

УДК 539.42

doi 10.26089/NumMet.v21r212

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ТЕРМОПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ

А. С. Меретин<sup>1</sup>

Приведено описание программного комплекса для математического моделирования эволюции термопороупругой среды с учетом ее разрушения. Используемая математическая модель является модификацией модели Био для случая термопороупругих сред и позволяет моделировать изменение напряженно-деформированного состояния среды, фильтрацию флюида, неизотермические эффекты, а также разрушение среды. Разрушение среды описывается с использованием подхода континуальной механики разрушения путем введения дополнительной переменной, называемой параметром повреждаемости. Этот параметр характеризует степень разрушения среды, а его эволюция определяется заданным кинетическим уравнением. Вычислительный алгоритм основан на методе конечных элементов. Дискретизация уравнений по времени производится по неявной схеме для перемещений, давления и температуры и по явной для параметра повреждаемости. В качестве конечных элементов выбраны элементы Тейлора–Худа, имеющие второй порядок аппроксимации по перемещениям и первый по давлению и температуре. Система уравнений решается в рамках “моноконтинуальной” постановки без итерационного связывания между группами уравнений. Рассмотрены результаты расчетов с использованием программного модуля на примере задачи термического воздействия на нефтяной пласт.

**Ключевые слова:** термопороупругость, модель Био, разрушение, термодинамическая согласованность, метод конечных элементов.

**1. Введение.** Изучение процессов разрушения материалов под действием термомеханических нагрузок является актуальным направлением исследований в различных областях физики и имеет прикладную значимость в металлургии, строительстве, добыче углеводородов и других отраслях. В частности, в нефтяном инжиниринге одной из первостепенных задач является разработка различных методов увеличения нефтеотдачи для низкопроницаемых коллекторов. Одним из таких методов является термическое воздействие, при котором в пласт закачивается теплоноситель, который увеличивает подвижность нефти. При этом теплоноситель имеет температуру, значительно превосходящую пластовую, а его закачка производится под большим давлением. В связи с этим закачка сопровождается различными процессами, происходящими в пласте, такими как деформация породы, фильтрация и изменение физико-химических свойств пластового флюида, изменение температурного поля, а также разрушение породы. При этом для моделирования процесса термического воздействия требуется корректный учет взаимного влияния указанных эффектов.

В настоящий момент существует ряд моделей, описывающих процесс эволюции пороупругой среды с учетом ее разрушения. Основными недостатками этих моделей является то, что некоторые из них в общем случае не являются термодинамически корректными [1, 2], а другие [3] имеют в представленном виде скорее теоретическую направленность и не пригодны для проведения прикладных расчетов.

В настоящей статье представлена термодинамически согласованная математическая модель для описания эволюции термопороупругой среды с учетом деформационных, фильтрационных и неизотермических процессов, а также разрушения. Для данной модели описан вычислительный алгоритм, который реализован в виде программного комплекса на языке C++, приведены примеры прикладных расчетов.

**2. Математическая модель.** Одной из классических моделей, наиболее часто применяющейся для описания эволюции пороупругой среды, является модель Био [4]. В рамках данной модели среда представляется как совокупность двух взаимосвязанных континуумов: деформируемой твердой фазы (скелета) и подвижной жидкой фазы (флюида).

В классической постановке система уравнений модели Био состоит из закона сохранения массы, описывающего фильтрацию флюида по пористой среде, и закона сохранения импульса, описывающего изменение напряженно-деформированного состояния.

<sup>1</sup> Инжиниринговый центр МФТИ по полезным ископаемым, Институтский переулок, д. 9, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, ведущий инженер, e-mail: meretin.as@cet-mipt.ru

В случае термopорoупругoй среды для моделирования неизотермических эффектов вводится дополнительное уравнение баланса энергии в системе. Указанные уравнения выражают фундаментальные законы механики сплошной среды.

Для описания особенностей конкретных сред систему уравнений необходимо дополнить определяющими соотношениями, которые вводят ограничения на поведение материала под влиянием внешнего воздействия.

Существует ряд аксиом [5], содержащих базовые принципы построения теории определяющих соотношений. Одним из основных принципов является принцип термодинамической согласованности, который гласит, что определяющие соотношения должны удовлетворять второму началу термодинамики для любой последовательности состояний процесса.

Для моделирования разрушения среды требуется расширить модель Био путем введения дополнительных предположений о процессе развития повреждений. Существуют два основных подхода к математическому описанию процессов, происходящих при разрушении материала. В первом подходе [6] разрушение рассматривается как развитие конечного набора крупномасштабных трещин. Предполагается, что каждая трещина имеет определенные границы, а ее рост происходит при выполнении соответствующих критериев разрушения. Данный подход широко используется на практике в случаях, когда требуется описать развитие конечного (небольшого) числа уединенных трещин, например при моделировании процесса гидроразрыва пласта на нефтегазовых месторождениях.

Второй подход, который используется в настоящей работе, основан на использовании механики континуального разрушения [7, 8]. В рамках данного подхода разрушение рассматривается как процесс снижения “эффективных” прочностных свойств материала, вызванный развитием множества микротрещин и микропор. Предполагается, что “степень разрушения” материала описывается дополнительным (в общем случае тензорным) параметром, называемым параметром повреждаемости. Эволюция этого параметра определяется заданным кинетическим уравнением, которое описывает скорость изменения параметра повреждаемости в зависимости от текущего состояния среды. Подробный обзор существующих моделей эволюции параметра повреждаемости приведен в [9].

Ниже используется математическая модель, подробно описанная в [9]. Рассмотрим элементарный объем  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ , состоящий из двух континуумов: упругого скелета (“ $s$ ”) и однофазного слабосжимаемого флюида (“ $f$ ”). В предположении, что пространственные перемещения малы, а влияние внешних и инерционных сил пренебрежимо мало, система уравнений модели записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= 0, \\ \frac{\partial(m_s e_s + m_f e_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) &= \operatorname{div}(-p\mathbf{w}) - \operatorname{div}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{w} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \operatorname{grad}(p), \quad \mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T), \quad D &= D(\chi), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $m_f$  — масса флюида в элементарном объеме среды,  $\rho_f$  — плотность флюида,  $\mathbf{w}$  — скорость фильтрации,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор полных напряжений,  $e_\alpha$  — удельная внутренняя энергия фазы  $\alpha$ ,  $\mathbf{q}$  — плотность суммарного потока тепла,  $\mathbf{k}$  — положительно определенный тензор проницаемости,  $\mu$  — вязкость флюида,  $\boldsymbol{\kappa}$  — положительно определенный тензор коэффициентов теплопроводности,  $T$  — температура.

Последнее уравнение системы (1) описывает эволюцию параметра повреждаемости  $D$  (в настоящей работе предполагается, что  $D$  является скаляром) как некоторую функцию от текущего состояния среды  $\chi$  (мгновенная кинетика разрушения). В общем случае кинетическое уравнение для параметра повреждаемости может быть представлено с использованием конечной кинетики разрушения в виде  $\tau \frac{dD}{dt} = F(\chi)$ , где  $\tau$  — время релаксации,  $F$  — некоторая функция, зависящая от состояния среды [3]. Конкретный вид зависимости, используемый в настоящей работе, будет приведен далее.

Первичными переменными для системы уравнений (1) являются  $\chi = \{\varepsilon, p, T, D\}$ . Для замыкания системы уравнений (1) используются определяющие соотношения. При выводе определяющих соотношений основным критерием, ограничивающим их вид, является удовлетворение принципу термодинамической согласованности. Подробный вывод определяющих соотношений приведен в [9]. В настоящей работе при-

водится окончательный вид определяющих соотношений, используемый далее в численном алгоритме:

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}(1 - D) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \Delta D, \\ \Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T, \\ \Delta \frac{1}{\rho_f} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p + \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta T.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{C}$  — тензор упругих коэффициентов 4-го ранга,  $\mathbf{b}$  — коэффициент Био,  $\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T$  — тензор термоупругих коэффициентов,  $M$  — модуль Био,  $\alpha_m$  — коэффициент температурного расширения,  $C_{p\alpha}$  — теплоемкость фазы  $\alpha$ ,  $K_f$  — коэффициент объемного сжатия флюида,  $\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2 (\text{grad } \boldsymbol{\xi} + \text{grad } \boldsymbol{\xi}^T)$  — тензор малых деформаций,  $\boldsymbol{\xi}$  — вектор перемещений скелета,  $f^0$  — некоторое опорное состояние параметра  $f$ , причем  $\Delta f = f - f^0$ .

Система определяющих соотношений (2) описывает зависимость соответствующих величин от состояния среды  $\chi$ . Например, первое выражение описывает изменение полных напряжений при деформации скелета (первое слагаемое), изменении порового давления (второе слагаемое), температуры (третье слагаемое), а также разрушении среды (четвертое слагаемое).

Выражение для внутренней энергии скелета имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta E_s &= \Delta E_{s\varepsilon} + \Delta E_{sp} + \Delta E_{sT} + \Delta E_{sD}, \quad \text{где} \\ \Delta E_{s\varepsilon} &= \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \Delta E_{sp} &= \left[ \frac{1}{N} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\varphi \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p, \\ \Delta E_{sT} &= \left[ -\alpha_\varphi \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T, \\ \Delta E_{sD} &= - \left[ Y^0 + \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right] \Delta D.\end{aligned}$$

Выражение для внутренней энергии флюида имеет вид

$$\Delta E_f = \left[ \frac{\phi}{K_f} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \phi \alpha_f \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \left[ \phi \alpha_f \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T.$$

**3. Вычислительный алгоритм.** Система уравнений (1) представляет собой связанную задачу для эллиптического уравнения (закон сохранения импульса) и двух параболических уравнений (закон сохранения массы и энергии). На практике применяются различные методы для решения такого класса задач, такие как метод конечных объемов, метод конечных элементов и метод граничных интегральных уравнений. При этом сами уравнения системы могут решаться как совместно, так и итерационно. В последнем случае сходимость итерационного процесса напрямую зависит от выбора алгоритма связывания уравнений [10].

В настоящей работе для решения системы уравнений (1) используется метод конечных элементов, при этом уравнения решаются совместно. Основными неизвестными являются перемещения  $\boldsymbol{\xi}$ , поровое давление  $p$ , температура  $T$ . В качестве вида конечных элементов выбраны тетраэдральные элементы Тейлора–Худа [11], имеющие второй порядок аппроксимации по перемещениям и первый по давлению и температуре. Данный тип конечных элементов обеспечивает устойчивость решения задач пороупругости за счет выполнения условия Ладыженской–Бабушки–Бреззи [12].

Рассмотрим слабую постановку задачи. Пусть в области  $\Omega$  определено пространство  $V_\alpha$  достаточно гладких (вектор)функций, причем  $\boldsymbol{\xi} \in V_\xi$ ,  $p \in V_p$ ,  $T \in V_T$ , а на границе области  $\partial\Omega$  для каждого параметра заданы граничные условия Дирихле ( $\partial\Omega_D$ ) или Неймана ( $\partial\Omega_N$ ). Введем набор пробных функций  $\mathbf{v}_\alpha$  ( $\alpha = \{\boldsymbol{\xi}, p, T\}$ ) в пространстве  $V_\alpha^0 \subset V$ , где  $V_\alpha^0 = \{\mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{v}_\alpha|_{\partial\Omega_D} = 0\}$ . Домножим каждое уравнение

системы (1) на свою пробную функцию слева и получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{\xi}^T \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} v_p \left[ \frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) \right] d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} v_T \left[ \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} \right) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}_T) \right] d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя к системе уравнений (3) формулу Грина, получим вид уравнений в слабой постановке:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{v}_{\xi})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{v}_{\xi}^T \tilde{\mathbf{t}} dS &= 0, \\ \int_{\Omega} v_p \frac{\partial m_f}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} v_p)^T \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v_p \tilde{q} dS &= 0, \\ \int_{\Omega} v_T \left[ \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} v_T)^T \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} v_T)^T \rho \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} v_T)^T \mathbf{q} d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega_N} v_T \frac{1}{\phi} E_f \tilde{q} dS + \int_{\partial\Omega_N} v_T \rho \tilde{q} dS + \int_{\partial\Omega_N} v_T \tilde{q}_T dS &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tilde{\mathbf{t}}$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{q}_T$  — заданные вектор напряжений, поток флюида и поток тепла через границу  $\partial\Omega_N$ ,  $\mathbf{L}$  — дифференциальный оператор вида

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

а тензоры деформаций и напряжений представляются с помощью векторных обозначений Фойгта:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T, \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}]^T.$$

Предположим, что начальный тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^0$  постоянен для всего объема, а начальные деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  равны нулю. Тогда после подстановки всех определяющих соотношений и дифференцирования первого уравнения из (4) получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{v}_{\xi})^T : \mathbf{C}(1 - D) : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{v}_{\xi})^T \mathbf{b} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{v}_{\xi})^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{v}_{\xi}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}}{\partial t} dS, \\ \int_{\Omega} v_p \mathbf{b} : \mathbf{L} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v_p \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} v_p \alpha_m \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\operatorname{grad} v_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu} \operatorname{grad}(p) d\Omega = - \int_{\partial\Omega_N} v_p \tilde{q} d\Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} v_T [\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1-D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v_T \left[ \frac{1}{M} p d\Omega - \alpha_m T \right] \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} v_T \left[ -\alpha_m p + \frac{C_{ps} + C_{pf}}{T^0} T \right] \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} v_T \left[ \frac{1}{2} \frac{dD}{dt} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T \left\{ \frac{1}{\phi} E_f^0 + \left[ \frac{1}{K_f} p - \alpha_f T \right] \Delta p - \left[ \alpha_f p - \frac{C_{pf}}{\phi} \right] \Delta T \right\} \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } \phi_p d\Omega + \quad (6) \\
& + \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T p \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } p d\Omega - \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T \mathbf{q}_T d\Omega = \\
& - \int_{\partial\Omega_N} v_T \rho_f e_f \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} v_T p \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} v_T \tilde{q}_T dS.
\end{aligned}$$

Рассмотрим пространственную аппроксимацию системы уравнений (5) и (6). Для этого введем набор базисных функций  $\phi_i^{(\alpha)}$ , таких, что для произвольной функции  $f$  имеем

$$f = \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \phi_i^{(\alpha)} f_i, \quad f = \boldsymbol{\xi}, p, T.$$

Тогда с учетом вида определяющих соотношений (2) система уравнений (4) в матричном виде записывается в форме

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{pp} & 0 \\ \mathbf{B}_{T\xi} & \mathbf{B}_{Tp} & \mathbf{B}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{f}_{\xi}}{\partial t} \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\xi\xi} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{C}(1-D) (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \quad \mathbf{A}_{\xi p} = \mathbf{A}_{p\xi}^T = \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{b}\phi_p d\Omega, \\
\mathbf{A}_{\xi T} &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{C}(1-D) : \boldsymbol{\alpha}_T \phi_T d\Omega, \quad \mathbf{B}_{pp} = \int_{\Omega} (\text{grad } \phi_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu} (\text{grad } \phi_p) d\Omega, \\
\mathbf{A}_{pp} &= \int_{\Omega} \phi_p^T \frac{1}{M} \phi_p d\Omega, \quad \mathbf{A}_{pT} = - \int_{\Omega} \phi_p^T \alpha_m \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{A}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \phi_T^T (\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1-D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T) (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \\
\mathbf{A}_{Tp} &= \int_{\Omega} \phi_T^T \left( \frac{1}{M} p - \alpha_m T \right) \phi_p d\Omega, \quad \mathbf{A}_{TT} = \int_{\Omega} \phi_T^T \left[ -\alpha_m p + (C_{ps} + C_{pf}) \frac{T}{T^0} \right] \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{B}_{Tp} &= \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \left\{ \frac{1}{\phi} E_f^0 + \left[ \frac{1}{K_f} p - \alpha_f T \right] \Delta p - \left[ \alpha_f p - \frac{C_{pf}}{\phi} \right] \Delta T \right\} \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } \phi_p d\Omega, \\
\mathbf{B}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \left[ \frac{1}{2} \frac{dD}{dt} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \quad \mathbf{B}_{TT} = \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \boldsymbol{\kappa} \text{grad } \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{f}_{\xi} &= \int_{\partial\Omega_N} \phi_{\xi}^T \tilde{\mathbf{t}} dS, \quad \mathbf{f}_p = - \int_{\partial\Omega_N} \phi_p^T \tilde{q} d\Omega, \quad \mathbf{f}_T = - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T \rho_f e_f \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T p \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T \tilde{q}_T dS.
\end{aligned} \quad (8)$$

Для аппроксимации системы уравнений по времени использовалась полностью неявная схема для перемещений  $\boldsymbol{\xi}$ , давления  $p$  и температуры  $T$ . Некоторые параметры, такие как повреждаемость  $D$ , проницаемость  $k$ , вязкость флюида  $\mu_f$  являются функциями текущего состояния системы, поэтому для их вычисления использовались параметры с явного слоя. Для решения нелинейной системы уравнений использовался метод Ньютона. Решение системы линейных уравнений на каждой ньютоновской итерации производилось с использованием стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab: BiConjugate

Gradient Stabilized) [13]. В качестве предобусловливателя использовалось неполное LU-разложение с одноуровневым заполнением (ILU(1)). Для обеспечения устойчивости конечномерной задачи применялся ряд подходов, такие как диагонализация матриц масс [14] и перестановка строк и столбцов по алгоритму Катхилла–Макки [15].

**4. Программный комплекс.** Как правило, при необходимости учитывать в расчетах одновременно деформационные, фильтрационные, неізотермические эффекты и разрушение, используют различные программные модули и итерационно их связывают. Например, на каждом расчетном шаге запускается симулятор фильтрации, и распределение порового давления затем передается в геомеханический симулятор.

Приведенный в настоящей работе вычислительный алгоритм позволяет учитывать различные эффекты совместно. Для проведения практических расчетов данный алгоритм реализован в виде программного модуля, написанного на языке C++. Основными компонентами модуля являются препроцессор, вычислительное ядро и постпроцессор, подробное описание работы которых приведено далее.

Работа программного модуля начинается с запуска блока препроцессора, который отвечает за считывание и подготовку входных данных для модели. Входные данные представляют собой набор текстовых файлов, каждый из которых описывает отдельный блок данных и имеет фиксированный формат. В первую очередь производится зачитывание расчетной сетки. В связи с тем, что используемый вычислительный алгоритм подразумевает возможность расчета сложных трехмерных задач, в качестве элементов расчетной сетки использовались тетраэдры. Как было сказано ранее, элементы имеют второй порядок аппроксимации по перемещениям и первый по давлению и температуре. Таким образом, для каждого тетраэдра помимо основных 4 узлов должны быть определены промежуточные на гранях. Для простоты промежуточные узлы задавались в центрах ребер. Таким образом, количество узлов для каждого элемента равно 10. Их локальная нумерация приведена на рис. 1. Для однозначного задания расчетной сетки требуется задать координаты всех ее узлов, а также перечислить все тетраэдры с указанием индексов узлов, из которых они состоят, в глобальной нумерации.

Для построения простой расчетной сетки в данном формате был написан скрипт на языке Matlab, в основе которого лежит использование встроенной функции триангуляции заданной области по алгоритму Делоне. Этот генератор расчетной сетки принимает на вход данные о форме и размере расчетной области и шаге расчетной сетки (может быть переменным), а на выходе выдает набор текстовых файлов, содержащих информацию о координатах расчетных узлов, а также список узлов, формирующих каждую расчетную ячейку. Пример расчетной сетки приведен на рис. 2. Отметим, что программа позволяет использовать любые другие генераторы сетки, принимающие на вход описанные данные.

Полное описание расчетной модели помимо сетки включает в себя информацию о значении пара-

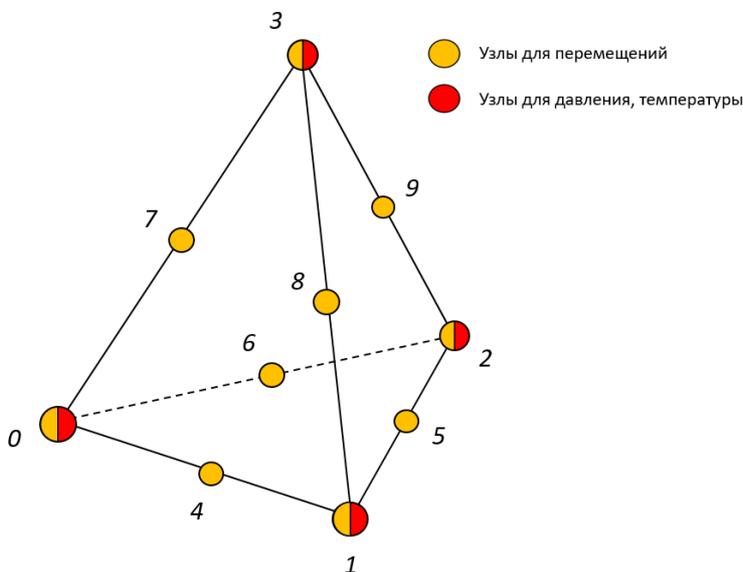


Рис. 1. Нумерация узлов тетраэдрального элемента

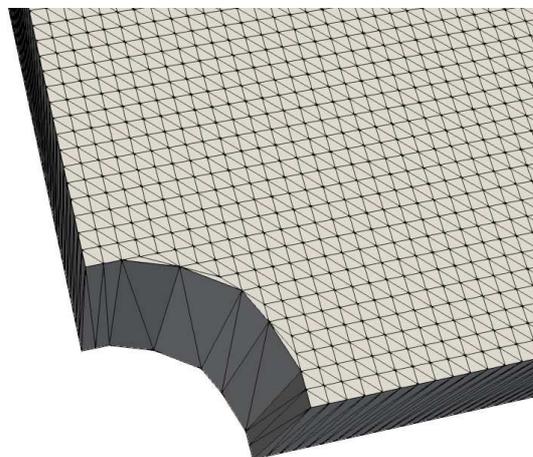


Рис. 2. Пример расчетной сетки

метров модели в каждой ячейке, а также полный набор начальных и граничных условий. Параметры модели задаются в виде набора данных в формате ключевое слово–значение параметра. Список основных параметров включает в себя геомеханические свойства породы (модуль Юнга, коэффициент Пуассона), коэффициент Био, параметры сжимаемости (модуль Био для скелета и коэффициент объемного сжатия флюида), плотности скелета и флюида, фильтрационно-емкостные свойства пласта (пористость, проницаемость), теплофизические свойства (теплоемкости, коэффициенты объемного термического сжатия), а также начальные условия для давления. При этом может быть задано как одно значение на всю модель, так и данные для каждой ячейки сетки в отдельности.

В программном модуле (рис. 3) имеется возможность задания граничных условий как первого, так и второго рода. Граничные условия первого рода задаются для отдельных узлов, расположенных на соответствующей границе в таком формате: номер соответствующей переменной (компонента вектора перемещений, давление или температура) в векторе неизвестных и ее значение. Граничное условие второго рода задается для соответствующих треугольных граней. Для каждой грани задаются номера узлов, формирующих грань, а также значение вектора напряжений, действующего на нее, и значения массового и теплового потока, протекающего через эту грань.

После полного описания всех входных данных для модели они передаются в вычислительное ядро, в котором выполняется решение системы уравнений (7) на каждый момент времени. Как уже отмечалось ранее, для решения системы нелинейных уравнений используется метод Ньютона. На каждой ньютоновской итерации производится сборка матрицы Якоби и вычисление правой части. Заполнение матрицы Якоби производится по блоку путем вычисления объемных интегралов (8) для каждого элемента расчетной сетки. Интегралы, содержащие базисные функции для перемещений, вычисляются по квадратурным формулам Гаусса второго порядка для тетраэдральных элементов. В остальных интегралах базисные функции только первого порядка, поэтому вычисление интеграла может быть выполнено аналитически. Для хранения и выполнения операций над матрицами используется библиотека Eigen [16]. В связи с тем, что якобиан является разреженной матрицей, на время его сборки значения ненулевых элементов матрицы хранятся в массиве триплетов, где каждый триплет содержит информацию о значении элемента и его положении в матрице.

После сборки якобиана и вычисления правой части применяются граничные условия. Для каждой переменной, для которой задано граничное условие первого рода, зануляется соответствующая ей строка в якобиане и правой части, а на диагонали матрицы ставится 1. Это означает, что приращение данной компоненты вектора неизвестных равно нулю, т.е. ее значение на каждый момент времени соответствует начальному (которое задается из начальных условий). Для граничных условий второго рода вычисляются поверхностные интегралы  $f_{\xi}$ ,  $f_p$ ,  $f_T$  (см. (8)) и добавляются к правой части.

Условием сходимости итерационного алгоритма является одновременное выполнение условий

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_{\infty} < \varepsilon_x, \quad \|\mathbf{R}\|_{\infty} < \varepsilon_R,$$

где  $\Delta \mathbf{x}$  — величина приращения неизвестных на текущей итерации,  $\mathbf{R}$  — значение нелинейной невязки,  $\varepsilon_{x,R}$  — параметры точности. Если количество итераций на одном временном шаге превышает 5, то временной шаг уменьшается в 2 раза и итерационный алгоритм повторяется с самого начала. В случае успешной сходимости алгоритма осуществляется расчет следующего временного периода с постепенным увеличением шага по времени.

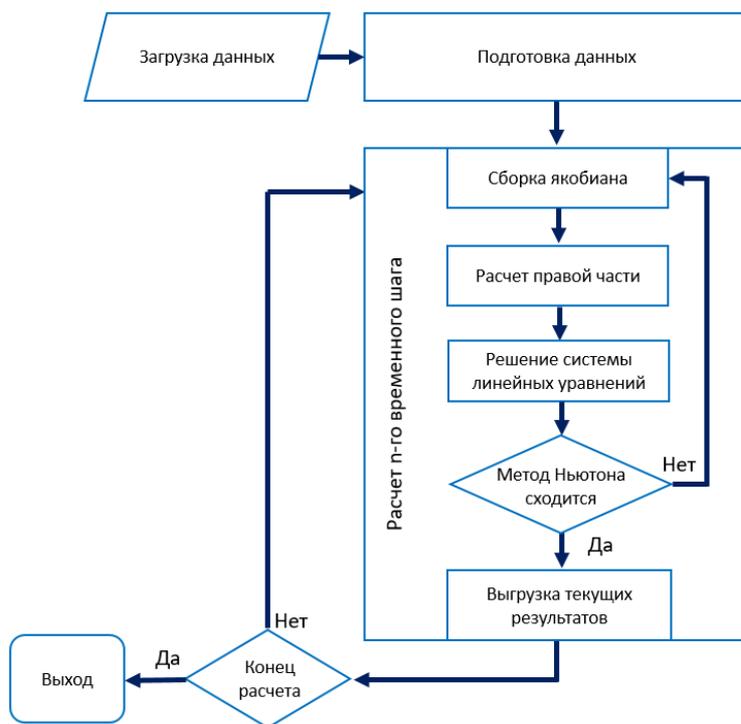


Рис. 3. Блок-схема работы программного модуля

На каждой ньютоновской итерации осуществляется решение системы линейных уравнений. После предварительной подготовки матрицы системы по алгоритмам, описанным в предыдущем разделе, запускается линейный солвер. В качестве солвера используется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab), реализованный в библиотеке HYPRE (Parallel High Performance Preconditioners) [17] с предобуславливателем ILU(1) из этой же библиотеки. Относительная погрешность вычислений линейного солвера установлена равной  $\epsilon_{\text{lin}}$ .

После расчета временного шага производится пересчет некоторых параметров модели, явно зависящих от текущего состояния среды. В первую очередь производится расчет параметра повреждаемости. Повреждаемость задается для всего элемента и зависит от состояния среды. Для вычисления значения повреждаемости все необходимые данные интерполируются на центр элемента, после чего рассчитанное по определенной формуле значение присваивается всему элементу. Поскольку во многих моделях повреждаемость зависит от главных значений тензора напряжений или деформаций, то для расчета главных значений вычисляются собственные значения соответствующей матрицы с использованием функционала библиотеки Eigen.

Кроме повреждаемости, в разработанном модуле осуществляется пересчет проницаемости среды, а также физических свойств флюида (в частности, вязкости). Данные величины тоже рассчитываются явно в конце шага по формулам, которые будут приведены в следующем разделе.

После завершения всех расчетов, относящихся к текущему временному шагу, данные передаются в постпроцессор. В постпроцессоре производится выгрузка основных результатов (давление, температура, деформации, напряжения, параметр повреждаемости, проницаемость, компоненты энергии и др.) на каждый момент времени для последующей визуализации и анализа. Для визуализации используется программа Paraview [18], которая принимает на вход .vtu-файл с неструктурированной сеткой и заданными на ней распределениями свойств. Для генерации этого файла используется библиотека VTK (Visualization Toolkit) [19].

Итоговая блок-схема всего процесса приведена на рис. 3.

**5. Результаты расчетов.** В данном разделе приведен пример работы разработанного программного модуля на примере задачи термического воздействия на флюидонасыщенный пласт. При проведении расчетов помимо стандартных учитывались следующие эффекты: разрушение среды, изменение проницаемости пласта при его деформации, изменение вязкости флюида от давления и температуры.

В качестве формулы, связывающей повреждаемость с параметрами среды, используется явная зависимость параметра повреждаемости от деформации породы [20]:

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_c, \\ \frac{D_{\text{off}}}{\tilde{\epsilon}_{\text{off}} - \tilde{\epsilon}_c} \tilde{\epsilon} - D_{\text{off}} \frac{\epsilon_c}{\tilde{\epsilon}_{\text{off}} - \tilde{\epsilon}_c}, & \text{если } \tilde{\epsilon}_c \leq \tilde{\epsilon} \leq \tilde{\epsilon}_{\text{off}}, \\ D_{\text{lim}} - (D_{\text{lim}} - D_{\text{off}}) \frac{\tilde{\epsilon}_{\text{off}}}{\tilde{\epsilon}}, & \text{если } \tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_{\text{off}}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\tilde{\epsilon}$  вычисляется по формуле

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \epsilon_i \rangle^2}, \quad \langle \epsilon_i \rangle = \frac{\epsilon_i + |\epsilon_i|}{2},$$

где  $\epsilon_i$  — главные деформации.

Для моделирования зависимости проницаемости от параметров состояния среды используется зависимость [21]

$$k = k_0 \exp[-\beta(\tilde{\sigma} - \alpha p)],$$

где  $k_0$  — начальное значение проницаемости,  $\tilde{\sigma} = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$  — среднее напряжение.

Для описания изменения вязкости флюида от состояния пласта используется корреляция Беггса-Робинсона [22], широко используемая в нефтяном инжиниринге:

$$\mu = 10^X - 1, \quad X = 10^Z T^{-1.163}, \quad Z = 3.0324 - 0.02023\gamma_0,$$

где  $\gamma_0$  — удельная плотность флюида, измеряемая в  ${}^0API$  (безразмерная единица измерения, описывающая отношение плотности флюида к плотности воды). Для перевода плотности флюида из системы СИ в  ${}^0API$  используется следующая формула:

$$\gamma_0 = \frac{141.5}{\rho_o/1000 + 131.5},$$

где  $\rho_o$  — плотность флюида в  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

В качестве конкретного примера применения комплекса рассмотрим задачу об образовании зоны повреждаемости в окрестности нагнетательной скважины при закачке в нее горячей жидкости под давлением, превышающим пластовое. Данная задача является некоторым аналогом задачи о самопроизвольном развитии трещины гидроразрыва пласта. Конечно, рассматриваемая постановка не описывает развитие трещины как уединенного объекта: для этого необходимо применение других моделей, качественно отличающихся от рассматриваемой. Однако можно ожидать, что качественное поведение зоны разрушения имеет ряд особенностей, характерных для “настоящей” трещины гидравлического разрыва пласта. В частности, это характерная (уплощенная) форма зоны разрушения и ее ориентация относительно направлений главных напряжений. Отметим также, что целью представленного ниже расчета не является моделирование динамики зоны разрушения в содержательной прикладной постановке. Описанный ниже расчет демонстрирует основные возможности использованной математической модели, алгоритмов и программной реализации.

Значения входных параметров для модели

Параметр	Значение
Модуль Юнга, $E$	20 ГПа
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.3
Модуль Био, $N$	10 ГПа
Модуль объемного сжатия флюида, $K_f$	3.3 ГПа
Коэффициент Био, $b$	0.79
Проницаемость, $k$	$1 \times 10^{-16} \text{ м}^2$
Пористость, $\varphi$	0.1
Вязкость, $\mu$	1 мПа · с
Плотность скелета, $\rho_s$	2100 $\text{кг}/\text{м}^3$
Плотность флюида, $\rho_s$	1000 $\text{кг}/\text{м}^3$
Коэффициент объемного температурного расширения скелета, $\alpha_s$	$1 \times 10^{-6} \text{ 1}/\text{К}$
Коэффициент объемного температурного расширения флюида, $\alpha_f$	$1 \times 10^{-4} \text{ 1}/\text{К}$
Удельная теплоемкость скелета, $c_{ps}$	1000 Дж/(кг · К)
Удельная теплоемкость флюида, $c_{pf}$	4200 Дж/(кг · К)
Эффективная теплопроводность, $\kappa$	2 Вт / (м · К)

Рассматриваемая модель имеет пять слоев, размеры модели  $50 \times 50 \times 5$  м. В центре модели расположена нагнетательная скважина, закачивающая флюид при постоянном давлении 800 бар и температуре  $400^0$  С. Начальное пластовое давление составляет 200 бар, температура —  $100^0$  С, полные (сжимающие) напряжения по направлению  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно 300, 550 и 700 бар. Параметры пласта и флюида приведены в таблице.

Для более корректной оценки продвижения фронта разрушения, связанного с ростом трещин, требуется ввести дополнительные условия в выражение для параметра повреждаемости (9). В соответствии с [23] в качестве такого условия введено требование, что повреждаемость изменяется, если максимальное значение главных компонентов тензора эффективных напряжений было больше некоторого порогового значения:

$$\sigma_{\text{eff}} = C : \varepsilon > \sigma_{\text{max}}.$$

Значение  $\sigma_{\text{max}}$  в наших расчетах принималось равным 100 бар.

Моделировалась закачка флюида в течение 5 сут. Распределение повреждаемости, давления и температуры на различные моменты времени показано на рис. 4. Латеральные компоненты тензора напряжений приведены на рис. 5.

В центре модели можно выделить область в форме эллипса (рис. 6), соответствующую диффузному разрушению вокруг скважины. Размер области на момент времени 5 суток равен  $30 \times 20$  м, среднее значение параметра повреждаемости в этой области равно 0.2, а проницаемость в ней увеличена примерно в 12 раз. Резкий переход из области разрушения в неповрежденную область связан с введением критерия на пороговое значение тензора эффективных напряжений, приведенного выше.

Для рассматриваемого расчета была проведена оценка вклада различных эффектов в напряженно-

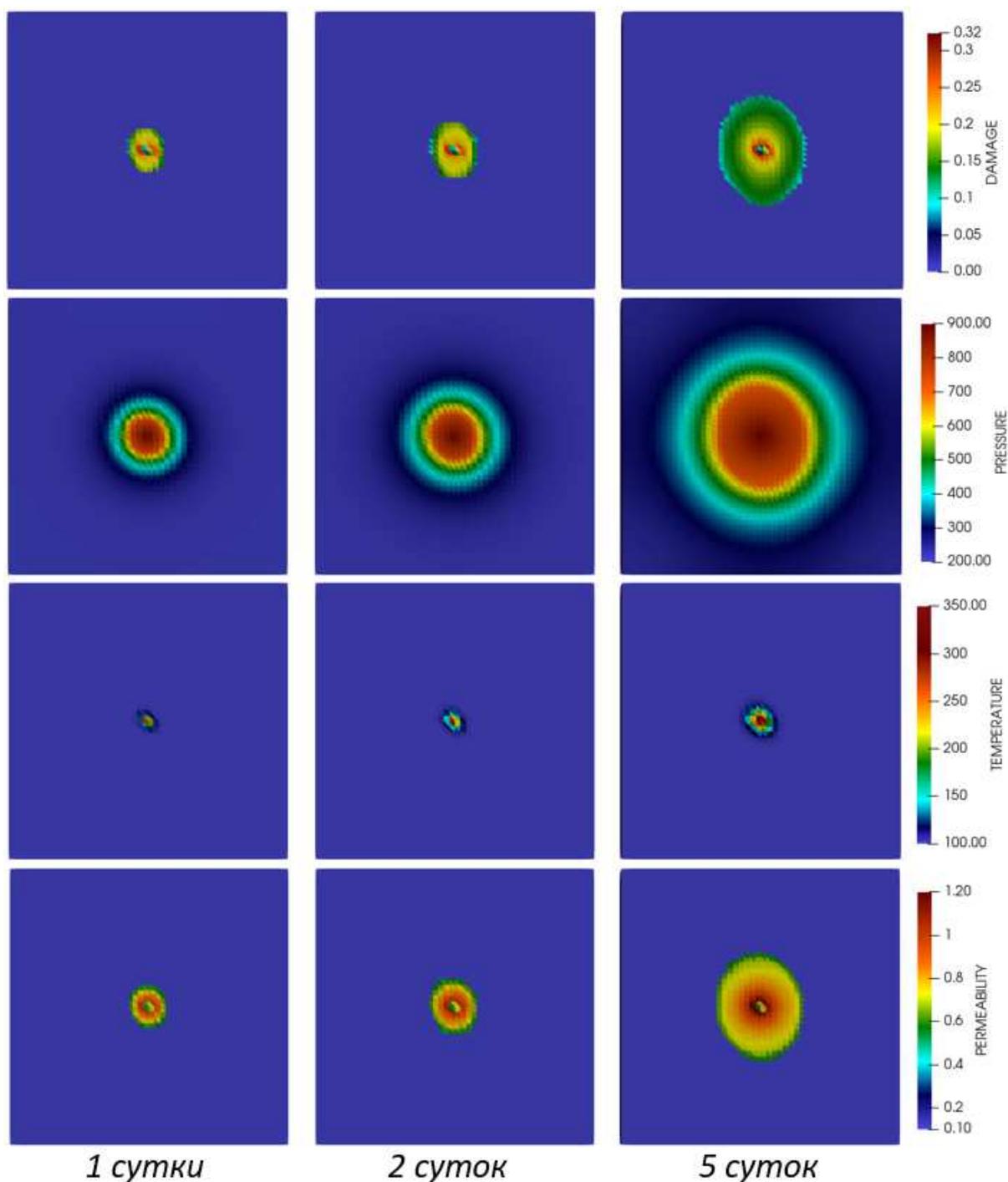


Рис. 4. Распределение параметра повреждаемости  $D$  (1 ряд), давления  $p$  (2 ряд), температуры  $T$  (3 ряд), проницаемости  $k$  (4 ряд) через 1 сутки (слева), 2 суток (по центру) и 5 суток (справа)

деформированное состояние пласта. Представим выражение (2) для тензора полных напряжений в виде

$$\Delta\sigma = \sigma_\epsilon - \sigma_p - \sigma_T - \sigma_D, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \sigma_\epsilon = C : \Delta\epsilon & \text{— деформационная часть,} \\ \sigma_p = b\Delta p & \text{— фильтрационная часть,} \\ \sigma_T = C : \alpha_T \Delta T & \text{— термическая часть,} \\ \sigma_D = D \cdot C : \Delta\epsilon & \text{— часть, связанная с разрушением.} \end{cases}$$

На рис. 7 приведено распределение долей каждой компоненты на момент времени 30 суток, где каж-

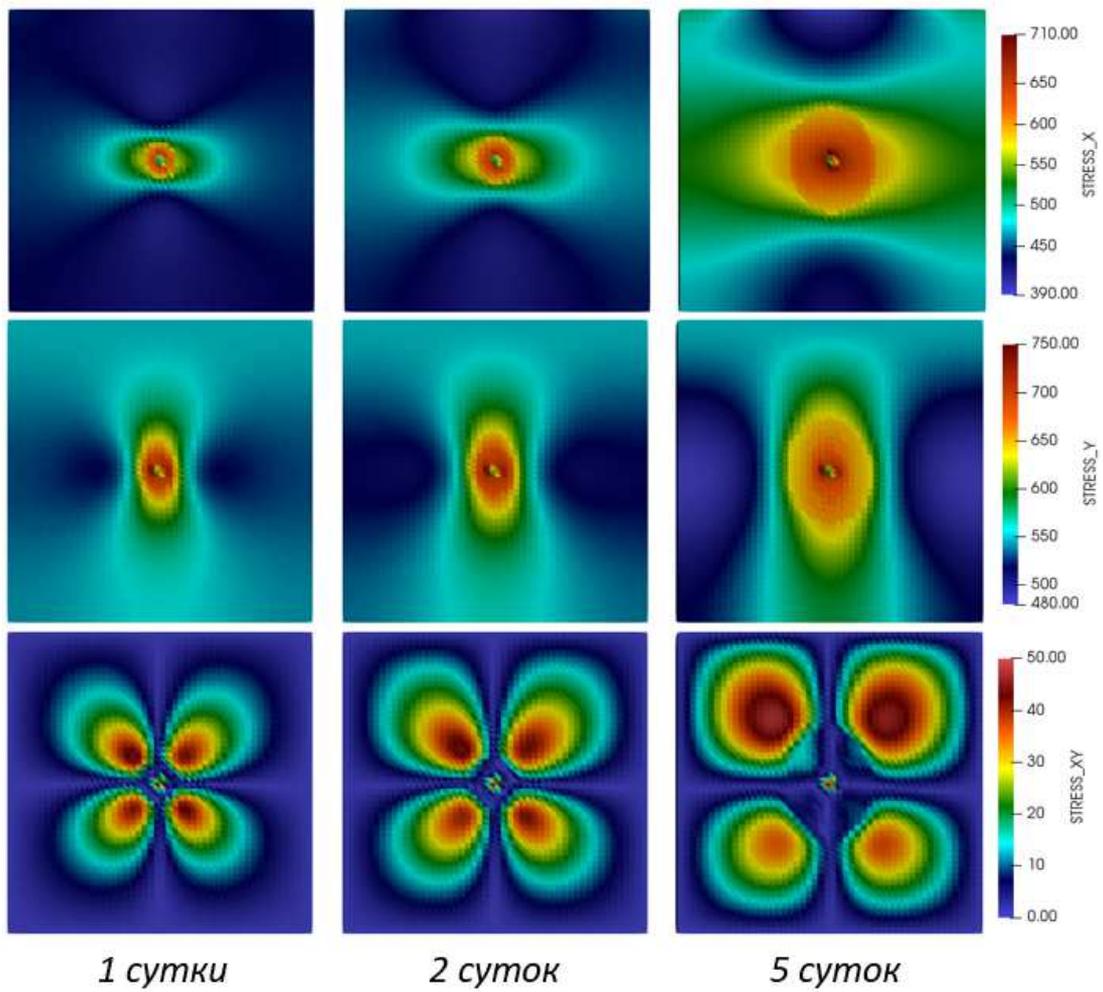


Рис. 5. Распределение латеральных компонентов тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  через 1 сутки (слева), 2 суток (по центру) и 5 суток (справа)

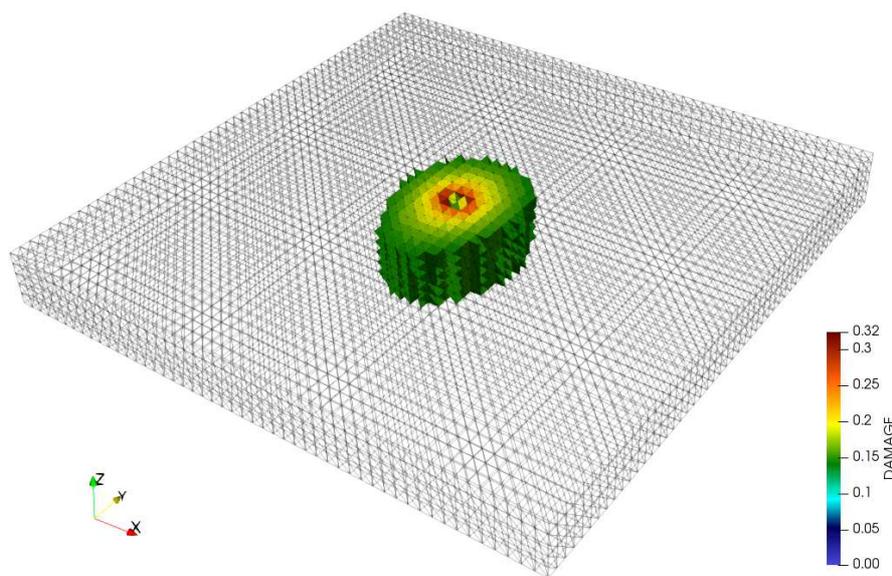


Рис. 6. Зона с наибольшим разрушением

дая компонента тензора полных напряжений нормировалась на величину

$$\Sigma = |\sigma_\varepsilon| + |\sigma_p| + |\sigma_T| + |\sigma_D|.$$

Из рис. 7 видно, что основной вклад в напряженно-деформированное состояние вносят деформационные и фильтрационные процессы. Вклад разрушения в поврежденной области составляет порядка 15%, а термических эффектов — менее 10%.

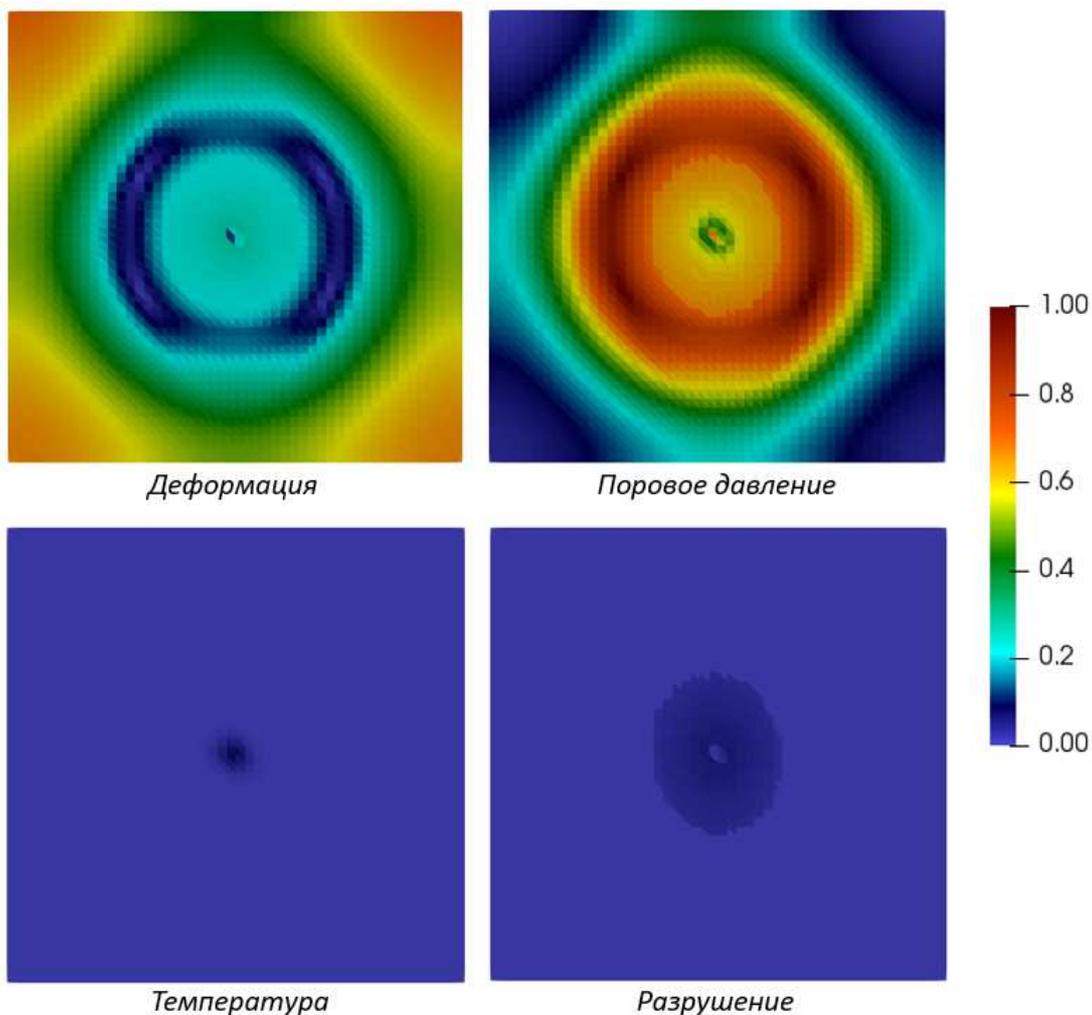


Рис. 7. Вклад различных параметров в изменение среднего напряжения (в долях) на момент времени 30 суток

**Статистика расчета.** Расчеты проводились на стационарном компьютере с процессором Intel Core i7 с 8 логическими ядрами. В программе распараллелен расчет линейной системы уравнений (функционал библиотеки NYPRE) с использованием технологии OMP (Open Multi-Processing). Полное время расчета составило 37 минут, количество узлов в модели — 112211, средний объем затраченной оперативной памяти 3 Гб. Среднее количество линейных итераций — 30, количество ньютоновских итераций от 3 до 6.

**6. Заключение.** В настоящей статье приведено описание программного комплекса для моделирования эволюции термoporоупругой среды с учетом ее разрушения, рассмотрены используемая математическая модель и вычислительный алгоритм. Математическая модель представляет собой систему уравнений, состоящую из закона сохранения массы, импульса и энергии, дополненную термодинамически согласованными определяющими соотношениями. Вычислительный алгоритм основан на методе конечных элементов. Система уравнений решается совместно без итерационного связывания. Работа программного комплекса продемонстрирована на примере задачи развития разрушения при закачке горячего флюида в пласт. Для данной задачи проанализирована степень разрушения пласта, а также вклад различных эффектов в изменение напряженно-деформированного состояния.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krajcinovic D., Fonseka G.U.* The continuous damage theory of brittle materials, part 1: general theory // Journal of applied Mechanics. 1981. **48**, N 4. 809–815.
2. *Murakami S.* Continuum damage mechanics: a continuum mechanics approach to the analysis of damage and fracture. Dordrecht: Springer, 2012.
3. *Кондауров В.И., Фортнов В.Е.* Основы термомеханики конденсированной среды. М.: МФТИ, 2002.
4. *Biot M.A.* General theory of three dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. 1941. **12**, N 2. 155–164.
5. *Noll W.* A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1958. **2**, N 1. 197–226.
6. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. 1920. Vol. 221. 163–198.
7. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. 26–31.
8. *Работнов Ю.Н.* Механизм длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: АН СССР, 1959. 5–7.
9. *Меретин А.С., Савенков Е.Б.* Математическая модель фильтрационных процессов в термoporoupryгой среде с учетом континуального разрушения. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 58. М., 2019.
10. *Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R.* Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics // SPE J. 2011. **16**. doi 10.2118/119084-PA.
11. *Taylor C., Hood P.A.* A numerical solution of the Navier–Stokes equations using the finite element technique // Computers and Fluids. 1973. **1**, N 1. 73–100.
12. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer, 1991.
13. *Саад Ю.* Итерационные методы для разреженных линейных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
14. *Neuman S.P.* Saturated-unsaturated seepage by finite elements // J. Hydraul. Div. 1973. **99**, N 12. 2233–2250.
15. *Cuthill E., McKee J.* Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. New York: ACM Press, 1969. 157–172.
16. C++ Template Library for Linear Algebra. URL: <http://eigen.tuxfamily.org/>.
17. HYPRE: Scalable Linear Solvers and Multigrid Methods. <https://computation.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods>
18. ParaView. <https://www.paraview.org/>.
19. Visualization Toolkit (VTK). <https://www.vtk.org/>
20. *Pogacnik J., O’Sullivan M., O’Sullivan J.* A damage mechanics approach to modeling permeability enhancement in thermo-hydro-mechanical simulations // Proceedings of 39th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering. Stanford: Stanford University. 2014. <https://pangea.stanford.edu/ERE/pdf/IGAstandard/SGW/2014/Pogacnik.pdf>.
21. *Tang C.A. et al.* Coupled analysis of flow, stress and damage (FSD) in rock failure // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2002. **39**, N 4. 477–489.
22. *Beggs H.D., Robinson J.R.* Estimating the viscosity of crude oil systems // Journal of Petroleum Technology. 1975. **27**, N 9. 1140–1141.
23. *Sun F., Jia P., Xue S.* Continuum damage modeling of hydraulic fracture from perforations in horizontal wells // Mathematical Problems in Engineering. 2019. doi 10.1155/2019/9304961.

Поступила в редакцию  
10.02.2020

## A Software Package for the Mathematical Simulation of Fracture in a Thermo-poroelastic Medium

A. S. Meretin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology, Center for Engineering and Technology; Institutskii pereulok 9, Dolgoprudny, 141701, Russia; Leading Engineer, e-mail: meretin.as@cet-mipt.ru*

Received February 10, 2020

**Abstract:** A software package for the mathematical simulation of thermo-poroelastic medium evolution with damage is considered. The employed model is a modification of the Biot model for thermo-poroelastic media and allows one to simulate the changes in the stress-strain state of the medium, the fluid flows, the nonisothermic effects, and the medium fracture. The medium damage is simulated using the continuum damage mechanics approaches by introducing a special variable called the damage parameter. This parameter characterizes the degree of medium fracture and its evolution is described by a given kinetic equation. The numerical algorithm is

based on a finite element method. The time discretization is performed using an implicit scheme for displacements, pressure, and temperature and an explicit scheme for the damage parameter. The Taylor-Hood finite elements of second-order approximation in displacements and first-order approximation in pressure and temperature are chosen. The system of equations is solved in the framework of the “monolithic” formulation without the iterative coupling between groups of equations. The numerical results of solving the problem on the rock damage evolution due to thermal action are discussed.

**Keywords:** thermoporoelasticity, Biot model, fracture, thermodynamic consistency principle, finite element method.

### References

1. D. Krajcinovic and G. U. Fonseka, “The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part 1: General Theory,” *J. Appl. Mech.* **48** (4), 809–815 (1981).
2. S. Murakami, *Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture* (Springer, Dordrecht, 2012).
3. V. I. Kondaurov and V. E. Fortov, *Fundamentals of the Thermomechanics of a Condensed Medium* (Moscow Inst. Phys. Technol., Moscow, 2002) [in Russian].
4. M. A. Biot, “General Theory of Three Dimensional Consolidation,” *J. Appl. Phys.* **12** (2), 155–164 (1941).
5. W. Noll, “A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media,” *Arch. Ration. Mech. Anal.* **2** (1), 197–226 (1958).
6. A. A. Griffith, “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids,” *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A.* Vol. 221, 163–198 (1920).
7. L. M. Kachanov, “Rupture Time under Creep Conditions,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdel Tekh. Nauk, No. 8*, 26–31 (1958) [*Int. J. Fract.* **97**, 11–18 (1999)].
8. Yu. N. Rabotnov, “On the Mechanism of Long-Term Fracture,” in *Problems of Strength of Materials and Structures* (Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1959), pp. 5–7.
9. A. S. Meretin and E. B. Savenkov, *Mathematical Model for Coupled Flow and Damage in Thermoporoelastic Medium*, Preprint No. 58 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2019).
10. J. Kim, H. A. Tchelepi, and R. Juanes, “Stability, Accuracy, and Efficiency of Sequential Methods for Coupled Flow and Geomechanics,” *SPE J.* **16** (2011). doi 10.2118/119084-PA
11. C. Taylor and P. Hood, “A Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations Using the Finite Element Technique,” *Comput. Fluids* **1** (1), 73–100 (1973).
12. F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods* (Springer, New York, 1991).
13. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 2003; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013).
14. S. P. Neuman, “Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements,” *J. Hydraul. Div.* **99** (12), 2233–2250 (1973).
15. E. Cuthill and J. McKee, “Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices,” in *Proc. 24th ACM Nat. Conf., New York, USA, August 26–28, 1969* (ACM Press, New York, 1969), pp. 157–172.
16. C++ Template Library for Linear Algebra. <http://eigen.tuxfamily.org>. Cited March 19, 2020.
17. HYPRE: Scalable Linear Solvers and Multigrid Methods. <https://computation.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods>. Cited March 19, 2020.
18. ParaView. <https://www.paraview.org>. Cited March 19, 2020.
19. Visualization Toolkit (VTK). <https://www.vtk.org>. Cited March 19, 2020.
20. J. Pogacnik, M. O’Sullivan, and J. O’Sullivan, “A Damage Mechanics Approach to Modeling Permeability Enhancement in Thermo-Hydro-Mechanical Simulations,” in *Proc. 39th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford, USA, February 24–26, 2014* (Stanford Univ. Prss, Stanford, 2014), <https://pangea.stanford.edu/ERE/pdf/IGAstandard/SGW/2014/Pogacnik.pdf>. Cited March 19, 2020.
21. C. A. Tang, L. G. Tham, P. K. K. Lee, et al., “Coupled Analysis of Flow, Stress and Damage (FSD) in Rock Failure,” *Int. J. Rock Mech. Min.* **39** (4), 477–489 (2002).
22. H. D. Beggs and J. R. Robinson, “Estimating the Viscosity of Crude Oil Systems,” *J. Pet. Technol.* **27** (9), 1140–1141 (1975).
23. F. Sun, P. Jia, and S. Xue, “Continuum Damage Modeling of Hydraulic Fracture from Perforations in Horizontal Wells,” *Math. Probl. Eng.* (2019). doi 10.1155/2019/9304961