

УДК 519.634

doi 10.26089/NumMet.v20r327

МЕТОД ДЕКАРТОВЫХ СЕТОК ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. В. Елесин¹, Д. А. Сидоренко², П. С. Уткин³

Статья посвящена разработке и количественной оценке свойств вычислительного алгоритма метода декартовых сеток для трехмерного математического моделирования распространения ударных волн в областях сложной изменяющейся формы. Представлено подробное описание вычислительного алгоритма, ключевым элементом которого является определение численного потока через грани, по которым внутренние, регулярные ячейки расчетной области соседствуют с внешними, пересекаемыми границами тел ячейками. Работоспособность алгоритма продемонстрирована в результате сравнения рассчитанных и экспериментальных данных в задачах о взаимодействии ударной волны с неподвижной сферой и подвижной частицей.

Ключевые слова: математическое моделирование, трехмерные уравнения Эйлера, метод декартовых сеток, ударная волна.

1. Введение. Необходимость математического моделирования течений двухфазных сред со значительным объемным содержанием фаз возникает в многочисленных приложениях, включая распространение детонационной волны по заряду гетерогенного взрывчатого вещества, задачи теплогидравлики применительно к безопасности атомной энергетики, динамику движения капель и пузырей, явление кавитации и многие другие. Численное исследование указанных задач часто базируется на моделях взаимопроникающих континуумов, см., например, [1], лагранжевом формализме для описания частиц дисперсной фазы [2, 3] или методе объема жидкости (Volume of Fluid, VOF), реализованном, например, в программном комплексе FlowVision [4]. В последние годы все больше работ посвящены “прямоугольному” [5] или “среднемасштабному” [6] моделированию движения частиц дисперсной фазы в потоке несущей фазы. В этом случае удается описать взаимодействие потока с отдельными частицами дисперсной фазы, качественно и количественно описать коллективные эффекты близко расположенной совокупности тел в потоке. Эта задача требует решения, вообще говоря, трехмерных уравнений Эйлера или Навье–Стокса в областях сложной формы, в том числе с изменяющимися границами. Классические подходы к численному решению подобных задач связаны с использованием криволинейных расчетных сеток, согласованных с границами расчетной области. Однако в общем случае построение качественной криволинейной сетки является нетривиальной задачей, зачастую требующей существенных усилий со стороны исследователя [7].

Наряду с вышеупомянутыми, существует ряд иных подходов, которые можно объединить под общим названием “методы погруженной границы” [8], когда все ячейки имеют единообразную регулярную форму (например, квадратную в двумерном случае и кубическую в трехмерном). Особенностью данных методов является необходимость определения параметров в ячейках, пересекаемых криволинейными границами расчетной области. Одной из разновидностей методов погруженной границы являются методы декартовых сеток, в которых дискретизация исходной системы уравнений производится особым образом в граничных ячейках, пересекаемых границами расчетной области.

Среди методов декартовых сеток достаточно широко распространены методы, базирующиеся на подходе “усеченной ячейки”. В них ячейки декартовой сетки, пересекаемые границей твердого тела, делятся на части. Для случая течения жидкости вокруг твердого тела, например, ячейки, пересекаемые границей тела, разделяются на части, содержащие жидкость и твердое тело. После этого граничные условия накладываются вдоль поверхности отсечения. Следует отметить, что разбиение ячеек таким способом ведет к возможному возникновению известной проблемы “малой ячейки” [9], особенно сильно усложняющей проведение расчетов явными схемами.

¹ Институт автоматизации проектирования РАН, ул. 2-я Брестская, д. 19/18, 123056, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: vvelesin@gmail.com

² Институт автоматизации проектирования РАН, ул. 2-я Брестская, д. 19/18, 123056, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: sidr1234@mail.ru

³ Институт автоматизации проектирования РАН, ул. 2-я Брестская, д. 19/18, 123056, г. Москва; ст. науч. сотр., e-mail: pavel_utk@mail.ru

Одной из разновидностей таких методов являются схемы с перераспределением потоков [10–13]. Они являются консервативными и позволяют получить решение даже в малых ячейках на шагах по времени, близких к таковым для ячеек регулярной сетки. Эти схемы двухшаговые. На первом шаге обновления величин в усеченных ячейках получаются на основе локально рассчитываемых балансов потоков, не учитывающих проблему малых ячеек. На втором шаге соответствующие части этих обновлений перераспределяются на определенное множество соседних ячеек. В [14] утверждается, что такой подход требует схем без расщепления по пространственным направлениям с представлением подобной “нерасщепленной” схемы высокого порядка по типу Годунова. Однако в [15], наоборот, продемонстрирована возможность использования схемы с расщеплением для расчета величин в малых усеченных ячейках. Альтернативный, обладающий хорошей скоростью и точностью вариант метода усеченных ячеек, распространенный также на случай подвижных границ, приведен в [13, 16].

Методы “слияния ячеек” [17–23] позволяют избежать проблемы “малой ячейки” путем объединения усеченных ячеек с соседними “большими” и последующего вычисления обновленных значений уже для объединенных ячеек. Однако подобные схемы обладают некоторой “произвольностью”, возникающей при слиянии ячеек, а также потенциально могут терять точность в пристеночных областях. Кроме того, в случае подвижных границ подходы со слиянием ячеек могут приводить к ложным осцилляциям [13]. Усовершенствованная методика слияния ячеек была предложена в [24] и развита в [25–27]. В данных работах представлен специальный многомерный алгоритм реконструкции для более точного определения обновленных величин в усеченных ячейках.

В [19, 28] приведен метод второго порядка точности, в котором устойчивость вычислительного процесса в малых усеченных ячейках достигается за счет использования дополнительных, так называемых, “ h -ячеек”, которые представляют собой параллелограммы, построенные на сторонах усеченных ячеек. Метод требует массового решения задачи вычислительной геометрии о поиске площади пересечения двух выпуклых четырехугольников. Несмотря на предложенный в [29] существенно более простой вариант данной схемы, ее реализация в трехмерном случае, а также для изменяющейся геометрии границы области представляется весьма трудоемкой.

В [15] и [9] представлен еще один подход. Авторы вычисляют потоки, необходимые для консервативного обновления пристеночных усеченных ячеек в виде линейных комбинаций “стандартных потоков” из одномерного расширенного шаблона. Стандартными потоками являются те, которые получены без учета проблемы малых усеченных ячеек, а веса линейных комбинаций учитывают подробную информацию, касающуюся геометрии усеченных ячеек. Эта линейная комбинация стандартных потоков стабилизирует решение таким образом, что шаг по времени, позволяющий проводить устойчивый счет для сколь угодно малых усеченных ячеек, имеет тот же порядок, что и для регулярных ячеек.

В нашей предыдущей работе [30] был разработан двумерный алгоритм метода декартовых сеток на основе “ h -ячеек” [29] для неподвижных тел. С его помощью была исследована задача взаимодействия ударной волны (УВ) с системой тел, моделирующих засыпку гранулированной среды для ослабления УВ [31]. В [32] был разработан двумерный алгоритм для случая подвижных тел. Целью настоящей работы является разработка и программная реализация трехмерного вычислительного алгоритма метода декартовых сеток, основные идеи которого для двумерного случая изложены в [33], а также качественная и количественная оценка результатов его применения для решения задач о взаимодействии УВ с неподвижной сферой и подвижной частицей.

2. Постановка задачи и математическая модель. Математическая модель основывается на трехмерной системе уравнений Эйлера, записанной в декартовой системе координат (x, y, z) в векторной дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(e + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(e + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(e + p) \end{bmatrix},$$

$$e = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2), \quad \epsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}.$$

Здесь t — время; ρ — плотность газа; u, v, w — компоненты вектора скорости газа; p — давление; ϵ — внут-

решения удельная энергия газа; e — полная энергия газа на единицу объема. Газ подчиняется уравнению состояния идеального газа с показателем адиабаты γ .

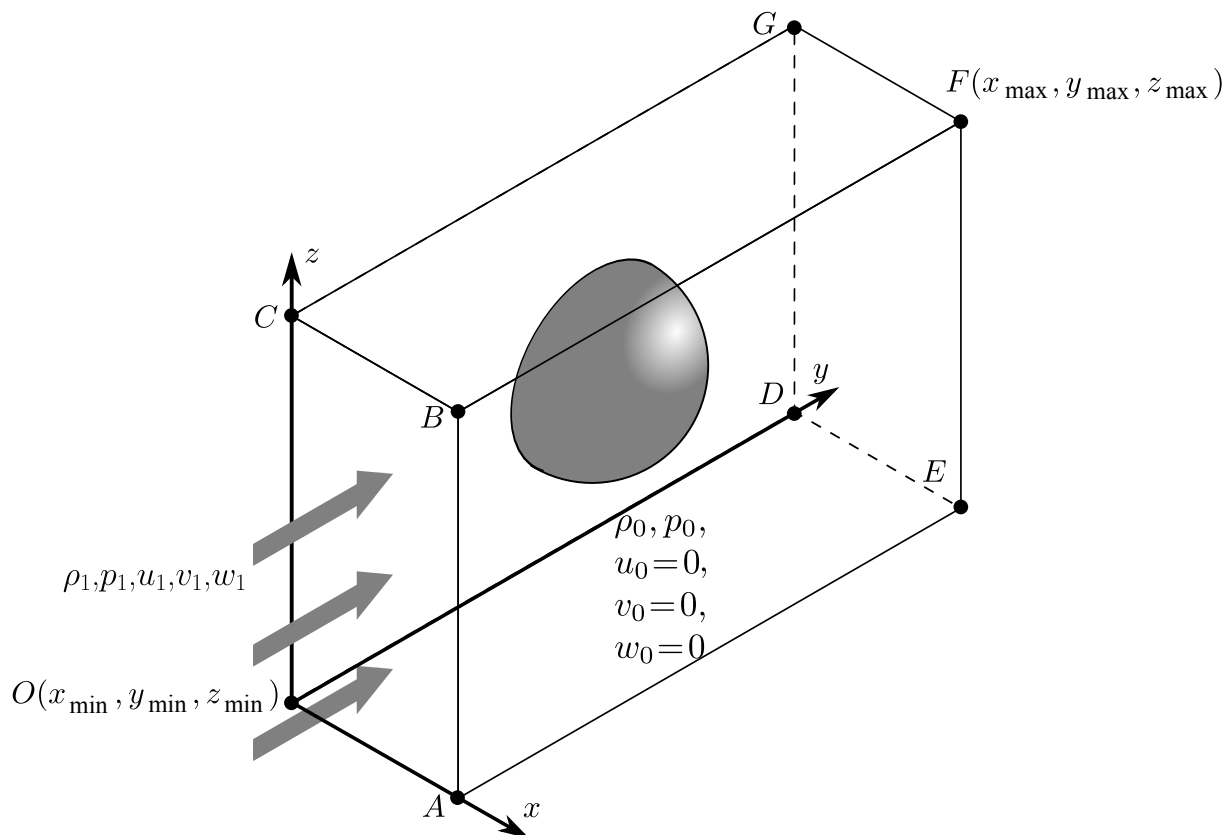


Рис. 1. Постановка задачи о взаимодействии УВ с неподвижной сферой

Рассмотрим постановку на примере задачи о взаимодействии неподвижной сферы с УВ (см. рис. 1). В начальный момент времени в расчетной области, представленной прямоугольным параллелепипедом $OABCDEFG$, находится покоящийся газ с плотностью ρ_0 и давлением p_0 . На границе $OABC$ выставляется условие втекания газа с постоянными параметрами $\rho_1, p_1, u_1, v_1, w_1$, соответствующими параметрам за УВ с заданным числом Маха M . На границе $ODGC$ выставляется условие симметрии. На остальных границах ставятся условия непротекания, в данном случае сводящиеся к равенству нулю нормальной к границе компоненты скорости газа.

3. Вычислительный алгоритм. В расчетной области строится равномерная декартова сетка с узлами, координаты которых определяются следующим образом:

$$x_i = x_{\min} + ih, \quad y_j = y_{\min} + jh, \quad z_k = z_{\min} + kh,$$

$$i = 0, \dots, I, \quad j = 0, \dots, J, \quad k = 0, \dots, K,$$

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{I} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{J} = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{K}.$$

Все ячейки сетки разделяются на два вида (см. рис. 2):

- внутренние. Это ячейки, заполненные газом, целиком лежащие внутри расчетной области и не пересекаемые границами расчетной области (незакрашенные ячейки на рис. 2);
- внешние. Это ячейки, в общем случае не заполненные газом (например, находящиеся в пределах твердых тел и т.п.), в том числе и пересекаемые границами расчетной области (серые ячейки на

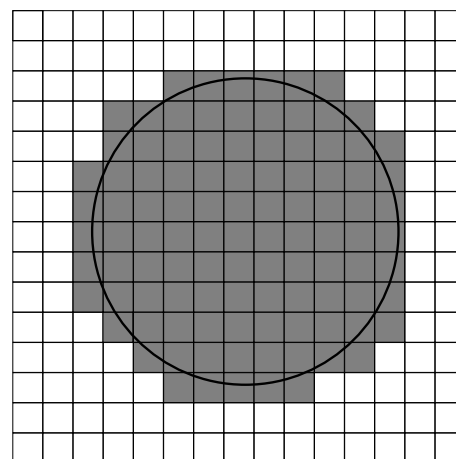


Рис. 2. Иллюстрация к определению типов ячеек (сечение, параллельное плоскости XOY)

рис. 2). Сами по себе они исключаются из расчета, но на гранях, по которым они граничат с внутренними, производится расчет потоков по специальному алгоритму, изложенному ниже.

Дискретизация определяющей системы уравнений осуществляется методом конечных объемов. Для интегрирования по времени используется явная схема Эйлера (учитывая тот факт, что расчетная сетка равномерная по всем направлениям):

$$U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t^n}{h} (\mathbf{F}_{i+1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k} + \mathbf{G}_{i,j+1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j-1/2,k} + \mathbf{H}_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k-1/2}),$$

где i, j, k — индексы внутренних ячеек в декартовой системе координат по направлениям x, y, z соответственно; n — индекс по времени; Δt^n — шаг интегрирования по времени, выбираемый согласно критерию устойчивости. Условие устойчивости для шага интегрирования записывается следующим образом [7]:

$$\Delta t^n = \text{CFL} \cdot \min_{i,j,k} \left(\frac{h}{|u_{i,j,k}^n| + c_{i,j,k}^n}, \frac{h}{|v_{i,j,k}^n| + c_{i,j,k}^n}, \frac{h}{|w_{i,j,k}^n| + c_{i,j,k}^n} \right),$$

где CFL — коэффициент запаса, лежащий в пределах от 0 до 1, и $c_{i,j,k}^n$ — скорость звука в текущей ячейке; минимум берется по всем внутренним ячейкам области.

Численные потоки \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} на гранях, по которым внутренние ячейки граничат с внутренними, рассчитываются либо методом Годунова [7], либо методом Стигера–Уорминга (Steger–Warming) [34]. Последний базируется на расщеплении вектора потоков на компоненты, каждая из которых соотносится со своим набором собственных значений. При этом в одном из этих наборов собственные значения неотрицательные, а во втором — неположительные, что, в свою очередь, позволяет успешно использовать односторонние конечно-разностные операторы для аппроксимации производных без учета направления распространения возмущений и без ухудшения устойчивости счета [34]. Потоки Стигера–Уорминга рассчитываются по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k} &= \mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^+ + \mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^-, & \mathbf{G}_{i,j\pm 1/2,k} &= \mathbf{G}_{i,j\pm 1/2,k}^+ + \mathbf{G}_{i,j\pm 1/2,k}^-, \\ \mathbf{H}_{i,j,k\pm 1/2} &= \mathbf{H}_{i,j,k\pm 1/2}^+ + \mathbf{H}_{i,j,k\pm 1/2}^-, \\ \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^+ &= \Phi \left(\mathbf{X}_{i,j,k}, \chi_1 = 1, \chi_2 = 0, \chi_3 = 0, \hat{\lambda}_1 = \lambda_1^+, \hat{\lambda}_2 = \lambda_2^+, \hat{\lambda}_3 = \lambda_3^+ \right), \\ \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^- &= \Phi \left(\mathbf{X}_{i+1,j,k}, \chi_1 = 1, \chi_2 = 0, \chi_3 = 0, \hat{\lambda}_1 = \lambda_1^-, \hat{\lambda}_2 = \lambda_2^-, \hat{\lambda}_3 = \lambda_3^- \right), \\ \mathbf{G}_{i,j+1/2,k}^+ &= \Phi \left(\mathbf{X}_{i,j,k}, \chi_1 = 0, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0, \hat{\lambda}_1 = \lambda_1^+, \hat{\lambda}_2 = \lambda_2^+, \hat{\lambda}_3 = \lambda_3^+ \right), \\ \mathbf{G}_{i,j+1/2,k}^- &= \Phi \left(\mathbf{X}_{i,j+1,k}, \chi_1 = 0, \chi_2 = 1, \chi_3 = 0, \hat{\lambda}_1 = \lambda_1^-, \hat{\lambda}_2 = \lambda_2^-, \hat{\lambda}_3 = \lambda_3^- \right), \\ \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^+ &= \Phi \left(\mathbf{X}_{i,j,k}, \chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 1, \hat{\lambda}_1 = \lambda_1^+, \hat{\lambda}_2 = \lambda_2^+, \hat{\lambda}_3 = \lambda_3^+ \right), \\ \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^- &= \Phi \left(\mathbf{X}_{i,j,k+1}, \chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 1, \hat{\lambda}_1 = \lambda_1^-, \hat{\lambda}_2 = \lambda_2^-, \hat{\lambda}_3 = \lambda_3^- \right), \\ \mathbf{X} &= [\rho, u, v, w, c]^T, \end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 \\ 2(\gamma-1)\hat{\lambda}_1 u + \hat{\lambda}_2(u + c\tilde{\chi}_1) + \hat{\lambda}_3(u - c\tilde{\chi}_1) \\ 2(\gamma-1)\hat{\lambda}_1 v + \hat{\lambda}_2(v + c\tilde{\chi}_2) + \hat{\lambda}_3(v - c\tilde{\chi}_2) \\ 2(\gamma-1)\hat{\lambda}_1 w + \hat{\lambda}_2(w + c\tilde{\chi}_3) + \hat{\lambda}_3(w - c\tilde{\chi}_3) \\ (\gamma-1)\hat{\lambda}_1(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\hat{\lambda}_2}{2} [(u + c\tilde{\chi}_1)^2 + (v + c\tilde{\chi}_2)^2 + (w + c\tilde{\chi}_3)^2] + \\ + \frac{\hat{\lambda}_3}{2} [(u - c\tilde{\chi}_1)^2 + (v - c\tilde{\chi}_2)^2 + (w - c\tilde{\chi}_3)^2] + W + P \end{bmatrix},$$

$$W = \frac{(3 - \gamma) (\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3) c^2}{2(\gamma - 1)}, \quad P = 2\rho(\gamma - 1) \hat{\lambda}_1 \tilde{\chi}_1 (\tilde{\chi}_2 w - \tilde{\chi}_3 v),$$

$$\tilde{\chi}_1 = \frac{\chi_1}{(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2)^{1/2}}, \quad \tilde{\chi}_2 = \frac{\chi_2}{(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2)^{1/2}}, \quad \tilde{\chi}_3 = \frac{\chi_3}{(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2)^{1/2}},$$

$$\lambda_n^+ = \frac{\lambda_n + |\lambda_n|}{2}, \quad \lambda_n^- = \frac{\lambda_n - |\lambda_n|}{2}, \quad n = 1, 2, 3,$$

$$\lambda_1 = \chi_1 u + \chi_2 v + \chi_3 w, \quad \lambda_2 = \lambda_1 + c(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2)^{1/2}, \quad \lambda_3 = \lambda_1 - c(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2)^{1/2}.$$

Использование метода Стигера–Уорминга было вызвано необходимостью устранения специфичного для метода Годунова так называемого “эффекта карбункула” [35], возникающего в некоторых из рассмотренных авторами задач. В свою очередь, при использовании потока Стигера–Уорминга такой эффект не наблюдается [35].

На гранях, по которым внутренние ячейки соседствуют с внешними, потоки \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} находятся по алгоритму, идея которого изложена в [33], распространенному авторами на трехмерный случай. Рассмотрим поочередно случаи, изображенные на рис. 3. Здесь внутренняя ячейка I имеет общую грань с внешней ячейкой B, которая пересекается границей тела, в общем случае поступательно движущегося со скоростью $\mathbf{v}_b = [u_b, v_b, w_b]^T$. Обозначим через $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ — вектор консервативных переменных, являющийся решением задачи Римана для состояний, характеризующихся векторами \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 ; c^* — скорость звука на контактном разрыве. Подробно рассмотрим вычисление потоков на гранях, являющихся общими для внутренней и внешней ячеек, для каждого из возможных вариантов взаимного расположения ячеек (см. рис. 3):

- случай а: $\mathbf{U}_{ghost} = [\rho_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}(2u_b - u_{i,j,k}), \rho_{i,j,k}v_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}w_{i,j,k}, e(2u_b - u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, w_{i,j,k}, p_{i,j,k})]^T$, $\mathbf{U}_{i+1/2,j,k}^*$ — значения на контактном разрыве (КР), получаемые из решения задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{ghost})$, причем

$$v_{i+1/2,j,k}^* = v_{i,j,k}, \quad w_{i+1/2,j,k}^* = w_{i,j,k}, \quad \text{если } u_b \geq 0,$$

$$v_{i+1/2,j,k}^* = v_{ghost}, \quad w_{i+1/2,j,k}^* = w_{ghost}, \quad \text{если } u_b < 0,$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j,k} = \begin{cases} \mathbf{F}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{ghost})], & \text{если } u_b \leq -c_{i+1/2,j,k}^*, \\ \mathbf{F}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{i+1/2,j,k}^*)], & \text{если } -c_{i+1/2,j,k}^* < u_b < c_{i+1/2,j,k}^*, \\ \mathbf{F}[\mathbf{U}_{i,j,k}], & \text{если } u_b \geq c_{i+1/2,j,k}^*; \end{cases}$$

- случай б: $\mathbf{U}_{ghost} = [\rho_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}(2u_b - u_{i,j,k}), \rho_{i,j,k}v_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}w_{i,j,k}, e(2u_b - u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, w_{i,j,k}, p_{i,j,k})]^T$, $\mathbf{U}_{i-1/2,j,k}^*$ — значения на КР, получаемые из решения задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{ghost}, \mathbf{U}_{i,j,k})$, причем

$$v_{i-1/2,j,k}^* = v_{ghost}, \quad w_{i-1/2,j,k}^* = w_{ghost}, \quad \text{если } u_b \geq 0,$$

$$v_{i-1/2,j,k}^* = v_{i,j,k}, \quad w_{i-1/2,j,k}^* = w_{i,j,k}, \quad \text{если } u_b < 0,$$

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j,k} = \begin{cases} \mathbf{F}[\mathbf{U}_{i,j,k}], & \text{если } u_b \leq -c_{i-1/2,j,k}^*, \\ \mathbf{F}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i-1/2,j,k}^*, \mathbf{U}_{i,j,k})], & \text{если } -c_{i-1/2,j,k}^* < u_b < c_{i-1/2,j,k}^*, \\ \mathbf{F}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{ghost}, \mathbf{U}_{i,j,k})], & \text{если } u_b \geq c_{i-1/2,j,k}^*; \end{cases}$$

- случай в: $\mathbf{U}_{ghost} = [\rho_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}u_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}(2v_b - v_{i,j,k}), \rho_{i,j,k}w_{i,j,k}, e(u_{i,j,k}, 2v_b - v_{i,j,k}, w_{i,j,k}, p_{i,j,k})]^T$, $\mathbf{U}_{i,j+1/2,k}^*$ — значения на КР, получаемые из решения задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{ghost})$, причем

$$u_{i,j+1/2,k}^* = u_{i,j,k}, \quad w_{i,j+1/2,k}^* = w_{i,j,k}, \quad \text{если } v_b \geq 0,$$

$$u_{i,j+1/2,k}^* = u_{ghost}, \quad w_{i,j+1/2,k}^* = w_{ghost}, \quad \text{если } v_b < 0,$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2,k} = \begin{cases} \mathbf{G}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{ghost})], & \text{если } v_b \leq -c_{i,j+1/2,k}^*, \\ \mathbf{G}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{i,j+1/2,k}^*)], & \text{если } -c_{i,j+1/2,k}^* < v_b < c_{i,j+1/2,k}^*, \\ \mathbf{G}[\mathbf{U}_{i,j,k}], & \text{если } v_b \geq c_{i,j+1/2,k}^*; \end{cases}$$

– случай г: $\mathbf{U}_{\text{ghost}} = [\rho_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}u_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}(2v_b - v_{i,j,k}), \rho_{i,j,k}w_{i,j,k}, e(u_{i,j,k}, 2v_b - v_{i,j,k}, w_{i,j,k}, p_{i,j,k})]^T$,
 $\mathbf{U}_{i,j-1/2,k}^*$ – значения на КР, получаемые из решения задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{\text{ghost}}, \mathbf{U}_{i,j,k})$, причем

$$\begin{aligned} u_{i,j-1/2,k}^* &= u_{\text{ghost}}, & w_{i,j-1/2,k}^* &= w_{\text{ghost}}, & \text{если } v_b &\geq 0, \\ u_{i,j-1/2,k}^* &= u_{i,j,k}, & w_{i,j-1/2,k}^* &= w_{i,j,k}, & \text{если } v_b < 0, \\ \mathbf{G}_{i,j-1/2,k} &= \begin{cases} \mathbf{G}[\mathbf{U}_{i,j,k}], & \text{если } v_b \leq -c_{i,j-1/2,k}^*, \\ \mathbf{G}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j-1/2,k}^*, \mathbf{U}_{i,j,k})], & \text{если } -c_{i,j-1/2,k}^* < v_b < c_{i,j-1/2,k}^*, \\ \mathbf{G}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{\text{ghost}}, \mathbf{U}_{i,j,k})], & \text{если } v_b \geq c_{i,j-1/2,k}^*; \end{cases} \end{aligned}$$

– случай д: $\mathbf{U}_{\text{ghost}} = [\rho_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}u_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}v_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}(2w_b - w_{i,j,k}), e(u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, 2w_b - w_{i,j,k}, p_{i,j,k})]^T$,
 $\mathbf{U}_{i,j,k+1/2}^*$ – значения на КР, получаемые из решения задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{\text{ghost}})$, причем

$$\begin{aligned} u_{i,j,k+1/2}^* &= u_{i,j,k}, & v_{i,j,k+1/2}^* &= v_{i,j,k}, & \text{если } w_b &\geq 0, \\ u_{i,j,k+1/2}^* &= u_{\text{ghost}}, & v_{i,j,k+1/2}^* &= v_{\text{ghost}}, & \text{если } w_b < 0, \\ \mathbf{H}_{i,j,k+1/2} &= \begin{cases} \mathbf{H}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{\text{ghost}})], & \text{если } w_b \leq -c_{i,j,k+1/2}^*, \\ \mathbf{H}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k}, \mathbf{U}_{i,j,k+1/2}^*)], & \text{если } -c_{i,j,k+1/2}^* < w_b < c_{i,j,k+1/2}^*, \\ \mathbf{H}[\mathbf{U}_{i,j,k}], & \text{если } w_b \geq c_{i,j,k+1/2}^*; \end{cases} \end{aligned}$$

– случай е: $\mathbf{U}_{\text{ghost}} = [\rho_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}u_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}v_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}(2w_b - w_{i,j,k}), e(u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, 2w_b - w_{i,j,k}, p_{i,j,k})]^T$,
 $\mathbf{U}_{i,j,k-1/2}^*$ – значения на КР, получаемые из решения задачи Римана $\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{\text{ghost}}, \mathbf{U}_{i,j,k})$, причем

$$\begin{aligned} u_{i,j,k-1/2}^* &= u_{\text{ghost}}, & v_{i,j,k-1/2}^* &= v_{\text{ghost}}, & \text{если } w_b &\geq 0, \\ u_{i,j,k-1/2}^* &= u_{i,j,k}, & v_{i,j,k-1/2}^* &= v_{i,j,k}, & \text{если } w_b < 0, \\ \mathbf{H}_{i,j,k-1/2} &= \begin{cases} \mathbf{H}[\mathbf{U}_{i,j,k}], & \text{если } w_b \leq -c_{i,j,k-1/2}^*, \\ \mathbf{H}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{i,j,k-1/2}^*, \mathbf{U}_{i,j,k})], & \text{если } -c_{i,j,k-1/2}^* < w_b < c_{i,j,k-1/2}^*, \\ \mathbf{H}[\mathbf{U}_R(\mathbf{U}_{\text{ghost}}, \mathbf{U}_{i,j,k})], & \text{если } w_b \geq c_{i,j,k-1/2}^*. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае если ячейка на шаге n была внешней, а на шаге $n+1$ стала внутренней, необходимо инициализировать в ней вектор $\mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1}$. Это осуществляется с помощью осреднения найденных решений промежуточных состояний в локальных задачах Римана по всем направлениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{\alpha_x}{\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z} \frac{\alpha_{i-1,j,k} \mathbf{U}_{i-1/2,j,k}^* + \alpha_{i+1,j,k} \mathbf{U}_{i+1/2,j,k}^*}{\alpha_{i-1,j,k} + \alpha_{i+1,j,k}} + \\ &+ \frac{\alpha_y}{\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z} \frac{\alpha_{i,j-1,k} \mathbf{U}_{i,j-1/2,k}^* + \alpha_{i,j+1,k} \mathbf{U}_{i,j+1/2,k}^*}{\alpha_{i,j-1,k} + \alpha_{i,j+1,k}} + \\ &+ \frac{\alpha_z}{\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z} \frac{\alpha_{i,j,k-1} \mathbf{U}_{i,j,k-1/2}^* + \alpha_{i,j,k+1} \mathbf{U}_{i,j,k+1/2}^*}{\alpha_{i,j,k-1} + \alpha_{i,j,k+1}}, \end{aligned}$$

$$\alpha_{i\pm 1,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка } (i \pm 1, j, k) \text{ была внутренней на предыдущем шаге,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\alpha_{i,j\pm 1,k} = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка } (i, j \pm 1, k) \text{ была внутренней на предыдущем шаге,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\alpha_{i,j,k\pm 1} = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка } (i, j, k \pm 1) \text{ была внутренней на предыдущем шаге,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\alpha_x = \max(\alpha_{i+1,j,k}, \alpha_{i-1,j,k}), \quad \alpha_y = \max(\alpha_{i,j+1,k}, \alpha_{i,j-1,k}), \quad \alpha_z = \max(\alpha_{i,j,k+1}, \alpha_{i,j,k-1}).$$

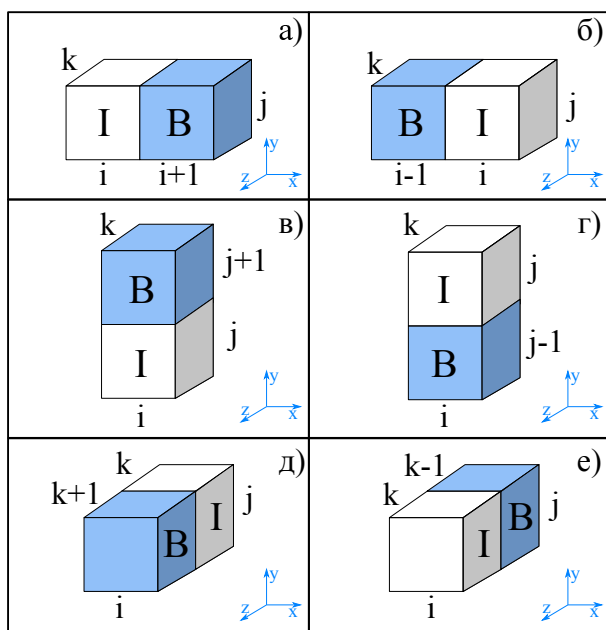


Рис. 3. Возможные взаимные расположения внутренней ячейки (I) и внешней ячейки (B), пересекаемой границей тела

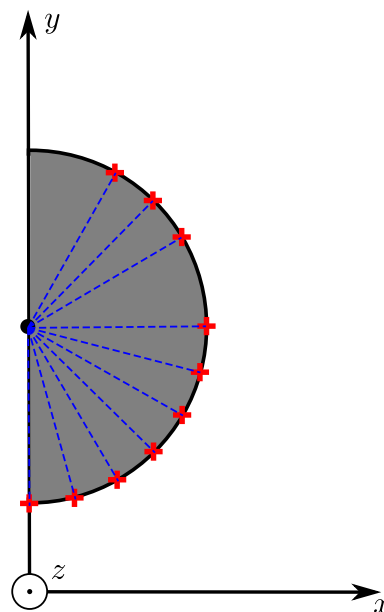


Рис. 4. Схема расположения датчиков давления в задаче о взаимодействии УВ с неподвижной сферой

4. Результаты вычислительных экспериментов. Перейдем к описанию результатов вычислительных экспериментов, проведенных с использованием изложенного выше алгоритма.

4.1. Взаимодействие ударной волны с неподвижной сферой. Задача взаимодействия УВ с неподвижной сферой — один из стандартных тестов при изучении динамики распространения УВ. В отличие от классических опытов по стационарному обтеканию сферы сверхзвуковым потоком газа, берущих свое начало в середине прошлого века, нестационарные эффекты взаимодействия потока за УВ с телом количественно были описаны гораздо позже. Одна из базовых экспериментальных работ — исследование [36]. Общая постановка данной задачи представлена в разделе 2.

Численные значения параметров задачи следующие [36]. Число Маха УВ $M = 1.22$. Давление p_0 и плотность ρ_0 покоящегося газа перед УВ составляют соответственно 101 000.0 Па и 1.2 кг/м³. Диаметр сферы составляет 0.08 м. В плоскости симметрии сферы, параллельной плоскости XOY , расположены 10 датчиков, фиксирующих давление (см. рис. 4). Первые семь из них размещены с шагом 15° по углу. Датчики 8, 9, и 10 имеют угловые координаты соответственно на 30°, 45° и 60° больше угловой координаты датчика 7.

Расчетная область — параллелепипед размерами 0.15 м × 0.302 м × 0.302 м по координатам x, y, z соответственно. Параллелепипед расположен таким образом, что точка O имеет координаты (0, 0, 0), а точка F (0.15, 0.302, 0.302). Координаты центра сферы (0, 0.151, 0.151). Расчет производился на сетках 150 × 302 × 302 и 300 × 604 × 604 ячеек. Размер ячейки составил 1 мм и 0.5 мм соответственно. На диаметр сферы приходилось 80 и 160 ячеек соответственно.

Рисунок 5 иллюстрирует типичные ударно-волновые картины течения, а также зависимости избыточного давления ($p - p_0$) от времени, полученные на датчиках с позициями 0°, 45°, 90° и 120° для двух вариантов сеток в сравнении с экспериментальными данными [36]. В расчете авторов расположение виртуальных датчиков, с которых снимались значения давления, соответствовало центрам внутренних ячеек, ближайших к точкам на поверхности сферы, в которых располагались датчики в эксперименте.

На начальной стадии процесса реализуется регулярный тип отражения УВ от поверхности сферы (см. рис. 5а). Через некоторое время регулярный тип отражения переходит в маховское (см. рис. 5б). Время перехода согласуется с экспериментальным значением, лежащим в диапазоне 40–50 мкс. После формирования маховского режима отражения волна Маха распространяется по поверхности сферы, далее происходит ее схлопывание позади сферы с формированием локальной области повышенного давления. Это, в свою очередь, приводит к отрицательным значениям нестационарного коэффициента сопротивления на данной стадии процесса. Рассчитанные и экспериментальные кривые давления на датчиках находятся в хорошем соответствии, особенно до времени около 200 мкс, т.е. в течение времени прохождения УВ по

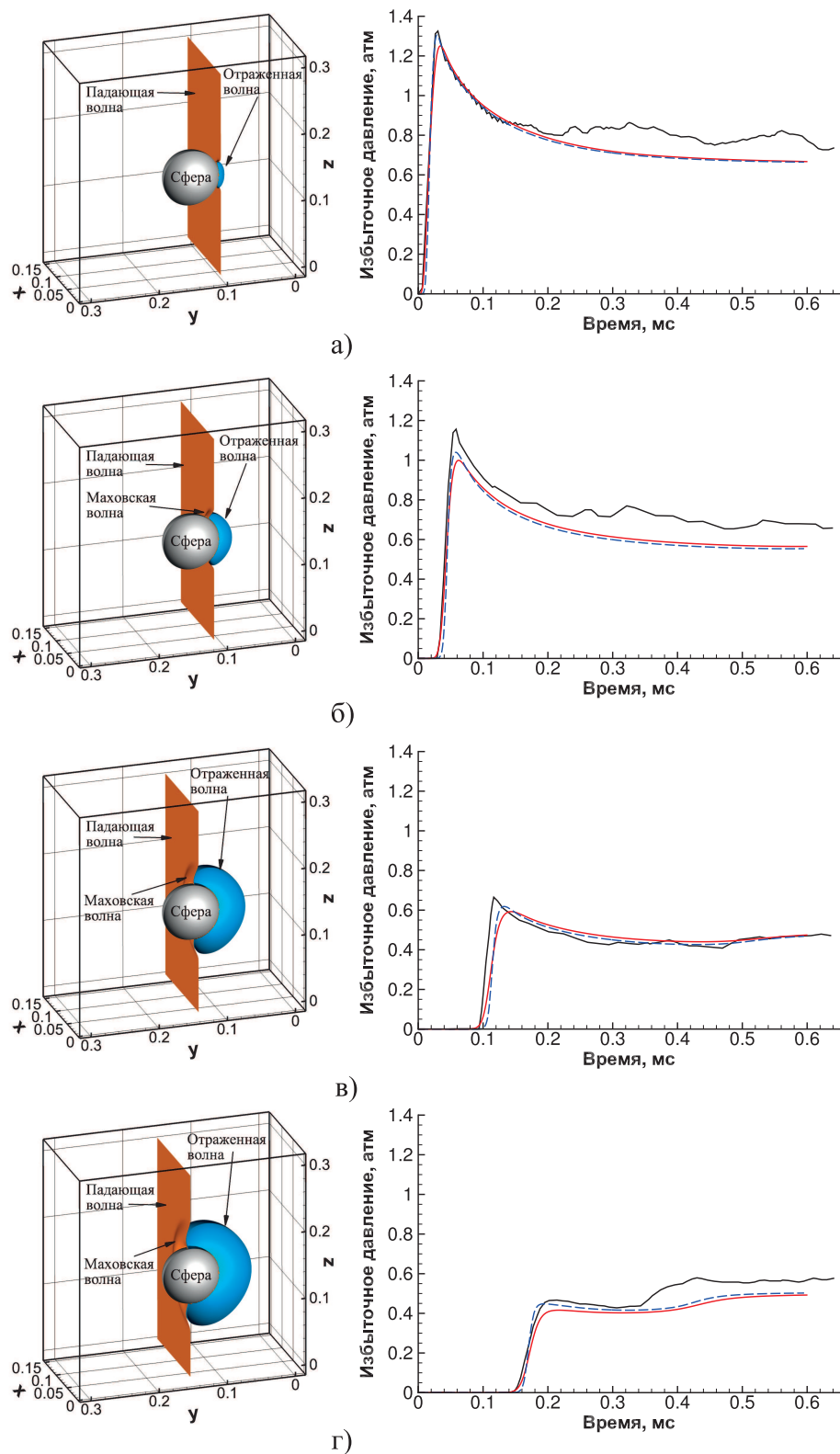


Рис. 5. Избыточное давление в зависимости от времени и трехмерные картины течения на сетке $150 \times 302 \times 302$ ячейки в момент прохождения УВ датчиков давления: а) датчик с положением 0° , на трехмерной картине — момент времени 30 мс, б) 45° , 60 мкс, в) 90° , 120 мкс, г) 120° , 150 мкс. На графиках черными сплошными линиями показаны экспериментальные данные, красными сплошными — результат расчета авторов на сетке $150 \times 302 \times 302$ ячейки, синими штриховыми — результат расчета авторов на сетке $300 \times 604 \times 604$ ячейки

поверхности сферы. Дальнейшие отличия могут быть связаны с необходимостью учета вязких эффектов при моделировании, а также с погрешностью экспериментальных данных. В [36] отмечается, что датчик давления 120°, вероятно, был недостаточно хорошо откалиброван, а вид кривой давления на датчике 150° обусловлен взаимодействием волны Маха со стержнем подвеса сферы.

4.2. Взаимодействие ударной волны с подвижной частицей. На бронзовую частицу диаметром 170 мкм плотностью 8600 кг/м³ набегают плоская УВ с числом Маха 2.6 [37] (см. рис. 6). Частица покоится на оси канала *OABCDEFG* квадратного сечения со стороной 1.84 мм и длиной 6.6 мм в неподвижном газе при давлении 101325 Па и плотности 1.19 кг/м³. Координаты в миллиметрах точки *O* (−0.595, −0.9208333, −0.9208333), координаты в миллиметрах точки *F* (6.005, 0.9208333, 0.9208333). На границе *OABC* выставляется условие втекания газа с постоянными параметрами $\rho_1, p_1, u_1, v_1, w_1$, соответствующими параметрам за УВ с приведенным выше числом Маха. На остальных границах ставятся условия непротекания, в данном случае сводящиеся к равенству нулю нормальной к границе компоненты скорости газа. Частица может двигаться под воздействием газа, сила тяжести не учитывается.

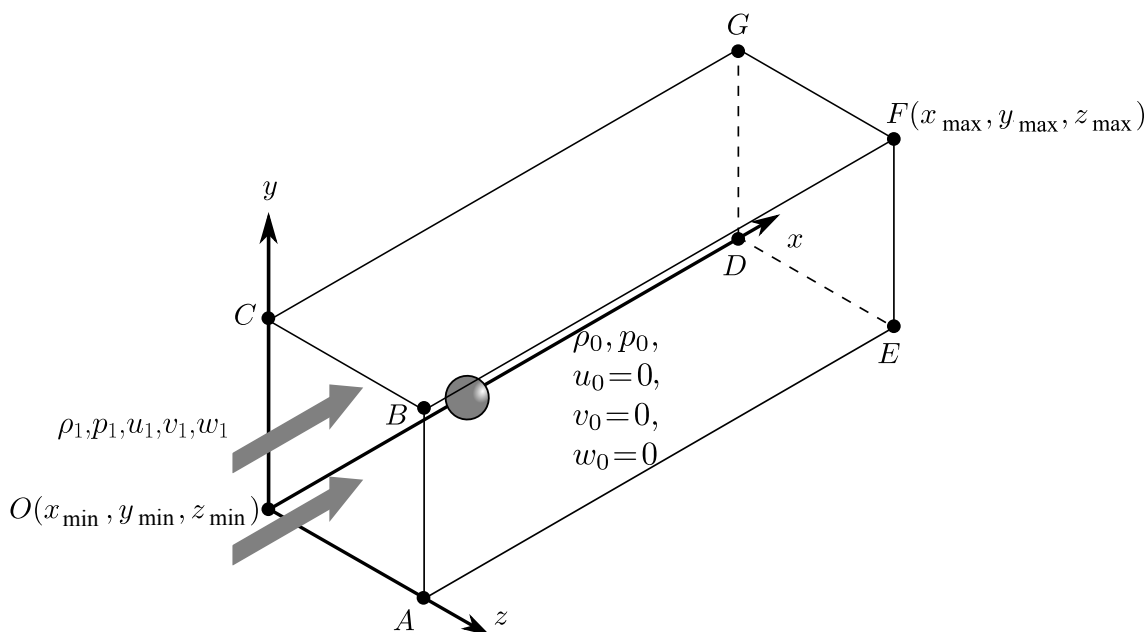


Рис. 6. Постановка задачи о взаимодействии УВ с подвижной сферой малого диаметра

Движение частицы описывается уравнением, выражающим второй закон Ньютона:

$$\ddot{x}_c(t) = \frac{1}{m} \int_S p^*(x, y, z, t) dS, \quad \ddot{x}_c(0) = 0, \quad \dot{x}_c(0) = 0, \quad x_c(0) = x_{c0},$$

где x_c — абсцисса центра частицы, m — ее масса, $p^*(x, y, z, t)$ — поле давления, интегрирование ведется по поверхности частицы. Следует отметить, что сила, с которой газ воздействует на частицу, определялась не на основе давления в близлежащих к поверхности сферы внутренних ячейках, а на основе давления, получаемого из решения задачи о распаде разрыва на границе между данными ячейками и соседними внешними ячейками. В данном случае величины давления и плотности слева и справа от разрыва одинаковы, поэтому возможны только два варианта решения — либо две УВ, либо две волны разрежения (ВР). Например, когда внутренняя ячейка расположена слева от внешней (случай (а) на рис. 3), если скорость тела больше скорости газа во внутренней ячейке, то реализуется решение с двумя ВР, в противном случае — с двумя УВ. Зависимости для определения давления имеют следующий вид [33]:

— для решения с двумя ВР:

$$p^* = p \cdot \left(1 - \frac{(\gamma - 1)\Delta V}{2c} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

— для решения с двумя УВ:

$$p^* = p + 0.25 \cdot (\gamma + 1)\rho \cdot (\Delta V)^2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4c}{(\gamma + 1)\Delta V} \right)^2} \right),$$

где p , ρ , c — параметры газа в соответствующей внутренней ячейке области, ΔV — разность нормальных к границе раздела ячеек компонент скоростей тела и газа ($\Delta V = u_b - u$ для случаев (а) и (б) на рис. 3, $\Delta V = v_b - v$ для случаев (в) и (г) на рис. 3, $\Delta V = w_b - w$ для случаев (д) и (е) на рис. 3).

Расчет проводился с двумя вариантами сеток: размером $233 \times 65 \times 65$ ячеек, с разрешением 2.83×10^{-5} м (на диаметр частицы приходится 6 ячеек) и размером $470 \times 131 \times 131$ ячеек с разрешением 1.41×10^{-5} м (на диаметр частицы приходится 12 ячеек). На рис. 7 приведены зависимости координаты x центра частицы от времени, полученные в эксперименте и расчетах авторов на двух сетках. Черные маркеры, соединенные пунктиром — экспериментальные данные, красная линия — расчет авторов с 6 ячейками на диаметр частицы, синяя линия — расчет авторов с 12 ячейками на диаметр частицы. Следует отметить очевидное улучшение результатов при использовании более подробной сетки. Тем не менее, можно предположить, что для уточнения адекватности результатов могут потребоваться расчеты в канале большей длины и в течение большего промежутка времени.

5. Заключение. Разработан, реализован и детально описан вычислительный алгоритм метода декартовых сеток для трехмерного численного моделирования распространения ударных волн в областях сложной изменяющейся формы, базирующийся на идеях, изложенных в [33]. Вычислительный алгоритм на шаге интегрирования по времени включает следующие стадии.

1. Присвоение всем ячейкам расчетной области одного из двух статусов — внутренняя ячейка или внешняя ячейка (пересекается границей тела или лежит внутри тела).
2. Применение явной конечно-объемной схемы для построения решения во внутренних ячейках с использованием численного потока Стигера–Уорминга. Ключевой элемент — определение потока через грани, по которым внутренние ячейки расчетной области соседствуют с внешними, пересекаемыми границами тел ячейками.
3. Обновление статуса ячеек с учетом движения тел в расчетной области.

Разработанный алгоритм не требует решения задачи вычислительной геометрии о поиске формы или объема фигуры, возникающей при пересечении тела и регулярной расчетной ячейки в форме куба, в отличие, например, от [10–13, 15, 24, 25] и др. Разработанный алгоритм верифицирован на задаче о взаимодействии ударной волны с неподвижной сферой и подвижной частицей. В задаче о взаимодействии ударной волны с неподвижной сферой построены ударно-волновые конфигурации, демонстрирующие смену режима с регулярного на маховское отражение, а также дальнейшую эволюцию волны Маха. Отклонение рассчитанных и экспериментальных кривых давления на временах прохождения ударной волны по поверхности сферы находится в пределах 10%. В задаче о движении частицы за проходящей ударной волной получено превышение рассчитанного смещения частицы относительно экспериментального, однако показана положительная динамика в результатах моделирования при измельчении расчетной сетки.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАП РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяченко С.В. Разработка пакета программ для трехмерного численного моделирования многофазных многокомпонентных течений в атомной энергетике // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 162–182.
2. Глазунов А.В. Численное моделирование турбулентности и переноса мелкодисперсной примеси в городских каньонах // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 17–37.
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Тетерина И.В. Визуализация результатов численного моделирования течений с частицами, полученных при помощи лагранжевых подходов к описанию дисперсной фазы // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 522–539.

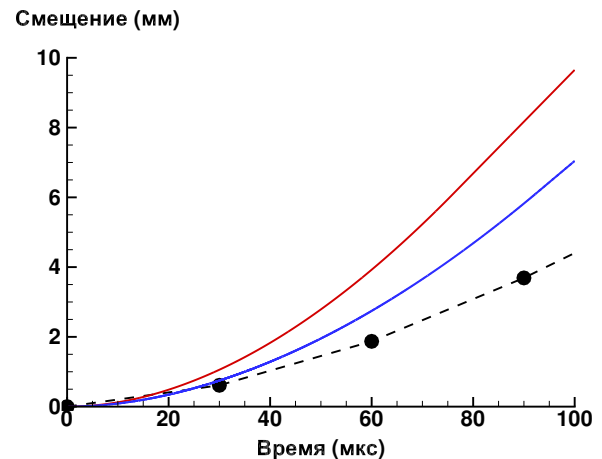


Рис. 7. Смещение частицы относительно своего начального положения в направлении оси x в сравнении с экспериментом

4. Федоров А.А. Визуализация капель жидкости в FlowVision // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 1–8.
5. Бедарев И.А., Федоров А.В. Прямое моделирование релаксации нескольких частиц за проходящими ударными волнами // Инженерно-физический журнал. 2017. **90**, № 2. 450–457.
6. Sen O., Gaul N.J., Choi K.K., Jacobs G., Udaykumar H.S. Evaluation of kriging based surrogate models constructed from mesoscale computations of shock interaction with particles // Journal of Computational Physics. 2017. **336**. 235–260.
7. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
8. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods // Annual Review of Fluid Mechanics. 2005. **37**. 239–261.
9. Bennett W.P., Nikiforakis N., Klein R. A moving boundary flux stabilization method for Cartesian cut-cell grids using directional operator splitting // Journal of Computational Physics. 2018. **368**. 333–358.
10. Pember R.B., Bell J.B., Colella P., Curtchfield W.Y., Welcome M.L. An adaptive Cartesian grid method for unsteady compressible flow in irregular regions // Journal of Computational Physics. 1995. **120**, N 2. 278–304.
11. Colella P., Graves D.T., Keen B.J., Modiano D. A Cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 2006. **211**, N 1. 347–366.
12. Hu X.Y., Khoo B.C., Adams N.A., Huang F.L. A conservative interface method for compressible flows // Journal of Computational Physics. 2006. **219**, N 2. 553–578.
13. Schneiders L., Hartmann D., Meinke M., Schröder W. An accurate moving boundary formulation in cut-cell methods // Journal of Computational Physics. 2013. **235**. 786–809.
14. Colella P. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1990. **87**, Issue 1. 171–200.
15. Klein R., Bates K.R., Nikiforakis N. Well-balanced compressible cut-cell simulation of atmospheric flow // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2009. **367**. 4559–4575.
16. Schneiders L., Günther C., Meinke M., Schröder W. An efficient conservative cut-cell method for rigid bodies interacting with viscous compressible flows // Journal of Computational Physics. 2016. **311**. 62–86.
17. Clarke D.K., Hassan H.A., Salas M.D. Euler calculations for multielement airfoils using Cartesian grids // AIAA Journal. 1986. **24**, N 3. 353–358.
18. Quirk J.J. An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two-dimensional bodies // Computers & Fluids. 1994. **23**, N 1. 125–142.
19. Berger M.J., Helzel C., LeVeque R.J. *h*-box methods for the approximation of hyperbolic conservation laws on irregular grids // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2003. **41**, N 3. 893–918.
20. Ingram D.M., Causon D.M., Mingham C.G. Developments in Cartesian cut cell methods // Mathematics and Computers in Simulations. 2003. **61**, Issues 3–6. 561–572.
21. Xu S., Aslam T., Stewart D.S. High resolution numerical simulation of ideal and non-ideal compressible reacting flows with embedded internal boundaries // Combustion Theory and Modelling. 1997. **1**, N 1. 113–142.
22. Yang G., Causon D.M., Ingram D.M., Saunders R., Batten P. A Cartesian cut cell method for compressible flows. Part A: Static body problems // Aeronautical Journal. 1997. **101**, Issue 1002. 47–56.
23. Barton P.T., Obadia B., Drikakis D. A conservative level-set based method for compressible solid/fluid problems on fixed grids // Journal of Computational Physics. 2011. **230**, N 21. 7867–7890.
24. Hartmann D., Meinke M., Schröder W. A strictly conservative Cartesian cut-cell method for compressible viscous flows on adaptive grids // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2011. **200**, N 9–12. 1038–1052.
25. Pogorelov A., Meinke M., Schröder W. Cut-cell method based large-eddy simulation of tip-leakage flow // Physics of Fluids. 2015. **27**, N 7. doi 10.1063/1.4926515.
26. Pogorelov A., Meinke M., Schröder W. Effects of tip-gap width on the flow field in an axial fan // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2016. **61**. 466–481.
27. Pogorelov A., Schneiders L., Meinke M., Schröder W. An adaptive Cartesian mesh based method to simulate turbulent flows of multiple rotating surfaces // Flow, Turbulence and Combustion. 2018. **100**, Issue 1. 19–38.
28. Helzel C., Berger M.J., LeVeque R.J. A high-resolution rotated grid method for conservation laws with embedded geometries // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. **26**, N 3. 785–809.
29. Berger M., Helzel C. A simplified *h*-box method for embedded boundary grids // SIAM Journal on Scientific Computing. 2012. **34**, N 2. A861–A888.
30. Сидоренко Д.А., Уткин П.С. Метод декартовых сеток для численного моделирования распространения ударных волн в областях сложной формы // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 353–364.
31. Сидоренко Д.А., Уткин П.С. Двумерное газодинамическое моделирование взаимодействия ударной волны с засыпками гранулированных сред // Химическая физика. 2018. **37**, № 9. 43–49.
32. Сидоренко Д.А., Уткин П.С. Численное моделирование релаксации тела за проходящей ударной волной // Математическое моделирование. 2018. **30**, № 11. 91–104.
33. Chertock A., Kurganov A. A simple Eulerian finite-volume method for compressible fluids in domains with moving boundaries // Communications in Mathematical Sciences. 2008. **6**, N 3. 531–556.
34. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-

- difference methods // *Journal of Computational Physics*. 1981. **40**, Issue 2. 263–293.
35. *Pandolfi M., D'Ambrosio D.* Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon // *Journal of Computational Physics*. 2001. **166**, Issue 2. 271–301.
36. *Tanno H., Itoh K., Saito T., Abe A., Takayama K.* Interaction of a shock with a sphere suspended in a vertical shock tube // *Shock Waves*. 2003. **13**, N 3. 191–200.
37. *Boiko V.M., Fedorov A.V., Fomin V.M., Papyrin A.N., Soloukhin R.I.* Ignition of small particles behind shock waves // *Shock Waves, Explosions and Detonations*. New York: American Inst. of Aeronautics and Astronautics, 1983. 71–87.

Поступила в редакцию
18.06.2019

A Cartesian Grid Method for the Three-Dimensional Numerical Simulation of Shock Wave Propagation in Complex-Shape Domains with Moving Boundaries

V. V. Elesin¹, D. A. Sidorenko², and P. S. Utkin³

¹ *Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences; ulitsa 2nd Brestskaya 19/18, Moscow, 123056, Russia; Junior Scientist, e-mail: vvelesin@gmail.com*

² *Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences; ulitsa 2nd Brestskaya 19/18, Moscow, 123056, Russia; Ph.D., Junior Scientist, e-mail: sidr1234@mail.ru*

³ *Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences; ulitsa 2nd Brestskaya 19/18, Moscow, 123056, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: pavel_utk@mail.ru*

Received June 18, 2019

Abstract: This paper is devoted to the development and quantitative estimation of a numerical algorithm based on the Cartesian grid method for the three-dimensional mathematical simulation of shock wave propagation in domains of complex varying shapes. A detailed description of the numerical algorithm is presented. Its key element is the specification of numerical fluxes through the edges that are common for the inner regular cells of the computational domain and the outer cells intersected by the boundaries of the bodies. The efficiency of the algorithm is shown by comparing the numerical and experimental data in the problems of interaction of a shock wave with a fixed sphere and a moving particle.

Keywords: mathematical simulation, three-dimensional Euler equations, Cartesian grid method, shock wave.

References

1. S. V. Dyachenko, “Development of a Software Package for 3D Modeling of Multiphase Multicomponent Flows in Nuclear Power Engineering,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 162–182 (2014).
2. A. V. Glazunov, “Numerical Simulation of Turbulence and Transport of Fine Particulate Impurities in Street Canyons,” *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 17–37 (2018).
3. K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, and I. V. Teterina, “Visualization of Numerical Results Obtained for Gas-Particle Flows Using Lagrangian Approaches to the Dispersed Phase Description,” *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 522–539 (2018).
4. A. A. Fedorov, “Droplet Visualization in FlowVision,” *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 1–8 (2018).
5. I. A. Bedarev and A. V. Fedorov, “Direct Simulation of the Relaxation of Several Particles Behind Transmitted Shock Waves,” *Inzh. Fiz. Zh.* **90** (2), 450–457 (2017) [*J. Eng. Phys. Thermophys.* **90** (2), 423–429 (2017)].
6. O. Sen, N. J. Gaul, K. K. Choi, et al., “Evaluation of Kriging Based Surrogate Models Constructed from Mesoscale Computations of Shock Interaction with Particles,” *J. Comput. Phys.* **336**, 235–260 (2017).
7. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ya. Ivanov, et al., *Numerical Solution of Multidimensional Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
8. R. Mittal and G. Iaccarino, “Immersed Boundary Methods,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37**, 239–261 (2005).
9. W. P. Bennett, N. Nikiporakis, and R. Klein, “A Moving Boundary Flux Stabilization Method for Cartesian Cut-Cell Grids Using Directional Operator Splitting,” *J. Comput. Phys.* **368**, 333–358 (2018).

10. R. B. Pember, J. B. Bell, P. Colella, et al., “An Adaptive Cartesian Grid Method for Unsteady Compressible Flow in Irregular Regions,” *J. Comput. Phys.* **120** (2), 278–304 (1995).
11. P. Colella, D. T. Graves, B. J. Keen, and D. Modiano, “A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Hyperbolic Conservation Laws,” *J. Comput. Phys.* **211** (1), 347–366 (2006).
12. X. Y. Hu, B. C. Khoo, N. A. Adams, and F. L. Huang, “A Conservative Interface Method for Compressible Flows,” *J. Comput. Phys.* **219** (2), 553–578 (2006).
13. L. Schneiders, D. Hartmann, M. Meinke, and W. Schröder, “An Accurate Moving Boundary Formulation in Cut-Cell Methods,” *J. Comput. Phys.* **235**, 786–809 (2013).
14. P. Colella, “Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws,” *J. Comput. Phys.* **87** (1), 171–200 (1990).
15. R. Klein, K. R. Bates, and N. Nikiforakis, “Well-Balanced Compressible Cut-Cell Simulation of Atmospheric Flow,” *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.* **367**, 4559–4575 (2009).
16. L. Schneiders, C. Günther, M. Meinke, and W. Schröder, “An Efficient Conservative Cut-Cell Method for Rigid Bodies Interacting with Viscous Compressible Flows,” *J. Comput. Phys.* **311**, 62–86 (2016).
17. D. K. Clarke, H. A. Hassan, and M. D. Salas, “Euler Calculations for Multielement Airfoils Using Cartesian Grids,” *AIAA J.* **24** (3), 353–358 (1986).
18. J. J. Quirk, “An Alternative to Unstructured Grids for Computing Gas Dynamic Flows around Arbitrarily Complex Two-Dimensional Bodies,” *Comput. Fluids* **23** (1), 125–142 (1994).
19. M. J. Berger, C. Helzel, and R. J. LeVeque, “*H*-box Methods for the Approximation of Hyperbolic Conservation Laws on Irregular Grids,” *SIAM J. Numer. Anal.* **41** (3), 893–918 (2003).
20. D. M. Ingram, D. M. Causon, and C. G. Mingham, “Developments in Cartesian Cut Cell Methods,” *Math. Comput. Simul.* **61** (3–6), 561–572 (2003).
21. S. Xu, T. Aslam, and D. S. Stewart, “High Resolution Numerical Simulation of Ideal and Non-ideal Compressible Reacting Flows with Embedded Internal Boundaries,” *Combust. Theory Model.* **1** (1), 113–142 (1997).
22. G. Yang, D. M. Causon, D. M. Ingram, et al., “A Cartesian Cut Cell Method for Compressible Flows. Part A: Static Body Problems,” *Aeronaut. J.* **101** (1002), 47–56 (1997).
23. P. T. Barton, B. Obadia, and D. Drikakis, “A Conservative Level-Set Based Method for Compressible Solid/Fluid Problems on Fixed Grids,” *J. Comput. Phys.* **230** (21), 7867–7890 (2011).
24. D. Hartmann, M. Meinke, and W. Schröder, “A Strictly Conservative Cartesian Cut-Cell Method for Compressible Viscous Flows on Adaptive Grids,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **200** (9–12), 1038–1052 (2011).
25. A. Pogorelov, M. Meinke, and W. Schröder, “Cut-Cell Method Based Large-Eddy Simulation of Tip-Leakage Flow,” *Phys. Fluids* **27** (2015). doi 10.1063/1.4926515
26. A. Pogorelov, M. Meinke, and W. Schröder, “Effects of Tip-Gap Width on the Flow Field in an Axial Fan,” *Int. J. Heat Fluid Fl.* **61**, 466–481 (2016).
27. A. Pogorelov, L. Schneiders, M. Meinke, and W. Schröder, “An Adaptive Cartesian Mesh Based Method to Simulate Turbulent Flows of Multiple Rotating Surfaces,” *Flow Turbul. Combust.* **100** (1), 19–38 (2018).
28. C. Helzel, M. J. Berger, and R. J. LeVeque, “A High-Resolution Rotated Grid Method for Conservation Laws with Embedded Geometries,” *SIAM J. Sci. Comput.* **26** (3), 785–809 (2005).
29. M. Berger and C. Helzel, “A Simplified *h*-box Method for Embedded Boundary Grids,” *SIAM J. Sci. Comput.* **34** (2), A861–A888 (2012).
30. D. A. Sidorenko and P. S. Utkin, “A Cartesian Grid Method for the Numerical Modeling of Shock Wave Propagation in Domains of Complex Shape,” *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 353–364 (2016).
31. D. A. Sidorenko and P. S. Utkin, “Two-Dimensional Gas-Dynamic Modeling of the Interaction of a Shock Wave with Beds of Granular Media,” *Khim. Fiz.* **37** (9), 43–49 (2018) [*Russ. J. Phys. Chem. B.* **12** (5), 869–874 (2018)].
32. D. A. Sidorenko and P. S. Utkin, “Numerical Modeling of the Relaxation of a Body behind the Transmitted Shock Wave,” *Mat. Model.* **30** (11), 91–104 (2018). [*Math. Models Comput. Simul.* **11** (4), 509–517 (2019)].
33. A. Chertock and A. Kurganov, “A Simple Eulerian Finite-Volume Method for Compressible Fluids in Domains with Moving Boundaries,” *Commun. Math. Sci.* **6** (3), 531–556 (2008).
34. J. L. Steger and R. F. Warming, “Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods,” *J. Comput. Phys.* **40** (2), 263–293 (1981).
35. M. Pandolfi and D. D’Ambrosio, “Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the ‘Carbuncle’ Phenomenon,” *J. Comput. Phys.* **166** (2), 271–301 (2001).

36. H. Tanno, K. Itoh, T. Saito, et al., "Interaction of a Shock with a Sphere Suspended in a Vertical Shock Tube," *Shock Waves* **13** (3), 191–200 (2003).
37. V. M. Boiko, A. V. Fedorov, V. M. Fomin, et al., "Ignition of Small Particles Behind Shock Waves," in *Shock Waves, Explosions and Detonations* (American Inst. of Aeronautics and Astronautics, New York, 1983), pp. 71–87.