

УДК 532.546

doi 10.26089/NumMet.v21r108

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ В СЛУЧАЕ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

В. Ф. Пивень¹, Д. Г. Лекомцев²

Поставлена плоская (двумерная) задача о математическом моделировании работы скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта с отдельной анизотропией и неоднородностью, когда контур питания произвольный. Рассматривается совершенная скважина, когда она полностью вскрывает пласт своей рабочей частью (фильтром). Проницаемость грунта характеризуется тензором второго ранга, компоненты которого моделируются степенной функцией координат. Гомеоморфным аффинным преобразованием координат эта задача приводится к каноническому виду, что значительно упрощает ее исследование. Получено в конечном виде аналитическое решение задачи о дебите скважины с конкретным эллиптическим контуром питания, а также в случае, когда контур питания удален в бесконечность. В случае произвольного гладкого контура питания задача о дебите редуцирована к системе сингулярного интегрального уравнения и интегрального соотношения, которая решена численно методом дискретных особенностей. Исследовано влияние на дебит анизотропии, неоднородности пласта и формы контура питания.

Ключевые слова: теория фильтрации, скважина, пористая среда, анизотропный неоднородный пласт, тензор проницаемости, дебит, обобщенный закон Дарси, сингулярная линия, эллиптический контур питания.

1. Введение. Реальные породы-коллекторы флюидов (воды, нефти) характеризуются весьма сложной структурой. Свойства пород, слагающих такие пласты, сильно различаются в зависимости от выбранного направления и при переходе от одной точки среды к другой. Например, в трещиновато-пористой среде поток флюидов вдоль трещин будет существенно отличаться от потоков в иных направлениях. В слоистой среде фильтрация в плоскости слоев и в направлении, перпендикулярном этой плоскости, также будет неодинакова. В настоящее время постоянно растут объемы добычи флюидов в пластах сложной геологической структуры. Примером могут служить Астраханское и Верхне-Салымское месторождения в России или месторождение Тенгиз в Казахстане. Эксплуатация месторождений, коллекторы которых четко проявляют анизотропию и неоднородность свойств, делает актуальным исследование новых задач математического моделирования течения флюида в таких условиях. Широкий спектр экспериментальных исследований, выполненных различными методами, как в лабораторных условиях, так и в условиях реально действующих скважин, позволяет считать анизотропию и неоднородность реальных нефтеносных (водоносных) пластов [1–3] твердо установленным научным фактом. При этом можно полагать, что проницаемость среды описывается тензором проницаемости второго ранга, который в общем случае несимметричный. В широко известной литературе, посвященной вопросам теории фильтрации, пористая среда, как правило, считается изотропной [4]. В некоторых работах рассматривается среда с ортотропной анизотропией [5–7]. Такая среда описывается симметричным тензором проницаемости. Математические модели фильтрации в искривленных анизотропно-неоднородных пластах рассмотрены и обобщены в ряде работ [8–9]. В статье поставлена плоская (двумерная) граничная задача о работе скважины в анизотропном неоднородном грунте с произвольным контуром питания. Рассматривается скважина, которая имеет проницаемые стенки (фильтр) по всей толще нефтеносного (водоносного) пласта и доходит до основания данного пласта. Такую скважину называют совершенной. Задача решена аналитически в конечном виде, когда контур питания удален в бесконечность. Для случая произвольного гладкого контура питания построена численная схема решения задачи на основе метода дискретных особенностей. В случае эллиптического контура питания специального вида задача решена двумя способами: аналитически в конечном

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, физико-математический факультет, ул. Комсомольская, д. 95, 302026, г. Орел; профессор, e-mail: PivenVF@gmail.com

² Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, физико-математический факультет, ул. Комсомольская, д. 95, 302026, г. Орел; ст. преподаватель, e-mail: lekomtcevdg@yandex.ru

виде и численным методом дискретных особенностей. Это позволяет исследовать влияние на дебит скважины анизотропии и неоднородности пласта, а также контура питания.

2. Основные уравнения. Двумерное стационарное течение в анизотропно-неоднородном пласте (слое) грунта проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ (H — толщина пласта, (K_{ij}) , $i, j = 1, 2$, — тензор его проницаемости) описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ . φ и ψ — функции декартовых координат (x, y) плоскости основания пласта удовлетворяют всюду в области D , за исключением изолированных особых точек этих функций, системе уравнений [9–10]

$$P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Система (1) относится к эллиптическому типу, если ее коэффициенты отвечают условиям

$$P_{11} > 0 \quad (P_{22} > 0), \quad D(P_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4 > 0, \quad (2)$$

где $D(P_s)$ — определитель симметричной части $P_s = (P + P^T)/2$ тензора P , $P^T = (P_{ji})$ — транспонированный тензор. Уравнения записаны в безразмерных величинах [9]. Исключая из системы функцию ψ , имеем для функции φ уравнение эллиптического типа.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

В силу сложности уравнения (3) отыскание его решения вызывает значительные трудности. Поэтому преобразуем его к наиболее простому (каноническому) виду. Введем две комплексные плоскости: физическую $z = x + iy$ и вспомогательную $\zeta = \xi + i\eta$, которые взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием

$$\zeta = \zeta(z) \quad (\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)),$$

которое удовлетворяет уравнению типа Бельтрами [9]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + \mu(z) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \left(\mu(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_s)}}, \quad |\mu(z)| < 1 \right), \quad (4)$$

где $2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$, $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$.

Рассмотрим ортотропный ($k_{12} = k_{21}$) слой с отдельной анизотропией и неоднородностью: $P = H(K_{ij}) = k\chi(z)$ ($P_{ij} = k_{ij}\chi(z)$). Положим далее $H = 1$ и $\chi(z) = y^s$ [11]. В этом случае $\mu(z)$ — комплексная постоянная и решение уравнения (4) имеет вид $\zeta = z + \mu\bar{z}$. Отсюда имеем преобразование

$$\xi = (1 + a)x + by, \quad \eta = bx + (1 - a)y \quad (5)$$

и обратное ему

$$x = \frac{(1 - a)\xi - b\eta}{1 - |\mu|^2}, \quad y = \frac{(1 + a)\eta - b\xi}{1 - |\mu|^2}, \quad (6)$$

где $a = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $b = -\frac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $|\mu|^2 = a^2 + b^2$, $\alpha = \frac{k_{22}}{k_{11}} > 0$, $\beta = \frac{k_{12}}{k_{11}}$.

Воспользуемся преобразованием координат (6), получим на плоскости ζ проводимость (проницаемость) [11]

$$P'(\zeta) = k_0 \left[\frac{(1 + a)\eta - b\xi}{1 - a^2 - b^2} \right]^s \quad (k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} > 0).$$

Перейдем на плоскость $\zeta' = \xi' + i\eta'$, которая связана с плоскостью ζ преобразованием поворота на угол ϑ_0 ($tg\vartheta_0 = b/(1 + a)$). На плоскости ζ' проводимость является функцией одного переменного η' [11]:

$$P'(\zeta') = k'_0 \eta'^s, \quad \left(k'_0 = k_0 \left[\frac{(1 + a) \cos \vartheta_0 + b \sin \vartheta_0}{1 - a^2 - b^2} \right]^s \right). \quad (7)$$

Характерной особенностью слоя проводимости (7) является наличие линии σ'_0 : $\eta' = 0$, на которой $P' = 0$, если $s > 0$ и $P' = \infty$, если $s < 0$.

Уравнение (3) на плоскости ζ принимает вид

$$\Delta\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial\xi} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi}{\partial\eta} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \tag{8}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ — оператор Лапласа. Уравнение (8) характерно для двумерных течений в изотропном неоднородном пласте проницаемости $\chi(\xi, \eta)$.

Таким образом, исследование двумерных течений в ортотропном и неоднородном пласте сводится к нахождению решений уравнения (8), а затем согласно гомеоморфизму (5) имеем искомое решение уравнения (3).

3. Фундаментальные решения. Так как слой ортотропный, то можно указать первые фундаментальные решения уравнения (8), которое моделирует работу скважины в слое проницаемости (7). Согласно [11] имеем в случае $s > 0$ и $s < 0$ первое фундаментальное решение

$$\Phi_1(\zeta', \zeta'_0) = \frac{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{2\pi k'_0(\eta'\eta'_0)^{s/2}} \quad (s > 0), \tag{9}$$

$$\Phi_1(\zeta', \zeta'_0) = \frac{k'_0(\eta'\eta'_0)^{|s|/2} Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega)}{2\pi} \quad (s < 0), \tag{10}$$

где $Q_\nu(\omega)$ — функция Лежандра второго рода степени $\nu = \frac{s}{2} - 1$ и $\nu = \frac{|s|}{2}$ аргумента $\omega = 1 + R'^2/2\eta'\eta'_0$, $R' = |\zeta' - \zeta'_0| = \sqrt{(\xi' - \xi'_0)^2 + (\eta' - \eta'_0)^2}$, которая имеет в точке $\zeta' = \zeta'_0$ ($R' = 0$, $\omega = 1$) особенность логарифмического типа, а именно, $Q_\nu(\omega) \rightarrow -\ln|\zeta' - \zeta'_0|$ при $\zeta' \rightarrow \zeta'_0$ [12].

4. Постановка задачи о дебите скважины. На контуре $\Sigma = \sigma_\Pi \cup \sigma_C$ (σ_Π — контур питания, σ_C — контур скважины) заданы давления, т.е. для обобщенного потенциала заданы граничные условия [9]

$$\varphi^+(z) = \alpha_\Pi(z), \quad z \in \sigma_\Pi, \tag{11}$$

$$\varphi(z) = \alpha_C(z), \quad z \in \sigma_C, \tag{12}$$

где $\alpha_\Pi(z)$ и $\alpha_C(z)$ — непрерывные периодические функции, здесь и далее знаком “+” отмечено предельное значение функции при подходе к контуру питания изнутри области.

Область течения может быть ограничена сингулярной линией $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, на которой проводимость (проницаемость) пласта $P = \infty$ (на части σ_{01}) и $P = 0$ (на части σ_{02}). Полагаем, что на ней выполняется условие [9].

$$\varphi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_{01}, \tag{13}$$

$$\left(P_n(z) \frac{\partial\varphi(z)}{\partial\nu_z} \right)^+ = 0, \quad z \in \sigma_{02}, \tag{14}$$

где $P_n(z) = H(z)K_n(z)$ — модуль вектора $\vec{P}_n(z)$ проводимости слоя в направлении орта \vec{n} .

Таким образом, имеем задачу по заданным условиям (11) и (12) найти решение $\varphi(z)$ уравнения (3). Это позволяет затем найти дебит скважины. На плоскости ζ' область течения D' ограничена кривой $\Sigma' = \sigma'_\Pi \cup \sigma'_C$ ($\sigma'_\Pi \cup \sigma'_C$ — контуры питания и скважины эллипсы с центром в точке ζ'_0), являющейся согласно (4) образом кривой Σ . Условия (11) и (12) на границе Σ' принимают вид

$$\varphi^+(\zeta') = \alpha'_\Pi(\zeta'), \quad \zeta' \in \sigma'_\Pi,$$

$$\varphi(\zeta') = \alpha'_C(\zeta'), \quad \zeta' \in \sigma'_C.$$

В этих условиях положим $\alpha'_\Pi = 0$, $\alpha'_C = C$ ($C = \text{const}$) и запишем

$$\varphi^+(\zeta') = 0, \quad \zeta' \in \sigma'_\Pi, \tag{15}$$

$$\varphi(\zeta') = C, \quad \zeta' \in \sigma'_C. \tag{16}$$

Условия (13) и (14) на плоскости ζ принимают вид

$$\varphi^+(\zeta') = 0, \quad \zeta' \in \sigma'_{01}, \tag{17}$$

$$\left(\eta'^s \frac{\partial \varphi(\zeta')}{\partial \eta'} \right)^+ = 0, \quad \zeta' \in \sigma'_{02}. \tag{18}$$

В частности, контур питания σ_{Π} может отсутствовать (удален в бесконечность). Течение к скважине моделируем стоком мощности q , ($q > 0$) которое описывает при отсутствии границы Σ' , обобщенный потенциал

$$\varphi_0(\zeta') = q\Phi_1(\zeta', \zeta'_0),$$

где $\Phi_1(\zeta', \zeta'_0)$ имеет вид (9) или (10).

5. Исследование дебита скважины при наличии только сингулярной линии.

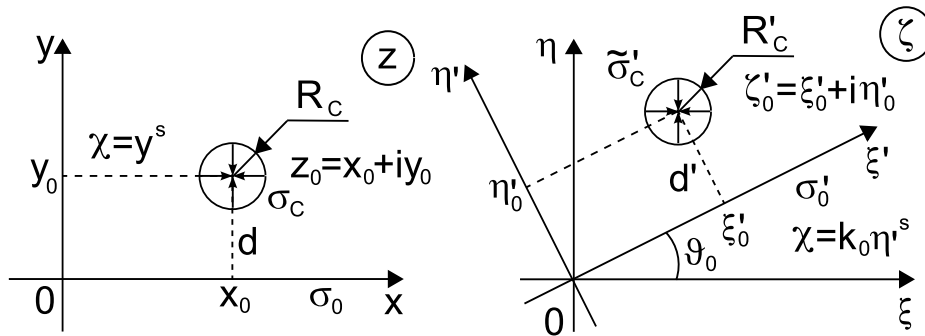


Рис. 1. Постановка задачи о дебите скважины при наличии только сингулярной линии

В случае $s > 0$ полагаем, что σ_{Π} отсутствует. Имеется сингулярная линия $\sigma_{02} : \eta' = 0, \xi \in (-\infty, \infty)$ на которой $P' = 0$. Течение к скважине описывает, удовлетворяющий условию (18), обобщенный потенциал

$$\varphi(\zeta') = \frac{qQ_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{2\pi k'_0(\eta'\eta'_0)^{s/2}}.$$

Удовлетворим $\varphi(\zeta')$ условию (16), находим дебит

$$q = \frac{2\pi k'_0 d^s C}{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}. \tag{19}$$

Здесь $Q_\nu(\omega)$ — функция Лежандра второго рода степени $\nu = \frac{s}{2} - 1$ аргумента $\omega = 1 + R'^2/2d'^2$, $d' = \frac{d(1-|\mu|^2)}{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}$ расстояние от центра скважины σ_C до сингулярной линии σ_0 , R_C — радиус скважины, $R'_C = R_C \sqrt{1-|\mu|^2}$ [13].

В случае $s < 0$, сингулярная линия $\sigma'_{01} : \eta' = 0, \xi' \in (-\infty, \infty)$, на ней выполняется условие (18): $C = 1$. Она принимается за контур питания ($\sigma'_{\Pi} = \sigma'_{01}$). Течение описывает обобщенный потенциал

$$\varphi(\zeta') = \frac{qk'_0(\eta'\eta'_0)^{|s|/2} Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega)}{2\pi}.$$

который удовлетворяет условию (15), то есть $\varphi(\zeta') = 0, \zeta' = \sigma'_{\Pi}$. Учитывая условие (16), находим дебит

$$q = \frac{2\pi C}{k'_0 d^{|s|} Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega)}. \tag{20}$$

Для исследования влияния анизотропии пласта грунта на дебит скважины введем относительный дебит

$$\varepsilon = q/q_0 - 1, \tag{21}$$

где q_0 — дебит скважины радиуса R_C с контуром питания удаленным в бесконечность, в случае изотропного неоднородного грунта со степенным законом изменения проницаемости при $s = 2$ [14]:

$$q_0 = \frac{2\pi C}{\ln\left(\frac{2d}{R_C}\right)}, \tag{22}$$

где d — расстояние от центра скважины радиуса R_C до сингулярной линии $y = 0, x \in (-\infty, \infty)$. На рис. 2 представлены зависимости относительного дебита ε от значений коэффициентов α и β при значении $s = 2$ (рисунок 2А) и $s = -2$ (рис. 2В). На рис. 2А в частном случае изотропной неоднородной среды ($\alpha = 1, \beta = 0$) график, проходит через точку $\varepsilon = 0$, т. е. в случае изотропной среды аналитическое решение (19), совпадает с результатом, получаемым по формуле (22).

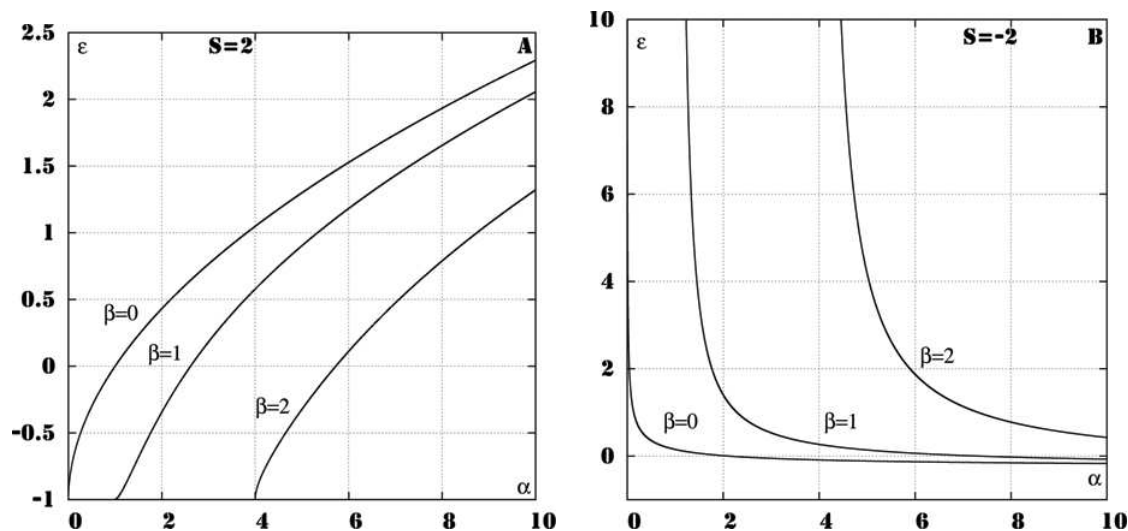


Рис. 2. Зависимости относительного дебита скважины от коэффициентов α и β при значении $s = 2$ (А) и $s = -2$ (В).

6. Исследование дебита скважины в пласте с эллиптическим контуром питания ($s = 2$). Задачу о работе скважины в анизотропном неоднородном пласте с эллиптическим контуром питания можно решить аналитически в частном случае, если тензор проводимости описывается соотношением (7), при $s = 2$ [9].

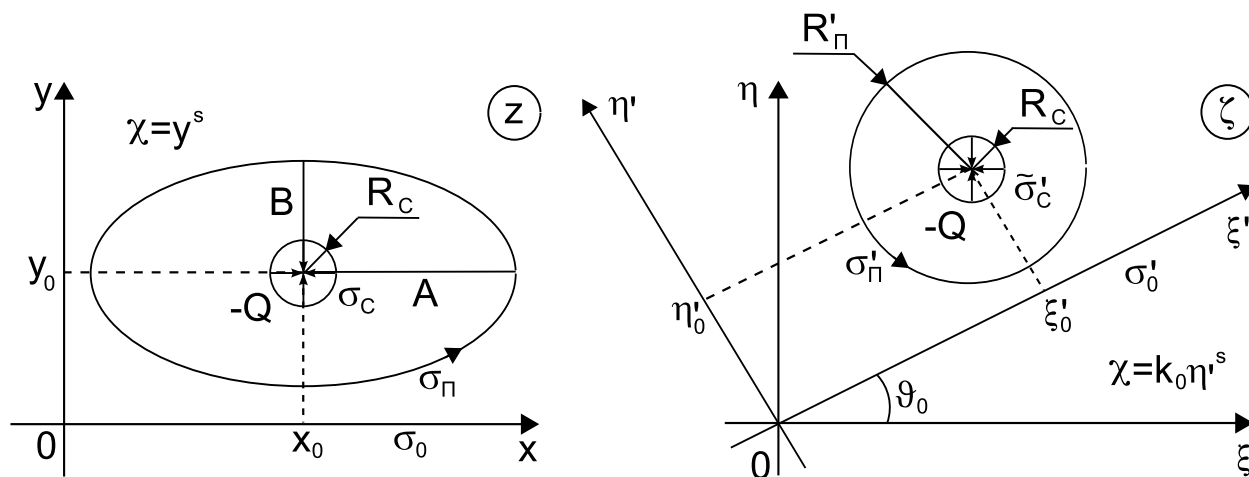


Рис. 3. Постановка задачи о дебите скважины в пласте с эллиптическим контуром питания.

На рис. 3 представлен на физической плоскости z эллиптический контур питания $\sigma_{\Pi} : x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$, который принимает на вспомогательной плоскости ζ форму окружности $\sigma'_{\Pi} : \xi'^2 + \eta'^2 = R_{\Pi}'^2$ радиуса R_{Π}' в случае, когда между полуосями A и B эллипса σ_{Π} , и компонентами тензора проницаемости $k = (k_{ij})$ выполняются следующие соотношения [15]:

$$A = \frac{R'_{\Pi}}{1 + |\mu|}, \quad B = \frac{R'_{\Pi}}{1 - |\mu|}, \quad (|\mu| = \sqrt{a^2 + b^2} < 1). \tag{23}$$

Из (23) следует, что для заданного R'_{Π} , найдется эллипс σ_{Π} с полуосями A и B ($R'_{\Pi} = R_{\Pi} \sqrt{1 - |\mu|^2}$) [13].

В случае, когда контур питания σ'_{Π} на вспомогательной плоскости ζ — окружность радиуса R'_{Π} , следуя [13], находим при $s = 2$, дебит скважины

$$q = \frac{2\pi k'_0 d'^2 C}{Q_0(\omega)}, \quad (24)$$

где $Q_0(\omega) = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega+1}{\omega-1}$, $\omega = 1 + R'_C{}^2/2d'^2$.

Следуя [9] и учитывая фундаментальное решение (9) при $s = 2$ задачу о работе скважины в анизотропном слое грунта сводим к решению системы интегрального уравнения

$$f(M) + 2 \int_{\sigma'_{\Pi}} f(N) \Omega(N, M) dl_N = -\frac{q Q_0(\omega)}{\pi k'_0 \eta' \eta'_0}, \quad (25)$$

и интегрального соотношения

$$\int_{\sigma'_{\Pi}} f(N) \Omega(N, M_0) dl_N = C + \frac{q}{2\pi \sqrt{D(K_s)}} \ln \left(R_C \sqrt{1 - |\mu|^2} \right). \quad (26)$$

Следуя [9] с учетом (9), ядро интегралов в уравнении (25) и соотношении (26) при условии $s = 2$ представим в виде:

$$\begin{aligned} \Omega(N, M) = & -\eta_M'^2 \sqrt{D(K_s)} \left[\left(\frac{(\eta'_N - \eta'_M)(R^2 + 4\eta'_N \eta'_M) + R^2(\eta'_N + \eta'_M)}{\pi(2R^2 \eta'_N \eta'_M + 8\eta_N'^2 \eta_M'^2) R^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4\pi \eta'_N \eta_M'^2} \ln \left(1 + \frac{4\eta'_N \eta'_M}{R^2} \right) \right) \dot{\eta}'_N(t_N) - \frac{(\xi'_N - \xi'_M) 4\eta'_N \eta'_M}{\pi(2R^2 \eta'_N \eta'_M + 8\eta_N'^2 \eta_M'^2) R^2} \dot{\xi}'_N(t_N) \right] \cdot \vec{n}_\tau, \end{aligned} \quad (27)$$

где $R^2 = (\xi'_N - \xi'_M)^2 + (\eta'_N - \eta'_M)^2$, $\dot{\xi}'_N(t_N)$ и $\dot{\eta}'_N(t_N)$ — производные от $\xi'_N(t_N)$ и $\eta'_N(t_N)$ по параметру t в точке $N \in \sigma'_{\Pi}$, \vec{n}_τ орт нормали контура σ'_{Π} (контур σ'_{Π} обходится против часовой стрелки)

Кривую σ'_{Π} на вспомогательной плоскости ζ зададим параметрически: $\xi'_N = \zeta'(t_N)$, $\eta'_N = \zeta'(t_N)$, $\xi'_M = \zeta'(t_M)$, $\eta'_M = \zeta'(t_M)$, t_N и t_M — значения этого параметра в точках $N \in \sigma'_{\Pi}$ и $M \in \sigma'_{\Pi}$. Получим на вспомогательной плоскости ζ множество точек $E = \{\zeta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Разобьем контур σ'_{Π} равномерно по длине, для чего интерполируем границу σ'_{Π} линейными сплайнами [15].

Решим систему (25)–(26) численно относительно функции $f(N)$ и дебита q , используя метод дискретных особенностей [16].

Заменим согласно квадратурным формулам прямоугольника интегралы в системе (25)–(26) суммами, аналогично [15]. Используя эти соотношения, перейдем к системе $n + 1$ линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$f_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \Omega_{ji} \Delta l_j = -\frac{q Q_0(\omega)}{\pi k'_0 \eta_i \eta_0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{ji} = & -\eta_j'^2 \sqrt{D(K_s)} \left[\left(\frac{(\eta'_i - \eta'_j)(R_i^2 + 4\eta'_i \eta'_j) + R_i^2(\eta'_i + \eta'_j)}{\pi(2R_i^2 \eta'_i \eta'_j + 8\eta_i'^2 \eta_j'^2) R_i^2} - \frac{1}{4\pi \eta'_i \eta_j'^2} \ln \left(1 + \frac{4\eta'_i \eta'_j}{R_i^2} \right) \right) \dot{\eta}'_j(t) - \right. \\ & \left. - \frac{(\xi'_i - \xi'_j) 4\eta'_i \eta'_j}{\pi(2R_i^2 \eta'_i \eta'_j + 8\eta_i'^2 \eta_j'^2) R_i^2} \dot{\xi}'_j(t) \right], \quad R_i^2 = (\xi'_i - \xi'_j)^2 + (\eta'_i - \eta'_j)^2, \\ & \sum_{j=1}^n f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = C + \frac{q}{2\pi \sqrt{D(K_s)}} \ln \left(R_C \sqrt{1 - |\mu|^2} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{*j} = & -\eta_j'^2 \sqrt{D(K_s)} \left[\left(\frac{(\eta'_0 - \eta'_j)(R_0^2 + 4\eta'_0 \eta'_j) + R_0^2(\eta'_0 + \eta'_j)}{\pi(2R_0^2 \eta'_0 \eta'_j + 8\eta_0'^2 \eta_j'^2) R_0^2} - \frac{1}{4\pi \eta'_0 \eta_j'^2} \ln \left(1 + \frac{4\eta'_0 \eta'_j}{R_0^2} \right) \right) \dot{\eta}'_j(t) - \right. \\ & \left. - \frac{(\xi'_0 - \xi'_j) 4\eta'_0 \eta'_j}{\pi(2R_0^2 \eta'_0 \eta'_j + 8\eta_0'^2 \eta_j'^2) R_0^2} \dot{\xi}'_j(t) \right], \quad R_0^2 = (\xi'_0 - \xi'_j)^2 + (\eta'_0 - \eta'_j)^2. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (28) и (29) методом Гаусса, находим значения функций $f_j, j = 1, 2, \dots$ и искомый дебит q . На рис. 4 представлены зависимости относительного дебита ε от значений коэффициента α при $\beta = 0$. Видно, что анизотропия грунта может сильно влиять на дебит q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к q_0). С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора $k = (k_{ij})$ (увеличение коэффициента β , коэффициент α — фиксирован) влияние анизотропии уменьшается. Общий характер хода кривых в случае неоднородной анизотропной среды со степенным законом изменения проницаемости при $s > 0$ аналогичен случаю однородной анизотропной среды [13,15].

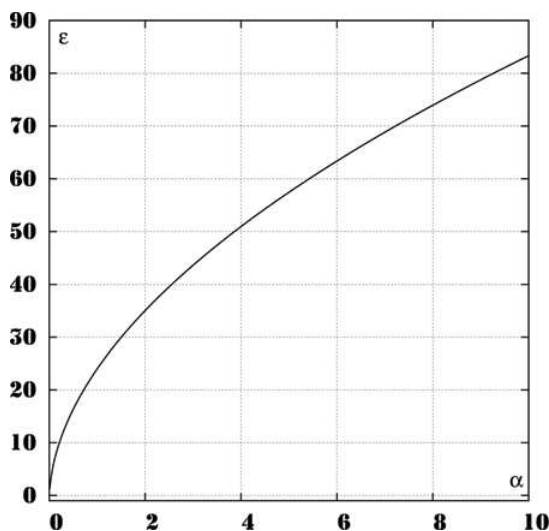


Рис. 4. Зависимости относительного дебита скважины ε с эллиптическим контуром питания от коэффициента α , при значении $s = 2, d = 5R_{\Pi}$.

Предложенную в случае произвольного гладкого контура σ_{Π} систему уравнений (28), (29) протестируем на примере, когда на плоскости ζ контур σ'_{Π} — окружность и дебит q определяется полученной формулой (24). В таблице приведены значения относительного дебита ε , полученного численным методом дискретных особенностей и аналитически по формуле (24) для значений коэффициентов $\beta = 0, \gamma = 0$ и различного значения коэффициента α и различного количества точек разбиения $n, d = 5R_{\Pi}$. Результаты, полученные численным методом дискретных особенностей, весьма быстро сходятся к значениям, найденным аналитически, с ростом количества точек разбиения n .

Тестирование численного метода решения

α	Количество точек разбиения n	Относительный дебит ε , полученный численным методом	Относительный дебит ε , полученный по формуле (24)
0,1	50	6,4406423044012378	6,4406960764141511
10	50	83,281409399500486	83,284524039905424
0,1	100	6,4406419119749592	6,4406960764141511
10	100	83,281283969531870	83,284524039905424
0,1	200	6,4406421856566578	6,4406960764141511
10	200	83,281298487750170	83,284524039905424

7. Заключение. Исследован случай двумерной задачи о работе совершенной скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта со степенным законом изменения проницаемости. В случае, если показатель степени — четное число, задача, решается аналитически. Когда контур питания — эллипс (на вспомогательной плоскости окружность) и показатель степени равен двум, то найдено аналитическое решение задачи в конечном виде. Проведенное численное моделирование показало, что результат, полученный методом дискретных особенностей весьма близок к результату, полученному аналитически. Наибольшее влияние на анизотропию грунта оказывают диагональные компоненты тензора проницаемости. Решенные задачи можно использовать в качестве тестовых при численном моделировании задач о дебите скважины в неоднородном грунте с произвольным контуром питания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов А.А. Экспериментальные исследования фильтрационных течений в анизотропных пористых средах: Автореф. дис. канд. тех. наук. М., 2007.
2. Абросимов А.А. Применение рентгеномографии для изучения фильтрационно-емкостных систем коллекторов нефти и газа // Труды РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. 2015. **281**, № 4. 5–15.
3. Adams A.L. Permeability anisotropy and resistivity anisotropy of mechanically compressed mudrocks. PhD Dissertation in Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2014.
4. Эмих В.Н. Многопараметрические краевые задачи фильтрации. Новосибирск: Гео, 2016.
5. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Москва–Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
6. Кисик F. Transient flow in elliptical systems. PhD Dissertation in Petroleum Engineering. Stanford: Stanford Univ., 1978.
7. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964.
8. Толпаев В.А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ставрополь, 2004.
9. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. Орел: Орловский гос. ун-т, 2015.
10. Пивень В.Ф. Обобщенный сингулярный интеграл Коши для граничных задач двумерных течений в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Дифференциальные уравнения. 2012. **48**, № 9. 1292–1307.
11. Пивень В.Ф. Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2017. № 1. 14–24.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
13. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 3. 69–74.
14. Аксюгин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Орел, 2000.
15. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. **9**, № 4. 389–399.
16. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995.

Поступила в редакцию
29.12.2019

Mathematical Modeling of Well Operation in the Case of Two-Dimensional Filtration in an Anisotropic Heterogeneous Layer

V. F. Piven¹ and D. G. Lekomtsev²

¹ *Turgenev Orel State University, Faculty of Physics and Mathematics; ulitsa Komsomolskaya 95, Orel, 302026, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: PivenVF@gmail.com*

² *Turgenev Orel State University, Faculty of Physics and Mathematics; ulitsa Komsomolskaya 95, Orel, 302026, Russia; Senior Lecturer, e-mail: lekomtcevdg@yandex.ru*

Received December 29, 2019

Abstract: A flat (two-dimensional) problem has been posed on the mathematical modeling of well in an anisotropic inhomogeneous reservoir of soil with separate anisotropy and heterogeneity when the power contour is arbitrary. The considered well completely opens the formation with its working part (filter). Such a well is called perfect. The permeability of the soil is characterized by a second-rank tensor whose components are modeled by a power function of the coordinates. With a homeomorphic affine transformation of coordinates, this problem is reduced to a canonical form which greatly simplifies its study. An analytical solution of the problem of well production with an elliptical power contour is obtained in the final form as well as in the case when the power contour is removed to infinity. In the general case, the problem is reduced to a system of integral equations and the integral relation. The results were obtained in the general case using the discrete singularities method. The influence on the flow rate of anisotropy, heterogeneity of the reservoir and the shape of the power contour was studied.

Keywords: filtration theory, well, porous medium, anisotropic heterogeneous reservoir, permeability tensor, well flow rate, generalized Darcy's law, singular line, elliptical power contour.

References

1. A. A. Semenov, *Experimental Study of Filtration Flows in Anisotropic Porous Media*, Candidate's Dissertation in Technical Sciences (Gubkin State University of Oil and Gas, Moscow, 2007).
2. A. A. Abrosimov, "X-Ray Tomography for Study of Oil and Gas Reservoir Systems," *Tr. Ross. Gos. Univ. Nefti i Gasa im. I.M. Gubkina* **281** (4), 5–15 (2015).
3. A. L. Adams, *Permeability Anisotropy and Resistivity Anisotropy of Mechanically Compressed Mudrocks*, PhD Thesis (Massachusetts Institute of Technology, Boston, 2014).
4. V. N. Emikh, *Multiparameter Boundary Value Problems of Filtration* (Geo, Novosibirsk, 2016) [in Russian].
5. M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media* (Edwards, Ann Arbor, 1946; Research Center "Regular and Chaotic Dynamics", Izhevsk, 2004).
6. F. Kucuk, *Transient Flow in Elliptical Systems*, PhD Thesis (Stanford Univ., Stanford, 1978).
7. R. E. Collins, *Flow of Fluids through Porous Materials* (Reinhold Publ., New York, 1961; Mir, Moscow, 1964).
8. V. A. Tolpaev, *Mathematical Models of Two-Dimensional Filtration in Anisotropic, Inhomogeneous, and Multilayered Media*, Doctoral Dissertation in Mathematics and Physics (Stavropol State Univ., Stavropol', 2004).
9. V. F. Piven', *Mathematical Models of Fluid Filtration* (Orel Gos. Univ., Orel, 2015) [in Russian].
10. V. F. Piven', "Generalized Cauchy Singular Integral for the Boundary Values of Two-Dimensional Flows in an Anisotropic-Inhomogeneous Layer of a Porous Medium," *Differ. Uravn.* **48** (9), 1292–1307 (2012) [*Differ. Equ.* **48** (9), 1272–1287 (2012)].
11. V. F. Piven', "The Study of Two-Dimensional Filtering in Anisotropic Inhomogeneous Porous Layer," *Fundamen. Prikl. Problemy Tekhn. Tekhnol.* No. 1, 14–24 (2017).
12. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1: *Hypergeometric Function, Legendre Functions* (McGraw-Hill, New York, 1953; Nauka, Moscow, 1966).
13. V. F. Piven' and D. G. Lekomtsev, "The Mathematical Modelling of Work of the Drilled Well with the Direct External Boundary of the Reservoir in the Anisotropic Bedlayer," *Uchen. Zap. Orel Gos. Univ.*, No. 3, 69–74 (2012).
14. A. A. Aksyukhin, *Mathematical Modeling of the Boundary Problems Filtering into the Well in Heterogeneous Layers of the Soil*, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Zhukovskii Aviatsion. Tekhn. Univ., Moscow, 2000).
15. V. F. Piven' and D. G. Lekomtsev, "Analytical and Numerical Modeling of the Work of a Perfect Well in Anisotropic Homogeneous Soil Formation," *Vychisl. Mekhan. Sploshnykh Sred* **9** (4), 389–399 (2016).
16. I. K. Lifanov, *Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment* (Yanus, Moscow, 1995) [in Russian].