

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v21r110

О СХЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Е. В. Чижонков¹

Для моделирования колебаний холодной плазмы как в нерелятивистском случае, так и с учетом релятивизма предложены модификации классических разностных схем второго порядка точности: метода МакКормака и двухэтапного метода Лакса–Вендроффа. Ранее для подобных расчетов в эйлеровых переменных была известна только схема первого порядка точности. Для задачи о свободных плазменных колебаниях, инициированных коротким мощным лазерным импульсом, с целью тестирования представленных схем проведены численные эксперименты по сохранению энергии и других величин. Сделан вывод о достоверности численного анализа колебаний как на основе схемы МакКормака, так и на основе схемы Лакса–Вендроффа, однако для расчетов “долгоживущих” процессов первая схема более предпочтительна. Теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости вместе с экспериментальным наблюдением за количественными характеристиками погрешности для наиболее чувствительных величин существенно повышает достоверность вычислений.

Ключевые слова: численное моделирование, плазменные колебания, эффект опрокидывания, схемы МакКормака и Лакса–Вендроффа, порядок точности разностной схемы, законы сохранения.

Введение. При исследовании плазменных колебаний и волн следует иметь в виду, что в отсутствие диссипации даже относительно небольшие начальные коллективные смещения частиц могут приводить к возникновению сингулярности плотности электронов [1]. Этот эффект принято называть *опрокидыванием* колебаний. Как показано в [2], сингулярность, т.е. обращение в бесконечность, электронной плотности при эйлеровом описании движения среды эквивалентно пересечению электронных траекторий при ее лагранжевом описании.

Для одномерной плоской нелинейной плазменной волны в [3] была определена предельная амплитуда электрического поля, до которой волна может существовать и при приближении к которой возмущения плотности электронов становятся бесконечно большими. Однако в публикациях [4, 5] было показано, что опрокидывание колебаний может происходить и при амплитудах поля, меньших предельного значения, но по истечении некоторого времени после их возбуждения. Такие колебания удобно называть “долгоживущими”; их время опрокидывания обратно пропорционально третьей степени величины электрического поля, что приводит к быстрому возрастанию времени опрокидывания при уменьшении амплитуды колебаний. В случае одномерной плоской геометрии опрокидывание “долгоживущих” колебаний, рассмотренное в [5], связано с зависимостью частоты от амплитуды вследствие релятивистских эффектов. Для цилиндрических и сферических колебаний опрокидывание обусловлено вкладом электронных нелинейностей в сдвиг частоты и объяснено пересечением электронных траекторий [4].

Содержательная часть эффекта опрокидывания достаточно проста. Электроны каким-либо способом, например коротким мощным лазерным импульсом, выводятся из положения равновесия, т.е. искусственно формируется электрическое поле разделения зарядов. Далее под действием кулоновских сил частицы стремятся вернуться в положение равновесия, однако, двигаясь все время с ускорением подобно маятнику, электроны регулярно проскакивают мимо указанного положения. В силу нелинейности уравнений, разница в частотах колебаний различных частиц с течением времени становится существенной, что приводит к пересечению соседних траекторий. Когда две различные частицы занимают одно и то же положение в пространстве и времени, то дальнейшее отслеживание их движения требует привлечения более сложных моделей, чем классическая электродинамика, так как бесконечная концентрация электрического заряда требует специальной интерпретации.

Следует заметить, что описанная ситуация принципиально отличается от моделирования в газовой динамике, где разрывные решения физически естественны. Следствием этой естественности является

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.ru

тот факт, что точное или приближенное решение классической задачи Римана (задачи Коши с кусочно-постоянными начальными данными) является основой большинства современных алгоритмов численного решения для соответствующих постановок задач [6]. В задачах же, связанных с плазменными колебаниями, постановка классической задачи Римана не имеет никакого физического смысла, так как начальная разрывная функция электрического поля уже означает бесконечную концентрацию заряда в точках разрыва.

В терминах уравнений с частными производными гиперболического типа эффект опрокидывания имеет название “градиентная катастрофа”, т.е. когда из сколь угодно гладких начальных данных или правых частей формируется ограниченное разрывное решение, имеющее неограниченные пространственные производные. В книге [7] для различных постановок задач о плазменных колебаниях в эйлеровых переменных неоднократно применялась специально сконструированная разностная схема расщепления по физическим процессам. Эта схема позволяла не только достоверно моделировать эффект опрокидывания в идеальной холодной плазме, но и хорошо зарекомендовала себя при учете дополнительных факторов: электрон-ионные соударения [8], тепловое движение электронов [9, 10] и др. Однако обсуждаемая схема, в силу конструкции расщепления, обладала только первым порядком точности по времени [11], что привело к необходимости сильного измельчения параметра дискретизации по времени при расчете решения, теряющего первоначальную гладкость. Этот фактор приводил к значительным расходам вычислительных ресурсов даже при расчетах пространственно одномерных задач, когда отслеживалась динамика “долгоживущих” колебаний.

В настоящей статье для моделирования плазменных колебаний предлагаются модификации классических методов второго порядка точности: метода МакКормака и двухэтапного метода Лакса–Вендроффа. Анализ аппроксимации и устойчивости их базовых версий представлен в монографиях [12–14]. Суть модификаций естественна: во-первых, дифференциальные уравнения холодной плазмы содержат свободные члены (типа источников), а во-вторых, часть уравнений не имеет стандартной дивергентной формы, для которой изначально были приспособлены оба указанных алгоритма. Если учет свободных членов носит исключительно технический характер, то “подгонка” под дивергентную форму основана на введении (определении) некоторой вспомогательной функции. Однако следует заметить, что сама вспомогательная функция в реальных вычислениях не участвует: она используется лишь как искусственный прием для обоснования применения хорошо известных методов.

Статья имеет следующую структуру. Сначала приведена подробная постановка задачи в эйлеровых переменных, включая начальные и граничные условия, необходимые для описания временной эволюции локализованных плазменных колебаний. Выписаны законы сохранения энергии и дополнительной функции в безразмерной форме как с учетом эффекта релятивизма, так и при пренебрежении им. Затем приведены модификации классических методов второго порядка точности: метода МакКормака и двухэтапного метода Лакса–Вендроффа. Далее приведены результаты расчетов, иллюстрирующие второй порядок точности предложенных модификаций методов как на гладких решениях, так и на решениях, завершающихся эффектом опрокидывания колебаний. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

1. Основные соотношения.

1.1. Постановка задачи. Будем считать плазму релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая как столкновительными и рекомбинационными эффектами, так и движением ионов. Тогда система описывающих ее гидродинамических уравнений совместно с уравнениями Максвелла в векторной форме будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \vec{\nabla}) \mathbf{p} &= e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} e n \mathbf{v} + \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где e , m — заряд и масса электрона (здесь заряд электрона имеет отрицательный знак: $e < 0$); c — скорость света; n , \mathbf{p} , \mathbf{v} — концентрация, импульс и скорость электронов; γ — лоренцевский фактор; \mathbf{E} , \mathbf{B} — векторы электрического и магнитного полей.

Система уравнений (1) является одной из простейших моделей плазмы, которую часто называют *уравнениями гидродинамики “холодной” плазмы*; она хорошо известна и достаточно подробно описана в

учебниках и монографиях (см., например, [15–18]).

С целью проведения численного моделирования плоских одномерных релятивистских плазменных колебаний базовые уравнения (1) можно существенно упростить.

Будем обозначать независимые переменные в декартовой системе координат обычным образом — (x, y, z) , и применим допущения, что

- решение определяется только x -компонентами вектор-функций $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{E}$;
- зависимость в этих функциях от переменных y и z отсутствует, т.е. соответствующие частные производные обнуляются: $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$. Тогда из системы (1) получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n v_x) = 0, \quad \frac{\partial p_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial p_x}{\partial x} = e E_x, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{m^2 c^2}}, \quad v_x = \frac{p_x}{m \gamma}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -4 \pi e n v_x. \quad (2)$$

Введем безразмерные величины

$$\rho = k_p x, \quad \theta = \omega_p t, \quad V = \frac{v_x}{c}, \quad P = \frac{p_x}{m c}, \quad E = -\frac{e E_x}{m c \omega_p}, \quad N = \frac{n}{n_0},$$

где $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$, n_0 — значение невозмущенной электронной плотности, $k_p = \omega_p / c$. В новых переменных система (2) примет вид

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \rho} (N V) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + P^2}, \quad V = \frac{P}{\gamma}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = N V. \quad (3)$$

Из первого и последнего уравнений (3) следует

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[N + \frac{\partial}{\partial \rho} E \right] = 0.$$

Это соотношение справедливо как при отсутствии плазменных колебаний ($N \equiv 1, E \equiv 0$), так и при их наличии. Поэтому отсюда имеем более простое выражение для электронной плотности

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho}. \quad (4)$$

Воспользовавшись им, приходим к уравнениям, описывающим плоские одномерные релятивистские плазменные колебания:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} + E + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + P^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0, \quad V = \frac{P}{\gamma}. \quad (5)$$

Рассмотрим возбуждение колебаний в окрестности прямой $\rho = 0$. Положим, что скорость и импульс электронов в начальный момент времени ($\theta = 0$) равны нулю:

$$P(\rho, \theta = 0) = 0, \quad V(\rho, \theta = 0) = 0, \quad (6)$$

и будем считать, что колебания возбуждаются в начальный момент времени электрическим полем вида

$$E(\rho, \theta = 0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2 \rho \exp \left\{ -2 \frac{\rho^2}{\rho_*^2} \right\}. \quad (7)$$

В этом выражении параметры ρ_* и a_* характеризуют масштаб области локализации и максимальную величину $E_{\max} = \frac{a_*^2}{\rho_* 2\sqrt{e}} \approx 0.3 \frac{a_*^2}{\rho_*}$ электрического поля (7) соответственно. Здесь и далее $e = 2.71 \dots$ — основание натурального логарифма. Вид функции (7) выбран из соображений, что подобные колебания могут возбуждаться в разреженной плазме ($\omega_l \gg \omega_p$) лазерным импульсом с частотой ω_l при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы, см. детали в [19]).

Заметим, что на больших расстояниях от прямой $\rho = 0$, в силу начального условия (7), плазменные колебания не возбуждаются. Поэтому будем считать, что выполнены следующие условия:

$$P(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad V(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad E(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, будем изучать в верхней полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$ решения основной системы (5), определяемые начальными и граничными условиями (6)–(8).

Кроме основной системы (5), будем рассматривать также упрощенную (нерелятивистскую) систему уравнений. А именно, в предположении малости скорости электронов V (по сравнению со скоростью света) имеет место представление

$$P = V \gamma = V + \frac{V^3}{2} + O(V^5), \quad V \rightarrow 0.$$

Таким образом, с точностью до кубически малых слагаемых можно считать, что $P = V$. Это предположение позволяет записать (5) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{V^2}{2} \right) + E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} - V = 0, \quad (9)$$

при этом начальные и граничные условия (6)–(8) останутся прежними.

1.2. Закон сохранения энергии. Умножим последнее уравнение системы (3) на E :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E^2}{2} \right) = N V E. \quad (10)$$

Полученное соотношение означает, что в пространственно одномерном случае при неподвижных ионах изменение плотности энергии электрического поля во времени связано только с передачей энергии электронам.

Умножим первое уравнение системы (3) на $V^2/2$, а первое уравнение системы (9) — на $N V$; после их сложения получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{N V^3}{2} \right) = -N V E. \quad (11)$$

Дифференциальная форма записи закона сохранения полной энергии электрического поля и электронов плазмы в нерелятивистском случае следует из сложения равенств (10) и (11):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (E^2 + N V^2) + \frac{\partial}{\partial \rho} (N V^3) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим сохранение энергии при учете релятивизма. Умножим первое уравнение (5) на $N V$

$$N \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + N V \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = -N V E, \quad (13)$$

а первое уравнение системы (3) — на γ :

$$\gamma \frac{\partial N}{\partial \theta} + \gamma \frac{\partial N V}{\partial \rho} = 0. \quad (14)$$

После сложения равенств (10), (13) и (14) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E^2}{2} + N \gamma \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} (N V \gamma) = 0. \quad (15)$$

Однако такая форма записи не обеспечивает переход к нерелятивистскому пределу (12) при малых скоростях, т.е. когда $V^2 \ll 1$. Поэтому вместо полной энергии одной частицы $\varepsilon = \gamma$, которая включает безразмерную энергию покоя $\varepsilon_0 = 1$, следует использовать ее кинетическую энергию $\varepsilon_k = \varepsilon - \varepsilon_0 = \gamma - 1$. При малых скоростях это выражение переходит в известную нерелятивистскую формулу $\varepsilon_k = V^2/2$.

Для получения описанной модификации вычтем первое уравнение системы (3) из (15), в результате будем иметь искомую форму закона сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{E^2}{2} + N(\gamma - 1) \right\} + \frac{\partial}{\partial \rho} \{ N V (\gamma - 1) \} = 0. \quad (16)$$

1.3. Сохранение других величин. Гиперболическая структура систем (5) и (9) позволяет, воспользовавшись стандартной техникой, получать выражения, означающие сохранение других величин. Приведем следующий пример (частное сообщение проф. Розановой О.С.).

Умножим первое уравнение (9) на NV , второе — на NE и результаты сложим:

$$N \frac{\partial}{\partial \theta} (E^2 + V^2) + NV \frac{\partial}{\partial \rho} (E^2 + V^2) = 0. \quad (17)$$

Теперь после умножения первого уравнение системы (3) на величину $(E^2 + V^2)$ и сложения с равенством (17) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \theta} N(E^2 + V^2) + \frac{\partial}{\partial \rho} NV(E^2 + V^2) = 0. \quad (18)$$

Аналогичные преобразования релятивистских уравнений (5) приводят к выражению

$$\frac{\partial}{\partial \theta} N \left\{ \frac{E^2}{2} + \gamma - 1 \right\} + \frac{\partial}{\partial \rho} NV \left\{ \frac{E^2}{2} + \gamma - 1 \right\} = 0. \quad (19)$$

Обратим внимание, что соотношения (18) и (19) не противоречат соответствующим законам сохранения энергии в нерелятивистском (12) и релятивистском (16) случаях: разница между соответствующими выражениями есть просто утверждение теоремы Гаусса (4), умноженное на подходящую комбинацию функций.

Таким образом, из дифференциальных уравнений (18) и (19) при использовании граничных условий (8) следует сохранение во времени величин

$$Af^\infty(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} N(\rho, \theta) [E^2(\rho, \theta) + V^2(\rho, \theta)] d\rho,$$

$$Afr^\infty(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} N(\rho, \theta) \left[\frac{E^2(\rho, \theta)}{2} + \gamma(\rho, \theta) - 1 \right] d\rho,$$

соответственно, в нерелятивистском и релятивистском случаях. Эти дополнительные функции более чувствительны к погрешностям аппроксимации по сравнению с функциями в (12) и (16), характеризующими энергию, так как наиболее сильно меняющаяся функция электронной плотности $N(\rho, \theta)$ здесь входит в качестве сомножителя не только при кинетической энергии частиц, но и при энергии электрического поля.

2. Схемы второго порядка точности. Пусть исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \rho} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, \rho, \theta), \quad (20)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{S} — вектор-функции, рассматриваемые в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \theta \geq 0, \rho \in \mathbb{R}\}$, и в момент времени $\theta = 0$ заданы начальные условия

$$\mathbf{U}(\rho, \theta = 0) = \mathbf{U}^0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Будем считать, что нас интересует приближенное решение задачи Коши, определенной соотношениями (20), (21), про которое известно, что оно существует, единственно и обладает достаточной гладкостью.

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянных параметров τ и h так, что

$$\theta^n = n\tau, \quad n \geq 0; \quad \rho_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и будем обозначать зависимую переменную $\mathbf{U}(\rho, \theta)$ в узле сетки (ρ_i, θ^n) как \mathbf{U}_i^n . Стандартная схема Мак-Кормака, предложенная в [20], состоит из двух этапов вычислений, известных как предиктор и корректор, и может быть представлена в форме

$$\mathbf{U}_i^p = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) + \tau \mathbf{S}_i^n,$$

$$\mathbf{U}_i^c = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_i^p - \mathbf{F}_{i-1}^p) + \tau \mathbf{S}_i^p,$$

где верхний индекс p (c) обозначает шаг предиктор (корректор) или n — временной слой θ^n .

Окончательная формула, формирующая решение на следующем временном слое $(n + 1)$, имеет вид

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c}{2}.$$

Приведем в тех же обозначениях формулы двухэтапного метода Лакса–Вендроффа [21]. На первом этапе величины $\mathbf{U}^{n+1/2}$ вычисляются на основе метода Лакса для дробных шагов по пространству $\rho_{i+1/2}$ и времени $\theta^{n+1/2}$:

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n) - \frac{\tau}{2h} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) + \frac{\tau}{4} (\mathbf{S}_i^n + \mathbf{S}_{i+1}^n).$$

Далее определяются вспомогательные величины

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}), \quad \mathbf{S}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{S}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}),$$

и, наконец, их использование приводит на втором этапе вычислений к итоговой формуле

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) + \frac{\tau}{2} (\mathbf{S}_{i+1/2}^{n+1/2} + \mathbf{S}_{i-1/2}^{n+1/2}).$$

Приведенные выше схемы хорошо известны и давно используются в вычислительной практике. Их свойства представлены в популярных монографиях, посвященных численному анализу и математическому моделированию (см., например, [12–14]). Напомним, что обе они на гладких решениях имеют порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ и условие устойчивости $\tau = O(h)$, поэтому эти схемы традиционно называют “схемами второго порядка точности”.

Как уже говорилось выше, в работах, где впервые были опубликованы методы МакКормака [20] и Лакса–Вендроффа [21], в формулах не были учтены источники членов вида $\mathbf{S}(\mathbf{U}, \rho, \theta)$. Однако, так как их добавление не вносит принципиальных трудностей, в дальнейшем при необходимости их учета исходные формулы, как правило, модифицируются авторами самостоятельно (см., например, [22, 23]).

Большой интерес представляет “обход” недивергентной формы записи уравнения, описывающего динамику электрического поля:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = V.$$

Определим с этой целью в произвольный требуемый момент времени θ вспомогательную функцию $\varphi(\rho, \theta)$ соотношениями

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = V \frac{\partial E}{\partial \rho}, \quad \varphi(a, \theta) = \varphi_a(\theta).$$

Заметим, что при достаточной гладкости определяющих правую часть функций $V(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$, функция $\varphi(\rho, \theta)$ существует, единственна и обладает гладкостью не меньшей, чем $E(\rho, \theta)$.

Обратим также внимание, что в формулах обоих методов участвуют не просто значения φ в узлах сетки (либо с целыми, либо с дробными узлами), а разности этих значений вида $(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$, представляющие собой по определению интегралы вида

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i \equiv \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{d\varphi}{d\rho} d\rho = \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} V \frac{\partial E}{\partial \rho} d\rho. \quad (22)$$

В целях аппроксимации интеграла в (22) воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников с узлом в середине отрезка, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + O((b-a)^3).$$

Учитывая, что длина отрезка интегрирования равна h , для (22) имеем

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = h \left(V \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_{i+1/2}} + O(h^3) = \frac{V_{i+1} + V_i}{2} (E_{i+1} - E_i) + O(h^3).$$

Теперь, вспоминая, что порядок точности методов МакКормака и Лакса–Вендроффа на гладких решениях есть $O(\tau^2 + h^2)$ при условии устойчивости вида $\tau = O(h)$ (см. [12–14]), получаем, что погрешность замены точного значения интеграла его аппроксимацией по формуле прямоугольников можно игнорировать без потери точности исходных формул.

Вышесказанное означает, что на гладких решениях разница в погрешности аппроксимации для дивергентной и недивергентной форм записи исходных уравнений не должна быть существенной. При этом

введение вспомогательной функции $\varphi(\rho, \theta)$ иллюстрирует один из возможных переходов к дивергентной форме. В силу этого, при использовании метода МакКормака имеются все основания при расчете во втором уравнении величины $(\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n)$ использовать выражение $\frac{V_{i+1}^n + V_i^n}{2} (E_{i+1}^n - E_i^n)$, а при расчете величины $(\mathbf{F}_i^p - \mathbf{F}_{i-1}^p)$ — выражения $\frac{V_i^p + V_{i-1}^p}{2} (E_i^p - E_{i-1}^p)$. Аналогичные модификации недивергентных членов из тех же соображений вполне корректно использовать и при реализации формул метода Лакса–Вендроффа.

В целях полноты описания приведем в качестве примера расчетные формулы метода МакКормака для решения релятивистских уравнений (5):

$$\begin{aligned} \text{этап предиктор} & - \begin{cases} P_i^p = P_i^n - \frac{\tau}{h} (\gamma_{i+1}^n - \gamma_i^n) - \tau E_i^n, \\ E_i^p = E_i^n - \frac{\tau}{2h} (V_{i+1}^n + V_i^n) (E_{i+1}^n - E_i^n) + \tau V_i^n, \end{cases} \\ \text{этап корректор} & - \begin{cases} P_i^c = P_i^n - \frac{\tau}{h} (\gamma_i^p - \gamma_{i-1}^p) - \tau E_i^p, \\ E_i^c = E_i^n - \frac{\tau}{2h} (V_i^p + V_{i-1}^p) (E_i^p - E_{i-1}^p) + \tau V_i^p, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\gamma(P) = \sqrt{1 + P^2}$, $V(P) = P/\gamma(P)$, а завершающий этап реализуется соотношениями

$$P_i^{n+1} = \frac{P_i^p + P_i^c}{2}, \quad E_i^{n+1} = \frac{E_i^p + E_i^c}{2}.$$

Отметим, что приведенные формулы можно также применять для решения нерелятивистских уравнений (9), если использовать в них следующие зависимости: $\gamma(P) = P^2/2$, $V(P) = P$.

В заключение раздела следует обратить внимание, что предложенные модификации известных методов никак не влияют на их условие устойчивости в классической версии — $\tau = O(h)$, которое было получено на основе как спектрального признака устойчивости и метода замороженных коэффициентов, так и метода дифференциального приближения (см. [12–14]). Это связано с тем, что источниковые члены в уравнениях плазменных колебаний изначально линейны, а линеаризация и дивергентной формы уравнений, и недивергентной порождает одинаковые выражения при замораживании переменных коэффициентов.

3. Численные эксперименты. В целях численного моделирования плазменных колебаний расчетную область необходимо ограничить; определим ее как отрезок $[-d, d]$, на концах которого следует задать искусственные граничные условия. Обсуждению их построения посвящен раздел 3.6 в [7], здесь же мы ограничимся “обрезанием” бесконечной области с помощью однородных граничных условий первого рода:

$$P(\pm d, \theta) = V(\pm d, \theta) = E(\pm d, \theta) = 0.$$

Конечно, параметр d следует выбирать достаточно большим. В силу экспоненциального затухания функции $E_0(\rho)$, достаточно положить $d = 4.5\rho_*$. В этом случае имеем $\exp^2\{-d^2/\rho_*^2\} \approx 2.5768 \times 10^{-18}$. Это означает, что при вычислениях с двойной точностью величина скачка начальной функции E_0 в точках $\rho = \pm d$ соизмерима с машинной точностью, т.е. с обычной погрешностью округления данных. Другими словами, при численном моделировании колебаний эффект обрезания начальных условий замечен совершенно не будет, что полностью соответствует понятию “искусственной границы”.

Такой подход является практически весьма удобным и потому наиболее часто используемым, однако его главный недостаток — чрезмерное увеличение расчетной области. Наблюдаемый эффект опрокидывания колебаний, как правило, реализуется в окрестности начала координаты ρ на расстоянии менее $0.1\rho_*$, поэтому более 90% вычислений являются своеобразной “платой” за использование “трубых” граничных условий. В данном случае оптимизация вычислений не является целью работы; следовательно, самый простой вариант граничных условий вполне подходит для проверки выполнения законов сохранения энергии и дополнительной функции.

Напомним, что в эйлеровых переменных, с которыми мы имеем дело, принципиально важной для наблюдения за процессом опрокидывания колебаний является функция электронной плотности $N(\rho, \theta)$, определяемая соотношением (4).

3.1. Расчеты по нерелятивистской модели. Будем предполагать скорость малой по сравнению со скоростью света, поэтому определим с этой целью параметры в начальных условиях (7) для системы (9) как $a_* = 0.414$, $\rho_* = 0.6$. Параметр d , характеризующий искусственную границу, положим $d = 4.5\rho_*$. Вычисления проведем на последовательности вложенных сеток: $\tau = h \in \{1/1600, 1/3200, 1/6400\}$.

Сначала обсудим эксперимент с аналитическим решением. Для данной постановки можно выписать формулы для аналитического решения на оси симметрии области (при $\rho = 0$), так называемое аксиальное решение [7]. При указанных параметрах оно существует неограниченно по времени; для наименее гладкой из всех функций — функции электронной плотности формула имеет вид

$$N(\rho = 0, \theta) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha(1 - \cos \theta)}, \quad \text{где } \alpha = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2.$$

Отметим, что электронная плотность является 2π -периодической по времени и колеблется в диапазоне $[0.52, 10.96]$ (границы указаны с двумя верными знаками после десятичной точки).

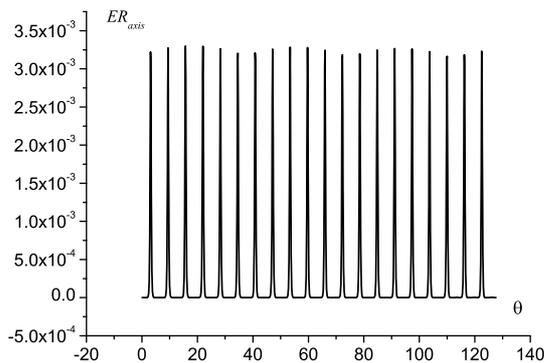


Рис. 1. Схема МакКормака: динамика относительной погрешности плотности электронов в центре области $N(\rho = 0, \theta)$ (нерелятивистский случай)

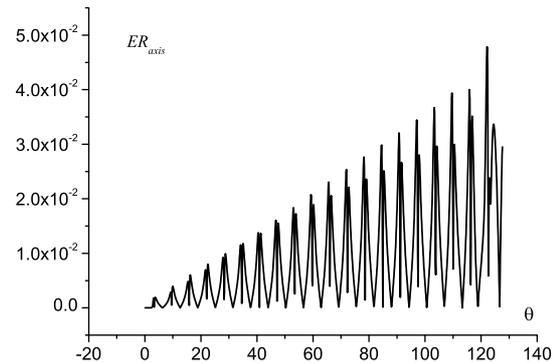


Рис. 2. Схема Лакса-Вендроффа: динамика относительной погрешности плотности электронов в центре области $N(\rho = 0, \theta)$ (нерелятивистский случай)

На рис. 1 и 2 представлена посчитанная по обеим схемам динамика относительной погрешности плотности электронов в центре области в течение примерно 20 периодов при $\tau = h = 1/6400$.

Легко заметить качественное отличие в поведении погрешности для представленных схем. Для схемы МакКормака погрешность является равномерно ограниченной величиной, изменяющейся в течение каждого периода пропорционально функции электронной плотности. При этом само ограничивающее значение убывает строго в соответствии с теорией как величина второго порядка малости, т.е. при уменьшении параметра τ в два раза оно убывает в четыре раза. В свою очередь, для схемы Лакса-Вендроффа из графика наблюдаем, что верхняя огибающая колеблющейся погрешности представляет собой линейную по времени функцию. Учитывая, что свойства аппроксимации и устойчивости имеют асимптотический характер, т.е. справедливы при достаточно малых параметрах дискретизации, можно предположить, что линейный рост погрешности при больших значениях параметров приведет к отсутствию близости точного и приближенного решений задачи. Именно этот эффект и наблюдается в вычислительном эксперименте: при $\tau = h = 1/3200$ в расчете появляются противоречащие теории отрицательные значения плотности при $\theta \approx 85.5$, а при $\tau = h = 1/1600$ — уже при $\theta \approx 54.5$.

Таким образом, на основании представленных на рис. 1 и 2 графиков можно сделать вывод о плохих по качеству расчетах по схеме Лакса-Вендроффа на длительных временных интервалах. Хотя на сравнительно небольших временных интервалах погрешность аксиального решения в полном соответствии с теорией так же, как в схеме МакКормака, ведет себя как величина второго порядка малости относительно параметра τ .

Проведенные вычисления позволяют сформулировать гипотезу о втором порядке точности обеих разностных схем при моделировании плазменных колебаний, однако представленные аргументы недостаточно убедительны. Дело в том, что явные формулы для аналитического решения (даже на одной прямой $\rho = 0$) являются настоящей экзотикой, т.е. не следует рассчитывать на существование их аналогов для других постановок. Кроме того, влияние второго параметра дискретизации h при таком подходе отследить невозможно. Поэтому предложим другой подход для оценки качества схем, основанный на законе сохранения энергии.

В используемых безразмерных переменных нерелятивистский закон сохранения энергии (12) имеет

вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{E^2 + N V^2\} + \frac{\partial}{\partial \rho} \{N V^3\} = 0.$$

После интегрирования этого соотношения по отрезку $[-d, d]$ получим сохранение во времени величины

$$En^d(\theta) = \int_{-d}^d [E^2(\rho, \theta) + N(\rho, \theta)V^2(\rho, \theta)] d\rho \equiv \text{const.}$$

Отметим, что относительная погрешность величины $En^d(0)$, связанная с введением искусственной границы при указанных выше параметрах a_* и ρ_* , здесь достаточно мала: не превышает 6×10^{-14} .

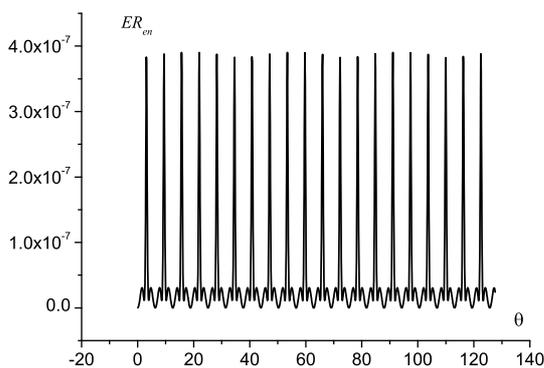


Рис. 3. Схема МакКормака: динамика относительной погрешности энергии $En^d(\theta)$ (нерелятивистский случай)

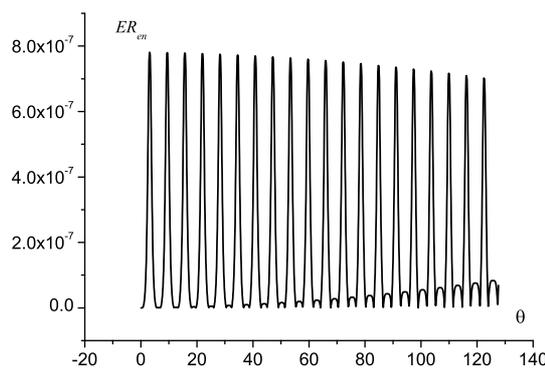


Рис. 4. Схема Лакса-Вендроффа: динамика относительной погрешности энергии $En^d(\theta)$ (нерелятивистский случай)

На рис. 3 и 4 представлена посчитанная по обеим схемам динамика относительной погрешности энергии в течение примерно 20 периодов при $\tau = h = 1/6400$. Как и при анализе погрешности аксиального решения, погрешность энергии, посчитанная по схеме МакКормака, ведет себя практически идеально: при уменьшении параметров дискретизации она квадратично убывает и, кроме того, — равномерно ограничена по времени. Расчеты, проведенные по схеме Лакса-Вендроффа, тоже демонстрируют равномерную ограниченность погрешности энергии, однако само ограничение при фиксированных τ и h примерно в два раза больше, чем для схемы МакКормака. Другими словами, качественное поведение погрешности энергии для обеих схем одинаково, гипотеза о втором порядке точности подтверждается, однако сравнение количественных значений в пользу схемы МакКормака.

Рассмотрим сохранение дополнительной функции при расчетах по обеим схемам. В используемых безразмерных переменных нерелятивистский закон сохранения дополнительной функции (18) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} N(E^2 + V^2) + \frac{\partial}{\partial \rho} N V(E^2 + V^2) = 0.$$

После интегрирования этого соотношения по отрезку $[-d, d]$ получим сохранение во времени величины

$$Af^d(\theta) = \int_{-d}^d N(\rho, \theta)[E^2(\rho, \theta) + V^2(\rho, \theta)] d\rho \equiv \text{const.}$$

Отметим, что относительная погрешность величины $Af^d(0)$, связанная с введением искусственной границы при указанных выше параметрах a_* и ρ_* , здесь тоже достаточно мала: по порядку совпадает с аналогичной величиной для энергии.

На рис. 5 и 6 представлена посчитанная по обеим схемам динамика относительной погрешности дополнительной функции в течение примерно 20 периодов при $\tau = h = 1/6400$. Как и при анализе погрешностей аксиального решения и энергии, погрешность дополнительной функции, посчитанная по схеме МакКормака, ведет себя практически идеально: при уменьшении параметров дискретизации она квадратично убывает и, кроме того, равномерно ограничена по времени. Расчеты, проведенные по схеме Лакса-Вендроффа,

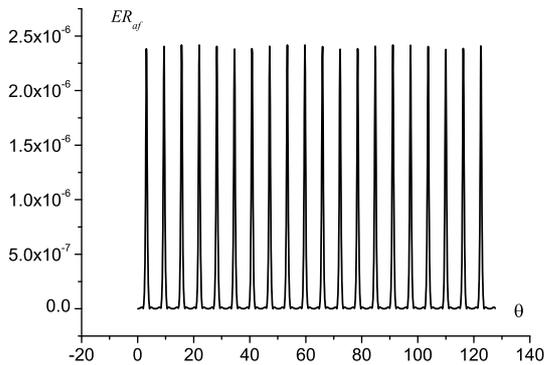


Рис. 5. Схема МакКормака: динамика относительной погрешности дополнительной функции $Af^d(\theta)$ (нерелятивистский случай)

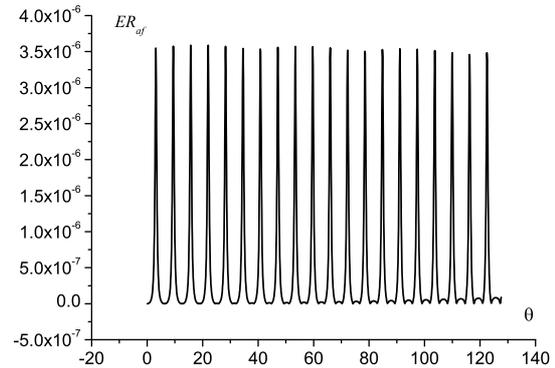


Рис. 6. Схема Лакса–Вендроффа: динамика относительной погрешности дополнительной функции $Af^d(\theta)$ (нерелятивистский случай)

тоже демонстрируют равномерную ограниченность погрешность энергии, однако само ограничение при фиксированных τ и h примерно в полтора раза больше, чем для схемы МакКормака. Другими словами, качественное поведение погрешности дополнительной функции для обеих схем одинаково, гипотеза о втором порядке точности подтверждается, однако сравнение количественных значений опять в пользу схемы МакКормака.

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1) при проведении нерелятивистского многопериодного моделирования плазменных колебаний схема МакКормака обладает несомненными преимуществами по сравнению со схемой Лакса–Вендроффа как качественного (равномерное ограничение погрешности), так и количественного характера (погрешность меньше и для энергии, и для дополнительной функции);

2) обе схемы несомненно имеют второй порядок точности на моделируемых решениях;

3) для повышения достоверности вычислений, кроме стандартных теоретических исследований аппроксимации и устойчивости, необходимо использовать контроль как за частными аналитическими решениями, так и за сохранением энергии и других дополнительных функций.

3.2. Расчеты по релятивистской модели. Будем предполагать скорость электронов сравнимой со скоростью света, поэтому определим с этой целью параметры в начальных условиях (7) для системы (5) как $a_* = 2.07$, $\rho_* = 3.0$. Параметр d , характеризующий искусственную границу, выберем, как и ранее: $d = 4.5 \rho_*$. Вычисления проведем на вложенных сетках: $\tau = h \in \{1/1500, 1/3000\}$.

В динамике релятивистских электронных колебаний наблюдаются две тенденции. Первая из них заключается в том, что внеосевые колебания несколько опережают по фазе колебания плотности на оси симметрии (при $\rho = 0$) и от периода к периоду этот фазовый сдвиг увеличивается. Вторая тенденция более наглядна: с течением времени происходит постепенное формирование абсолютного максимума плотности, расположенного вне оси и сравнимого по величине с осевыми. Хорошей иллюстрацией этим утверждениям является рис. 7. На нем пунктиром изображено для электронной плотности изменение во времени в начале координат, а сплошной линией — динамика максимального по области значения. Сначала колебания носят регулярный характер, т.е. глобальные по области максимумы и минимумы плотности сменяют друг друга через половину периода и располагаются в начале координат. После седьмого регулярного (центрального) максимума в момент времени $\theta \approx 42.2$ возникает новая структура — внеосевой максимум

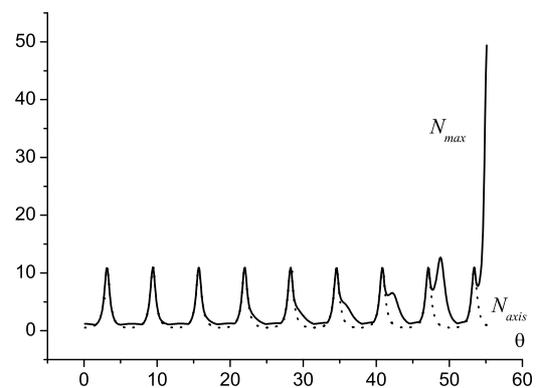


Рис. 7. Динамика электронной плотности (релятивистский случай):
 N_{\max} — максимум по области (сплошная линия),
 N_{axis} — значение при $\rho = 0$ (пунктирная линия)

электронной плотности, при этом регулярные колебания максимальной амплитуды продолжают наблюдаться в окрестности начала координат. Внеосевой максимум, в свою очередь, в момент времени $\theta \approx 48.8$ становится больше осевого и на следующем периоде — в $\theta \approx 55.1$ — на его месте возникает сингулярность электронной плотности. Представленный график электронной плотности получен с помощью схемы МакКормака. Эксперименты со схемой Лакса–Вендроффа порождают в релятивистских расчетах при одинаковых параметрах дискретизации значения плотности, практически не различимые с результатами схемы МакКормака, поэтому отдельно не приводятся.

В используемых безразмерных переменных релятивистский закон сохранения энергии (16) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{E^2}{2} + N(\gamma - 1) \right\} + \frac{\partial}{\partial \rho} \{ N V(\gamma - 1) \} = 0,$$

где $\gamma = \sqrt{1 + P^2}$, $P = \gamma V$. После интегрирования представленного дифференциального уравнения по отрезку $[-d, d]$ получим сохранение во времени величины

$$Enr^d(\theta) = \int_{-d}^d \left[\frac{E^2(\rho, \theta)}{2} + N(\rho, \theta)(\gamma(\rho, \theta) - 1) \right] d\rho \equiv \text{const.}$$

Сопоставим рис. 8 и 9 процессу изменения плотности (см. рис. 7); на этих рисунках представлена динамика относительной погрешности энергии вплоть до момента опрокидывания при $\tau = h = 1/3000$.

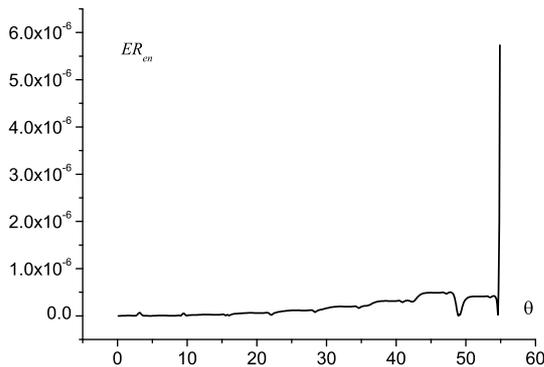


Рис. 8. Схема МакКормака: динамика относительной погрешности энергии $En^d(\theta)$ (релятивистский случай)

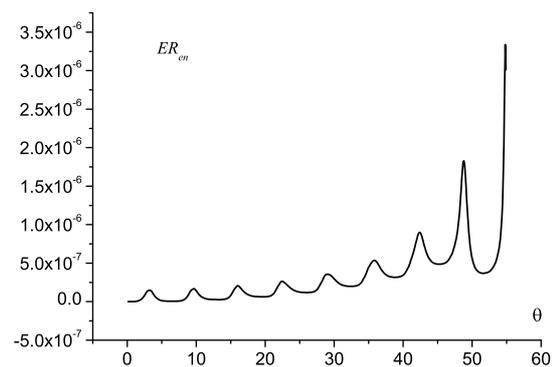


Рис. 9. Схема Лакса–Вендроффа: динамика относительной погрешности энергии $En^d(\theta)$ (релятивистский случай)

Различия в результатах обеих схем, полученные для нерелятивистских расчетов, хорошо прослеживаются в их релятивистских аналогах. Из графика для схемы МакКормака следует, что вплоть до опрокидывания, т.е. пока величина плотности ограничена, погрешность энергии равномерно ограничена величиной порядка 10^{-6} , и это ограничение пропорционально величине квадрата шага по времени — τ^2 . С другой стороны, погрешность энергии в схеме Лакса–Вендроффа линейно возрастает и всегда заметно больше, чем в схеме МакКормака, хотя второй порядок точности полностью экспериментально подтверждается. Это означает, что график погрешности, полученный при расчете на сетке с удвоенными шагами $\tau = h = 1/1500$, имеет точно такой же вид, однако его верхняя граница на участке гладкого решения ровно в четыре раза больше. На завершающем этапе расчетов обе схемы ведут себя одинаково: сингулярность электронной плотности порождает всплеск вычислительной погрешности и соответствующее скачкообразное нарушение закона сохранения энергии.

Рассмотрим сохранение дополнительной функции при расчетах по обеим схемам вплоть до момента опрокидывания. В используемых безразмерных переменных релятивистский закон сохранения дополнительной функции (19) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} N \left\{ \frac{E^2}{2} + \gamma - 1 \right\} + \frac{\partial}{\partial \rho} N V \left\{ \frac{E^2}{2} + \gamma - 1 \right\} = 0.$$

После интегрирования этого соотношения по отрезку $[-d, d]$ получим сохранение во времени величины

$$Afr^d(\theta) = \int_{-d}^d N(\rho, \theta) \left[\frac{E^2(\rho, \theta)}{2} + \gamma(\rho, \theta) - 1 \right] d\rho \equiv \text{const.}$$

Отметим, что относительная погрешность величины $Afr^d(0)$, связанная с введением искусственной границы при указанных выше параметрах a_* и ρ_* , здесь тоже достаточно мала: по порядку совпадает с аналогичной величиной для энергии.

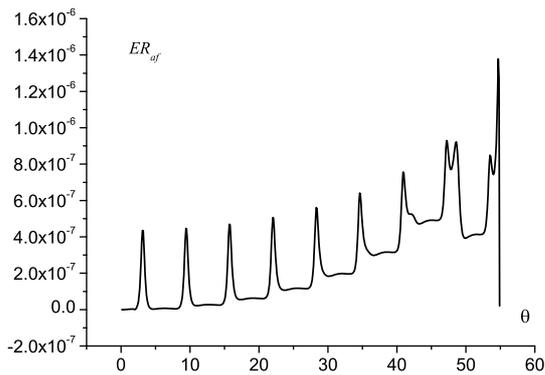


Рис. 10. Схема МакКормака: динамика относительной погрешности дополнительной функции $Af^d(\theta)$ (релятивистский случай)

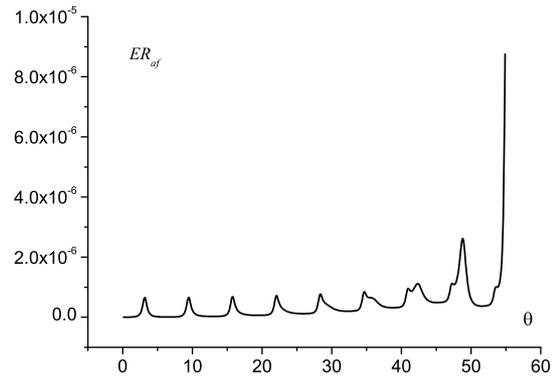


Рис. 11. Схема Лакса-Вендроффа: динамика относительной погрешности дополнительной функции $Af^d(\theta)$ (релятивистский случай)

Рассмотрим графики на рис. 10 и 11, иллюстрирующие погрешность в сохранении дополнительной функции. В них имеются как качественные, так и количественные отличия. Схема МакКормака демонстрирует рост погрешности, однако вплоть до опрокидывания ее величина не превосходит 10^{-6} . С другой стороны, в схеме Лакса-Вендроффа динамика погрешности дополнительной функции полностью воспроизводит динамику электронной плотности на рис. 7, однако сами значения погрешности заметно больше (примерно в полтора-два раза), чем в схеме МакКормака. На финальном этапе вычислений разница в значениях практически нивелируется по причине сингулярности плотности.

Расчеты на более подробных сетках не производились в силу численных результатов предыдущего раздела, а также на основании сравнения с расчетами в лагранжевых переменных [7]. Отметим также, что в релятивистских расчетах аналитические решения для проверки точности схем не применялись, так как на прямой $\rho = 0$ они совпадают с аксиальными решениями нерелятивистских уравнений. Поэтому анализ погрешности для функции электронной плотности из предыдущего раздела вполне применим к обсуждаемым здесь экспериментам.

В результате, на основании проведенных расчетов можно сделать аналогичные выводы: о достоверности численного анализа релятивистских колебаний, т.е. о втором порядке точности обеих схем, о пользе контроля за соблюдением закона сохранения энергии и других вспомогательных функций, а также, что стандартное теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости вместе с экспериментальным наблюдением за количественными характеристиками погрешности для наиболее чувствительных величин существенно повышает достоверность вычислений.

Заключение. В настоящей работе для моделирования колебаний холодной плазмы как в нерелятивистском случае, так и с учетом релятивизма предложены модификации классических методов второго порядка точности: метода МакКормака и двухэтапного метода Лакса-Вендроффа. Отметим, что ранее для расчетов в эйлеровых переменных была известна только схема первого порядка точности [7]. Для сформулированной задачи о свободных плазменных колебаниях, инициированных коротким мощным лазерным импульсом, приведены результаты численных экспериментов по сохранению энергии и дополнительной функции для обеих схем в обоих вышеуказанных случаях. На основании проведенных расчетов можно сделать выводы о достоверности численного анализа колебаний как на основе схемы МакКормака, так и на основе схемы Лакса-Вендроффа. Однако для расчетов “долгоживущих” процессов первая схема является более предпочтительной. Кроме того, подтвердим точку зрения, что теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости вместе с экспериментальным наблюдением за количественными

характеристиками погрешности для наиболее чувствительных величин существенно повышает достоверность вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davidson R.C.* Methods in nonlinear plasma theory. New York: Academic Press, 1972.
2. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
3. *Ахизезер А.И., Половин Р.В.* К теории волновых движений электронной плазмы // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1956. **30**, № 5. 915–928.
4. *Dawson J.M.* Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. **113**, N 2. 383–387.
5. *Lehmann G., Laedke E.W., Spatschek K.H.* Localized wake-field excitation and relativistic wave-breaking // Physics of Plasmas. 2007. **14**. doi 10.1063/1.2796103.
6. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012.
7. *Чижонков Е.В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018.
8. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* Влияние электрон-ионных соударений на опрокидывание цилиндрических плазменных колебаний // Математическое моделирование. 2018. **30**, № 10. 86–106.
9. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* Численное моделирование плазменных колебаний с учетом теплового движения электронов // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 194–206.
10. *Chizhonkov E.V., Frolov A.A.* Influence of electron temperature on breaking of plasma oscillations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2019. **34**, N 2. 71–84.
11. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
12. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
13. *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985.
14. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990.
15. *Силлин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
16. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
17. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
18. *Силлин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
19. *Sheppard C.J.R.* Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review [Invited] // Applied Optics. 2013. **52**, N 4. 538–545.
20. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // J. Spacecr. Rockets. 2003. **40**, N 5. doi 10.2514/2.6901.
21. *Lax P.D., Wendroff B.* Systems of conservation laws III // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. **13**, N 2. 217–237.
22. *Федотова Э.И.* О применении разностной схемы МакКормака для задач длинноволновой гидродинамики // Вычислительные технологии. 2006. **11**, спецвыпуск. Часть II. 53–63.
23. *Machalinska-Murawska J., Szydowski M.* Lax–Wendroff and McCormack schemes for numerical simulation of unsteady gradually and rapidly varied open channel flow // Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics. 2013. **60**, N 1–4. 51–62.

Поступила в редакцию
24.01.2020

On Second-Order Accuracy Schemes for Modeling of Plasma Oscillations

E. V. Chizhonkov¹

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics;
Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su*

Received January 24, 2020

Abstract: For modeling cold plasma oscillations in the non-relativistic and relativistic cases, some modifications of classical difference schemes of the second order of accuracy are proposed: the McCormack method and

the two-stage Lax–Wendroff method. Previously, only the first-order accuracy scheme was known for calculations in Euler variables. For the problem of free plasma oscillations initiated by a short high-power laser pulse, the results of numerical experiments on energy conservation and other quantities were performed in order to test the proposed schemes. It is concluded that the numerical analysis of oscillations is reliable both for the McCormack scheme and for the Lax–Wendroff scheme; however, for the calculation of “long-lived” processes, the first scheme is more preferable. The theoretical analysis of approximation and stability together with experimental observations of quantitative characteristics of errors for the most sensitive quantities significantly increases the reliability of calculations.

Keywords: numerical simulation, plasma oscillations, breaking effect, McCormack and Lax–Wendroff schemes, accuracy order of difference scheme, conservation laws.

References

1. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic, New York, 1972).
2. Ya. B. Zel'dovich and A. D. Myshkis, *Elements of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
3. A. I. Akhiezer and R. V. Polovin, “Theory of Wave Motion of an Electron Plasma,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30** (5), 915–928 (1956) [*J. Exp. Theor. Phys.* **3**, 696–705 (1956)].
4. J. M. Dawson, “Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma,” *Phys. Rev.* **113** (2), 383–387 (1959).
5. G. Lehmann, E. W. Laedke, and K. H. Spatschek, “Localized Wake-Field Excitation and Relativistic Wave-Breaking,” *Phys. Plasmas* **14** (2007). doi 10.1063/1.2796103
6. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
7. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma* (Fizmatlit, Moscow, 2018; CRC Press, Boca Raton, 2019).
8. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “The Effect of Electron-Ion Collisions on the Breaking of Cylindrical Plasma Oscillations,” *Mat. Model.* **30** (10), 86–106 (2018). [*Math. Models Comput. Simul.* **11** (3), 438–450 (2019)].
9. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “Numerical Modeling of Plasma Oscillations with Consideration of Electron Thermal Motion,” *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 194–206 (2018).
10. E. V. Chizhonkov and A. A. Frolov, “Influence of Electron Temperature on Breaking of Plasma Oscillations,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **34** (2), 71–84 (2019).
11. S. K. Godunov and V. S. Ryaben'kii, *Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1973; North Holland, Amsterdam, 1987).
12. D. E. Potter, *Computational Physics* (Wiley, London, 1973; Mir, Moscow, 1975).
13. Yu. I. Shokin and N. N. Yanenko, *Method of Differential Approximation: Application to Gas Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1985) [in Russian].
14. D. A. Anderson, J. C. Tannehill, and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Hemisphere, New York, 1984; Mir, Moscow, 1990).
15. V. P. Silin, *Introduction to Kinetic Theory of Gases* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].
16. A. F. Aleksandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Springer, New York, 1984; Vysshaya Shkola, Moscow, 1988).
17. V. L. Ginzburg and A. A. Rukhadze, *Waves in Magnetoactive Plasma* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
18. V. P. Silin and A. A. Rukhadze, *Electromagnetic Properties of Plasma and Plasma-Like Media* (Librokom, Moscow, 2012) [in Russian].
19. C. J. R. Sheppard, “Cylindrical Lenses — Focusing and Imaging: A Review [Invited],” *Appl. Opt.* **52** (4), 538–545 (2013).
20. R. W. MacCormack, “The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering,” *J. Spacecr. Rockets* **40** (2003). doi 10.2514/2.6901
21. P. D. Lax and B. Wendroff, “Systems of Conservation Laws III,” *Commun. Pure Appl. Math.* **13** (2), 217–237 (1960).
22. Z. I. Fedotova, “On the Application of the MacCormack Scheme for Problems of Long Wave Hydrodynamics,” *Vychisl. Teknol.* **11**, Special Issue, 53–63 (2006).
23. J. Machalinska-Murawska and M. Szydłowski, “Lax–Wendroff and McCormack Schemes for Numerical Simulation of Unsteady Gradually and Rapidly Varied Open Channel Flow,” *Arch. Hydro-Eng. Environ. Mech.* **60** (1–4), 51–62 (2013).