

УДК 536.24, 519.63

doi 10.26089/NumMet.v20r438

О ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕННОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

С. И. Мартыненко^{1,2}

Рассмотрено влияние малых возмущений границы области на погрешность аппроксимации модельной краевой задачи. Показано, что игнорирование малых возмущений границы приводит к дополнительной погрешности аппроксимации исходной дифференциальной задачи, не связанной с шагом сетки. Полученные результаты представляют интерес для математического моделирования сопряженного теплообмена, моделирования течений с поверхностными химическими реакциями и других приложений, связанных с течениями рабочих сред вблизи шероховатых поверхностей.

Ключевые слова: сопряженный теплообмен, вычислительная гидродинамика, математическое моделирование, шероховатость.

1. Введение. Совместный процесс переноса теплоты теплопроводностью и конвекцией в движущейся жидкости или газе называют конвективным теплообменом. Математическое описание конвективного теплообмена основывается на законах сохранения массы, импульса, энергии, характеристик турбулентности и физических представлениях о свойствах используемой сплошной среды (жидкости или газа). Наиболее распространенные математические модели конвективного теплообмена состоят из осредненных по Рейнольдсу или Фавру уравнений Навье–Стокса, двухпараметрической субмодели турбулентности, уравнения энергии и уравнения состояния сплошной среды с соответствующими условиями однозначности [1–5].

В приложениях, как правило, необходимо моделировать конвективный теплообмен совместно с теплопроводностью в омываемых твердых телах. Такой теплообмен называют сопряженным, а условия на омываемой поверхности раздела “твердое тело–жидкость/газ” называют условиями теплового сопряжения. Такие условия нельзя задать заранее, так как они зависят от всех отдельных процессов теплообмена как в сплошной среде, так и в твердом теле. Как правило, условия теплового сопряжения могут быть заданы в виде равенства температур на омываемых поверхностях, а в случае отсутствия на поверхностях раздела тепловыделения за счет внутренних источников — в виде равенства тепловых потоков, описываемых законом Фурье [1–5].

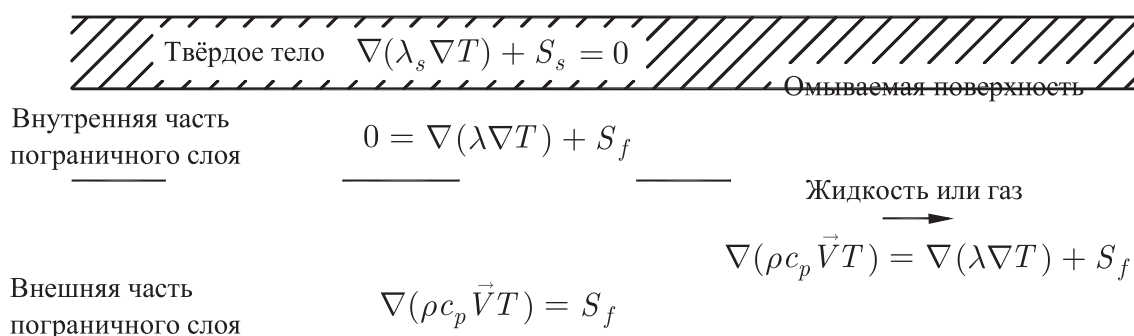


Рис. 1. Основопологающие уравнения сопряженного теплообмена

Для наглядности рассмотрим математическую модель стационарного сопряженного конвективного теплообмена при охлаждении пластины потоком жидкости (рис. 1). Распространение тепла в пластине описывается уравнением теплопроводности

$$\nabla(\lambda_s \nabla T) + S_s = 0, \quad (1)$$

¹ Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова, ул. Авиамоторная, 2, 111116, Москва; науч. сотр., e-mail: Martynenko@ciam.ru

² Институт проблем химической физики РАН, просп. Семенова, д. 1, 142432, Московская область, г. Черноголовка; ст. науч. сотр., e-mail: Martynenko@icp.ac.ru

где T — температура, λ_s — коэффициент теплопроводности и S_s — источниковый член. Нижний индекс s указывает на принадлежность к твердому (омываемому) телу (solid). Распространение тепла в потоке жидкости или газа описывается уравнением энергии

$$\nabla(\rho c_p \vec{V}T) = \nabla(\lambda \nabla T) + S_f, \tag{2}$$

где ρ , c_p и λ — плотность, удельная теплоемкость при постоянном давлении и (эффективный) коэффициент теплопроводности сплошной среды; \vec{V} — вектор скорости, а S_f — источниковый член. Нижний индекс f указывает на принадлежность к жидкости или газу (fluid).

В непосредственной близости от омываемой поверхности преобладает теплопроводность, т.е.

$$|\nabla(\rho c_p \vec{V}T)| \ll |\nabla(\lambda \nabla T)|,$$

поскольку на поверхности $\vec{V} = 0$ в силу условий прилипания и непротекания, а на достаточном удалении от омываемой поверхности преобладает конвективный перенос, т.е.

$$|\nabla(\rho c_p \vec{V}T)| \gg |\nabla(\lambda \nabla T)|.$$

Ранее уравнение энергии рассматривали как сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение с частными производными, причем допущения физического характера позволяли построить упрощенные математические модели сопряженного теплообмена [4, 7, 9, 12]. Безразмерное уравнение энергии содержит малый параметр при старшей производной (число Пекле), поэтому его решение (температура) сильно изменяется возле омываемых поверхностей, т.е. имеет особенность типа пограничного слоя. Следует заметить, что важнейшие характеристики технических устройств, такие как интенсивность теплообмена и гидравлическое сопротивление, во многом определяются физическими процессами, протекающими во внутренней части пограничного слоя (рис. 1). Граница между внутренней и внешней частями пограничного слоя является условной.

С вычислительной точки зрения особенности задач сопряженного теплообмена в виде условия теплового сопряжения, пограничного слоя и нелинейной зависимости теплофизических свойств веществ от температуры (и давления) требуют разработки специальных численных методов, что осложняет вычислительный алгоритм и существенно увеличивает объем вычислительной работы. В последнее время наблюдается устойчивая тенденция к применению схем высокого порядка аппроксимации для численного решения задач сопряженного теплообмена. Однако во многих работах пренебрегают влиянием шероховатости омываемых поверхностей как на выбор компонентов вычислительного алгоритма, так и на точность полученных результатов.

Результаты физических экспериментов указывают на наличие двух режимов турбулентного течения вблизи твердых поверхностей. В первом случае высота выступов шероховатости меньше характерной толщины вязкого подслоя, поэтому потери напора по длине оказываются не зависящими от шероховатости омываемых поверхностей. Во втором случае выступы не покрываются полностью вязким подслоем и воздействуют на турбулентное ядро потока. Обтекание жидкостью или газом выступов становится отрывным, и пульсации как скорости, так и температуры у стенки заметно увеличиваются [6, 7]. Это приводит к возрастанию сопротивления и теплоотдачи. Особыми исследованиями было установлено, что толщина вязкого подслоя уменьшается с увеличением числа Рейнольдса, поэтому одна и та же стенка в одних условиях (при малых Re) может быть “гладкой”, а в других условиях (при больших Re) может быть “шероховатой” [11].

Цель настоящей статьи состоит в оценке влияния шероховатости стенок на аппроксимацию уравнения энергии и погрешность результатов математического моделирования.

2. Постановка задачи. Нелинейность уравнения теплопроводности (1) и энергии (2), обусловленная зависимостью теплофизических свойств веществ от температуры (и давления), не позволяет выполнить достаточно полный и точный анализ исходной задачи. Поэтому естественно предположить, что теплофизические свойства вещества являются постоянными и источниковые члены равны нулю: $S_s = S_f = 0$. Кроме того, рассмотрение процессов во внутренней части пограничного слоя позволяет допустить, что скорость среды равна нулю: $\vec{V} = 0$. В результате уравнение энергии (2) сводится к уравнению Лапласа, которое будет основой для анализа.

Положим, что область Ω_ε ограничена прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ и функцией $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = 1 + \varepsilon \sin(2\pi kx), \tag{3}$$

где ε — малый параметр ($0 \leq \varepsilon \ll 1$) и k — некоторое целое число ($k \gg 1$). При $\varepsilon = 0$ область $\Omega_\varepsilon = \Omega_0$ является единичным квадратом, что соответствует гладкой омываемой поверхности.

Функция $\Psi(x)$ будет имитировать эквивалентную шероховатость, где ε — высота микронеровностей и глубина микровпадин относительно средней линии $y = 1$. Напомним, что эквивалентная шероховатость — это условная, постоянная по длине поверхности шероховатость, образованная выступами одинаковой высоты, при которой потери энергии потока на трение будут теми же самыми, что и при заданной реальной шероховатости с выступами различной величины.

Задача состоит в отыскании решения уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{1}{\Psi(x)} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\Psi'(\bar{x})}{\Psi^2(\bar{x})} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\Psi'(\bar{x})}{\Psi^2(\bar{x})} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{y} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \bar{x}} \right) + \\ + \Psi(\bar{x}) \left(\frac{\Psi'(\bar{x})}{\Psi^2(\bar{x})} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{y}^2 \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \bar{y}} \right) + \Psi(\bar{x}) \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \bar{y}^2} = 0, \end{aligned} \quad (4a)$$

если искомая функция $w_\varepsilon(x, y)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$w_\varepsilon(0, y) = w_\varepsilon(1, y) = w_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad w_\varepsilon(x, \Psi(x)) = \phi(x). \quad (4b)$$

Выбор дифференциального уравнения в виде (4a) обусловлен исключительно удобством теоретического анализа. Из совокупности всех процессов, протекающих в пограничном слое, будет рассмотрен только тепловой погранслой. Целью анализа является оценка влияния параметра ε на погрешность численного решения задачи (4).

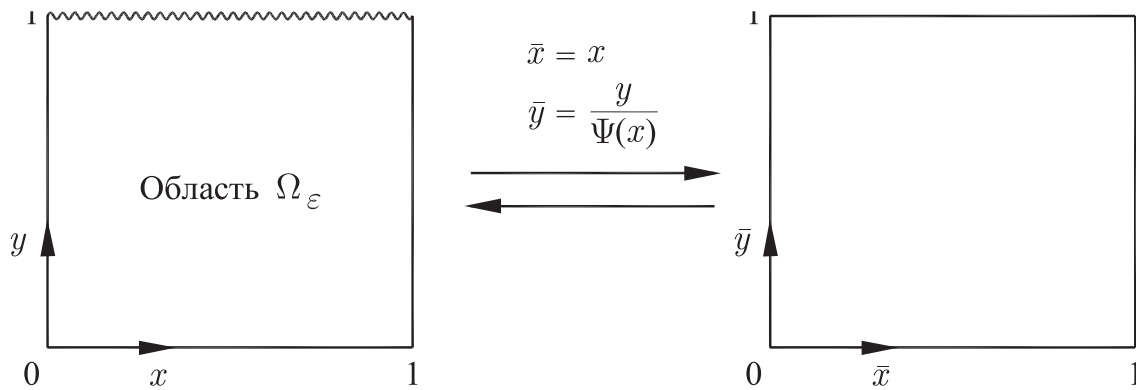


Рис. 2. Отображение исходной области Ω_ε в единичный квадрат

3. Оценка погрешности аппроксимации. Рассмотрим задачу (4) при $\varepsilon = 0$ (следовательно, $\Psi = 1$ и $\Psi'_x = 0$); тогда задача (4) в области $\Omega_0 = [0, 1]^2$ (гладкая стенка $y = 1$) может быть решена методом разделения переменных, а ее решение $w_0(x, y)$ имеет вид

$$w_0(x, y) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(\pi m x) \frac{\text{sh}(\pi m y)}{\text{sh}(\pi m)}, \quad (5a)$$

где

$$A_m = \int_0^1 \phi(\xi) \sin(\pi m \xi) d\xi. \quad (5b)$$

Для отыскания точного решения краевой задачи (4) отобразим исходную область Ω_ε в единичный квадрат (рис. 2). Параметры отображения имеют вид $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \frac{y}{\Psi(x)}$, где (\bar{x}, \bar{y}) — координаты в единичном квадрате, а (x, y) — в исходной области Ω_ε . Краевая задача (4) в единичном квадрате сводится к первой краевой задаче для уравнения Лапласа $\Delta w_\varepsilon = 0$ с граничными условиями

$$w_\varepsilon(0, \bar{y}) = w_\varepsilon(1, \bar{y}) = w_\varepsilon(\bar{x}, 0) = 0, \quad w_\varepsilon(\bar{x}, 1) = \phi(\bar{x}).$$

Решение этой задачи с точностью до координат совпадает с решением (5):

$$w_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(\pi m \bar{x}) \frac{\text{sh}(\pi m \bar{y})}{\text{sh}(\pi m)}.$$

Воспользовавшись обратным отображением $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}\Psi(\bar{x})$, получим решение задачи (4):

$$w_\varepsilon(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\pi mx)}{\text{sh}(\pi m)} \text{sh}\left(\frac{\pi my}{\Psi(x)}\right), \tag{6}$$

если эквивалентная шероховатость описывается функцией $\Psi(x)$ (см. (3)).

Предположим, что задача (4) при $\varepsilon = 0$ (гладкая стенка $y = 1$) решена численными методами и w_0^h — соответствующее численное решение. Оценим разность между точным решением w_ε в области Ω_ε и численным решением w_0^h в области Ω_0 :

$$\|w_\varepsilon - w_0^h\|_C \leq \|w_\varepsilon - w_0\|_C + \|w_0 - w_0^h\|_C. \tag{7}$$

Таким образом, погрешность численного решения $\|w_\varepsilon - w_0^h\|$ обусловлена как погрешностью аппроксимации дифференциального оператора $\|w_0 - w_0^h\|$, так и погрешностью $\|w_\varepsilon - w_0\|$, возникающей из-за различий между Ω_ε и Ω_0 при $\varepsilon \neq 0$. Положим, что разностная схема имеет n -й порядок аппроксимации, т.е.

$$\|w_0 - w_0^h\|_C \leq Ch^n,$$

где постоянная C не зависит от параметра дискретизации h .

Далее необходимо оценить разность решений задачи (4) при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon = 0$, т.е.

$$w_\varepsilon - w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\pi mx)}{\text{sh}(\pi m)} \left[\text{sh}\left(\frac{\pi my}{\Psi(x)}\right) - \text{sh}(\pi my) \right].$$

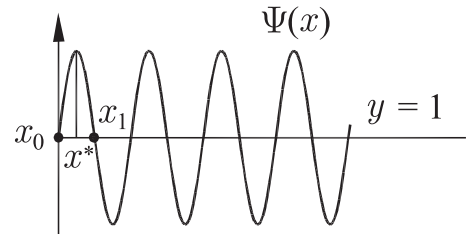


Рис. 3. Оценка погрешности точного решения (5) на границе области $\Omega_0 = [0, 1]^2$

В силу принципа максимума ожидается, что максимальная погрешность достигается на границе $y = 1$ области Ω_0 . Заметим, что в точках, где $\Psi(x) = 1$ (т.е. в нулях функции $\sin(2\pi kx)$), решения (5а) и (6) совпадают. Сначала рассмотрим первый случай $x \in \left[\frac{n}{2k}, \frac{n+1}{2k} \right]$ (рис. 3), т.е.

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon - w_0\|_C &= \max_{x \in \left[\frac{n}{2k}, \frac{n+1}{2k} \right]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\pi mx)}{\text{sh}(\pi m)} \left[\text{sh}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x)}\right) - \text{sh}(\pi m) \right] \right| = \\ &= \max_{x \in \left[\frac{n}{2k}, \frac{n+1}{2k} \right]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\pi mx)}{\text{sh}(\pi m)} \text{sh}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x)}\right) - \phi(x) \right|. \end{aligned}$$

Поскольку функция

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\pi mx)}{\text{sh}(\pi m)} \left[\text{sh}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x)}\right) - \text{sh}(\pi m) \right]$$

бесконечно дифференцируема и обращается в нуль в точках $x_0 = \frac{n}{2k}$ и $x_1 = \frac{n+1}{2k}$, то существует точка $x^* \in [x_0, x_1]$, в которой обращается в нуль ее производная $F'(x^*) = 0$. Это означает, что функция $|F(x)|$ достигает максимума в точке $x^* \in [x_0, x_1]$.

В самом деле,

$$F'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\text{sh}(\pi m)} \left(\pi m \cos(\pi mx) \left[\text{sh}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x)}\right) - \text{sh}(\pi m) \right] - \pi m \sin(\pi mx) \text{ch}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x)}\right) \frac{\Psi'(x)}{\Psi^2(x)} \right).$$

Тогда

$$F'(x^*) = 0 \Rightarrow \text{sh}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x^*)}\right) - \text{sh}(\pi m) = \text{tg}(\pi mx^*) \text{ch}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x^*)}\right) \frac{\Psi'(x^*)}{\Psi^2(x^*)}.$$

К сожалению, это уравнение невозможно решить аналитически и определить максимальное значение $|F(x)|$. Поэтому получим менее строгую оценку погрешности, полагая, что максимум функции $|F(x)|$ расположен посередине отрезка $[x_0, x_1]$, т.е.

$$x^* = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{2n + 1}{4k}.$$

Тогда

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_C \leq \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin(\pi m x^*)}{\operatorname{sh}(\pi m)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x^*)}\right) - \phi(x^*) \right|.$$

Поскольку $\Psi(x^*) = 1 + \varepsilon$, то

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(\pi m)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi m}{\Psi(x^*)}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi m)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi m}{1 + \varepsilon}\right) < \frac{\operatorname{sh}(\pi m(1 - \varepsilon))}{\operatorname{sh}(\pi m)},$$

причем

$$\frac{\operatorname{sh}(\pi m(1 - \varepsilon))}{\operatorname{sh}(\pi m)} \rightarrow e^{-\pi m \varepsilon} \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Учитывая, что функция $e^{-\pi m \varepsilon}$ быстро убывает с увеличением m :

$$e^{-\pi m \varepsilon} \leq e^{-\pi \varepsilon},$$

получим

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_C \leq |\phi(x^*)| \cdot |1 - e^{-\pi \varepsilon}| \approx \pi \varepsilon |\phi(x^*)| \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Случай $x_0 = \frac{n+1}{2k}$ и $x_1 = \frac{n+2}{2k}$ рассматривают аналогично. Обобщение обоих случаев ведет к оценке

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_C < \pi \varepsilon \|\phi\|_C \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда оценка (7) принимает окончательный вид

$$\|w_\varepsilon - w_0^h\|_C < Ch^n + \pi \varepsilon \|\phi\|_C, \quad (8)$$

где постоянная C не зависит от параметра дискретизации h .

Полученная оценка (8) показывает, что в задачах сопряженного теплообмена формальное сгущение сетки ($h \downarrow$) или повышение порядка аппроксимации дифференциального уравнения ($n \uparrow$) в пределах пограничного слоя не приведет к повышению точности численного решения, если не учитывать шероховатость омываемых поверхностей. Однако учет шероховатости является сложной проблемой: задавать эквивалентную шероховатость и сгущать сетку возле омываемых поверхностей представляется слишком затратным мероприятием [10]. По-видимому, единственно приемлемым путем станет введение в уравнение энергии поправочных функций и коэффициентов, которые в некоторой мере позволят учесть влияние шероховатости на моделируемые физико-химические процессы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архаров А.М., Архаров И.А., Афанасьев В.И. и др. Теплотехника. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981.
3. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
4. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия, 1972.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
6. Михайлова Н.П., Репик Е.У., Соседко Ю.П. Допустимая высота шероховатости в турбулентном пограничном слое пластины в несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 2001. **32**, № 1–2. 90–101.
7. Михайлова Н.П., Репик Е.У., Соседко Ю.П. Допустимая высота шероховатости обтекаемой поверхности в турбулентном пограничном слое с продольным градиентом давления // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 1. 37–49.
8. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.
9. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. М.: Мир, 1987.

10. Сергиенко А.А., Чжоу Вэйсин. Трение и теплообмен в реактивных соплах и в трубопроводах с шероховатой поверхностью // Проблемы и перспективы развития двигателестроения: труды МНТК. Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева / гл. ред. Е.В. Шахматов. Самара: СГАУ, 2003. Ч. 2. 372–377.
11. Чугаев Р.Р. Гидравлика. Л.: Энергоиздат, 1982.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию
02.09.2019

On the Approximation Error in the Problems of Conjugate Convective Heat Transfer

S. I. Martynenko^{1,2}

¹ *Baranov Central Institute of Aviation Motors; ulitsa Aviamotornaya 2, Moscow, 111116, Russia; Dr. Sci., Scientist, e-mail: Martynenko@ciam.ru*

² *Institute of Problems of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences; prospekt Semenova 1, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia; Dr. Sci., Senior Scientist, e-mail: Martynenko@icp.ac.ru*

Received September 2, 2019

Abstract: The effects of small boundary perturbation on the approximation error for a model boundary value problem are considered. It is shown that the ignorance of small perturbations of the boundary leads to an additional approximation error in the original differential problem. This error is independent of mesh size. The obtained results are of interest for the mathematical modeling of conjugate heat transfer, the modeling of flows with surface chemical reactions and other applications related to fluid flows near rough surfaces.

Keywords: conjugate heat transfer, computational fluid dynamics, mathematical modeling, roughness.

References

1. A. M. Arkharov, I. A. Arkharov, V. I. Afanas'ev, et al., *Heat Engineering* (Bauman Gos. Tekh. Univ., Moscow, 2002) [in Russian].
2. V. P. Isachenko, V. A. Osipova, and A. S. Sukomel, *Heat Transfer* (Enerhoizdat, Moscow, 1981) [in Russian].
3. S. S. Kutateladze, *Fundamentals of Heat Transfer* (Atomizdat, Moscow, 1979; Academic, New York, 1963).
4. S. S. Kutateladze and A. I. Leont'ev, *Heat and Mass Transfer and Friction in a Turbulent Boundary Layer* (Energiya, Moscow, 1972) [in Russian].
5. A. V. Lykov, *Theory of Thermal Conductivity* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1967) [in Russian].
6. N. P. Mikhailova, E. U. Repik, and Yu. P. Sosedko, "Permissible Roughness Height in the Turbulent Boundary Layer on a Plate in an Incompressible Fluid," *Uchen. Zap. TsAGI* **32** (1–2), 90–101 (2001).
7. N. P. Mikhailova, E. U. Repik, and Yu. P. Sosedko, "Permissible Height of the Surface Roughness in a Turbulent Boundary Layer with a Streamwise Pressure Gradient," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 1, 37–49 (2003) [*Fluid Dyn.* **38** (1), 32–42 (2003)].
8. M. A. Mikheev and I. M. Mikheeva, *Fundamentals of Heat Transfer* (Energiya, Moscow, 1973) [in Russian].
9. T. Cebeci and P. Bradshaw, *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer* (Springer, New York, 1984; Mir, Moscow, 1987).
10. A. A. Sergienko and Ch. Waisin, "Friction and Heat Transfer in Jet Nozzles and Pipeline with Rough Surfaces," in *Problems and Prospect of Propulsion Engineering Development* (Korolev Samara Gos. Aerokosm. Univ., Samara, 2003), Part 2, pp. 372–377.
11. R. R. Chugaev, *Hydraulics* (Energoizdat, Leningrad, 1982) [in Russian].
12. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, New York, 1968; Nauka, Moscow, 1969).