаются в свободное пространство (рис. 3, правый нижний) и имеют схожую структуру (рис. 3, левый нижний). В рассматриваемом примере максимальная плотность упаковки достигается в случае, когда  $k = 1.5$  и  $m = n = 4$ .

Таблица 3  
Упаковка шаров в невыпуклое множество

$k$	$R_1$	$R_2$	$D(\%)$	$t$
0.50	0.1210	0.2420	37.76	514
0.74	0.1791	0.2420	41.79	531
0.90	0.2061	0.2291	39.36	483
0.95	0.2175	0.2290	40.92	463
0.98	0.2224	0.2269	40.86	524
1.00	0.2256	0.2256	40.79	447
1.02	0.2287	0.2242	40.74	452
1.05	0.2331	0.2220	40.63	479
1.10	0.2398	0.2183	40.29	473
1.20	0.2496	0.2084	38.62	481
1.50	0.2838	0.1892	40.39	526
1.70	0.2992	0.1760	41.02	497
2.00	0.2992	0.1496	35.68	608

Таблица 4  
Упаковка шаров в множество с неевклидовой метрикой

$m$	$n$	$R_1$	$R_2$	$D(\%)$	$t$
4	1	0.1515	0.1001	33.11	374
4	2	0.1515	0.1001	37.34	270
4	3	0.1475	0.0983	37.23	420
4	4	0.1455	0.0970	40.28	726
4	5	0.1415	0.0943	37.07	988
4	6	0.1404	0.0936	39.59	1247

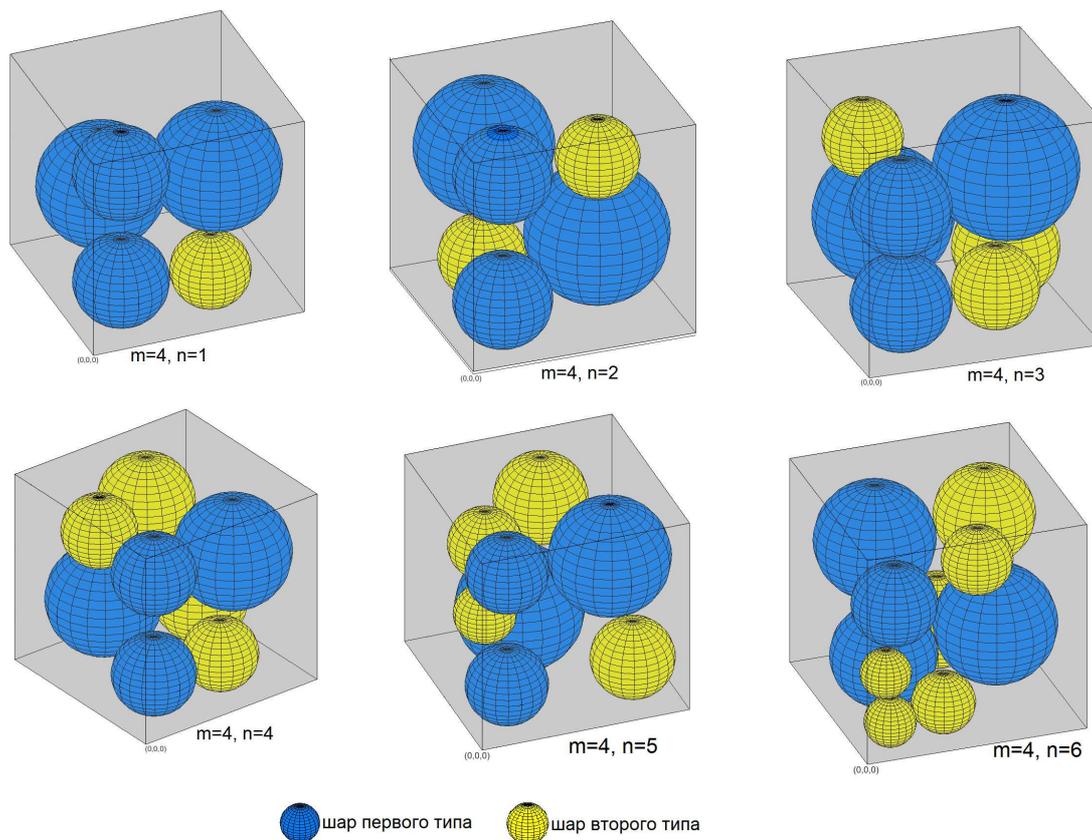


Рис. 5. Пример 4. Упаковка шаров в множество с неевклидовой метрикой

**Пример 3.** Рассмотрим задачу упаковки в невыпуклое множество  $P: P = D \setminus B$ , где

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2; 0 \leq x, y, z \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 0.2\}.$$

Имеются  $m = 2$  шаров с радиусом  $R_1$  и  $n = 5$  шаров с радиусом  $R_2$ . Исследуем влияние коэффициента  $k = R_1/R_2$  на плотность упаковки. Полученные результаты представлены в табл. 3 и на рис. 4. Из этой таблицы можно видеть, что плотность упаковки достигает максимума при  $k = 0.74$ .

**Пример 4.** Рассмотрим задачу упаковки разных шаров в единичный куб в неевклидовой метрике. Метрика задается линейной функцией  $f(x, y, z) = x + y + 1$ . Это означает, что радиус шаров растет с ростом координат  $x$  и  $y$ . В этом примере рассмотрим случай, когда отношение между радиусами имеет значение  $k = 1.5$ . Результаты расчетов представлены в табл. 4 и на рис. 5.

Из табл. 4 видно, что, как и в случае евклидова расстояния, с ростом числа шаров плотность упаковки растет немонотонно. Тем не менее, можно утверждать, что плотность упаковки достигает приемлемых показателей ( $> 35\%$ ). Рис. 5 иллюстрирует тот факт, что в заданной метрике упаковываемые объекты имеют форму шара со смещенным центром. Шары, расположенные по осям  $x$  и  $y$  ближе к началу координат, визуально выглядят меньше, однако их радиусы в заданной метрике равны.

**5. Заключение.** В настоящей статье предложен алгоритм решения задачи упаковки шаров двух типов в замкнутое ограниченное множество в трехмерном пространстве при евклидовом и неевклидовом расстоянии. Во втором случае используется специальная функция расстояния, особенность которой заключается в следующем: физическое расстояние заменяется временем, необходимым для достижения одной точки из другой, что позволяет авторам применять подход, основанный на физических принципах распространения световых волн. Подобные постановки возникают, в частности, в задачах оптимизации логистической инфраструктуры и безопасности. Преимущество разработанного алгоритма заключается в возможности решения задачи упаковки шаров для широкого класса метрических пространств. Кроме того, алгоритм практически нечувствителен к форме контейнера, что позволяет работать с невыпуклыми множествами. Алгоритм имеет высокую вычислительную сложность, однако он все же требует меньше времени для решения задачи, чем алгоритм бильярдного моделирования, и дает более точные результаты по сравнению с алгоритмом волнового спуска.

В дальнейшем предложенный подход авторы планируют распространить на задачу покрытия равными шарами.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-07-00604 и 20-010-00724).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Castillo I., Kampas F.J., Pintér J.D.* Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications // *European Journal of Operational Research*. 2008. **191**, N 3. 786–802.
2. *Harary F., Randolph W., Mezey P.G.* A study of maximum unit-circle caterpillars — tools for the study of the shape of adsorption patterns // *Discrete Applied Mathematics*. 1996. **67**, N 1–3. 127–135.
3. *Wang J.* Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning // *Journal of Combinatorial Optimization*. 1999. **3**. 453–463.
4. *Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Computational Geometry*. 2010. **43**, N 5. 535–553.
5. *Hales T.* Cannonballs and honeycombs // *Notices of the American Mathematical Society*. 2000. **47**, N 4. 440–449.
6. *Stoyan Y., Yaskov G.* Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped // *Intelligent Decision Support*. Wiesbaden: Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler, 2008. 47–67.
7. *Stoyan Yu.G., Yaskov G.* Packing identical spheres into a cylinder // *International Transactions in Operational Research*. 2009. **17**, N 1. 51–70.
8. *Huang W., Yu L.* Serial symmetrical relocation algorithm for the equal sphere packing problem. Ithaca: Cornell Univ. Library, 2012. Available at <https://arxiv.org/abs/1202.4149>.
9. *Mughal A., Chan H., Weaire D., Hutzler D.* Dense packings of spheres in cylinders: simulations // *Physical Review E*. 2012. **85**. doi 10.1103/PhysRevE.85.051305.
10. *Fu L., Steinhardt W., Zhaod H., Socolar J.E.S., Charbonneau P.* Hard sphere packings within cylinders // *Soft Matter*. 2016. **12**. 2505–2514.
11. *Scheithauer G., Stoyan Yu., Yaskov G.* Packing non-equal spheres into containers of different shapes. 2013. <http://www.math.tu-dresden.de/~scheith/ABSTRACTS/2013-spheres.html>.
12. *Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov G.N.* Packing unequal spheres into various containers // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**, N 3. 419–426.
13. *Khud O.M., Yaskov G.N.* Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm // *Control, Navigation and Communication Systems*. 2017. **6**, N 46. 131–135.
14. *Kubach T., Bortfeldt A., Tilli T., Gehring H.* Parallel greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid. 2009. <https://www.fernuni-hagen.de/wirtschaftswissenschaft/download/beitraege/db440.pdf>.

15. *Kubach T., Bortfeldt A., Tilli T., Gehring H.* Greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid // *Asia Pacific Journal of Operational Research*. 2011. **28**, N 6. 739–753.
16. *Huang W.Q., Li Y., Akeb H., Li C.M.* Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container // *Journal of the Operational Research Society*. 2005. **56**, N 5. 539–548.
17. *Hifi M., Yousef L.* Width beam and hill-climbing strategies for the three-dimensional sphere packing problem // 2014 Federated Conference on Computer Science and Information Systems. New York: IEEE Press, 2014. 421–428.
18. *Yamada S., Kanno J., Miyauchi M.* Multi-sized sphere packing in containers: optimization formula for obtaining the highest density with two different sized spheres // *IPSJ Online Transactions*. 2011. **4**. 126–133.
19. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 7. 50–57.
20. *Бухаров Д.С., Казаков А.Л.* Программная система “ВИГОЛТ” для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13** 65–74.
21. *Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С.* К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // *Автоматика и телемеханика*. 2013. № 6. 87–100.
22. *Kazakov A.L., Lempert A.A.* On mathematical models for optimization problem of logistics infrastructure // *International Journal of Artificial Intelligence*. 2015. **13**, N 1. 200–210.
23. *Казаков А.Л., Лебедев П.Д.* Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. **16**. 307–317.
24. *Казаков А.Л., Лемперт А.А., Нгуен Г.Л.* Об одном алгоритме построения упаковки конгруэнтных кругов в неодносвязное множество с неевклидовой метрикой // *Вычислительные методы и программирование*. 2016. **17**. 177–188.
25. *Kazakov A.L., Lempert A.A., Ta T.T.* The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. **51**, N 32. 782–787.
26. *Kazakov A.L., Lempert A.A., Ta T.T.* On the algorithm for equal balls packing into a multi-connected set // *Vith International Workshop on Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security (IWCI 2019)*. Paris: Atlantis Press, 2019. 216–222.
27. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989.
28. *Graham R.L., Lubachevsky B.D., Nurmela K.J., Ostergard P.R.J.* Dense packings of congruent circles in a circle // *Discrete Mathematics*. 1998. **181**, N 1–3. 139–154.

Поступила в редакцию  
26.02.2020

---

### An Algorithm for Packing Balls of Two Types in a Three-Dimensional Set with a Non-Euclidean Metric

A. L. Kazakov<sup>1</sup>, A. A. Lempert<sup>2</sup>, and C. T. Ta<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Lermontova 134, Irkutsk, 664033, Russia; Dr. Sci., Professor, Chief Researcher, e-mail: kazakov@icc.ru*

<sup>2</sup> *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Lermontova 134, Irkutsk, 664033, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: lempert@icc.ru*

<sup>3</sup> *Irkutsk National Research Technical University, Faculty of Cybernetics; ulitsa Lermontova 83, Irkutsk, 664074, Russia; Graduate Student, e-mail: tatrunghanh@mail.ru*

Received February 26, 2020

**Abstract:** The problem of packing balls of two types into a closed bounded set in three-dimensional space with the Euclidean metric and a special non-Euclidean metric. It is required to maximize the radius of the balls for a given number of balls of each type and a known ratio of radii. We propose a computational algorithm based on a combination of the billiard modeling method and the optical-geometric approach employing the fundamental physical principles of Fermat and Huygens. The results of numerical experiments are discussed.

**Keywords:** optimal packing of unequal balls, numerical algorithm, billiard modeling, optical-geometric method, software package.

## References

1. I. Castillo, F. J. Kampas, and J. D. Pintér, “Solving Circle Packing Problems by Global Optimization: Numerical Results and Industrial Applications,” *Eur. J. Oper. Res.* **191** (3), 786–802 (2008).
2. F. Harary, W. Randolph, and P. G. Mezey, “A Study of Maximum Unit-Circle Caterpillars — Tools for the Study of the Shape of Adsorption Patterns,” *Discrete Appl. Math.* **67** (1-3), 127–135 (1996).
3. J. Wang, “Packing of Unequal Spheres and Automated Radiosurgical Treatment Planning,” *J. Comb. Optim.* **3**, 453–463 (1999).
4. N. Chernov, Yu. Stoyan, and T. Romanova, “Mathematical Model and Efficient Algorithms for Object Packing Problem,” *Comput. Geom.* **43** (5), 535–553 (2010).
5. T. C. Hales, “Cannonballs and Honeycombs,” *Not. Am. Math. Soc.* **47** (4), 440–449 (2000).
6. Y. Stoyan and G. Yaskov, “Packing Identical Spheres into a Rectangular Parallelepiped,” in *Intelligent Decision Support* (Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler, Wiesbaden, 2008), pp. 47–67.
7. Yu. G. Stoyan and G. N. Yaskov, “Packing Identical Spheres into a Cylinder,” *Int. Trans. Oper. Res.* **17** (1), 51–70 (2010).
8. W. Huang and L. Yu, *Serial Symmetrical Relocation Algorithm for the Equal Sphere Packing Problem* arXiv preprint: 1202.4149v1 [cs.DM] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2012), available at <https://arxiv.org/abs/1202.4149>.
9. A. Mughal, H. K. Chan, D. Weaire, and S. Hutzler, “Dense Packings of Spheres in Cylinders: Simulations,” *Phys. Rev. E* **85** (2012). doi 10.1103/PhysRevE.85.051305.
10. L. Fu, W. Steinhardt, H. Zhao, et al., “Hard Sphere Packings within Cylinders,” *Soft Matter*. **12**, 2505–2514 (2016).
11. G. Scheithauer, Yu. Stoyan, and G. Yaskov, “Packing Non-Equal Spheres into Containers of Different Shapes,” (2013).  
<http://www.math.tu-dresden.de/~scheith/ABSTRACTS/2013-spheres.html>. Cited March 25, 2020.
12. Yu. G. Stoyan, G. Scheithauer, and G. N. Yaskov, “Packing Unequal Spheres into Various Containers,” *Cybern. Syst. Anal.* **52** (3), 419–426 (2016).
13. O. M. Khlud and G. N. Yaskov, “Packing Homothetic Spheroids into a Larger Spheroid with the Jump Algorithm,” *Contr. Navig. Commun. Syst.* **6** (46), 131–135 (2017).
14. T. Kubach, A. Bortfeldt, T. Tilli, and H. Gehring, *Parallel Greedy Algorithms for Packing Unequal Spheres into a Cuboidal Strip or a Cuboid*, (2009).  
<https://www.fernuni-hagen.de/wirtschaftswissenschaft/download/beitraege/db440.pdf>. Cited March 25, 2020.
15. T. Kubach, A. Bortfeldt, T. Tilli, and H. Gehring, “Greedy Algorithms for Packing Unequal Spheres into a Cuboidal Strip or a Cuboid,” *Asia Pac. J. Oper. Res.* **28** (6), 739–753 (2011).
16. W. Q. Huang, Y. Li, H. Akeb, and C. M. Li, “Greedy Algorithms for Packing Unequal Circles into a Rectangular Container,” *J. Oper. Res. Soc.* **56** (5), 539–548 (2005).
17. M. Hifi and L. Yousef, “Width Beam and Hill-Climbing Strategies for the Three-Dimensional Sphere Packing Problem,” in *2014 Federated Conf. on Computer Science and Information Systems, Warsaw, Poland, September 7–10, 2014* (IEEE Press, New York, 2014), pp. 421–428.
18. S. Yamada, J. Kanno, and M. Miyauchi, “Multi-Sized Sphere Packing in Containers: Optimization Formula for Obtaining the Highest Density with Two Different Sized Spheres,” *IPJSJ Online Trans.* **4**, 126–133 (2011).
19. A. L. Kazakov and A. A. Lempert, “An Approach to Optimization in Transport Logistics,” *Avtom. Telemekh.*, No. 7, 50–57 (2011) [*Autom. Rem. Contr.* **72** (7), 1398–1404 (2011)].
20. D. S. Bukharov and A. L. Kazakov, “VIGOLT System for Solving Transport Logistics Optimization Problems,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 65–74 (2012).
21. A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and D. S. Bukharov, “On Segmenting Logistical Zones for Servicing Continuously Developed Consumers,” *Avtom. Telemekh.*, No. 6, 87–100 (2013) [*Autom. Rem. Contr.* **74** (6), 968–977 (2013)].
22. A. L. Kazakov and A. A. Lempert, “On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure,” *Int. J. Artif. Intell.* **13** (1), 200–210 (2015).
23. A. L. Kazakov and P. D. Lebedev, “Algorithms of Optimal Packing Construction for Planar Compact Sets,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 307–317 (2015).
24. A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and H. L. Nguyen, “An Algorithm of Packing Congruent Circles in a Multiply Connected Set with Non-Euclidean Metrics,” *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 177–188 (2016).
25. A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and T. T. Ta, “The Sphere Packing Problem into Bounded Containers in Three-Dimension Non-Euclidean Space,” *IFAC-PapersOnLine* **51** (32), 782–787 (2018).

26. A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and T. T. Ta, “On the Algorithm for Equal Balls Packing into a Multi-connected Set,” in *Proc. VIth Int. Workshop on Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security, Baikalsk, Russia, March 17–24, 2019* (Atlantis Press, Paris, 2019), pp. 216–222.
27. F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction* (Springer, New York, 1985; Mir, Moscow, 1989).
28. R. L. Graham, B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela, and P. R. J. Östergard, “Dense Packings of Congruent Circles in a Circle,” *Discrete Math.* **181** (1–3), 139–154 (1998).