

УДК 532.529

doi 10.26089/NumMet.v21r109

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ СО СЛОЕМ ЧАСТИЦ

К. Н. Волков¹, В. Н. Емельянов², А. Г. Карпенко³, И. В. Тетерина⁴

На основе модели взаимопроникающих континуумов проводится численное моделирование нестационарного течения газовзвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем инертных частиц. Каждая фаза описывается набором уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии. Межфазное взаимодействие учитывается при помощи источников членов в уравнениях изменения количества движения и энергии. Основные уравнения для газовой и дисперсной фаз имеют гиперболический тип, допускают запись в консервативной форме и решаются с использованием численного метода типа Годунова повышенного порядка точности. Для дискретизации уравнений по времени применяется метод Рунге–Кутты 3-го порядка. Построенная модель позволяет рассчитывать широкий спектр режимов течения газовзвеси, возникающих при изменении объемной концентрации дисперсной фазы. Обсуждаются вопросы, связанные с замыканием математической модели, а также детали реализации численной модели. Приводятся ударно-волновая структура течения и пространственно-временные зависимости концентрации частиц и других параметров потока.

Ключевые слова: двухфазное течение, численное моделирование, ударная волна, частица, концентрация.

1. Введение. Математическое моделирование течений многофазных сред представляет интерес для многих научных дисциплин и инженерных приложений. Под многофазной средой обычно понимается сплошная среда, состоящая из нескольких компонентов (фаз) с различными физическими характеристиками. Несмотря на востребованность данной тематики, многие вопросы, связанные с построением физических, математических и вычислительных моделей многофазных течений, требуют дальнейших исследований [1].

В практических приложениях газовой динамики достаточно часто возникает необходимость учета дополнительных физических факторов и процессов. Это приводит к введению в уравнения газовой динамики новых членов и включения в систему дополнительных уравнений и расчетных соотношений, что изменяет содержательность математических моделей. В смесях газа с частицами картина течения характеризуется влиянием процессов релаксации скоростей и температур двух фаз, характерные протяженности которых определяются размером частиц.

В модели взаимопроникающих континуумов, предложенной в работе [2], течение многофазной среды рассматривается как множество взаимодействующих континуумов (фаз) и характеризуется параметрами, полученными при помощи применения процедуры осреднения. Поведение каждой фазы при этом описывается законами сохранения массы, импульса и энергии, а межфазное взаимодействие учитывается путем добавления в правые части законов сохранения специальных алгебраических или дифференциальных членов. Одной из проблем классических моделей, полученных методом осреднения, является сложность корректного описания процессов на межфазной границе.

Распространенным подходом к описанию течений двухфазных сжимаемых сред является использование моделей с одним давлением. Обычно системы уравнений таких моделей имеют смешанный эллиптичес-

¹ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; вед. науч. сотр., e-mail: dsci@mail.ru

² Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: vlademelyanov@gmail.com

³ Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский просп., д. 28, 198504, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: aspera.2003.ru@mail.ru

⁴ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: yaiv@mail.ru

ки-гиперболический тип, что делает затруднительной корректную постановку начально-краевых задач [3]. Для преодоления трудностей, связанных с некорректной постановкой начально-краевой задачи, предлагаются различные гиперболизированные модификации модели с одним давлением [4]. Гиперболичность основных уравнений в таких моделях достигается путем введения дополнительных дифференциальных слагаемых в правые части уравнений изменения количества движения, которые называют виртуальными массовыми силами и межфазным давлением. В результате система основных уравнений является гиперболической, однако ее приведение к симметрическому виду, как и представление всех уравнений системы в дивергентной форме, оказывается невозможным, что осложняет применение модифицированных моделей для исследования разрывных решений, в том числе решения задач с ударными волнами и контактными разрывами.

Феноменологическая модель взаимопроникающих континуумов исторически была одной из первых моделей, предназначенных для расчета течений двухфазных сред. Исследование корректности задачи Коши для системы уравнений, описывающей течение газа с частицами, проводится для случая нестационарного одномерного течения газозвеси с учетом и без учета объема частиц [5]. Для течения газа с частицами задача Коши, вообще говоря, является некорректной [6]. При некоторых малых начальных возмущениях концентрация дисперсной фазы становится неограниченно большой, что в рамках двухскоростной модели связывается с пересечением траекторий частиц.

Пересечение траекторий частиц (или линий тока в псевдогазе частиц в стационарном течении) приводит к тому, что в точке пересечения траекторий имеется два или более различных вектора скорости дисперсной фазы. Такое обстоятельство ведет к многозначности полей параметров дисперсной фазы (нарушение единственности решения) и возникновению в поле течения особых поверхностей (складок или каустик), на которых объемная концентрация примеси резко или неограниченно возрастает [7]. При этом возмущения остальных параметров (давления, скорости и других) остаются порядка их начальных значений.

Источник негиперболичности кроется в отсутствии собственного давления в дисперсной фазе [5]. Для устранения негиперболичности (при сохранении двухскоростной модели газозвеси) в уравнение изменения импульса дисперсной фазы вводится дополнительное искусственное давление, которое препятствует нефизической концентрации частиц. В реальном потоке давление в псевдогазе частиц создается за счет взаимодействия частиц друг с другом и хаотического движения частиц. Неустойчивость численных решений является внутренним свойством модели взаимопроникающих континуумов и обусловлена недостаточно полным описанием межфазного взаимодействия и взаимодействия внутри дисперсной фазы.

В рамках феноменологической модели взаимопроникающих континуумов достаточно трудно учесть факторы, хаотизирующие движение примеси. Пренебрежение случайными факторами позволяет упростить модель двухфазного течения, но делает непригодными численные схемы, разработанные для решения задач классической газовой динамики. При пренебрежении взаимодействиями частиц между собой посредством столкновений псевдогаз частиц оказывается средой без собственного давления.

В модели с двумя давлениями, предложенной в работе [8] (Baer–Nunziato model), две среды, составляющие двухфазную смесь, описываются собственными системами законов сохранения, а межфазное взаимодействие моделируется специальными членами в правых частях уравнений неразрывности и изменения импульса. Скорости и давления на границе раздела двух фаз выбираются различными способами в зависимости от области использования модели. Для описания газообразных сред с твердыми частицами пограничное значение скорости полагается равным скорости твердой фазы, а пограничное значение давления принимает значение газового давления. В трехмерном случае уравнения Баера–Нунциато представляют собой систему из 11 дифференциальных уравнений в частных производных (5 уравнений для газовой фазы и 6 уравнений для твердой фазы).

В работе [9] для описания движения сжимаемой многофазной смеси с поверхностями раздела фаз используется неравновесная двухжидкостная модель, для замыкания которой используется уравнение для объемной концентрации. Несмотря на то что уравнения модели являются гиперболическими, не все уравнения допускают представление в дивергентной форме, что приводит к трудностям моделирования разрывных решений, а также осложняет использование современных вычислительных методов.

Математические особенности одномерных уравнений Баера–Нунциато исследуются в работе [10]. Уравнения Баера–Нунциато являются гиперболическими, но не допускают записи в форме законов сохранения (в дивергентной форме). При записи в консервативных переменных уравнения сохраняют неконсервативные члены, что делает невозможным применение классических условий Рэнкина–Гюгонио на разрывах. Решение неконсервативных гиперболических уравнений представляет собой сложную задачу как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения [11–13].

Задача Римана для уравнений Баера–Нунциато формулируется и решается в работах [14–17]. При определенных начальных данных решение задачи Римана не является единственным [18]. Приближенное решение задачи Римана используется для построения численного потока для консервативной части уравнений. Схема Рунге применяется в работе [17], а численные подходы к решению уравнений Баера–Нунциато на основе метода конечных объемов и метода Галеркина с разрывными базисными функциями развиваются в работах [19–21].

В общем случае в задаче присутствуют шесть волновых семейств: три для газовой фазы и три для твердой фазы. Шесть характеристик разделяют плоскость (x, t) на семь подобластей, в которых параметры среды сохраняют постоянные значения. Переменные твердой фазы остаются постоянными при переходе через все три газовые характеристические волны, а контактный разрыв твердой фазы изменяет все газовые переменные, кроме тангенциальной скорости. Левая и правая нелинейные волны твердой фазы не влияют на газовые переменные, при этом скачок фазовой концентрации происходит только на контактном разрыве твердой фазы. В окрестности контактного разрыва твердой фазы правая часть уравнений Баера–Нунциато становится ненулевой, а уравнения для обеих фаз связываются из-за наличия скачка концентрации. Классические условия Рэнкина–Гюгонио становятся неприменимыми, в связи с чем контактный разрыв твердой фазы рассматривается как бесконечно тонкий слой, в котором все параметры газа изменяются непрерывным образом и все производные существуют [15]. Уравнения тонкого слоя связывают параметры среды по обе стороны от контактного разрыва твердой фазы.

Статистический подход на основе кинетического уравнения для функции плотности вероятности скоростей частиц представляет собой последовательный метод построения континуальных моделей течений газозвеси. Статистические модели двухфазных течений рассматриваются в работах [22, 23]. Движение дисперсной фазы описывается в рамках континуального подхода на основе применения теоремы Лиувилля (Liouville theorem) к системе динамических уравнений, описывающих поведение индивидуальной частицы [24]. Влияние подсеточных эффектов на движение частиц в турбулентном потоке обсуждается в работах [25, 26] в рамках модели взаимопроникающих континуумов.

Несмотря на многочисленные исследования, общепринятый подход к построению математических моделей многофазных сжимаемых сред отсутствует. Существующие подходы обладают недостатками, связанными с негиперболическостью системы уравнений и наличием уравнений, которые не представимы в дивергентной форме. Удовлетворение указанным требованиям обеспечивает математическую основу для постановки начально-краевых задач, а также открывает возможности для разработки численных алгоритмов.

В настоящей статье развивается модель, предназначенная для численного моделирования нестационарных течений газа с инертными частицами. Введение функции плотности вероятности позволяет сформулировать статистическое описание системы частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе стохастического уравнения типа Ланжевена. Уравнения неразрывности, изменения количества движения и энергии для газовой и дисперсной фаз имеют гиперболический тип и решаются с использованием численного метода типа Годунова повышенного порядка точности. Проводится расчет структуры течения и пространственно-временных зависимостей параметров потока при взаимодействии до- и сверхзвукового потока со слоем частиц.

2. Математическая модель. Уравнения, описывающие движение и теплообмен дисперсной фазы, получаются из уравнения Лиувилля для функции плотности вероятности распределения частиц по координатам, скоростям и температурам. Для замыкания полученных уравнений пренебрегается третьими корреляционными моментами скорости и температуры дисперсной фазы. При записи основных уравнений индексы g и p соответствуют газу и частицам.

2.1. Дискретная модель. Уравнения движения и теплообмена пробной частицы представляют собой стохастические уравнения типа Ланжевена и зависят от случайных полей скорости \mathbf{v}_g и температуры T_g несущего потока, причем скорость и температура несущего газа вычисляются в точках, лежащих на траектории частицы. Уравнения, описывающие движение и теплообмен пробной частицы, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad (1)$$

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{f}_p, \quad (2)$$

$$c_p^m m_p \frac{dT_p}{dt} = q_p. \quad (3)$$

Здесь m_p — масса частицы; c_p^m — теплоемкость материала частицы; \mathbf{x}_p — радиус-вектор центра масс частицы; \mathbf{v}_p — скорость частицы; T_p — температура частицы; \mathbf{f}_p — сила, действующая на частицу; q_p —

конвективный тепловой поток между газом и частицей.

Для силы сопротивления, действующей на частицу, имеет место соотношение

$$\mathbf{f}_p = \frac{1}{2} C_D \rho_g |\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_p| (\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_p) S_m,$$

где ρ — плотность, S_m — площадь миделевого сечения частицы. Коэффициент сопротивления представляется в виде

$$C_D = C_{D0} f_D,$$

где $C_{D0} = 24/\text{Re}_p$ — коэффициент сопротивления, соответствующий закону Стокса; f_D — функция, учитывающая поправку на инерционность частицы и сжимаемость. Поправочная функция представляется в виде

$$f_D = (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}) \left[1 + \exp\left(-\frac{0.427}{\text{M}_p^{4.63}} - \frac{3}{\text{Re}_p^{0.88}}\right) \right].$$

Числа Рейнольдса и Маха вычисляются по скорости относительного движения газа и частиц:

$$\text{Re}_p = \frac{2\rho_g r_p |\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_p|}{\mu}, \quad \text{M}_p = \frac{|\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_p|}{c},$$

где μ — динамическая вязкость, c — местная скорость звука. Для сферической частицы радиусом r_p получим, что $S_m = \pi r_p^2$ и $m_p = 4\pi r_p^3 \rho_p/3$. Уравнение (2) представляется в виде

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{f_D}{\tau_v} (\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_p). \quad (4)$$

Под $\tau_v = \rho_p d_p^2/(18\mu)$ понимается время динамической релаксации.

Выражая коэффициент теплоотдачи через число Нуссельта $h = \text{Nu}_p \lambda_p/d_p$, конвективный тепловой поток между газом и частицей представляется в виде

$$q_p = \text{Nu}_p \lambda (T_g - T_p) \frac{S_p}{d_p},$$

где S_p — площадь поверхности частицы, λ — теплопроводность газа. Число Нуссельта представляется в виде, учитывающем поправку на инерционность частицы:

$$\text{Nu}_p = 2 + 0.459 \text{Re}_p^{0.55} \text{Pr}^{0.33},$$

где Pr — число Прандтля (для воздуха $\text{Pr} = 0.72$). Уравнение (3) представляется в виде

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{1}{\tau_\vartheta} (T_g - T_p). \quad (5)$$

Под $\tau_\vartheta = c_p \rho_p d_p / (3\lambda \text{Nu}_p)$ понимается время тепловой релаксации, причем $\tau_\vartheta = (3\text{Pr}\beta/\text{Nu}_p)\tau_v$, где $\beta = c_p^m/c_p$ — отношение удельной теплоемкости дисперсной фазы к удельной теплоемкости газа при постоянном давлении.

В безразмерных переменных времена динамической и тепловой релаксации заменяются числами Стокса

$$\text{Stk}_v = \frac{2\rho_p r_p^2 U}{9\mu L}, \quad \text{Stk}_\vartheta = \frac{2c_p \rho_p r_p U}{3\lambda \text{Nu}_p L},$$

где L и U — характерные масштабы длины и скорости.

2.2. Континуальная модель. Для построения уравнений, описывающих движение и теплообмен континуума частиц, используется подход, предложенный в работе [22] для моделирования крупных вихрей турбулентных течений газозвеси, и его обобщение, развитое в работах [25, 26] для прямого численного моделирования двухфазных течений. В континуальном подходе уравнение неразрывности, уравнение изменения импульса и уравнение изменения температуры дисперсной фазы получаются из лагранжеских

уравнений движения и теплообмена индивидуальной частицы, записанных в виде (1), (4) и (5). Для простоты полагается, что $f_D = 1$ и $\text{Nu}_p = 2$.

Для перехода от динамических стохастических уравнений типа Ланжевена (лагранжевое описание) к статистическому описанию распределения системы частиц по координатам, скоростям и температурам (эйлеровое описание) введем динамическую плотность распределения вероятности в фазовом пространстве координат, скоростей и температур частиц:

$$w_i(\mathbf{x}_p, \mathbf{v}_p, \vartheta_p, t) = \delta[\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{pi}(t)] \delta[\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_{pi}(t)] \delta[\vartheta_p - \vartheta_{pi}(t)],$$

где $\mathbf{v}_p, \vartheta_p$ — скорость и температура дисперсной фазы, представляющие собой реализацию случайного поля скорости и температуры в точке \mathbf{x}_p в момент времени t ; $\mathbf{v}_{pi}, \vartheta_{pi}$ — параметры, выполняющие роль независимых переменных.

В момент времени t состояние системы из N частиц определяется заданием значений координат $\mathbf{x}_{p1}, \dots, \mathbf{x}_{pN}$, скоростей $\mathbf{v}_{p1}, \dots, \mathbf{v}_{pN}$ и температур $\vartheta_{p1}, \dots, \vartheta_{pN}$ всех частиц. Совокупность значений координат, скорости и температуры отдельной частицы обозначим через $\mathbf{z}_{pi} = (\mathbf{x}_{pi}, \mathbf{v}_{pi}, \vartheta_{pi})$, где $i = 1, \dots, N$, а совокупность значений координат, скоростей и температур всех частиц системы — через $\mathbf{Z} = (\mathbf{x}_{p1}, \dots, \mathbf{z}_{pN})$.

Рассматривая частицы как статистические независимые, определим одноточечную динамическую плотность распределения вероятности

$$w(\mathbf{x}_p, \mathbf{v}_p, \vartheta_p, t) = \frac{V_p}{V_\Sigma} \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}_p, \mathbf{v}_p, \vartheta_p, t),$$

где V_p — объем частицы, V_Σ — объем системы. Локальные функции динамических переменных, зависящие от положения точки $\mathbf{z}_p = \mathbf{z}_p(\mathbf{x}_p, \mathbf{v}_p, \vartheta_p)$ в фазовом пространстве, выражаются через микроскопическую фазовую плотность в пространстве координат, скоростей и температур частиц, которая удовлетворяет условию нормировки

$$\int w(\mathbf{x}_p, \mathbf{v}_p, \vartheta_p, \tau) d\mathbf{x}_p d\mathbf{v}_p d\vartheta_p = 1.$$

Полагая $\mathbf{z}_p = (\mathbf{x}_p, \mathbf{v}_p, \vartheta_p)$ и $\mathbf{z}_{pi} = (\mathbf{x}_{pi}, \mathbf{v}_{pi}, \vartheta_{pi})$, получим

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \delta[\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_{pi}(t)].$$

Эволюция функции распределения макроскопических состояний системы происходит в результате изменения со временем расположения точек $\mathbf{z}_{p1}, \dots, \mathbf{z}_{pN}$, характеризующих состояние системы в различные моменты времени. Дифференцируя динамическую плотность распределения вероятности в фазовом пространстве по времени, используя уравнения движения и теплообмена пробной частицы, записанные в лагранжевых переменных, и суммируя по $i = 1, \dots, N$, получим стохастическое уравнение Лиувилля [22, 27]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i W) - \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{v_i - u_i}{\tau_v} W \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\vartheta - T}{\tau_\vartheta} W \right) = 0, \quad (6)$$

где x_i, v_i и ϑ — координата, скорость и температура частицы. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Оператор осреднения (spatial filtering operator) определяется соотношением

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int f(\boldsymbol{\xi}) H_\Delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

где \bar{f} — среднее значение функции f , H_Δ — фильтр (kernel function). Ядро является неотрицательным и удовлетворяет условию нормировки. Ширина фильтра Δ выбирается достаточно малой и такой, чтобы для газовой фазы выполнялось соотношение $\tilde{\mathbf{v}}_g = \mathbf{v}_g$. Переменные газа не испытывают влияния подсеточных флуктуаций, поэтому $\widetilde{u_i W} = u_i \widetilde{W}$ и $\widetilde{T W} = T \widetilde{W}$. При неотрицательном ядре (top-hat filter, Gaussian filter) функция \widetilde{W} удовлетворяет требованиям, накладываемым на функцию плотности вероятности [28, 29].

Пусть \mathbf{Z} — совокупность значений координат, скоростей и температур всех частиц системы, а \mathcal{Z} — совокупность пространственных координат, скоростей и температур в фазовом пространстве. Наряду с

плотностью распределения вероятности состояний системы частиц $\delta[Z - Z(t)]$, введем среднюю плотность распределения вероятности состояний системы $\overline{W}(\mathcal{Z}, t)$. Из определения операции осреднения следует, что

$$\widetilde{v_{pi}w} = v\overline{W}, \quad \widetilde{\vartheta_{pi}w} = \vartheta\overline{W}.$$

Проводя осреднение уравнения Лиувилля по ансамблю случайных реализаций полей скорости и температуры, перейдем к статистическому описанию системы частиц. Применяя оператор осреднения к уравнению (6), получим (filtering Liouville equation)

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \overline{W}) - \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{v_i - u_i}{\tau_v} \overline{W} \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\vartheta - T}{\tau_\vartheta} \overline{W} \right) = 0. \quad (7)$$

Стохастическое уравнение Лиувилля в силу его линейности имеет одинаковый вид для функций $W(\mathcal{Z}, t)$ и $\overline{W}(\mathcal{Z}, t)$. Средняя числовая концентрация $\tilde{\alpha}$ (particle number density), средняя скорость \tilde{v}_i и средняя температура $\tilde{\vartheta}$ дисперсной фазы находятся из соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\mathbf{x}, t) &= \int \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) d\mathbf{v} d\vartheta; \\ \tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}} \int v_i \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) d\mathbf{v} d\vartheta; \\ \tilde{\vartheta}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}} \int \vartheta \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) d\mathbf{v} d\vartheta. \end{aligned}$$

Уравнение (7) позволяет получить уравнения для первых и вторых моментов дисперсной фазы. Уравнения переноса одноточечных моментов пульсационных характеристик дисперсной фазы получаются путем умножения кинетического уравнения на весовую функцию с последующим интегрированием по фазовому подпространству скоростей.

Моменты 1-го порядка представляют собой средние значения газодинамических параметров потока, зависящие от положения пространственно-временной точки. Уравнения для первых моментов имеют вид:

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_i}{\partial x_i} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_j \tilde{v}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\tau_v} \tilde{\alpha} (u_i - \tilde{v}_i); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{\vartheta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{\vartheta} v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau_\vartheta} \tilde{\alpha} (T - \tilde{\vartheta}). \quad (10)$$

Одноточечные корреляционные моменты 2-го порядка определяют кинетическую энергию турбулентности, перенос количества движения и тепла дисперсной фазы. Двухточечные моменты 2-го порядка характеризуют спектр турбулентности и размер крупномасштабных турбулентных вихрей, позволяя судить о корреляции пульсаций различных величин в удаленных на разные расстояния друг от друга пространственно-временных точках. Уравнения для вторых моментов имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_i \tilde{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_i \tilde{v}_j \tilde{v}_k}{\partial x_k} = \frac{1}{\tau_v} \tilde{\alpha} (u_i \tilde{v}_j + \tilde{v}_i u_j - 2 \tilde{v}_i \tilde{v}_j); \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{\vartheta} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{\vartheta} v_i v_k}{\partial x_k} = \frac{1}{\tau_v} \tilde{\alpha} (\tilde{\vartheta} u_i - \tilde{\vartheta} \tilde{v}_j) + \frac{1}{\tau_\vartheta} \tilde{\alpha} (T \tilde{v}_i - \tilde{\vartheta} \tilde{v}_j). \quad (12)$$

Одноточечные моменты 3-го порядка описывают диффузию турбулентности, а двухточечные моменты 3-го порядка — перераспределение энергии по спектру турбулентности.

2.3. Замыкание модели. Компоненты тензора подсеточных напряжений и компоненты вектора подсеточного теплового потока имеют вид

$$\sigma_{ij} = \widetilde{v_i v_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j, \quad q_i = \widetilde{\vartheta v_i} - \tilde{\vartheta} \tilde{v}_i.$$

Использование процедуры осреднения параметров дисперсной фазы приводит к возникновению новых слагаемых, требующих моделирования. Для замыкания уравнений (11) и (12) предполагается, что

вклад третьих корреляционных моментов пренебрежимо мал [22]:

$$\int (v - \tilde{v}_i)(v - \tilde{v}_j)(v - \tilde{v}_k) \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) d\mathbf{v} d\vartheta = 0;$$

$$\int (\vartheta - \tilde{\vartheta})(v - \tilde{v}_i)(v - \tilde{v}_k) \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) d\mathbf{v} d\vartheta = 0.$$

Используя для вычисления интегралов подходы, предложенные в работах [22, 23], уравнения для третьих моментов заменяются алгебраическими соотношениями

$$\widetilde{v_i v_j v_k} = \widetilde{v_j v_k v_i} + \widetilde{v_i v_j v_k} + \widetilde{v_i v_k v_j} - 2\widetilde{v_i v_j v_k}; \quad (13)$$

$$\widetilde{\vartheta v_i v_k} = \widetilde{\vartheta v_k v_i} + \widetilde{\vartheta v_i v_k} + \widetilde{v_i v_k \vartheta} - 2\widetilde{v_i v_k \vartheta}. \quad (14)$$

Соотношения (13) и (14) позволяют получить замкнутую формулировку задачи.

Движение и теплообмен дисперсной фазы описывается уравнениями (8)–(10) для переменных $\tilde{\alpha}$, \tilde{v}_i и $\tilde{\vartheta}$, а также уравнениями (11) и (12) для переменных $\widetilde{v_i v_j}$ и $\widetilde{\vartheta v_i}$.

Пренебрегая инерционными эффектами ($\tau_v = \tau_\vartheta = 0$), получим, что скорость и температура дисперсной фазы равняются соответствующим параметрам газа ($\tilde{v}_i = u_i$, $\tilde{\vartheta} = T$). В этом случае решаются только уравнения для численной концентрации частиц (8), а уравнения переноса (9)–(12) решения не требуют.

Частичный учет инерционных эффектов оказывается возможным в рамках равновесной модели (equilibrium model), в которой локальная скорость движения дисперсной фазы выражается в виде суммы локальной скорости и ускорения газа. В качестве параметра разложения используется время динамической и тепловой релаксации частицы. Полагая $\widetilde{v_i v_j} = \tilde{v}_i \tilde{v}_j$ и используя уравнение (8), из уравнения (9) получим, что локальное ускорение дисперсной фазы равняется локальному ускорению газа. Равновесная модель описывает ряд инерционных эффектов (preferential acceleration), но оказывается пригодной лишь для описания движения достаточно мелких частиц.

Полный учет инерционных эффектов производится при помощи решения уравнений переноса (8)–(11), полагая, что вклад корреляционных моментов, описываемый уравнениями (12) и (13), является пренебрежимо малым. На практике это означает, что $\widetilde{v_i v_j} = \tilde{v}_i \tilde{v}_j$ и $\widetilde{\vartheta v_j} = \tilde{\vartheta} \tilde{v}_j$. В этом случае уравнения математической модели оказываются эквивалентными модели, предложенной в работе [30], которая описывает течения газозвеси при пренебрежимо малом объеме, занимаемом частицами, и достаточно большом отношении плотностей дисперсной и газовой фаз. Для газозвеси с монодисперсными частицами уравнения математической модели совпадают с уравнениями, сформулированными в работах [31, 32]. Несмотря на учет инерционных эффектов, пренебрежение вторыми корреляционными моментами дисперсной фазы не позволяет учесть ряд важных эффектов (crossing effect), играющих важную роль в течениях газозвеси с высокоинерционными частицами.

3. Одномерная модель. Рассмотрим уравнения, описывающие движение невязкого сжимаемого газа с частицами в одномерном приближении. Действие вязких сил учитывается лишь при взаимодействии газа с частицами.

3.1. Газ. Уравнение, описывающее нестационарное течение невязкого сжимаемого газа, в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_g}{\partial x} = \mathbf{S}_g. \quad (15)$$

Уравнение состояния идеального газа, а также соотношение, позволяющее вычислить удельную полную энергию, записываются в виде

$$p = \rho R T, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2.$$

Вектор консервативных переменных \mathbf{Q}_g и вектор потока \mathbf{F}_g имеют вид

$$\mathbf{Q}_g = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}.$$

Здесь t — время, x — пространственная координата, ρ — плотность, u — скорость в направлении оси x , p — давление, T — температура, E — полная энергия, R — газовая постоянная, γ — отношение удельных

теплоемкостей. Источниковый член S_g учитывает влияние дисперсной фазы. В безразмерных переменных полагается, что $R = 1/\gamma$ и $\mu = 1/\text{Re}$.

Уравнение (15) записывается в линеаризованной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial t} + A_g \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial x} = \mathbf{S}_g, \quad (16)$$

где $A_g = \partial \mathbf{F}_g / \partial \mathbf{Q}_g$ — якобиан. В физических переменных якобиан имеет вид

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - uH & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix},$$

где $H = (E + p)/\rho$ — удельная полная энтальпия. Якобиан представляется в виде $A_g = R_g \Lambda_g L_g$, где Λ_g — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения якобиана, L_g и R_g — матрицы, состоящие из левых и правых собственных векторов якобиана, причем $L_g = R_g^{-1}$. Якобиан имеет три вещественных собственных значения

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

где c — скорость звука. Скорость звука находится из соотношения

$$c = \left[(\gamma - 1) \left(H - \frac{1}{2} u^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Правые собственные векторы якобиана имеют вид

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2} u^2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix}.$$

Переменные, соответствующие нулевой компоненте i -го собственного вектора, не изменяются при переходе через характеристику i . Выражения для правых собственных векторов используются при построении ограничителей потока в схемах высокой разрешающей способности.

Диагонализация якобиана позволяет записать уравнение (16) в характеристической форме

$$\frac{\partial \mathbf{W}_g}{\partial t} + \Lambda_g \frac{\partial \mathbf{W}_g}{\partial x} = \mathbf{S}_g, \quad (17)$$

где $\mathbf{W}_g = R_g^{-1} \mathbf{Q}_g$ представляет собой вектор характеристических переменных.

3.2. Дисперсная фаза. Уравнение, описывающее движение и теплообмен дисперсной фазы, в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial x} = \mathbf{S}_p. \quad (18)$$

Вектор консервативных переменных \mathbf{Q}_p и вектор потока \mathbf{F}_p имеют вид

$$\mathbf{Q}_p = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \tilde{v} \\ \tilde{\alpha} \tilde{v}^2 \\ \tilde{\alpha} \tilde{v} \tilde{\vartheta} \\ \tilde{\alpha} \tilde{v} \tilde{\vartheta}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \tilde{v} \\ \tilde{\alpha} \tilde{v} \tilde{v} \\ \tilde{\alpha} \tilde{v}^2 \\ \tilde{\alpha} (3 \tilde{v} \tilde{v} \tilde{v} - 2 \tilde{v}^3) \\ \tilde{\alpha} (2 \tilde{v} \tilde{v} \tilde{\vartheta} + \tilde{v} \tilde{v} \tilde{\vartheta} - 2 \tilde{v} \tilde{\vartheta} \tilde{v}) \end{pmatrix}.$$

Источниковый член, учитывающий межфазный обмен импульсом и теплом, имеет вид

$$\mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\alpha}(u - \tilde{v})/\tau_v \\ \tilde{\alpha}(T - \tilde{\vartheta})/\tau_\vartheta \\ 2\tilde{\alpha}(u\tilde{v} - \tilde{v}v)/\tau_v \\ \tilde{\alpha}(\tilde{\vartheta}u - \tilde{\vartheta}v)/\tau_v + \tilde{\alpha}(T\tilde{v} - \tilde{\vartheta}v)/\tau_\vartheta \end{pmatrix}.$$

Источниковый член, учитывающий межфазный обмен импульсом и теплом, в уравнении (15) имеет вид

$$\mathbf{S}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ m_p\tilde{\alpha}(\tilde{v} - u)/\tau_v \\ \beta m_p\tilde{\alpha}(\tilde{\vartheta} - T)/\tau_\vartheta + m_p\tilde{\alpha}(\tilde{v}v - u\tilde{v})/\tau_v \end{pmatrix}.$$

Уравнение (18), описывающее движение и теплообмен дисперсной фазы, является гиперболическим. В квазилинейной форме уравнение (18) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial t} + A_p \frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial x} = \mathbf{S}_p, \quad (19)$$

где $A_p = \partial \mathbf{F}_p / \partial \mathbf{Q}_p$ — якобиан. Якобиан имеет вид

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v} + 4\tilde{v}^3 & 3\tilde{v}\tilde{v} - 6\tilde{v}^2 & 0 & 3\tilde{v} & 0 \\ -\tilde{\vartheta}\tilde{v}\tilde{v} - 2\tilde{\vartheta}\tilde{v}\tilde{v} + 4\tilde{\vartheta}\tilde{v}\tilde{v} & 2\tilde{\vartheta}\tilde{v} - 4\tilde{\vartheta}\tilde{v} & \tilde{v}\tilde{v} - 2\tilde{v}^2 & \tilde{\vartheta} & 2\tilde{v} \end{pmatrix}.$$

Якобиан представляется в виде $A_p = R_p \Lambda_p L_p$, где Λ_p — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения якобиана, L_p и R_p — матрицы, состоящие из левых и правых собственных векторов якобиана, причем $L_p = R_p^{-1}$. Якобиан имеет пять вещественных собственных значений

$$\lambda_1 = \tilde{v}, \quad \lambda_2 = \tilde{v} + \sqrt{3}\sigma, \quad \lambda_3 = \tilde{v} - \sqrt{3}\sigma, \quad \lambda_4 = \tilde{v} + \sigma, \quad \lambda_5 = \tilde{v} - \sigma, \quad \text{где } \sigma = (\tilde{v}\tilde{v} - \tilde{v}\tilde{v})^{1/2}.$$

При неотрицательном ядре $H_\Delta(\mathbf{x})$ получим, что σ является вещественным числом [26, 28], а это гарантирует гиперболичность уравнения (19). Правые собственные векторы якобиана имеют вид

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \tilde{\vartheta} \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_1 \tilde{\vartheta} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \chi_2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_2 \chi_2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ \chi_3 \\ \lambda_3^2 \\ \lambda_3 \chi_3 \end{pmatrix}, \quad r_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad r_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda_5 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\chi_2 = \lambda_2 \frac{(3\lambda_2\tilde{v}\tilde{v} - 9\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v} + 8\tilde{v}^3 - 2\lambda_2\tilde{v}^2) (\lambda_2\tilde{\vartheta} - 4\tilde{\vartheta}\tilde{v} + 3\tilde{\vartheta}v)}{3(\lambda_2\tilde{v}\tilde{v} - \lambda_2\tilde{v}^2 - 2\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v} + 2\tilde{v}^3) (3\tilde{v}\tilde{v} - 4\tilde{v}^2)};$$

$$\chi_3 = \lambda_3 \frac{(3\lambda_3\tilde{v}\tilde{v} - 9\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v} + 8\tilde{v}^3 - 2\lambda_3\tilde{v}^2) (\lambda_3\tilde{\vartheta} - 4\tilde{\vartheta}\tilde{v} + 3\tilde{\vartheta}v)}{3(\lambda_3\tilde{v}\tilde{v} - \lambda_3\tilde{v}^2 - 2\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v} + 2\tilde{v}^3) (3\tilde{v}\tilde{v} - 4\tilde{v}^2)}.$$

Диагонализация якобиана позволяет записать уравнение (19) в характеристической форме

$$\frac{\partial \mathbf{W}_p}{\partial t} + \Lambda_p \frac{\partial \mathbf{W}_p}{\partial x} = \mathbf{S}_p, \quad (20)$$

где $W_p = R_p^{-1}Q_p$ представляет собой вектор характеристических переменных.

4. Численный метод. Для дискретизации основных уравнений используется метод конечных объемов, а для расчета потоков через грани контрольных объемов — метод Годунова [33]. Для интегрирования по времени применяется метод Рунге–Кутты 3-го порядка.

Рассмотрим равномерную сетку, состоящую из N ячеек с центрами ячеек в точках $x_i = i\Delta x$, где $i = 0, 1, \dots, N$. Вектор консервативных переменных, осредненный по ячейке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, определяется соотношением

$$Q_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Q dx,$$

где $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. В дискретном виде на слое n по времени уравнение (15) записывается в следующем виде:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n). \quad (21)$$

Потоки находятся из соотношений

$$F_{i-1/2}^n = \tilde{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n), \quad F_{i+1/2}^n = \tilde{F}(Q_i^n, Q_{i+1}^n).$$

Тильда соответствует численному потоку. Шаг интегрирования по времени выбирается исходя из условия

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\max\{|\lambda_i|\}},$$

где число Куранта–Фридрикса–Леви $\text{CFL} \leq 1/2$.

Используя расщепление вектора потока (flux vector splitting), якобиан представляется в виде $A = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)R^{-1}$, $A^+ = R\Lambda^+R^{-1}$, $A^- = R\Lambda^-R^{-1}$, где матрицы Λ^+ и Λ^- представляют собой диагональные матрицы с положительными и отрицательными собственными значениями на главной диагонали. Уравнение (21) принимает вид

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta Q_{i-1/2} + A^- \Delta Q_{i+1/2}). \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{cases} A^+ \Delta Q_{i-1/2} = R\Lambda^+R^{-1}(Q_i - Q_{i-1})A^- \Delta Q_{i+1/2} = R\Lambda^-R^{-1}(Q_{i+1} - Q_i) = A Q_i - F_{i-1/2}^n; \\ A^- \Delta Q_{i+1/2} = R\Lambda^-R^{-1}(Q_{i+1} - Q_i)A^+ \Delta Q_{i-1/2} = R\Lambda^+R^{-1}(Q_i - Q_{i-1}) = -A Q_i + F_{i+1/2}^n. \end{cases}$$

Разностная схема (22) принимает вид

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{A}_{i-1/2}^+ \Delta Q_{i-1/2} + \hat{A}_{i+1/2}^- \Delta Q_{i+1/2}). \quad (23)$$

В разностной схеме (23) компоненты матриц A^+ и A^- находятся с использованием осредненных по Рое величин.

Для газовой фазы осреднение по Рое задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i-1/2} &= \frac{\rho_{i-1}^{1/2} u_{i-1} + \rho_i^{1/2} u_i}{\rho_{i-1}^{1/2} + \rho_i^{1/2}}; \\ \hat{H}_{i-1/2} &= \frac{\rho_{i-1}^{1/2} H_{i-1} + \rho_i^{1/2} H_i}{\rho_{i-1}^{1/2} + \rho_i^{1/2}} = \frac{(E_{i-1} + p_{i-1})/\rho_{i-1}^{1/2} + (E_i + p_i)/\rho_i^{1/2}}{\rho_{i-1}^{1/2} + \rho_i^{1/2}}. \end{aligned}$$

Скорость звука находится из соотношения

$$\hat{c} = \left[(\gamma - 1) \left(\hat{H} - \frac{1}{2} \hat{u}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Для дисперсной фазы осреднение задается следующими соотношениями:

$$\hat{q}_{i-1/2} = \frac{1}{2} (q_{i-1} + q_i),$$

где q — обобщенная переменная: $q = \tilde{v}, \tilde{\vartheta}, \tilde{v}\tilde{v}, \tilde{\vartheta}v$.

5. Результаты расчетов. Рассмотрим взаимодействие равномерного до- и сверхзвукового потока невязкого сжимаемого газа со слоем частиц, заполняющими некоторую ограниченную область пространства и находящимися в начальный момент времени в неподвижном состоянии.

5.1. Конфигурация расчетной области. Рассмотрим однородный слой твердых частиц сферической формы, перекрывающий сечение канала, на который натекает равномерный поток или падает плоская ударная волна (рис. 1).

Рассчитывается картина двухфазного течения и исследуется динамика слоя частиц за ударной волной. Расчеты проводятся на интервале $[-5, 6]$. Слой частиц состоит из 8.6×10^4 частиц, которые в начальный момент времени находятся в неподвижном состоянии и равномерным образом заполняют интервал $0 \leq x \leq 0.3$. Расчетная сетка содержит 1000 узлов, из которых примерно 100 узлов приходится на слой частиц.

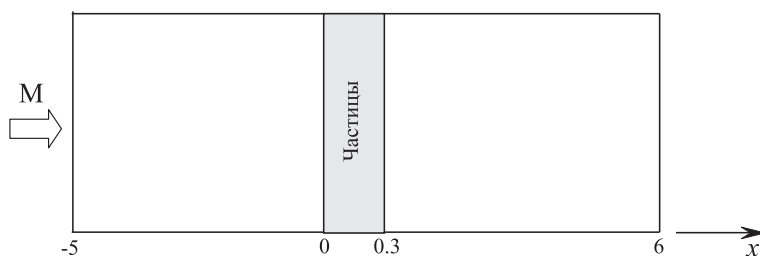


Рис. 1. Взаимодействие потока со слоем частиц

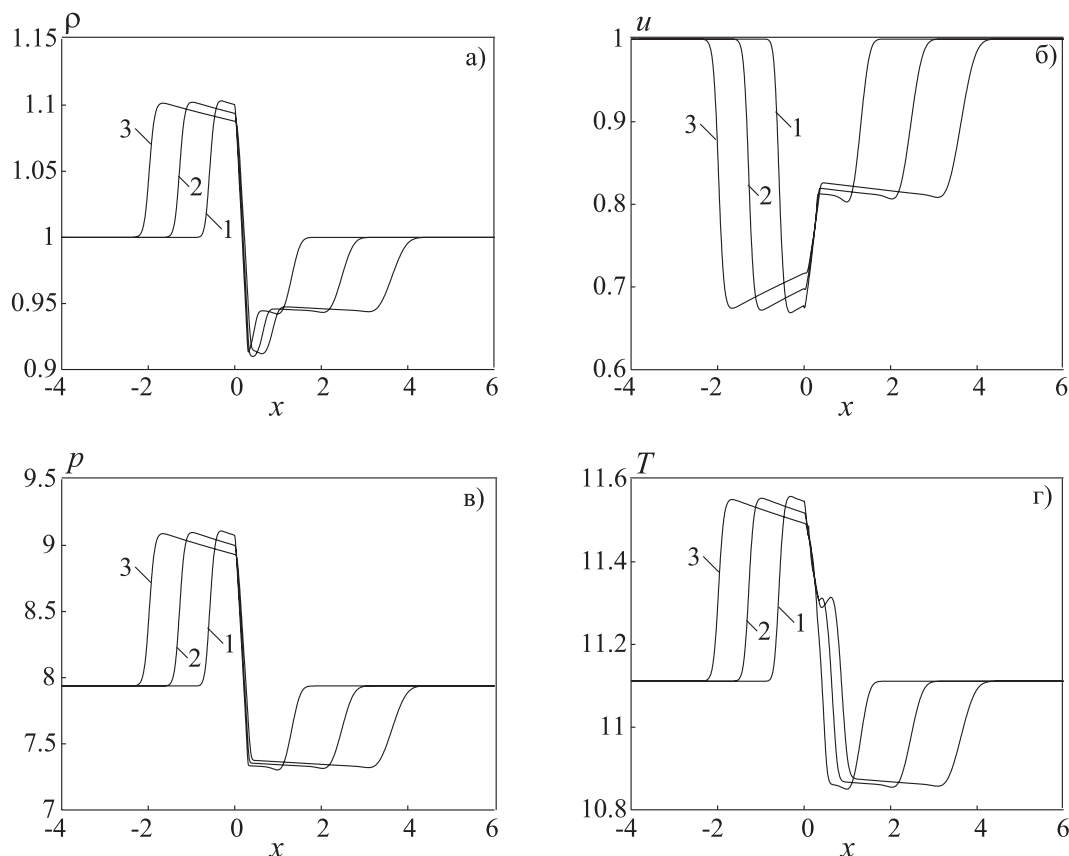


Рис. 2. Распределения плотности (а), скорости (б), давления (в) и температуры (г) газа в случае 1 в моменты времени $t = 0.275$ (1); 0.550 (2); 0.825 (3)

В качестве рабочей среды выбирается воздух с отношением удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, равным $\gamma = 1.4$. Кинематической вязкости и числу Прандтля присваиваются значения $\nu = 1.57 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\text{Pr} = 0.72$. Отношение теплоемкости материала частиц к теплоемкости газа при постоянном давлении полагается равным $\beta = 1$. На практике времена динамиче-

ской и тепловой релаксации оказываются близкими между собой величинами. В расчетах полагается, что $\tau_v = \tau_\theta = 3.569$ с (в безразмерных переменных времени релаксации соответствует число Стокса). Плотность материала частицы и масса частицы равняются $\rho_p = 1000$ кг/м³ и $m_p = 1.0055 \times 10^{-4}$ кг (диаметр частицы $d_p = 5.77 \times 10^{-3}$ м).

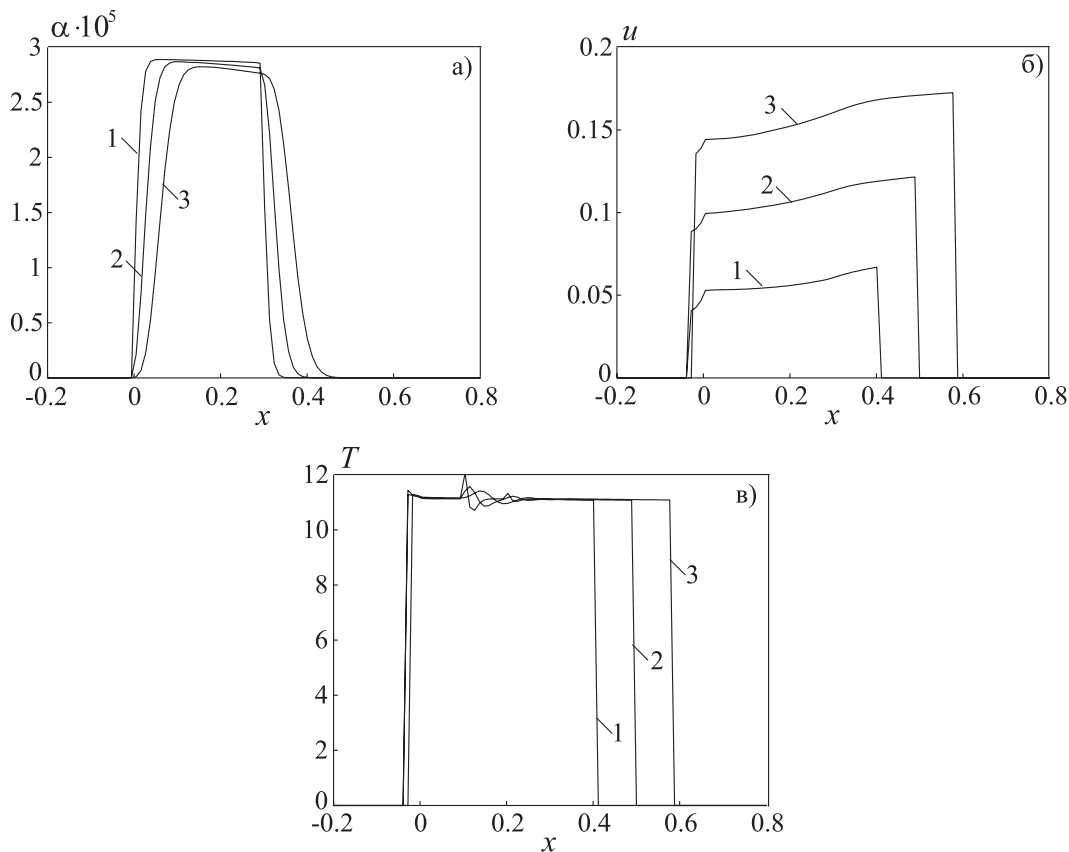


Рис. 3. Распределения плотности (а), скорости (б) и температуры (в) дисперсной фазы в случае 1 в моменты времени $t = 0.275$ (1); 0.550 (2); 0.825 (3)

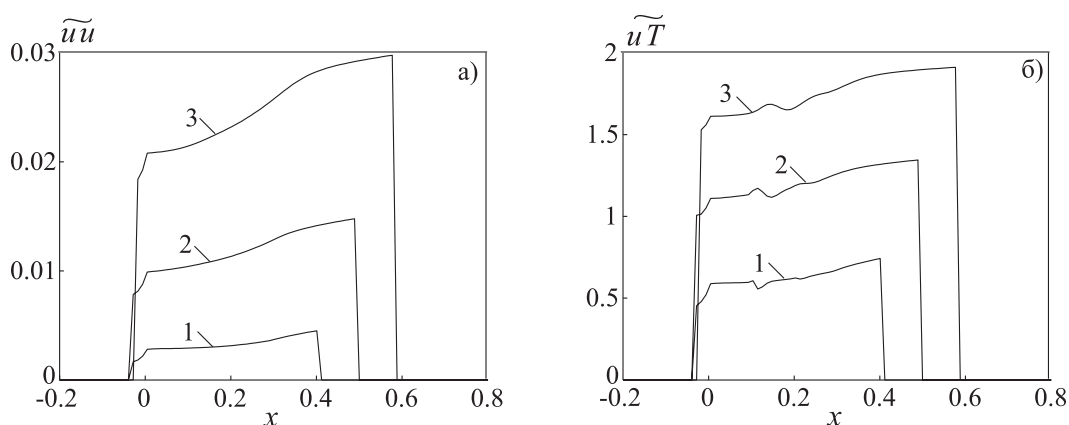


Рис. 4. Распределения корреляционного момента скорости (а) и корреляционного момента скорости и температуры (б) дисперсной фазы в случае 1 в моменты времени $t = 0.275$ (1); 0.550 (2); 0.825 (3)

На левой границе, через которую рабочий газ поступает в расчетную область, задается число Маха, равное 0.3 в случае дозвукового течения (случай 1). В случае сверхзвукового течения (случай 2) параметры на левой границе находятся из соотношений Рэнкина–Гюгонио таким образом, чтобы число Маха за фронтом ударной волны равнялось 2.8. На выходной границе используются условия свободного вытекания.

В начальный момент времени $t = 0$ газ движется с равномерной скоростью ($\rho = 1$, $p = 1$ и $u = 1$ в безразмерных переменных).

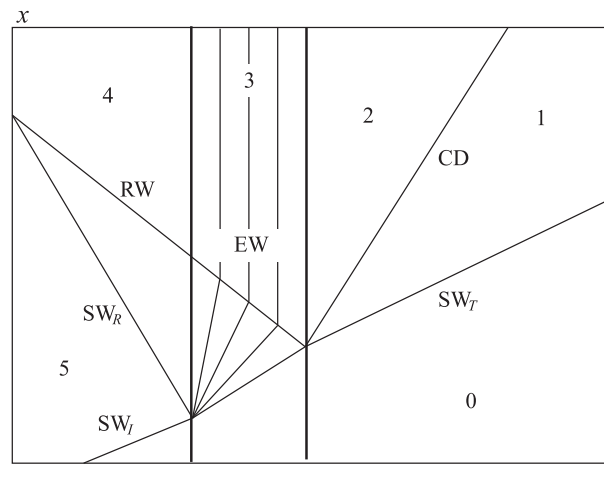


Рис. 5. Диаграмма взаимодействия ударной волны с облаком частиц (SW_I — падающая ударная волна, SW_R — отраженная ударная волна, SW_T — прошедшая ударная волна, CD — контактный разрыв, RW — волна разрежения, EW — веер волны разрежения)

Скорость частиц равняется нулю, а температура частиц полагается равной температуре газа. Корреляционные моменты скорости и температуры дисперсной фазы равняются нулю ($\tilde{v} = 0$, $\tilde{\vartheta} = T_g$, $\tilde{v}\tilde{v} = 0$, $\tilde{\vartheta}\tilde{v} = 0$). Числовая концентрация дисперсной фазы составляет $2.885 \times 10^5 \text{ м}^{-3}$. Частицы разных размеров имеют различную инерционность и различное скоростное и температурное запаздывание по отношению к газовому потоку, что оказывает влияние на процесс установления квазистационарного течения.

Для тестирования разработанного вычислительного алгоритма проводится решение ряда модельных задач нестационарной одномерной газовой динамики. Постановка различных задач дается в работе [34]. При этом для начальной концентрации дисперсной фазы используются исчезающе малые значения (порядка 10^{-8} м^{-3}).

5.2. Дозвуковое течение. Распределения параметров несущего газа в различные моменты времени показывает рис. 2. Перед слоем частиц происходит торможение потока, приводящее к уменьшению скорости и увеличению плотности, давления и температуры газа. При встрече набегающего потока со слоем частиц частицы, находящиеся в состоянии покоя в начальный момент времени, начинают ускоряться, приобретая ненулевую скорость и оказывая меньшее сопротивление течению газа, в результате чего скорость несущего потока увеличивается. Позади области, занятой частицами, происходит восстановление плотности, скорости, давления и температуры до соответствующих значений в набегающем потоке.

Распределения параметров дисперсной фазы в различные моменты времени показывает рис. 3, а распределения корреляционных моментов дисперсной фазы — рис. 4. За время $t = 0.275$ заметного смещения слоя частиц не происходит, хотя плотность дисперсной фазы на левой границе слоя немного выше, чем на его правой границе. В пределах области, занятой частицами, скорость дисперсной фазы распределяется неравномерным образом. По мере приближения к правой границе слоя скорость дисперсной фазы увеличивается вследствие ускорения несущего газа в этой области. Наибольшую скорость имеют частицы, расположенные вблизи левой границы слоя, поскольку их взаимодействие с потоком газа начинается в тот момент, когда газ достигает области, занятой частицами. Температура дисперсной фазы остается приблизительно постоянной. Неравномерное распределение скорости вдоль слоя (высокая скорость на левой границе и низкая скорость на правой границе) приводит к различной интенсивности теплообмена между газом и частицами, расположенными вблизи левой и правой границ слоя. В результате этого имеет место слабое уменьшение температуры дисперсной фазы вблизи правой границы слоя. Распределения корреляционных моментов скорости и скорости и температуры дисперсной фазы в качественном отношении являются схожими.

5.3. Сверхзвуковое течение. На основе анализа (x, t) диаграммы, приведенной на рис. 5 (частицы считаются замороженными в пространстве) и полученной в результате расчета, процесс взаимодействия ударной волны со слоем частиц можно описать следующим образом [35]. Когда падающая ударная волна SW_I достигает левого края слоя и начинает проникать в него, образуется отраженная ударная волна SW_R ,

распространяющаяся в обратную от падающей сторону, и прошедшая ударная волна SW_T , движущаяся в том же направлении. За прошедшей ударной волной внутри слоя формируется также веер волн разрежения EW (отрицательный градиент давления), в котором газ ускоряется, и вблизи правой границы слоя поток становится сверхзвуковым. В момент выхода прошедшей ударной волны из слоя в нем возникает еще один веер волн разрежения RW, а из слоя вместе с прошедшей ударной волной выходит контактный разрыв CD, отделяющий прошедшую ударную волну от волн разрежения. Взаимодействие веера волн разрежения EW с волной RW приводит к установлению постоянного градиента давления в слое частиц. Интенсивность проходящей ударной волны уменьшается по сравнению с падающей ударной волной, поскольку часть энергии газа расходуется на ускорение частиц. Со временем в слое частиц формируется постоянный градиент давления.

Проведенные расчеты позволяют выделить шесть характерных областей течения (рис. 5): 0 — область невозмущенного газа; 1 — область, соответствующая газу позади прошедшей ударной волны SW_T ; 2 — область, соответствующая газу между контактным разрывом CD и правым краем слоя частиц; 3 — область, занятая веером волн разрежения EW; 4 — область, соответствующая газу позади отраженной ударной волны SW_R ; 5 — область, соответствующая условиям на фронте падающей ударной волны SW_I .

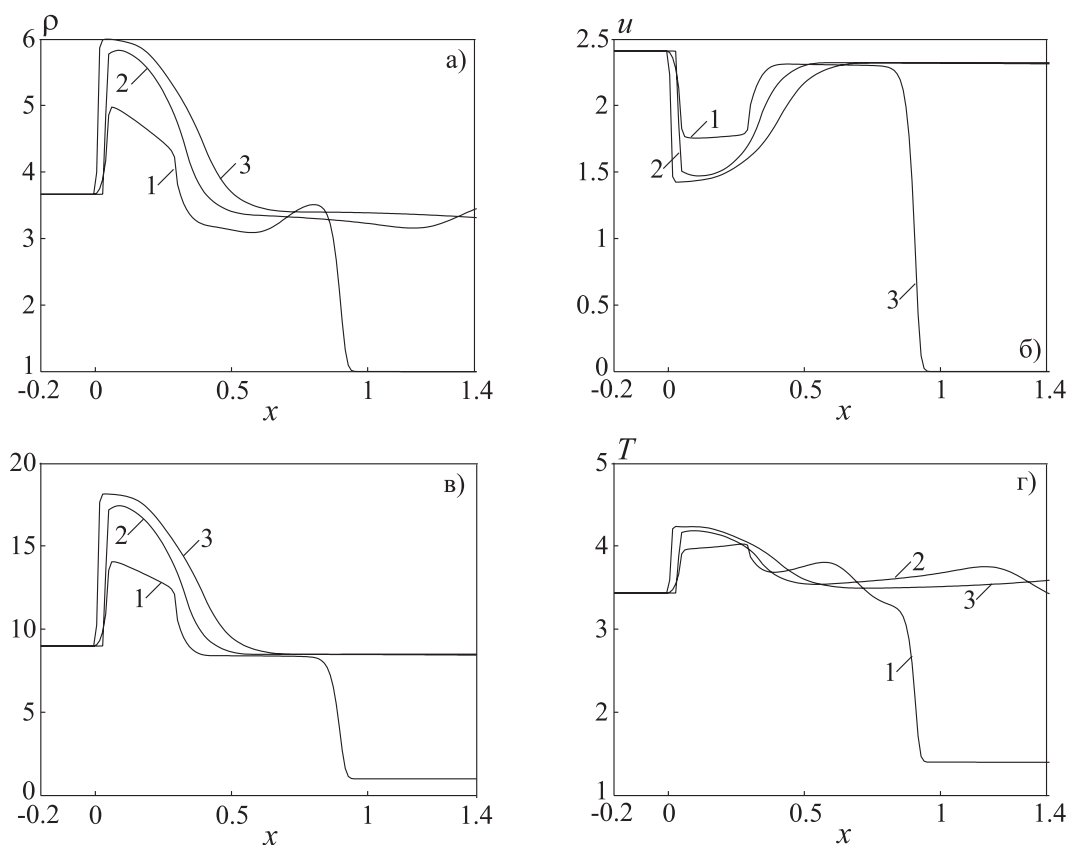


Рис. 6. Распределения плотности (а), скорости (б), давления (в) и температуры (г) газа в случае 2 в моменты времени $t = 0.275$ (1); 0.550 (2); 0.825 (3)

Распределения параметров несущего газа в различные моменты времени показывает рис. 6. Взаимодействие сверхзвукового потока со слоем частиц приводит к формированию ударной волны, за которой имеет место скачкообразное уменьшение скорости газа до дозвуковых значений и увеличение его плотности, давления и температуры. За фронтом ударной волны происходит взаимодействие несущего потока с частицами. В области, занятой частицами, скорость несущего потока остается приблизительно постоянной, в то время как плотность, давление и температура газа уменьшаются. Частицы, находящиеся в начальный момент времени в состоянии покоя, вовлекаются в движение газом, приобретая ненулевую скорость и оказывая меньшее сопротивление течению газа. На правой границе слоя наблюдается волна разрежения, в которой происходит ускорение потока и уменьшение плотности, давления и температуры газа. Позади слоя частиц параметры газа не достигают значений, которые они имели в невозмущенном потоке, причиной чего являются неизэнтропические потери энергии на фронте ударной волны. За веером волны разрежения скорость и давление газа оказываются ниже, чем в невозмущенном потоке. Плотность и

температура за веером волны разрежения претерпевают слабые колебания вследствие возникновения контактного разрыва, который перемещается вниз по потоку со скоростью, меньшей скорости ударной волны, индуцированной слоем частиц. Слева от контактного разрыва температура газа выше, а его плотность ниже, чем температура и плотность газа, находящегося справа от контактного разрыва. Контактный разрыв возникает в результате скачкообразного изменения плотности и температуры газа на фронте ударной волны, перемещающейся вниз по потоку.

Сравнение распределений параметров газа в различные моменты времени показывает, что положение фронта ударной волны, индуцированной слоем частиц, остается практически неизменным в пространстве, но величина скачка параметров потока возрастает с течением времени.

Распределения параметров дисперсной фазы в различные моменты времени показывает рис. 7, а распределения корреляционных моментов дисперсной фазы — рис. 8. В момент времени $t = 0.275$ скорость частиц, находящихся вблизи левой границы слоя, превышает скорость частиц вблизи его правой границы. Неравномерное распределение скорости приводит к неравномерному распределению плотности дисперсной фазы, которая на левой границе слоя превышает плотность дисперсной фазы на его правой границе. Повышение температуры газа на левой границе слоя приводит к увеличению температуры дисперсной фазы. Распределения корреляционных моментов скорости и скорости и температуры дисперсной фазы в качественном отношении являются схожими.

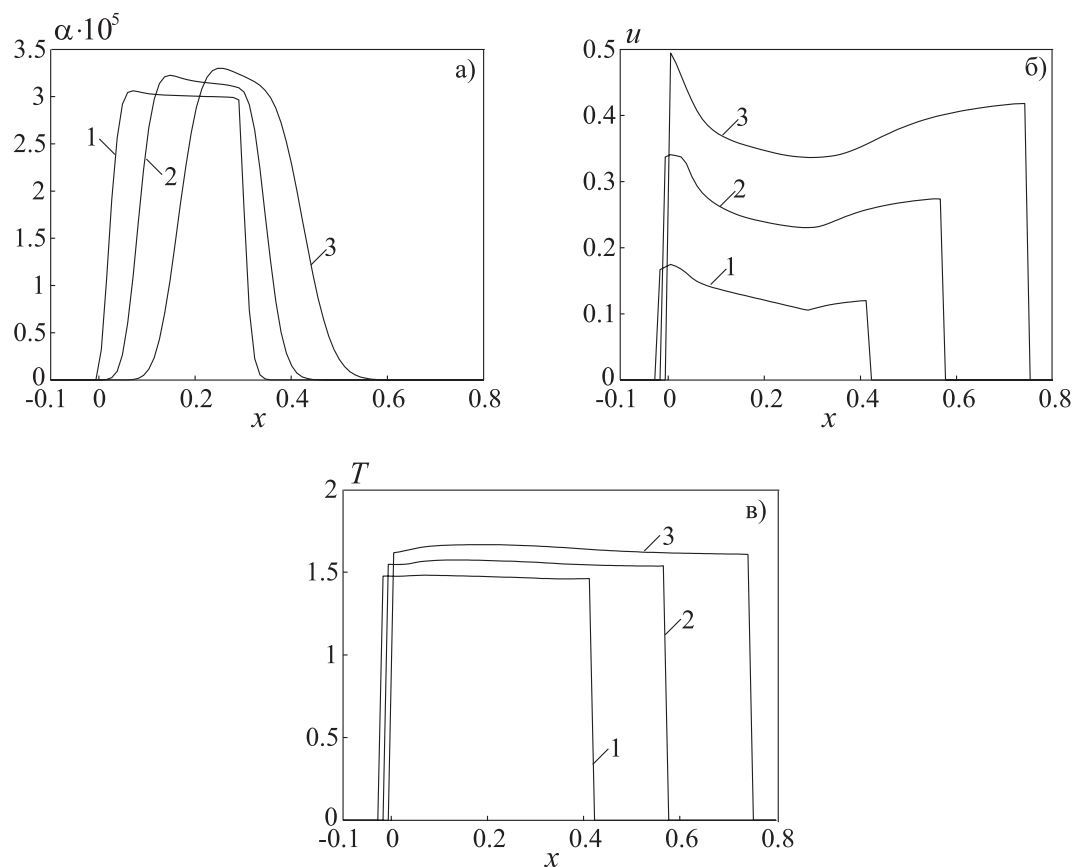


Рис. 7. Распределения плотности (а), скорости (б) и температуры (в) дисперсной фазы в случае 2 в моменты времени $t = 0.275$ (1); 0.550 (2); 0.825 (3)

6. Заключение. В рамках модели взаимопроникающих континуумов построена математическая модель, описывающая нестационарное течение газа с инертными частицами. Газовая и дисперсная фазы описываются наборами уравнений, выражающими законы сохранения массы, импульса и энергии, а межфазное взаимодействие учитывается при помощи источниковых членов. Основные уравнения для газовой и дисперсной фаз имеют гиперболический тип, допуская запись в консервативной форме, что позволяет использовать для их численного решения методы типа Годунова.

Проведено численное моделирование взаимодействия до- и сверхзвукового потока со слоем частиц, находящихся в начальный момент времени в неподвижном состоянии. Приведены ударно-волновая структура течения и пространственно-временные зависимости концентрации частиц и других параметров по-

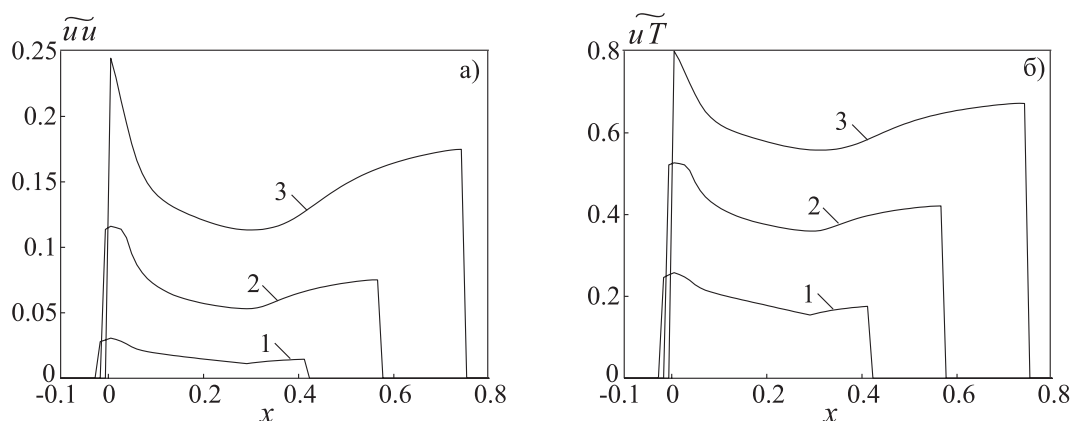


Рис. 8. Распределения корреляционного момента скорости (а) и корреляционного момента скорости и температуры (б) дисперсной фазы в случае 2 в моменты времени $t = 0.275$ (1); 0.550 (2); 0.825 (3)

тока. Полученные результаты позволяют оценить ослабление ударной волны при ее взаимодействии с засыпкой гранулированной среды.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-71-10019).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008.
2. Разматулин Х.А. Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1956. **20**, № 2. 184–195.
3. Крайко А.Н., Стернин Л.Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Прикладная математика и механика. 1965. **29**, № 3. 418–429.
4. Staedtke H., Franchello G., Worth B., Graf U., Romstedt P., Kumbaro A., Garcia-Cascales J., Paillere H., Deconinck H., Ricchiuto M., Smith B., De Cachard F., Toro E.F., Romenski E., Mimouni S. Advanced three-dimensional two-phase flow simulation tools for application to reactor safety (ASTAR) // Nuclear Engineering and Design. 2005. **235**, N 2–4. 379–400.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
6. Крайко А.Н. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами // Прикладная математика и механика. 1982. **46**. Вып. 3. 420–428.
7. Осипцов А.Н. Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 3. 46–52.
8. Baer M.R., Nunziato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // International Journal of Multiphase Flow. 1986. **12**, N 6. 861–889.
9. Niu Y.-Y. Numerical approximations of a compressible two fluid model by the advection upwind splitting method // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2001. **36**, N 3. 351–371.
10. Embid P., Baer M. Mathematical analysis of a two-phase continuum mixture theory // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 1992. **4**, N 4. 279–312.
11. Toro E.F. Riemann-problem-based techniques for computing reactive two-phase flows // Lecture Notes in Physics. 1989. Vol. 351. Heidelberg: Springer, 472–481.
12. Toumi I. An upwind numerical method for two-fluid two-phase flow models // Nuclear Science and Engineering. 1996. **123**, N 2. 147–168.
13. Chang C.-H., Liou M.-S. A robust and accurate approach to computing compressible multiphase flow: stratified flow model and AUSM⁺-up scheme // Journal of Computational Physics. 2007. **225**, N 1. 840–873.
14. Andrianov N., Warnecke G. The Riemann problem for the Baer–Nunziato model of two-phase flows // Journal of Computational Physics. 2004. **195**, N 2. 434–464.
15. Schwendeman D.W., Wahle C.W., Kapila A.K. The Riemann problem and a high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow // Journal of Computational Physics. 2006. **212**, N 2. 490–526.
16. Deledicque V., Papalexandris M.V. An exact Riemann solver for compressible two-phase flow models containing non-conservative products // Journal of Computational Physics. 2007. **222**, N 1. 217–245.
17. Karni S., Hernández-Duenas G. A hybrid algorithm for the Baer–Nunziato model using the Riemann invariants // Journal of Scientific Computing. 2010. **45**, N 1. 382–403.

18. *Lowe C.A.* Two-phase shock-tube problems and numerical methods of solution // *Journal of Computational Physics*. 2005. **204**, N 2. 598–632.
19. *Parés C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2006. **44**, N 1. 300–321.
20. *Rhebergen S., Bokhove O., van der Vegt J.J.W.* Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. 2008. **227**, N 3. 1887–1922.
21. *Tokareva S.A., Toro E.F.* HLLC-type Riemann solver for the Baer–Nunziato equations of compressible two-phase flow // *Journal of Computational Physics*. 2010. **229**, N 10. 3573–3604.
22. *Pandya R.V.R., Mashayek F.* Two-fluid large-eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. **45**, N 24. 4753–4759.
23. *Shotorban B.* Preliminary assessment of two-fluid model for direct numerical simulation of particle-laden flows // *AIAA Journal*. 2011. **49**, N 2. 438–443.
24. *Zaichik L.I., Simonin O., Alipchenkov V.M.* An Eulerian approach for large eddy simulation of particle transport in turbulent flows // *Journal of Turbulence*. 2009. **10**, N 9. 1–21.
25. *Shotorban B., Balachandar S.* Two-fluid approach for direct numerical simulation of particle-laden turbulent flows at small Stokes numbers // *Physical Review E*. 2009. **79**, N 5. doi 10.1103/PhysRevE.79.056703.
26. *Shotorban B., Jacobs G.B., Ortiz O., Truong Q.* An Eulerian model for particles nonisothermally carried by a compressible fluid // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2013. **65**. 845–854.
27. *Mashayek F., Pandya R.V.R.* Analytical description of particle/droplet-laden turbulent flows // *Progress in Energy and Combustion Science*. 2003. **29**, N 4. 329–378.
28. *Verman B., Geurts B., Kuerten H.* Realizability conditions for the turbulent stress tensor in large-eddy simulation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1994. **278**. 351–362.
29. *Gicquel L.Y.M., Givi P., Jaber F.A., Pope S.B.* Velocity filtered density function for large eddy simulation of turbulent flows // *Physics of Fluids*. 2002. **14**, N 3. 1196–1213.
30. *Saito T.* Numerical analysis of dusty-gas flows // *Journal of Computational Physics*. 2002. **176**, N 1. 129–144.
31. *Laurent F., Massot M., Villedieu P.* Eulerian multi-fluid modeling for the numerical simulation of coalescence in polydisperse dense liquid sprays // *Journal of Computational Physics*. 2004. **194**, N 2. 505–543.
32. *Kah D., Laurent F., Massot M., Jay S.* A high order moment method simulating evaporation and advection of a polydisperse liquid spray // *Journal of Computational Physics*. 2012. **231**, N 2. 394–422.
33. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. New York: Cambridge University Press, 2002.
34. *Булат П.В., Волков К.Н.* Одномерные задачи газовой динамики и их решение при помощи разностных схем высокой разрешающей способности // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2015. **15**, № 4. 731–740.
35. *Regele J.D., Rabinovitch J., Colonius T., Blanquart G.* Numerical modeling and analysis of early shock wave interactions with a dense particle cloud // *AIAA Paper*. 2012. doi 10.2514/6.2012-3161.

Поступила в редакцию
04.02.2020

Simulation of Unsteady Gas-Particle Flow Induced by the Shock-Wave Interaction with a Particle Layer

K. N. Volkov¹, V. N. Emelyanov², A. G. Karpenko³, and I. V. Teterina⁴

¹ *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: dsci@mail.ru*

² *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: vlademelyanov@gmail.com*

³ *St. Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics; Universitetskii prospekt 28, St. Petersburg, 198504, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: aspera.2003.ru@mail.ru*

⁴ *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: yaiv@mail.ru*

Abstract: A numerical simulation of the unsteady gas-particle flow arising from the shock-wave interaction with a layer of inert particles is performed based on a continuum model. Each phase is described by a set of equations describing the conservation laws of mass, momentum and energy. The interphase interaction is taken into account using source terms in the momentum and energy equations. The governing equations for the gas and dispersed phases are of a hyperbolic type, they can be written in a conservative form and can be solved with a Godunov-type numerical method. A third order Runge–Kutta method is used to discretize the governing equations in time. The proposed model allows one to calculate a wide range of gas-particle flow regimes occurring when the volume concentration of the dispersed phase varies. The closure of the mathematical model and some details of numerical model implementation are discussed. The shock-wave flow structure as well as the space-time dependencies of particle concentration and other flow parameters are presented.

Keywords: two-phase flow, numerical simulation, shock wave, particle, concentration.

References

1. K. N. Volkov and V. N. Emel'yanov, *Flows of Gas with Particles* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
2. Kh. A. Rakhmatulin, "Fundamentals of the Gasdynamics of Interpenetrating Motions of Continuous Media," *Prikl. Mat. Mekh.* **20** (2), 184–195 (1956).
3. A. N. Kraiko and L. E. Sternin, "Theory of Flows of a Two-Velocity Continuous Medium Containing Solid or Liquid Particles," *Prikl. Mat. Mekh.* **29** (3), 418–429 (1965) [*J. Appl. Math. Mech.* **29** (3), 482–496 (1965)].
4. H. Staedtke, G. Franchello, B. Worth, et al., "Advanced Three-Dimensional Two-Phase Flow Simulation Tools for Application to Reactor Safety (ASTAR)," *Nucl. Eng. Des.* **235** (2–4), 379–400 (2005).
5. R. I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media* (Nauka, Moscow, 1987; Hemisphere, New York, 1990).
6. A. N. Kraiko, "On Correctness of the Cauchy Problem for a Two-Fluid Model of a Gas Flow Containing Particles," *Prikl. Mat. Mekh.* **46** (3), 420–428 (1982) [*J. Appl. Math. Mech.* **46** (3), 327–333 (1982)].
7. A. N. Osiptsov, "Investigation of Regions of Unbounded Growth of the Particle Concentration in Disperse Flows," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 3, 46–52 (1984) [*Fluid Dyn.* **19** (3), 378–385 (1984)].
8. M. R. Baer and J. W. Nunziato, "A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials," *Int. J. Multiph. Flow* **12** (6), 861–889 (1986).
9. Y.-Y. Niu, "Numerical Approximations of a Compressible Two Fluid Model by the Advection Upwind Splitting Method," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **36** (3), 351–371 (2001).
10. P. Embid and M. Baer, "Mathematical Analysis of a Two-Phase Continuum Mixture Theory," *Continuum Mech. Therm.* **4**, 279–312 (1992).
11. E. F. Toro, "Riemann-Problem-Based Techniques for Computing Reactive Two-Phase Flows," in *Lecture Notes in Physics* (Springer, Heidelberg, 1989), Vol. 351, pp. 472–481.
12. I. Toumi, "An Upwind Numerical Method for Two-Fluid Two-Phase Flow Models," *Nucl. Sci. Eng.* **123** (2), 147–168 (1996).
13. C.-H. Chang and M.-S. Liou, "A Robust and Accurate Approach to Computing Compressible Multiphase Flow: Stratified Flow Model and AUSM⁺-up Scheme," *J. Comput. Phys.* **225** (1), 840–873 (2007).
14. N. Andrianov and G. Warnecke, "The Riemann Problem for the Baer–Nunziato Model of Two-Phase Flows," *J. Comput. Phys.* **195** (2), 434–464 (2004).
15. D. W. Schwendeman, C. W. Wahle, and A. K. Kapila, "The Riemann Problem and a High-Resolution Godunov Method for a Model of Compressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.* **212** (2), 490–526 (2006).
16. V. Deledicque and M. V. Papalexandris, "An Exact Riemann Solver for Compressible Two-Phase Flow Models Containing Non-conservative Products," *J. Comput. Phys.* **222** (1), 217–245 (2007).
17. S. Karni and G. Hernández-Dueñas, "A Hybrid Algorithm for the Baer–Nunziato Model Using the Riemann Invariants," *J. Sci. Comput.* **45**, 382–403 (2010).
18. C. A. Lowe, "Two-Phase Shock-Tube Problems and Numerical Methods of Solution," *J. Comput. Phys.* **204** (2), 598–632 (2005).
19. C. Parés, "Numerical Methods for Nonconservative Hyperbolic Systems: A Theoretical Framework," *SIAM J. Numer. Anal.* **44** (1), 300–321 (2006).
20. S. Rhebergen, O. Bokhove, and J. J. W. van der Vegt, "Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Hyperbolic Nonconservative Partial Differential Equations," *J. Comput. Phys.* **227** (3), 1887–1922 (2008).
21. S. A. Tokareva and E. F. Toro, "HLLC-Type Riemann Solver for the Baer–Nunziato Equations of Compressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.* **229** (10), 3573–3604 (2010).
22. R. V. R. Pandya and F. Mashayek, "Two-Fluid Large-Eddy Simulation Approach for Particle-Laden Turbulent Flows," *Int. J. Heat Mass Tran.* **45** (24), 4753–4759 (2002).

23. B. Shotorban, "Preliminary Assessment of Two-Fluid Model for Direct Numerical Simulation of Particle-Laden Flows," *AIAA J.* **49** (2), 438–443 (2011).
24. L. I. Zaichik, O. Simonin, and V. M. Alipchenkov, "An Eulerian Approach for Large Eddy Simulation of Particle Transport in Turbulent Flows," *J. Turbul.* **10** (9), 1–21 (2009).
25. B. Shotorban and S. Balachandar, "Two-Fluid Approach for Direct Numerical Simulation of Particle-Laden Turbulent Flows at Small Stokes Numbers," *Phys. Rev. E* **79** (2009). doi 10.1103/PhysRevE.79.056703
26. B. Shotorban, G. B. Jacobs, O. Ortiz, and Q. Truong, "An Eulerian Model for Particles Nonisothermally Carried by a Compressible Fluid," *Int. J. Heat Mass Tran.* **65**, 845–854 (2013).
27. F. Mashayek and R. V. R. Pandya, "Analytical Description of Particle/Droplet-Laden Turbulent Flows," *Prog. Energy Combust. Sci.* **29** (4), 329–378 (2003).
28. B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten, "Realizability Conditions for the Turbulent Stress Tensor in Large-Eddy Simulation," *J. Fluid Mech.* **278**, 351–362 (1994).
29. L. Y. M. Gicquel, P. Givi, F. A. Jaber, and S. B. Pope, "Velocity Filtered Density Function for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows," *Phys. Fluids* **14** (3), 1196–1213 (2002).
30. T. Saito, "Numerical Analysis of Dusty-Gas Flows," *J. Comput. Phys.* **176** (1), 129–144 (2002).
31. F. Laurent, M. Massot, and P. Villedieu, "Eulerian Multi-Fluid Modeling for the Numerical Simulation of Coalescence in Polydisperse Dense Liquid Sprays," *J. Comput. Phys.* **194** (2), 505–543 (2004).
32. D. Kah, F. Laurent, M. Massot, and S. Jay, "A High Order Moment Method Simulating Evaporation and Advection of a Polydisperse Liquid Spray," *J. Comput. Phys.* **231** (2), 394–422 (2012).
33. R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems* (Cambridge University Press, New York, 2002).
34. P. V. Bulat and K. N. Volkov, "One-Dimensional Gas Dynamics Problems and Their Solution Based on High-Resolution Finite Difference Schemes," *Nauchno-Tekhn. Vestn. Inform. Tekhnol. Mekhan. Optiki* **15** (4), 731–740 (2015).
35. J. D. Regele, J. Rabinovitch, T. Colonius, and G. Blanquart, "Numerical Modeling and Analysis of Early Shock Wave Interactions with a Dense Particle Cloud," *AIAA Paper* (2012). doi 10.2514/6.2012-3161