УДК 517.958 doi 10.26089/NumMet.v21r101

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Н. Л. Гольдман[1]

Рассматриваются математические модели, связанные с изучением нестационарных процессов фильтрации в подземной гидродинамике. Они представляют собой нелинейные задачи для параболических уравнений с неизвестной функцией источника в правой части. Одна из постановок является системой, которая состоит из краевой задачи с граничными условиями первого рода и из уравнения, задающего закон изменения по времени искомой функции источника. В другой постановке соответствующая система включает в себя краевую задачу с граничными условиями второго рода. Указанные постановки существенно отличаются от обычных краевых задач для параболических уравнений. Цель исследования — установить для этих нелинейных параболических задач условия однозначной разрешимости в классе гладких функций на основе априорных оценок метода Ротэ.

Ключевые слова: параболические уравнения, краевые задачи, классы Гельдера, метод Ротэ, фильтрационные процессы.

1. Введение. Настоящее исследование связано с математическим моделированием нестационарной фильтрации слабосжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде. В соответствующих моделях подземной гидродинамики предполагается [1–4], что движение жидкости к скважине в пласте с трещиновато-пористой структурой происходит по системе трещин, а основной запас флюида содержится в пористых блоках. В частности, математическая модель нестационарной фильтрации жидкости к вертикальной скважине в круговом пласте состоит в нахождении распределения давлений в трещинах и пористых блоках [5] из следующих условий (в цилиндрической системе координат (r,t)):

$$\beta_{cr} u_t = \mu^{-1} r^{-1} \big(k(u) r u_r\big)_r + \mu^{-1}\alpha(p-u), \quad (r,t)\in Q=\{r_{bh}<r<r_{fc}, 0<t\leqslant T\}, \tag{1.1}$$

$$u(r,t)|_{r=r_{bh}} = u_{bh}, \quad u(r,t)|_{r=r_{fc}} = u_{fc}, \quad 0<t\leqslant T, \tag{1.2}$$

$$\beta_{pb} p_t = -\mu^{-1}\alpha(p-u), \quad (r,t)\in Q, \tag{1.3}$$

$$u(r,t)\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad p(r,t)\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad r_{bh}\leqslant r\leqslant r_{fc}. \tag{1.4}$$

Здесь $u(r,t)$ — давление в трещинах, $p(r,t)$ — давление в пористых блоках, β_{cr} и β_{pb} — коэффициенты упругости в трещинах и пористых блоках соответственно, r_{bh} — радиус скважины, r_{fc} — радиус контура питания, u_{bh} и u_{fc} — соответствующие распределения давлений на этих границах, $\varphi(r)$ — начальное распределение давления в пласте, μ — вязкость жидкости, α — параметр перетока жидкости между блоками и трещинами, k — коэффициент проницаемости пласта.

Известно, что фильтрационные свойства трещиновато-пористых пластов зависят от давления. Это означает, что коэффициент проницаемости в (1.1) может иметь вид $k=k(u)$. Граничные условия в системе (1.1)–(1.4) могут быть второго рода:

$$2\pi H\mu^{-1}\big(k(u) r u_r\big)\big|_{r=r_{bh}} = q(t), \quad 2\pi H\mu^{-1}\big(k(u) r u_r\big)\big|_{r=r_{fc}} = 0, \quad 0<t\leqslant T,$$

или смешанного типа:

$$2\pi H\mu^{-1}\big(k(u) r u_r\big)\big|_{r=r_{bh}} = q(t), \quad u(r,t)\big|_{r=r_{fc}} = u_{fc}, \quad 0<t\leqslant T,$$

где H — толщина пласта, $q(t)$ — дебит.

Все эти модели, возникающие при разработке нефтегазовых месторождений, можно рассматривать как нелинейные параболические задачи с неизвестной функцией источника в уравнении (1.1). Роль такой

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: nata@srcc.msu.ru

функции играет давление $p(r,t)$ в пористых блоках, уравнение (1.3) задает закон изменения $p(r,t)$ по времени.

Цель данной работы — исследовать постановки таких задач в общем виде, рассматривая каждую из них как систему, которая состоит из краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной функцией источника, а также из уравнения зависимости по времени этой искомой функции. Сложность такой системы и ее существенное отличие от обычных постановок краевых задач в [6, 7] вызывает значительные трудности при доказательстве условий существования и единственности ее решения. Исследование таких условий в классах Гельдера проводится в нашей работе с использованием метода Ротэ и априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах этих классов. Наличие таких оценок позволяет установить сходимость решений нелинейной дифференциально-разностной системы, аппроксимирующей исходную систему, к ее гладкому решению и оценить погрешность метода Ротэ. Предлагаемый в работе подход позволяет избежать дополнительных требований гладкости от входных данных, которые обычно накладываются методом Ротэ (см., например, [6]). Тем самым, для рассмотренных нелинейных параболических задач установлен точный характер дифференциальных зависимостей между входными данными и решением в выбранных функциональных пространствах.

Используемые в настоящей статье функциональные пространства определяются стандартным образом, как и в [6]. В частности, класс Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ $(0<\lambda<1)$ определяется как пространство функций $u(x,t)$, непрерывных в замкнутой области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ вместе со своими производными u_{xx} и u_t, которые удовлетворяют условию Гельдера по x и t с показателями λ и $\lambda/2$ соответственно. Пространство $O^1[0,T]$ определяется как множество непрерывных функций, имеющих ограниченную производную при $0\leqslant t\leqslant T$.

Для удобства изложения будет также использовано следующее обозначение:

$H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ — пространство функций, непрерывных при $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times[-M_0,M_0]$, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ производные по x и u и удовлетворяющих условию Гельдера по t с показателем $\lambda/2$.

Кроме того, в связи с применением метода Ротэ используются аналоги классов Гельдера для сеточных функций $\hat{u}=(u_0,\dots,u_n,\dots,u_N)$, заданных в узлах сетки $\overline{\omega}_\tau=\{t_n\}=\big\{n\tau, n=\overline{0,N}, \tau=TN^{-1}\big\}$, и для сеточно-непрерывных функций $\hat{u}(x)=\big(u_0(x),\dots,u_n(x),\dots,u_N(x)\big)$, которые заданы в следующей области: $\overline{Q}_\tau=\big\{0\leqslant x\leqslant l, t_n\in\overline{\omega}_\tau\big\}$.

Как и в [8, 9], эти аналоги определяются следующим образом:

$H_\tau^{1+\lambda/2}(\overline{\omega}_\tau)$ — аналог пространства $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ (см. [6]) для функций $\hat{u}$, имеющих конечную норму

$$\big|\hat{u}\big|_{\overline{\omega}_\tau}^{1+\lambda/2}=\max_{0\leqslant n\leqslant N}|u_n|+\max_{1\leqslant n\leqslant N}|u_{n\bar{t}}|+\big\langle\hat{u}_{\bar{t}}\big\rangle_{\overline{\omega}_\tau}^{\lambda/2},$$

$$u_{n\bar{t}}=(u_n-u_{n-1})\tau^{-1},\quad n=\overline{1,N},\quad \big\langle\hat{u}_{\bar{t}}\big\rangle_{\overline{\omega}_\tau}^{\lambda/2}=\max_{1\leqslant n<n'\leqslant N}\Big\{|u_{n\bar{t}}-u_{n'\bar{t}}||t_n-t_{n'}|^{-\lambda/2}\Big\};$$

$H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ (см. [6]) для функций $\hat{u}(x)$, непрерывных по x при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\begin{aligned}\big|\hat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}&=\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big|+\big\langle\hat{u}(x)\big\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}+\big\langle\hat{u}(x)\big\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{\lambda/2},\\ \big\langle\hat{u}(x)\big\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda}&=\sup_{(x,t_n),(x',t_n)\in\overline{Q}_\tau}\Big\{\big|u_n(x)-u_n(x')\big|\big|x-x'\big|^{-\lambda}\Big\},\\ \big\langle\hat{u}(x)\big\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{\lambda/2}&=\sup_{(x,t_n),(x,t'_n)\in\overline{Q}_\tau}\Big\{\big|u_n(x)-u_{n'}(x)\big|\big|t_n-t_{n'}\big|^{-\lambda/2}\Big\};\end{aligned}$$

$H_\tau^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{Q})$ (см. [6]) для функций $\hat{u}(x)$, непрерывных по x вместе со своими производными по x при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\hat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}=\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big|+\big|\hat{u}_x(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}+\big\langle\hat{u}(x)\big\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{(1+\lambda)/2},$$

где $\hat{u}_x(x)=\big(u_{0x}(x),\dots,u_{nx}(x),\dots,u_{Nx}(x)\big)$;

$H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — сеточно-непрерывный аналог пространства $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ для функций $\hat{u}(x)$, непрерывных по x вместе со своими производными $\hat{u}_{xx}(x)$ и $\hat{u}_{\bar{t}}(x)$ при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\hat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2}=\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big|+\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_{nx}(x)\big|+\big|\hat{u}_{xx}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2}+\big|\hat{u}_{\bar{t}}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2},$$

где $\begin{cases} \hat{u}_{xx}(x) = \big(u_{0xx}(x), \dots, u_{nxx}(x), \dots, u_{Nxx}(x)\big), \\ \hat{u}_{\bar{t}}(x) \;= \big(u_{1\bar{t}}(x), \dots, u_{n\bar{t}}(x), \dots, u_{N\bar{t}}(x)\big), \\ u_{n\bar{t}}(x) = \big(u_n(x) - u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad n = \overline{1, N}. \end{cases}$

2. Нелинейная параболическая задача с граничными условиями первого рода.

2.1. Сформулируем постановку данной задачи как систему для определения функций $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, которые удовлетворяют краевой задаче первого рода

$$c(x,t,u)u_t - Lu = f(x,t)p(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.1}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = w(t), \quad u(x,t)\big|_{x=l} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2.2}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.3}$$

и дополнительному соотношению

$$p_t(x,t) = \chi(t)p(x,t) + \gamma(x,t,u), \quad (x,t) \in Q, \quad p(x,t)\big|_{t=0} = p^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.4}$$

где равномерно эллиптический оператор Lu имеет вид

$$Lu \equiv \big(a(x,t,u)u_x\big)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)u.$$

Все входные данные в уравнении (2.1), граничных условиях (2.2), начальном условии (2.3) и в соотношении (2.4) — известные функции своих аргументов; $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $a_{\min}$, $c_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

2.2. Условия однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.4) в классе гладких функций устанавливает

Теорема 2.1. *Предположим, что*

1) *при* $(x,t) \in \overline{Q}$ *и любых* u, $|u| < \infty$, *все входные данные краевой задачи* (2.1)–(2.3) *являются равномерно ограниченными функциями своих аргументов, причем коэффициент* $a(x,t,u)$ *ограничен вместе со своими производными* $a_x(x,t,u)$ *и* $a_u(x,t,u)$, *кроме того*

$$0 < a_{\min} \leqslant a(x,t,u) \leqslant a_{\max}, \quad 0 < c_{\min} \leqslant c(x,t,u) \leqslant c_{\max};$$

2) *при* $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times \; [-M_0, M_0]$ (M_0 — *постоянная из оценки принципа максимума для краевой задачи* (2.1)–(2.3)) *функции* $a(x,t,u)$, $a_x(x,t,u)$, $a_u(x,t,u)$, $b(x,t,u)$ *и* $d(x,t,u)$ *непрерывны в смысле Гельдера по* x *и* t *с показателями* λ, $\lambda/2$ *и имеют ограниченные производные по* u; *кроме того, функции* $c(x,t,u)$ *и* $f(x,t)$ *принадлежат соответственно пространствам* $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ *и* $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$;

3) *функции* $w(t)$ *и* $v(t)$ *принадлежат* $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, *функции* $\varphi(x)$ *и* $p^0(x)$ *принадлежат соответственно* $H^{2+\lambda}[0,l]$ *и* $C^1[0,l]$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}\big|p^0(x)\big| \leqslant p^0_{\max}$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}\big|p^0_x(x)\big| \leqslant p^0_{x\max}$, $p^0_{\max}$, $p^0_{x\max} = \mathrm{const} > 0$; *выполнены условия согласования*

$$c(x,0,\varphi)w_t - L\varphi\big|_{x=0,t=0} = f(x,0)p^0(x)\big|_{x=0}, \quad c(x,0,\varphi)v_t - L\varphi\big|_{x=l,t=0} = f(x,0)p^0(x)\big|_{x=l};$$

4) *функция* $\chi(t)$ *принадлежит* $C[0,T]$, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\chi(t)| \leqslant \chi_{\max}$, $\chi_{\max} = \mathrm{const} > 0$; *функция* $\gamma(x,t,u)$ *равномерно ограничена при* $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, *и непрерывна при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *вместе со своими производными по* x *и* u; *кроме того, при* $\gamma_{\max}$, $\gamma_{x\max}$, $\gamma_{u\max} = \mathrm{const} > 0$ *выполнены неравенства*

$$\big|\gamma(x,t,u)\big| \leqslant \gamma_{\max}, \quad \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_x(x,t,u)\big| \leqslant \gamma_{x\max}, \quad \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big| \leqslant \gamma_{u\max}.$$

Тогда нелинейная система (2.1)–(2.4) *имеет единственное решение* $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$, *обладающее свойствами*

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \big|u(x,t)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}} \leqslant M, \quad M = \mathrm{const} > 0,$$

$$p(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \big|p(x,t)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}} \leqslant \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \mathrm{const} > 0.$$

Для доказательства теоремы 2.1 воспользуемся методом прямых Ротэ, разбивая область $\overline{Q}$ на слои прямыми t_n (t_n — узлы равномерной сетки $\overline{\omega}_\tau = \{t_n\} \in \; [0,T]$ с шагом $\tau = TN^{-1}$) и заменяя систему (2.1)–(2.4) дифференциально-разностной системой

$$c_n u_{n\bar{t}} - (a_n u_{nx})_x + b_n u_{nx} + d_n u_n = f_n p_n, \quad (x,t_n) \in Q_\tau = \{0 < x < l\} \times \omega_\tau, \tag{2.5}$$

$$u_n\big|_{x=0} = w_n, \quad u_n\big|_{x=l} = v_n, \quad 0 < t_n \leqslant T, \tag{2.6}$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.7}$$

$$p_{n\bar{t}} = \chi_{n-1} p_{n-1} + \gamma_{n-1}, \quad (x, t_n) \in Q_\tau, \quad p_n(x)\big|_{n=0} = p^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{2.8}$$

Эта аппроксимирующая система состоит в определении $\{u_n(x), p_n(x)\}$ (приближенных значений функций $u(x,t)$ и $p(x,t)$ при $t = t_n$) из условий (2.5)–(2.8), в которых a_n, b_n, c_n и d_n — значения соответствующих коэффициентов в точке (x, t_n, u_n), $f_n = f(x, t_n)$, $w_n = w(t_n)$, $v_n = v(t_n)$, $\chi_{n-1} = \chi(t_{n-1})$, $\gamma_{n-1} = \gamma(x, t_{n-1}, u_{n-1})$. В (2.5)–(2.8) использованы также обозначения

$$u_{n\bar{t}} = \big(u_n(x) - u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad u_{nx} = \frac{du_n(x)}{dx}, \quad p_{n\bar{t}} = \big(p_n(x) - p_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}.$$

Доказательство разрешимости исходной системы (2.1)–(2.4) методом Ротэ включает в себя несколько основных этапов.

Этап 1. Исследование дифференциально-разностной краевой задачи (2.5)–(2.7) в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ в предположении, что $p_n(x)$ — известная функция. Цель этого этапа — доказать однозначную разрешимость такой задачи и получить соответствующие априорные оценки для ее решения $u_n(x)$, не зависящие от x, τ, n.

Этап 2. Доказательство существования и единственности решения $\{u_n(x), p_n(x)\}$ дифференциально-разностной системы (2.5)–(2.8) в соответствующих функциональных пространствах на основе результатов этапа 1.

Этап 3. Предельный переход при $n \to \infty$ в условиях (2.5)–(2.8) в силу компактности семейства $\{u_n(x), p_n(x)\}$ на основе априорных оценок, полученных на этапе 2. Завершение доказательства разрешимости исходной нелинейной системы (2.1)–(2.4) в классе гладких функций.

2.3. Переходя к этим этапам, будем более подробно останавливаться лишь на тех моментах, которые связаны со спецификой рассматриваемой задачи (2.1)–(2.4). При рассмотрении же тех моментов, которые являются общими для метода Ротэ при исследовании нелинейных параболических задач, ограничимся ссылками на известные результаты.

Следующая лемма устанавливает однозначную разрешимость в $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ дифференциально-разностной краевой задачи (2.5)–(2.7) в предположении, что $p_n(x)$ в уравнении (2.5) — известная функция источника, принадлежащая $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$, $\big|\hat{p}(x)\big|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \mathrm{const} > 0$.

Лемма 2.1. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям* 1)–3) *теоремы* 2.1, *и пусть* $p_n(x)$ — *функция источника с указанными выше свойствами. Тогда дифференциально-разностная краевая задача* (2.5)–(2.7) *имеет единственное решение* $u_n(x)$ *в области* $\overline{Q}_\tau$ *при любом достаточно малом шаге* τ *сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *и для него справедливы оценки*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|u_n(x)\big| \leqslant M_0, \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|u_{nx}(x)\big| \leqslant M_1,$$

$$\big|\hat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant M_2, \quad \big|\hat{u}_x(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant M_3, \quad \big|\hat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M_4, \tag{2.9}$$

в которых $M_i > 0$ $(i = \overline{0,4})$ — *постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Утверждение леммы 2.1 основано на результатах теоремы 4.3.3 из [8, 9] об однозначной разрешимости дифференциально-разностной краевой задачи первого рода в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$. Доказательство теоремы 4.3.3 опирается на принцип Лере–Шаудера о существовании неподвижных точек вполне непрерывных преобразований (см., например, [6, 10]). Применительно к рассматриваемой задаче (2.5)–(2.7) сделаем следующие замечания.

Замечание 2.1. Постоянная M_0 из оценки принципа максимума для данной задачи имеет вид

$$M_0 = \big\{c_{\min}^{-1} f_{\max} p_{\max} T + \max(w_{\max}, v_{\max}, \varphi_{\max})\big\}\exp(K_1 T),$$

$$K_1 \geqslant (1+\varepsilon) d_{\max} c_{\min}^{-1}, \quad \varepsilon > 0\text{— произвольно}, \quad \tau \leqslant \tau_0 = \varepsilon K_1^{-1}. \tag{2.10}$$

Для получения оценки принципа максимума используются вспомогательные функции

$$\eta_n^{\pm}(x) = \pm u_n(x)(1 + K_1\tau)^{-n} + c_{\min}^{-1} f_{\max} p_{\max} t_n + \max(w_{\max}, v_{\max}, \varphi_{\max}).$$

Замечание 2.2. При получении оценки $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|u_{nx}(x)\bigr| \leqslant M_1$ для задачи (2.5)–(2.7) мы применяем дискретный аналог известного метода из [11]. Такой подход позволяет избежать дифференцирования уравнения (2.5) по x и тем самым не требует дополнительной гладкости от входных данных.

Кратко суть подхода состоит в следующем — мы используем нечетное расширение функции $u_n(x)$ в области $Q^-_\tau = \{-l < x < 0\}\times\omega_\tau$ и $Q^+_\tau = \{l < x < 2l\}\times\omega_\tau$ с последующим введением дополнительной пространственной переменной z и функции $W_n(x,z) = u_n(x) - u_n(z)$. Для этой функции устанавливается оценка $\bigl|W_n(x,z)\bigr| \leqslant M_1|x-z|$, которая приводит к искомой оценке $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|u_{nx}(x)\bigr| \leqslant M_1$ в (2.9). Постоянная $M_1 > 0$ зависит от величин M_0, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}\bigl|\varphi_x(x)\bigr|$, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\bigl|w_t(t)\bigr|$, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\bigl|v_t(t)\bigr|$ (подробнее см. лемму 4.3.5 в [8, 9]).

На этапе 2 при решении системы (2.5)–(2.8) сеточно-непрерывная функция источника $p_n(x)$ заранее не известна и ищется одновременно с $u_n(x)$. Это требует дополнительных рассуждений при доказательстве существования решения этой системы. Имеет место

Лемма 2.2. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 2.1. *Тогда в области* $\overline{Q}_\tau$ *при любом* $\tau \leqslant \tau_0$ ($\tau_0 > 0$ — *постоянная из оценки* (2.10)) *существует единственное решение* $\bigl\{u_n(x), p_n(x)\bigr\}$ *дифференциально-разностной системы* (2.5)–(2.8), *обладающее свойствами*

$$u_n(x) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau), \quad p_n(x) \in H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau),$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|p_n(x)\bigr| \leqslant p_{\max}, \quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|p_{nx}(x)\bigr| \leqslant p_{x\max}, \quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|p_{n\bar t}(x)\bigr| \leqslant p_{t\max}, \tag{2.11}$$

где
$$\begin{cases} p_{\max} = \bigl(p^0_{\max} + T\gamma_{\max}\bigr)\exp(T\chi_{\max}),\\ p_{x\max} = \bigl\{p^0_{x\max} + T(\gamma_{x\max} + \gamma_{u\max}M_1)\bigr\}\exp(T\chi_{\max}),\\ p_{t\max} = \chi_{\max}\bigl(p^0_{\max} + T\gamma_{\max}\bigr)\exp(T\chi_{\max}) + \gamma_{\max}.\end{cases}$$

Доказательство леммы 2.2. Исходя из начального момента времени $t_0 = 0$, предположим, что вплоть до момента t_j ($j = \overline{1, n-1}$) решения $\bigl\{u_j(x), p_j(x)\bigr\}$ уже найдены и соответствующие оценки для них уже установлены. Требования теоремы 2.1 относительно функций $p^0(x)$, $\gamma(x,t,u)$ и $\chi(t)$ позволяют заключить из соотношения (2.8), что при $0 \leqslant x \leqslant l$, $t = t_n$ выполнены неравенства

$$\bigl|p_n(x)\bigr| \leqslant (1+\tau\chi_{\max})\bigl|p_{n-1}(x)\bigr| + \tau\gamma_{\max} \leqslant (1+\tau\chi_{\max})^n p^0_{\max} + \sum_{j=0}^{n-1}(1+\tau\chi_{\max})^j\tau\gamma_{\max},$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|p_n(x)\bigr| \leqslant \bigl(p^0_{\max} + T\gamma_{\max}\bigr)\exp(T\chi_{\max}).$$

Кроме того, из (2.8) следует, что

$$p_{nx}(x) = (1+\tau\chi_{n-1})p_{n-1x}(x) + \tau\bigl(\gamma_{n-1x} + \gamma_{n-1u}u_{n-1x}(x)\bigr),$$

$$\bigl|p_{nx}(x)\bigr| \leqslant (1+\tau\chi_{\max})^n p^0_{x\max} + \sum_{j=0}^{n-1}(1+\tau\chi_{\max})^j\tau(\gamma_{x\max} + \gamma_{u\max}M_1),$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|p_{nx}(x)\bigr| \leqslant \bigl\{p^0_{x\max} + T(\gamma_{x\max} + \gamma_{u\max}M_1)\bigr\}\exp(T\chi_{\max}).$$

Из (2.8) нетрудно также видеть, что

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\bigl|p_{n\bar t}(x)\bigr| \leqslant \chi_{\max}p_{\max} + \gamma_{\max} \leqslant \chi_{\max}\bigl(p^0_{\max} + T\gamma_{\max}\bigr)\exp(T\chi_{\max}) + \gamma_{\max}.$$

Таким образом, оценки (2.11) при $t = t_n$ получены, так как мы предположили, что соответствующие оценки в предыдущие моменты времени t_j ($j = \overline{1, n-1}$) уже известны. Это означает, что сеточно-непрерывная функция источника $p_n(x)$, найденная из соотношения (2.8) по известным $p_{n-1}(x)$ и $u_{n-1}(x)$, принадлежит классу $H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ с нормой $\bigl|\hat p(x)\bigr|^{\lambda,\lambda/2}_{Q_\tau} \leqslant \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \leqslant p_{\max} + p_{x\max} + p_{t\max}$. Это утверждение следует из определения нормы в сеточно-непрерывном пространстве Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$.

В силу леммы 2.1 дифференциально-разностная краевая задача первого рода (2.5)–(2.7) с такой функцией источника $p_n(x)$ имеет единственное решение $u_n(x)$ в классе $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ (при любом достаточно малом шаге τ сетки $\overline{\omega}_\tau$) и для него справедливы оценки (2.9). Лемма 2.2 доказана.

Замечание 2.3. Как было указано в замечаниях 2.1 и 2.2, постоянные M_0 и M_1 в оценках (2.9) для $\big|u_n(x)\big|$ и $\big|u_{nx}(x)\big|$ зависят от величины $p_{\max}$. Это означает, что такие оценки можно получить, как только оценка для $\big|p_n(x)\big|$ установлена.

Переходя к этапу 3, заметим, что равномерные априорные оценки (2.9), (2.11) (не зависящие от x, τ и n) означают компактность семейства $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$ в соответствующих функциональных пространствах. Это позволяет, проводя обычные рассуждения при совершении предельного перехода в условиях (2.5)–(2.8) при $\tau \to 0$ (т.е. при $n \to \infty$), установить, что исходная нелинейная задача (2.1)–(2.4) имеет по крайней мере одно решение $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$, такое, что $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, $p(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$. Тем самым, доказательство ее разрешимости в классах Гельдера методом Ротэ завершено.

2.4. Покажем теперь, что решение $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ единственно в классе гладких функций

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |u, u_x, u_{xx}, u_t| < \infty, \qquad \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |p, p_x, p_t| < \infty.$$

Предположим, что при $t \in \big[0, t^0\big]$, $0 \leqslant t^0 < T$, единственность $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ уже доказана. Докажем, что тогда единственность имеет место и для $t \in \big[t^0, t^0 + \Delta t\big]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина, что позволяет за конечное число шагов исчерпать весь отрезок $[0, T]$. Допустим противное, т.е. что при $t \in \big[t^0, t^0 + \Delta t\big]$ существуют два решения системы (2.1)–(2.4): $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ и $\big\{\overline{u}(x,t), \overline{p}(x,t)\big\}$. Из (2.4) следует, что в области $\overline{Q}_{t^0} = \big\{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\big\}$ разности

$$\eta(x,t) = u(x,t) - \overline{u}(x,t), \quad \zeta(x,t) = p(x,t) - \overline{p}(x,t)$$

удовлетворяют соотношению

$$\zeta_t(x,t) = \chi(t)\zeta(x,t) + \gamma_u\big(x,t,\overline{u}\big)\eta(x,t).$$

Так как по предположению $p\big(x,t^0\big) = \overline{p}\big(x,t^0\big)$, т.е. $\zeta\big(x,t^0\big) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, то из этого соотношения можно получить представление

$$\zeta(x,t) = \int\limits_{t^0}^{t} \chi(\tau)\zeta(x,\tau)\,d\tau + \int\limits_{t^0}^{t} \gamma_u\big(x,\tau,\overline{u}(x,\tau)\big)\eta(x,\tau)\,d\tau.$$

Отсюда следует, что в области $\overline{Q}_{t^0} = \big\{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\big\}$ имеет место оценка

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| \leqslant \Delta t\,\chi_{\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| + \Delta t \gamma_{u\,\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big|. \tag{2.12}$$

Кроме того, в силу (2.1)–(2.3) разности $\eta(x,t)$ и $\zeta(x,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$c(x,t,u)\eta_t - \big(a(x,t,u)\eta_x\big)_x + \mathcal{A}_0\eta_x + \mathcal{A}_1\eta = f(x,t)\zeta(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t^0},$$

$$\eta\big|_{x=0} = 0, \quad \eta\big|_{x=l} = 0, \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t,$$

$$\eta\big(x,t^0\big) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

в которых коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят соответствующим образом от производных a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u и d_u в точке $\big(x,t,\sigma u + (1-\sigma)\overline{u}\big)$ $(0 < \sigma < 1)$. Кроме того, $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят от $u(x,t)$ и производных $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_t(x,t)$.

Все входные данные этой линейной краевой задачи первого рода равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t). Это позволяет применить принцип максимума и получить оценку

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big| \leqslant K_2 \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big|, \quad K_2 = \text{const} > 0. \tag{2.13}$$

Учитывая эту оценку, мы заключаем из (2.12), что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| \leqslant \Delta t\left(\chi_{\max} + K_2\gamma_{u\,\max}\right) \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big|.$$

Выбирая затем величину $\Delta t > 0$ из условия

$$\Delta t\,(\chi_{\max} + K_2\gamma_{u\,\max}) \leqslant 1 - \mu, \quad 0 < \mu < 1,$$

приходим к соотношению

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t0}} \big|\zeta(x,t)\big| \leqslant (1-\mu) \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t0}} \big|\zeta(x,t)\big|,$$

т.е. $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t0}} \big|\zeta(x,t)\big| = 0$. Но это означает в силу (2.13), что и $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t0}} \big|\eta(x,t)\big| = 0$. Таким образом, предположение о неединственности решения нелинейной параболической задачи (2.1)–(2.4) при $t \in \big[t^0, t^0 + \Delta t\big]$ приводит к противоречию.

Повторяя подобные рассуждения для отрезков $t \in \big[t^1, t^2\big]$ $(t^1 = t^0 + \Delta t,\ t^2 = t^1 + \Delta t)$, $t \in \big[t^2, t^3\big]$, и т.д. вплоть до конечного момента времени T, установим единственность $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ на всем отрезке $[0,T]$. Таким образом, теорема 2.1 об однозначной разрешимости исходной системы (2.1)–(2.4) в классе гладких функций доказана.

2.5. Завершая исследование данной системы, покажем, что метод Ротэ является способом получения ее приближенных решений. Чтобы оценить погрешность этого метода, рассмотрим разности

$$\omega_n(x) = u_n(x) - u(x,t_n), \quad \xi_n(x) = p_n(x) - p(x,t_n),$$

где $\big\{u(x,t_n), p(x,t_n)\big\}$ — решение исходной задачи (2.1)–(2.4) в момент времени $t = t_n$, $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$ — решение ее дифференциально-разностного аналога (2.5)–(2.8). Имеет место

Теорема 2.2. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 2.1. *Тогда при любом достаточно малом шаге τ сетки $\overline{\omega}_\tau$ для погрешности метода Ротэ справедлива оценка*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|\omega_n(x)\big| \leqslant K_3(\Psi + \psi), \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|\xi_n(x)\big| \leqslant K_4(\Psi + \psi), \tag{2.14}$$

в которой $\Psi = \max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \Psi_n(x)$, $\psi = \max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \psi_n(x)$, $\Psi_n(x)$ — погрешность аппроксимации дифференциально-разностной краевой задачи (2.5)–(2.7), *$\psi_n(x)$ — погрешность аппроксимации уравнения* (2.8), *K_3 и K_4 — положительные постоянные, не зависящие от x, t, τ и n.*

Доказательство теоремы 2.2 опускаем, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство единственности, приведенное выше в теореме 2.1. Отметим только, что оценки (2.14) устанавливаются последовательно для конечных отрезков времени $[0, t_{n_0}]$, $[t_{n_0}, t_{n_1}]$, $[t_{n_1}, t_{n_2}]$ и т.д. вплоть до конечного момента $t_N = T$. Наличие таких оценок позволяет использовать метод Ротэ для приближенного решения нелинейной параболической задачи (2.1)–(2.4) с неизвестной функцией источника. Решение этой задачи $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ можно получить как предел решения $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$ аппроксимирующей системы (2.5)–(2.8) при стремлении шага τ сетки $\overline{\omega}_\tau$ к нулю.

3. Нелинейная параболическая задача с граничными условиями второго рода.

3.1. Данная постановка отличается от системы (2.1)–(2.4) видом краевых условий

$$a(x,t)u_x\big|_{x=0} = g(t), \quad a(x,t)u_x\big|_{x=l} = q(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{3.1}$$

и предположением, что коэффициент $a = a(x,t)$. Условия однозначной разрешимости такой нелинейной параболической задачи с неизвестной функцией источника в уравнении (2.1) устанавливает

Теорема 3.1. *Предположим, что:*

1) *при $(x,t) \in \overline{Q}$ и любых u, $|u| < \infty$, все входные данные соответствующей задачи для уравнения* (2.1) *с краевыми условиями* (3.1) *являются равномерно ограниченными функциями своих аргументов, причем коэффициент $a(x,t)$ ограничен вместе со своими производными $a_x(x,t)$ и $a_t(x,t)$, кроме того $a_x(x,t)$ и $f(x,t)$ принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, $0 < a_{\min} \leqslant a(x,t) \leqslant a_{\max}$, $0 < c_{\min} \leqslant c(x,t,u) \leqslant c_{\max}$;*

2) *при $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ (M_0 — постоянная из оценки принципа максимума для краевой задачи* (2.1), (3.1), (2.3)) *функции $b(x,t,u)$ и $d(x,t,u)$ непрерывны в смысле Гельдера по x и t с показателями λ, $\lambda/2$ и имеют ограниченные производные по u; кроме того, функция $c(x,t,u)$ принадлежит $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$;*

3) *функции $\varphi(x)$, $g(t)$ и $q(t)$ принадлежат соответственно $H^{2+\lambda}[0,l]$ и $O^1[0,l]$, выполнены условия согласования $a(x,0)\varphi_x|_{x=0} = g(0)$, $a(x,0)\varphi_x|_{x=l} = q(0)$;*

4) *функции $p^0(x)$ и $\chi(t)$ принадлежат соответственно $C^1[0,l]$ и $C[0,T]$,*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l}\big|p^0(x)\big| \leqslant p^0_{\max}, \quad \max_{0\leqslant x\leqslant l}\big|p^0_x(x)\big| \leqslant p^0_{x\,\max}, \quad \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|\chi(t)\big| \leqslant \chi_{\max},$$

где $p^0_{\max}$, $p^0_{x\max}$, $\chi_{\max} = \text{const} > 0$; *функция* $\gamma(x,t,u)$ *равномерно ограничена при* $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, *и непрерывна при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *вместе со своими производными по* x *и* u,

$$\big|\gamma(x,t,u)\big| \leqslant \gamma_{\max}, \quad \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_x(x,t,u)\big| \leqslant \overline{\gamma}_{x\max}, \quad \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big| \leqslant \overline{\gamma}_{u\max},$$

где $\gamma_{\max}$, $\overline{\gamma}_{x\max}$, $\overline{\gamma}_{u\max} = \text{const} > 0$.

Тогда данная нелинейная параболическая задача имеет единственное решение $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$, *обладающее свойствами*

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad p(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),$$
$$\big|u(x,t)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}} \leqslant \overline{M}, \quad \big|p(x,t)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}} \leqslant \overline{\mathcal{M}}, \quad \overline{M}, \overline{\mathcal{M}} = \text{const} > 0.$$

Это решение является пределом решения $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$ *соответствующей аппроксимирующей дифференциально-разностной системы при стремлении шага* τ *сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *к нулю.*

3.2. Ограничимся изложением схемы доказательства теоремы 3.1, так как оно проводится по аналогии с доказательством соответствующих утверждений теоремы 2.1. Разрешимость исходной нелинейной системы с граничными условиями (3.1) устанавливается с помощью дифференциально-разностной аппроксимации этой системы, которая отличается от (2.5)–(2.8) видом граничных условий

$$a_n u_{nx}\big|_{x=0} = g_n, \quad a_n u_{nx}\big|_{x=l} = q_n, \quad 0 < t_n \leqslant T, \tag{3.2}$$

где $a_n = a(x,t_n)$, $g_n = g(t_n)$, $q_n = q(t_n)$.

Исследование этой аппроксимирующей системы включает в себя несколько этапов, аналогичных этапам для системы (2.5)–(2.8). Рассматривая соответствующий этап 1, мы учитываем специфические свойства граничных условий (3.2). При доказательстве однозначной разрешимости в классе $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ для дифференциально-разностной краевой задачи второго рода мы предполагаем, что функция источника $p_n(x)$ в уравнении (2.5) задана и обладает свойствами

$$p_n(x) \in H^{\lambda,\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau), \quad \big|\hat{p}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{Q_\tau} \leqslant \overline{\mathcal{M}}, \quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|p_n(x)\big| \leqslant p_{\max},$$

где $\overline{\mathcal{M}} = \text{const} > 0$, $p_{\max} = \text{const} > 0$.

Лемма 3.1. *Предположим, что выполнены требования* 1)–3) *теоремы* 3.1 *и функция источника* $p_n(x)$ *обладает указанными выше свойствами. Тогда при любом достаточно малом шаге* τ *сетки* $\overline{\omega}_\tau$ *дифференциально-разностная краевая задача с условиями* (3.2) *имеет единственное решение* $u_n(x)$ *в классе* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ *и для него справедливы оценки*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big| \leqslant \overline{M}_0, \quad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_{nx}(x)\big| \leqslant \overline{M}_1,$$
$$\big|\hat{u}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant \overline{M}_2, \quad \big|\hat{u}_x(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant \overline{M}_3, \quad \big|\hat{u}(x)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau} \leqslant \overline{M}_4, \tag{3.3}$$

в которых $\overline{M}_i > 0$ $(i = \overline{0,4})$ — *постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Утверждение леммы 3.1 основано на результатах теоремы 1 из [12], которые мы применяем соответствующим образом к соотношениям (2.5), (3.2), (2.7). Доказательство этой теоремы об однозначной разрешимости дифференциально-разностной краевой задачи второго рода в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ использует принцип Лере–Шаудера о существовании неподвижных точек вполне непрерывных преобразований. Для применения этого принципа необходимо получить априорные оценки для $u_n(x)$ в классе $H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$. Для рассматриваемой нелинейной задачи (2.5), (3.2), (2.7) сделаем следующие замечания.

Замечание 3.1. Постоянная $\overline{M}_0$ из оценки принципа максимума для данной задачи имеет вид

$$\overline{M}_0 = K_6 T \exp(K_5 T) + K_7 l\left(1 + \frac{l}{4}\right), \tag{3.4}$$

где K_5, K_6, K_7 — положительные постоянные,

$$K_5 \geqslant (1+\varepsilon) d_{\max} c^{-1}_{\min}, \quad \tau \leqslant \tau_0 = \varepsilon K_5^{-1}, \quad \varepsilon > 0 \text{ — произвольно},$$
$$K_6 \geqslant c^{-1}_{\min}\left\{ f_{\max} p_{\max} + 2K_7 a_{\max} + K_7 l\left(a_{x\max} + b_{\max} + \left(1 + \frac{l}{4}\right) d_{\max}\right)\right\},$$
$$K_7 \geqslant \max\left(l^{-1}\varphi_{\max},\, l^{-1} a^{-1}_{\min} g_{\max},\, l^{-1} a^{-1}_{\min} q_{\max}\right).$$

Для получения оценки принципа максимума используются вспомогательные функции (подробнее см. лемму 1 в [12])

$$\eta_n^{\pm}(x) = (1+K_5\tau)^{-n}\left\{u_n(x) \pm K_7\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 \pm K_7 l\right\} \pm K_6 t_n.$$

Замечание 3.2. Для получения априорной оценки $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_{nx}(x)\big| \leqslant \overline{M}_1$ для задачи (2.5), (3.2), (2.7) мы применяем подход, предложенный в [12]. Такой подход позволяет избежать дифференцирования уравнения (2.5) по x и тем самым не требует дополнительной гладкости от входных данных. Изложим кратко суть подхода, для подробностей см. лемму 2 из [12].

Выполняется замена

$$\vartheta_n(x) = u_n(x) - x^2\psi_n^l + (x-l)^2\psi_n^0, \quad (x,t_n)\in\overline{Q}_\tau,$$
$$\psi_n^0 = g_n\Big(2la_n\big|_{x=0}\Big)^{-1}, \quad \psi_n^l = q_n\Big(2la_n\big|_{x=l}\Big)^{-1}, \quad n=\overline{1,N},$$

которая сводит граничные условия (3.2) при $x=0$ и $x=l$ к однородным

$$\vartheta_{nx}(x) = u_{nx}(x) - 2x\psi_n^l + 2(x-l)\psi_n^0, \quad \vartheta_{nx}(x)\big|_{x=0} = 0, \quad v_{nx}(x)\big|_{x=l} = 0.$$

Далее используется четное расширение функции $\vartheta_n(x)$ в области $Q_\tau^- = \{-l<x<0\}\times\omega_\tau$ и $Q_\tau^+ = \{l<x<2l\}\times\omega_\tau$ с последующим введением дополнительной пространственной переменной z и функции $W_n(x,z) = \vartheta_n(x) - \vartheta_n(z)$. Рассуждения, проведенные в лемме 2 [12], позволяют получить оценку $|W_n(x,z)| \leqslant \overline{M}_1|x-z|$, которая ведет к оценке производной $\vartheta_{nx}(x)$, а тем самым и к искомой оценке для $\max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_{nx}(x)\big| \leqslant \overline{M}_1$ в (3.3). Постоянная $\overline{M}_1$ зависит от величин $\overline{M}_0$, $p_{\max}$, $\varphi_{x\max}$, $g_{\max}$, $q_{\max}$.

Отметим, что благодаря предложенному в [12] подходу величина $\overline{M}_1$ не зависит от оценки производной $\big|p_{nx}(x)\big|$ в $\overline{Q}_\tau$.

На следующем этапе 2 доказательство теоремы 3.1 связано с исследованием аппроксимирующей системы с граничными условиями (3.2) для определения решения $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$. Имеет место

Лемма 3.2. *Предположим, что входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 3.1. *Тогда в области* $\overline{Q}_\tau$ *при любом* $\tau \leqslant \tau_0$ ($\tau_0 > 0$ *— постоянная из оценки* (3.4)) *существует единственное решение* $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$ *соответствующей дифференциально-разностной системы с граничными условиями* (3.2), *которое обладает свойствами*

$$u_n(x) \in H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau), \quad p_n(x) \in H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau),$$
$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|p_n(x)\big| \leqslant p_{\max}, \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|p_{nx}(x)\big| \leqslant \overline{p}_{x\max}, \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|p_{n\overline{t}}(x)\big| \leqslant p_{t\max}, \tag{3.5}$$

где $p_{\max}$, $\overline{p}_{x\max}$, $p_{t\max}$ *— положительные постоянные, не зависящие от* x, τ *и* n.

Доказательство леммы 3.2 повторяет доказательство леммы 2.2 с использованием соответствующих априорных оценок леммы 3.1. В частности, значения постоянных в оценке (3.5) определяются подобно получению аналогичных постоянных в лемме 2.2. Наличие оценок (3.5) для $p_n(x)$ означает, что такая функция источника в уравнении (2.5), найденная из соотношения (2.8) по известным $p_{n-1}(x)$ и $u_{n-1}(x)$, принадлежит классу $H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ с нормой $\big|\hat{p}(x)\big|_{Q_\tau}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant \overline{\mathcal{M}}$, где $\overline{\mathcal{M}} \leqslant p_{\max} + \overline{p}_{x\max} + p_{t\max}$.

Но тогда в силу леммы 3.1 дифференциально-разностная краевая задача второго рода, соответствующая этой функции источника, имеет единственное решение $u_n(x)$ в классе $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$, для которого справедливы оценки (3.3).

Замечание 3.3. Мы уже указывали в замечаниях 3.1 и 3.2, что постоянные $\overline{M}_0$ и $\overline{M}_1$ в оценках (3.3) для $\big|u_n(x)\big|$ и $\big|u_{nx}(x)\big|$ зависят от величины $p_{\max}$. Это означает, что эти оценки можно получить, как только оценка $\big|p_n(x)\big| \leqslant p_{\max}$ установлена.

Равномерные априорные оценки (3.3) и (3.5) (не зависящие от x, τ, n) позволяют заключить, что семейство $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$ компактно в соответствующих функциональных пространствах. Это дает возможность на последнем этапе обоснования метода Ротэ совершить предельный переход при $\tau \to 0$ (т.е. при $n \to \infty$) в соотношениях (2.5), (3.2), (2.7) и (2.8). Тем самым, проводя обычные рассуждения, мы показываем, что исходная нелинейная система с граничными условиями второго рода (3.1) имеет по крайней мере одно решение $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$, такое, что $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, $p(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$.

Для завершения доказательства теоремы 3.1 покажем, что такое решение единственно в классе гладких функций. Этот результат устанавливается (по аналогии с соответствующим результатом о единственности в теореме 2.1) последовательно для конечных отрезков времени, исчерпывая весь отрезок $[0,T]$. Используя принцип от противного, мы предполагаем, что при $t \in \big[t^0, t^0+\Delta t\big]$ существуют два решения: $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ и $\big\{\overline{u}(x,t), \overline{p}(x,t)\big\}$. Соответствующая линейная краевая задача второго рода для разностей

$$\eta(x,t) = u(x,t) - \overline{u}(x,t), \quad \zeta(x,t) = p(x,t) - \overline{p}(x,t)$$

имеет в области $\overline{Q}_{t^0} = \big\{0 \leqslant x \leqslant l,\ t^0 \leqslant t \leqslant t^0+\Delta t\big\}$ следующий вид:

$$c(x,t,u)\eta_t - \big(a(x,t)\eta_x\big)_x + \mathcal{A}_0\eta_x + \mathcal{A}_1\eta = f(x,t)\zeta(x,t), \quad (x,t)\in Q_{t^0},$$

$$a(x,t)\eta_x\big|_{x=0} = 0, \quad a(x,t)\eta_x\big|_{x=l} = 0, \quad t^0 < t \leqslant t^0+\Delta t,$$

$$\eta(x,t^0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где все входные данные равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t). Это позволяет применить принцип максимума и получить оценку [6]

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big| \leqslant K_8\Delta t \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big|, \quad K_8 = \mathrm{const} > 0.$$

Кроме того, из (2.4) следует оценка, аналогичная оценке (2.12):

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| \leqslant \Delta t\,\chi_{\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| + \Delta t\,\overline{\gamma}_{u\max} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big|.$$

По аналогии с доказательством единственности в теореме 2.1 выбираем величину Δt из условия

$$\Delta t\,(\chi_{\max} + K_8\overline{\gamma}_{u\max}) \leqslant 1-\mu, \quad 0<\mu<1,$$

и приходим к выводу, что $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| = 0$, $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big| = 0$. Таким образом, предположение о неединственности решения при $t\in\ [t^0, t^0+\Delta t]$ приводит к противоречию.

Повторение подобных рассуждений последовательно для конечных отрезков времени позволяет установить единственность гладкого решения $\big\{u(x,t), p(x,t)\big\}$ на всем отрезке $[0,T]$. Таким образом, теорема 3.1 об однозначной разрешимости нелинейной параболической задачи с краевыми условиями второго рода доказана.

3.3. Покажем, что метод Ротэ может рассматриваться как способ получения приближенных решений данной нелинейной задачи. Для этого необходимо оценить разности

$$\omega_n(x) = u_n(x) - u(x,t_n), \quad \xi_n(x) = p_n(x) - p(x,t_n),$$

где $\big\{u(x,t_n), p(x,t_n)\big\}$ — решение исходной задачи с краевыми условиями (3.1) в момент времени $t=t_n$, $\big\{u_n(x), p_n(x)\big\}$ — решение ее дифференциально-разностного аналога с краевыми условиями (3.2). Имеет место аналогичная теореме 2.2

Теорема 3.2. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 3.1. *Тогда для погрешности метода Ротэ при любом достаточно малом шаге τ сетки $\overline{\omega}_\tau$ справедлива оценка*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|\omega_n(x)\big| \leqslant K_9(\Psi+\psi), \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|\xi_n(x)\big| \leqslant K_{10}(\Psi+\psi), \tag{3.6}$$

в которой $\Psi = \max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \Psi_n(x)$, $\psi = \max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \psi_n(x)$, $\Psi_n(x)$ *— погрешность аппроксимации дифференциально-разностной краевой задачи второго рода* (2.5), (3.2), (2.7), $\psi_n(x)$ *— погрешность аппроксимации уравнения* (2.8), K_9 *и* K_{10} *— положительные постоянные, не зависящие от* x, t, τ *и* n.

Доказательство теоремы 3.2 повторяет с соответствующими модификациями доказательство единственности решения, приведенное выше. Оценки (3.6) устанавливаются последовательно для конечных отрезков времени вплоть до конечного момента $t_N = T$. Наличие таких оценок позволяет использовать изложенную схему метода Ротэ как конструктивный способ приближенного решения нелинейной параболической задачи с неизвестной функцией источника в случае граничных условий второго рода.

4. Заключение. В настоящей статье исследованы математические постановки общего вида для моделей, которые возникают при изучении нестационарных процессов фильтрации в подземной гидродинамике. В частности, такие модели связаны с движением жидкости в трещиновато-пористых средах.

Каждая из рассмотренных постановок представляет собой систему, которая состоит из краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной функцией источника, а также из уравнения зависимости этой функции от времени. Цель проведенного исследования — обосновать постановки таких нелинейных параболических задач в классе гладких функций, учитывая их существенное отличие от обычных постановок краевых задач для параболических уравнений.

Основной результат, полученный в работе, — доказаны условия однозначной разрешимости в классах Гельдера для рассмотренных постановок в случае граничных условий первого и второго рода. Обоснование этого результата для каждой такой постановки связано с исследованием соответствующей нелинейной дифференциально-разностной системы, которая аппроксимирует исходную систему методом прямых Ротэ. Предложен подход к получению априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера, не требующий дополнительной гладкости от входных данных (которые обычно накладываются методом Ротэ). Тем самым, в работе установлен точный характер дифференциальных зависимостей между входными данными и решением для рассмотренных математических постановок параболических задач. Эти зависимости аналогичны зависимостям в классах Гельдера для краевых задач в случае квазилинейных параболических уравнений с заданными функциями источника, установленными в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и механ. 1960. **24**, № 5. 852–864.
2. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
3. *Губайдуллин Д.А., Садовников Р.В.* Применение параллельных алгоритмов для решения задачи фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте к скважинам со сложной траекторией // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**. 244–251.
4. *Черный Г.Г.* Избранные труды. М.: Наука, 2009.
5. *Хайруллин М.Х., Абдуллин А.И., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н.* Численное решение коэффициентной обратной задачи для деформируемого трещиновато-пористого пласта // Матем. моделирование. 2008. **20**, № 11. 35–40.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
8. *Gol'dman N.L.* Inverse Stefan problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
9. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
11. *Кружков С.Н.* Априорные оценки производной решения параболического уравнения // Вестник Моск. ун-та, сер. матем. и механ. 1967. **30**, № 2. 41–48.
12. *Gol'dman N.L.* Boundary value problems for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient // J. Differ. Equations. 2019. **266**, N 8. 4925–4952.

Поступила в редакцию
9.11.2019

Study of Some Mathematical Models for Nonstationary Filtration Processes

N. L. Gol'dman[1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: nata@srcc.msu.ru*

Received November 9, 2019

Abstract: We consider some mathematical models connected with the study of nonstationary filtration processes in underground hydrodynamics. These models involve nonlinear problems for parabolic equations with unknown source functions. One of the problems is a system consisting of a boundary value problem of the first kind and an equation describing a time dependence of the sought source function. In the other problem, the corresponding system is distinguished from the first one by boundary conditions of the second kind. These problems essentially differ from usual boundary value problems for parabolic equations. The aim of our study is to establish conditions of unique solvability in a class of smooth functions for the considered nonlinear parabolic problems. The proposed approach involves the proof of *a priori* estimates for the Rothe method.

Keywords: parabolic equations, boundary value problems, Hölder spaces, Rothe method, filtration processes.

References

1. G. I. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, and I. N. Kochina, “Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks,” Prikl. Mat. Mekh. **24** (5), 852–864 (1960) [J. Appl. Math. Mech. **24** (5), 1286–1303 (1960)].

2. G. I. Barenblatt, V. M. Entov, and V. M. Ryzhik, *Theory of Fluid Flows through Natural Rocks* (Nedra, Moscow, 1984; Kluwer, Dordrecht, 1990).

3. D. A. Gubaidullin and R. V. Sadovnikov, “Application of Parallel Algorithms for Solving the Problem of Fluid Flow to Wells with Complicated Configurations in Fractured Porous Reservoirs,” Vychisl. Metody Programm. **8**, 244–251 (2007).

4. G. G. Chernyi, *Selected Works* (Nauka, Moscow, 2009) [in Russian].

5. M. H. Khairullin, A. I. Abdullin, P. E. Morozov, and M. N. Shamsiev, “The Numerical Solution of the Inverse Problem for the Deformable Porous Fractured Reservoir,” Mat. Model. **20** (11), 35–40 (2008).

6. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; AMS Press, Providence, 1968).

7. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964; Mir, Moscow, 1968).

8. N. L. Gol’dman, *Inverse Stefan Problems* (Kluwer, Dordrecht, 1997).

9. N. L. Gol’dman, *Inverse Stefan Problems. Theory and Methods of Solution* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1999) [in Russian].

10. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1977; Pergamon, New York, 1982).

11. S. N. Kruzhkov, “A Priori Estimate for the Derivative of a Solution to a Parabolic Equation,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 2, 41–48 (1967).

12. N. L. Gol’dman, “Boundary Value Problems for a Quasilinear Parabolic Equation with an Unknown Coefficient,” J. Differ. Equations **266** (8), 4925–4952 (2019).