

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v20r325

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА С ОПТИМАЛЬНЫМ ВЕСОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

А. И. Сухинов¹, А. Е. Чистяков², В. В. Сидорякина³, С. В. Проценко⁴

Исследована разностная схема с весами для однородного пространственно-одномерного уравнения диффузии–конвекции. Выполнено исследование погрешности аппроксимации разностной схемы в зависимости от шага по времени на основе разложения функции решения и погрешности аппроксимации по тригонометрическому базису. Разработан алгоритм нахождения оптимального значения веса, обеспечивающий минимум погрешности аппроксимации решения исходной начально-краевой задачи для заданных значений шагов временной сетки. Улучшенная точность построенной схемы с оптимальным весом по сравнению с явной схемой и эффективность алгоритма поиска оптимального значения весового параметра продемонстрированы на примере тестовой задачи.

Ключевые слова: уравнение диффузии–конвекции, разностная схема с весами, оптимальное значение весового параметра, погрешность аппроксимации, точность решения.

Введение. Модели диффузии-конвекции описывают многие процессы в сплошных средах [1–3] и находят широкое практическое применение в гидро- и газовой динамике, динамике популяций, транспорте загрязнений в водной и воздушной средах и др. [4–6]. В работах [7–8] показано преимущество явной схемы над неявной для численного решения задачи переноса взвеси. При решении задач гидродинамики мелководных водоемов явно-неявные разностные схемы, предполагающие явную аппроксимацию по горизонтальным направлениям и неявную аппроксимацию с весами по вертикальному направлению, требуют меньших временных затрат на решение задачи диффузии–конвекции по сравнению с явными схемами при сохранении допустимой точности решения. В этой связи целесообразным представляется рассмотрение вопроса о нахождении оптимального весового параметра схемы с весами.

В настоящей статье предложен алгоритм нахождения оптимального значения веса, обеспечивающего минимум погрешности аппроксимации на решении исходной начально-краевой задачи для заданных значений шагов временной сетки. Для поиска значения оптимального параметра схемы с весами выполнено разложение функции решения и погрешности аппроксимации в зависимости от шага по времени по тригонометрическому базису. На основе численной минимизации относительной величины погрешности аппроксимации получено значение оптимального весового параметра, которое в зависимости от шага временной сетки находится в диапазоне 0.5–0.6. Эффективность работы алгоритма продемонстрирована на примере тестовой задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа [9–11]:

$$q'_t + uq'_x = \mu q''_{xx}, \quad u = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$q(x, 0) = q_0(x) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$q(0, t) = 0, \quad q(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

¹ Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону; профессор, зав. кафедрой, e-mail: sukhinov@gmail.com

² Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону; профессор, e-mail: cheese_05@mail.ru

³ Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)), ул. Инициативная, 48, 347936, г. Таганрог; доцент, e-mail: cvv9@mail.ru

⁴ Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону; аспирант, e-mail: rab55555@rambler.ru

Требуется найти решение задачи (1)–(3), принадлежащее классу

$$q(x, t) \in C^2(0 < x < L) \cap C(0 \leq x \leq L) \cap C^1(0 < t < +\infty) \cap C(0 \leq t < +\infty).$$

Конечную сумму ряда Фурье в комплексной форме для функции $q(x, t)$ представим в виде суммы гармонических составляющих разных частот:

$$q(x, t) = \sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x). \quad (4)$$

Здесь $\omega = \frac{\pi}{L}$, m – номер гармоники, $C_m(t) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t) \exp(j\omega m x) dx$ – комплексная амплитуда m -й гармоники, j – мнимая единица [12].

Используя представление функции $q(x, t)$ вида (4), запишем уравнение (1) в форме

$$\left(\sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) \right)'_t + u \left(\sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) \right)'_x = \mu \left(\sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) \right)''_{xx}.$$

Осуществив замену последовательности операций дифференцирования и суммирования ряда и вычислив производную по пространству, получим

$$\sum_{m=-N}^N (C_m(t))'_t \exp(j\omega m x) + j\omega m u \sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) = -\mu \omega^2 m^2 \sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x).$$

Принимая во внимание линейную независимость функций $\exp(j\omega m x)$, находим

$$(C_m(t))'_t = -(\mu \omega^2 m^2 + j\omega m u) C_m(t). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$C_m(t) = C_m(0) \exp(-(\mu \omega^2 m^2 + j\omega m u)t).$$

После проделанных преобразований и вычислений с учетом заданных начальных и граничных условий находим функцию

$$q(x, t) = \sum_{m=-N}^N C_m(0) \exp(-(\mu \omega^2 m^2 + j\omega m u)t) \exp(j\omega m x).$$

Заметим, что при записи уравнения (1) в операторном виде

$$q'_t = -Lq,$$

где $L = -\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \frac{\partial}{\partial x}$ – оператор диффузии–конвекции, выражения $\mu \omega^2 m^2 + j\omega m u$ и $\exp(j\omega m x)$ определяют собственные значения и собственные векторы данного оператора соответственно.

В частности, из работы [13] следует, что для задачи, исходным уравнением которой является уравнение вида

$$q'_t = \mu q''_{xx},$$

а начальные и граничные условия совпадают с условиями (2), (3), аналитическое решение определяется по формуле

$$q(x, t) = \sum_{m=1}^N C_m^*(0) \exp(-\mu \omega^2 m^2 t) \sin(\omega m x),$$

где $\sin(\omega m x)$ – собственные векторы оператора $L = -\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $C_m^*(0) = 2jC_m(0)$ [14].

2. Точность численного решения задачи диффузии–конвекции. Определим ряды Фурье для сеточной функции. С этой целью покроем расчетную область равномерной пространственной сеткой $w_x = \{x_i = ih; i = \overline{0, N}; Nh = L\}$, где h – шаг по пространству и N – количество узлов по пространству.

Дискретный аналог уравнения (1) запишем в виде

$$q'_{t,i} + uq_{x,i} = \mu q_{xx,i}, \tag{6}$$

где

$$q_i = 2 \sum_{m=1}^N \left(\operatorname{Re}(C_m) \cos\left(\frac{\pi m i}{N}\right) - \operatorname{Im}(C_m) \sin\left(\frac{\pi m i}{N}\right) \right),$$

или

$$q_i = \sum_{m=-N}^N C_m \exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right), \tag{7}$$

$$q_{x,i} = \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2h}, \quad q_{xx,i} = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2}. \tag{8}$$

При этом для амплитуды “гармоники нулевой частоты” (постоянной при $m = 0$) имеем $C_0 = 0$.

Подставляем выражения (7), (8) в уравнение (6) и получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=-N}^N (C_m)'_t \exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right) + u \sum_{m=-N}^N C_m \frac{\exp\left(\frac{j\pi m(i+1)}{N}\right) - \exp\left(\frac{j\pi m(i-1)}{N}\right)}{2h} = \\ = \mu \sum_{m=-N}^N C_m \frac{\exp\left(\frac{j\pi m(i+1)}{N}\right) - 2\exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right) + \exp\left(\frac{j\pi m(i-1)}{N}\right)}{h^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Выполняя несложные преобразования выражения (9), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=-N}^N (C_m)'_t \exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right) + u \sum_{m=-N}^N C_m \frac{\exp\left(\frac{j\pi m}{N}\right) - \exp\left(\frac{-j\pi m}{N}\right)}{2h} \exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right) = \\ = \mu \sum_{m=-N}^N C_m \frac{\exp\left(\frac{j\pi m}{N}\right) - 2 + \exp\left(\frac{-j\pi m}{N}\right)}{h^2} \exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

В силу линейной независимости функций $\exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right)$ из (10) находим

$$(C_m)'_t = - \left(2\mu \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{h^2} + ju \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{h} \right) C_m. \tag{11}$$

При замене уравнения (6) на равносильное уравнение вида $q'_t = -\Lambda q$ с учетом (11) получим, что собственным функциям $\exp\left(\frac{j\pi m i}{N}\right)$ оператора $\Lambda q = \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2h} - \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2}$ соответствуют собственные значения

$$\lambda_m = 2\mu \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{h^2} + ju \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{h}. \tag{12}$$

Рассмотрим пространственно-временную сетку $w = w_x \times w_\tau$, введя дополнительно сетку по времени $w_\tau = \{t^n = n\tau; n = \overline{0, N_t}, N_t\tau = T\}$, где τ – шаг по времени и N_t – количество узлов по времени.

Для аппроксимации уравнения (1) по временной переменной используются схемы с весами

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau} = -\lambda_m (\sigma C_m^{n+1} + (1 - \sigma)C_m^n), \tag{13}$$

где $C_m^{n+\sigma} = \sigma C_m^{n+1} + (1 - \sigma)C_m^n$, $\sigma \in [0, 1]$ – вес схемы.

Введем обозначения

$$\lambda_{\max} = \max_m |\lambda_m|, \quad t_0 = \lambda_{\max} t, \quad \tau_0 = \lambda_{\max} \tau. \quad (14)$$

С учетом (14) производная $(C_m)'_t$ запишется в виде

$$(C_m)'_t = (C_m)'_{t_0} (t_0)'_t. \quad (15)$$

Подставим (15) в уравнение (13):

$$(C_m)'_{t_0} = -\frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} C_m. \quad (16)$$

Таким образом, получим, что решение уравнения (6) сводится к решению задачи (16). Запишем точное решение задачи (16) с учетом обозначений (14):

$$C_m(t^{n+1}) = C_m(t^n) \exp\left(-\frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \tau_0\right). \quad (17)$$

Аппроксимация данного уравнения с учетом схем с весами в тех же обозначениях принимает вид

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau_0} = -\frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} (\sigma C_m^{n+1} + (1 - \sigma) C_m^n). \quad (18)$$

Следует отметить, что явная схема ($\sigma = 0$) монотонна при $\tau_0 \leq 1$ и устойчива при $\tau_0 \leq 2$. Выражение (18) может быть записано в следующей форме:

$$C_m^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \tau_0}{1 + \frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \tau_0 \sigma} \right) C_m^n, \quad (19)$$

где C_m^{n+1} — приближенное значение функции $C_m(x, t)$ на текущем временном слое и C_m^n — на предыдущем.

3. Погрешность численного решения уравнения диффузии. Значение погрешности на n -м временном слое через точное значение $C_m(t^n)$ и приближенное значение функции C_m^n может быть выражено следующей функцией:

$$\psi_m^n = C_m^n - C_m(t^n). \quad (20)$$

Погрешность аппроксимации по временной переменной на n -м слое будет меньше либо равна $\max_m |\psi_m^n|$.

Введем обозначение

$$\chi_m = \frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \tau_0, \quad \chi_m \in [0, \tau_0]. \quad (21)$$

Запишем (19) в обозначениях (21):

$$C_m^n = \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right) C_m^{n-1}. \quad (22)$$

Подставим (20) в выражение (22) и получим

$$\psi_m^n = \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right) \psi_m^{n-1} + C_m(t^{n-1}) \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right) - C_m(t^n). \quad (23)$$

Полученное выражение (23) с учетом (17) примет вид

$$\psi_m^n = \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right) \psi_m^{n-1} + C_m(t^{n-1}) \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} - \exp(-\chi_m) \right).$$

Находим погрешность на n -м временном слое

$$\begin{aligned} \psi_m^n &= \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right) \left(\left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right) \psi_m^{n-2} + C_m(t^{n-2}) \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} - \exp(-\chi_m) \right) \right) + \\ &+ C_m(t^{n-1}) \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} - \exp(-\chi_m) \right) = \dots = \left(C_m(0) \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right)^{n-1} + \dots + \right. \\ &\left. + C_m(t^{n-2}) \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} \right) + C_m(t^{n-1}) \right) \left(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \sigma} - \exp(-\chi_m) \right). \end{aligned}$$

Получим оценку погрешности численного решения исходной задачи

$$|\psi_m^n| \leq \max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)| \left| (1 - \exp(-\chi_m))\sigma + \frac{1 - \exp(-\chi_m) - \chi_m}{\chi_m} \right|. \tag{24}$$

Данная оценка имеет место в случае $\left| 1 - \frac{\tau_0}{1 + \tau_0\sigma} \right| < 1$, откуда следует ограничение $\tau_0 < 2/(1 - 2\sigma)$.

Относительно переменной χ_m погрешность может быть записана так:

$$|\psi_m^n| \leq \max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)| \left| (1 - \exp(-\chi_m))\sigma + \frac{1 - \exp(-\chi_m) - \chi_m}{\chi_m} \right|. \tag{25}$$

Значение относительной погрешности ϕ_m определяется по формуле

$$\phi_m = \frac{|\psi_m^n|}{\max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)|} = \left| (1 - \exp(-\chi_m))\sigma + \frac{1 - \exp(-\chi_m) - \chi_m}{\chi_m} \right|.$$

4. Оптимизация веса схемы. Найдем параметр σ , при котором погрешность минимальна [13–14]. Введем обозначение

$$z_{1,m} = 1 - \exp(-\chi_m), \quad z_{2,m} = \frac{1 - \exp(-\chi_m) - \chi_m}{\chi_m} \tag{26}$$

и, используя теорему Парсеваля [15], из выражения (24) находим

$$\begin{aligned} \|\Psi^n\|^2 &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)|^2 \left[((\operatorname{Re} z_{1,m})^2 + (\operatorname{Im} z_{1,m})^2)\sigma^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(\operatorname{Re} z_{1,m} \operatorname{Re} z_{2,m} + \operatorname{Im} z_{1,m} \operatorname{Im} z_{2,m})\sigma + (\operatorname{Re} z_{2,m})^2 + (\operatorname{Im} z_{2,m})^2 \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} s_m(\chi_m, \sigma) &= \sum_{m=1}^N \max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)|^2 \left[((\operatorname{Re} z_{1,m})^2 + (\operatorname{Im} z_{1,m})^2)\sigma^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(\operatorname{Re} z_{1,m} \operatorname{Re} z_{2,m} + \operatorname{Im} z_{1,m} \operatorname{Im} z_{2,m})\sigma + (\operatorname{Re} z_{2,m})^2 + (\operatorname{Im} z_{2,m})^2 \right]. \end{aligned} \tag{27}$$

Необходимо определить точку, в которой функция (27), взятая по модулю, достигает минимального значения по переменной σ . С этой целью найдем точки экстремума функции (27) по переменной σ :

$$\begin{aligned} (s_m(\chi, \sigma))'_\sigma &= 2 \sum_{m=1}^N \max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)|^2 \left[((\operatorname{Re} z_{1,m})^2 + (\operatorname{Im} z_{1,m})^2)\sigma + \right. \\ &\quad \left. + (\operatorname{Re} z_{1,m} \operatorname{Re} z_{2,m} + \operatorname{Im} z_{1,m} \operatorname{Im} z_{2,m}) \right] = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Из (28) получаем

$$\sigma = - \frac{\sum_{m=1}^N \max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)|^2 (\operatorname{Re} z_{1,m} \operatorname{Re} z_{2,m} + \operatorname{Im} z_{1,m} \operatorname{Im} z_{2,m})}{\sum_{m=1}^N \max_{k=0, n-1} |C_m(t^k)|^2 ((\operatorname{Re} z_{1,m})^2 + (\operatorname{Im} z_{1,m})^2)}. \tag{29}$$

Существующий результат можно расширить на многомерный случай, в частности на двумерные и трехмерные начально-краевые задачи, при этом аналогом уравнения (14) будет служить многомерное преобразование Фурье.

Опишем алгоритм решения задачи диффузии–конвекции на основе разностной схемы с оптимальными весами [16–17].

1. Формулируется начально-краевая задача вида (1)–(3).
2. Вычисляются коэффициенты ряда Фурье с использованием выражения

$$C_m(0) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, 0) \exp(j\omega t x) dx,$$

которые участвуют в разложении по тригонометрическому базису начального условия задачи по формуле (4):

$$q(x, 0) = \sum_{m=-N}^N C_m(0) \exp(j\omega t x).$$

3. Определяем собственные значения λ_m по формуле (12):

$$\lambda_m = - \left(2\mu \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{h^2} + ju \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{h} \right)$$

и значение λ_{\max} из формул (14): $\lambda_{\max} = \max_m |\lambda_m|$.

4. Для определения погрешности на каждом временном слое вычисляем значение χ_m по формуле (21):

$$\chi_m = \frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \tau_0.$$

5. Находим числа $z_{1,m}$, $z_{2,m}$, используя формулы (26):

$$z_{1,m} = 1 - \exp(-\chi_m), \quad z_{2,m} = \frac{1 - \exp(-\chi_m) - \chi_m}{\chi_m}.$$

6. Для текущего временного слоя вычисляются коэффициенты Фурье с использованием выражения

$$C_m(t^n) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t^n) \exp(j\omega t x) dx.$$

7. Определяем весовой параметр $\sigma \equiv \sigma^{n+1}$, при котором относительная погрешность минимальна, по формуле (29):

$$\sigma = - \frac{\sum_{m=1}^N \max_{k=0, n} |C_m(t^k)|^2 (\operatorname{Re} z_{1,m} \operatorname{Re} z_{2,m} + \operatorname{Im} z_{1,m} \operatorname{Im} z_{2,m})}{\sum_{m=1}^N \max_{k=0, n} |C_m(t^k)|^2 ((\operatorname{Re} z_{1,m})^2 + (\operatorname{Im} z_{1,m})^2)}.$$

8. На основе разностной схемы с весами выражаем значение функции $q(x, t)$ на текущем временном слое q^{n+1} через значения q^n на предыдущем слое с начальным условием

$$q_i^0 = q_0(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = L$$

, и граничными условиями

$$q_0^n = 0, \quad q_N^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_t - 1.$$

9. Нарастивание индекса по времени $n \leftarrow n + 1$.
10. Если не рассчитан последний слой по времени $n < N_t$, то возврат на шаг 6.

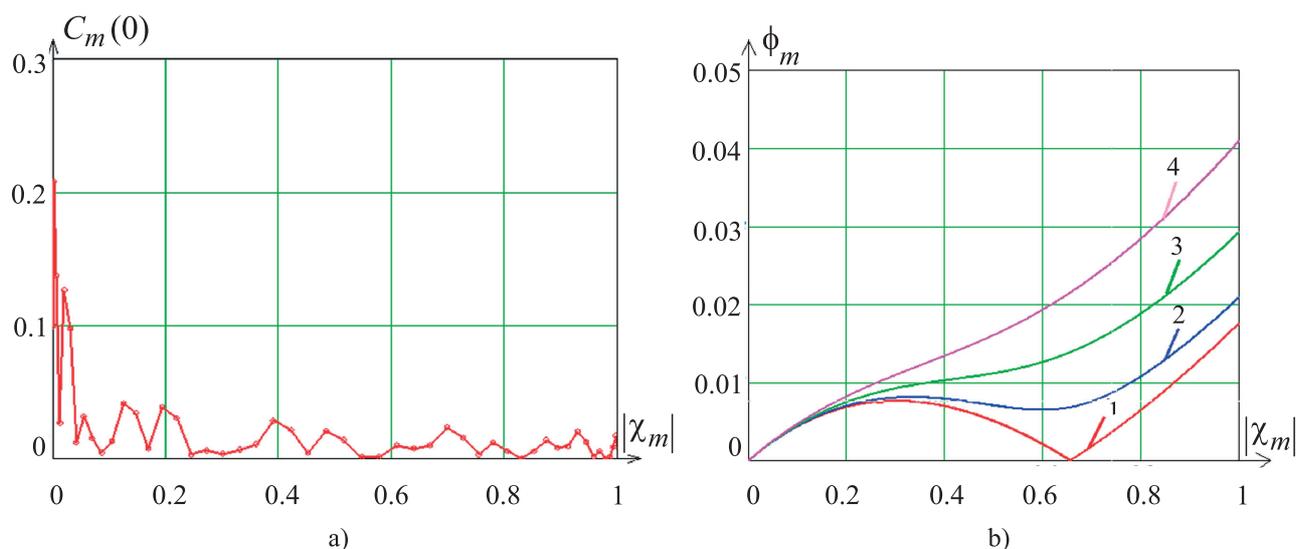


Рис. 1. Значение спектра поля концентрации в начальный момент времени (а), графики зависимостей относительной погрешности ϕ_m от значений $|\chi_m|$ для различных значений аргумента функции (б)

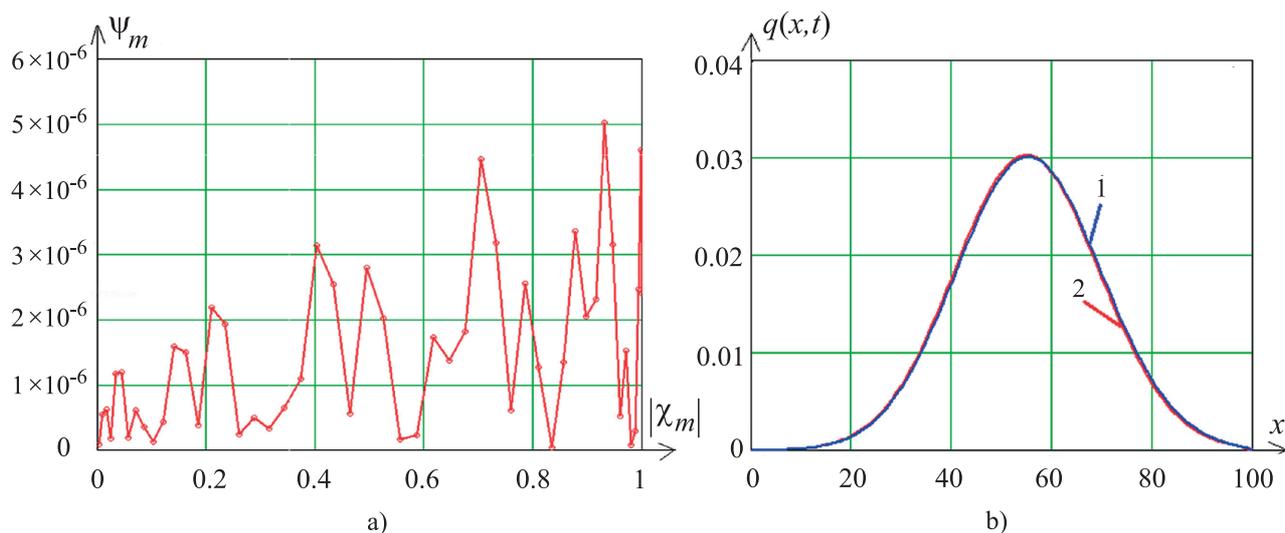


Рис. 2. График зависимости погрешности ψ_m от значений $|\chi_m|$ (а), графики функций решения тестовой задачи, полученных при использовании явной схемы и схемы с оптимальным весом (б)

5. Тестовая задача. Требуется найти решение уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2), (3), для которого $u = 0.4$ м/с, $\mu = \text{const}$, $0 < x < L$, $t > 0$ и $q(0, t) = q(L, t) = 0$, с начальными условиями $q_0(x) = h(20 - x) - h(10 - x)$ — функция Хэвисайда. В приведенных выше условиях данные записаны в системе измерений СИ, а функции $q_0(x)$, $q(x, t)$ и граничные условия считаем безразмерными.

На рис. 1б представлены графики зависимостей относительной погрешности ϕ_m от значений $|\chi_m|$, полученные для разных значений аргумента функции χ_m (1 — $\arg \chi_m = 0$; 2 — $\arg \chi_m = \pi/12$; 3 — $\arg \chi_m = \pi/6$; 4 — $\arg \chi_m = \pi/4$). Рисунок показывает, что с увеличением значения аргумента функции χ_m относительная погрешность численного решения задачи возрастает.

Оптимизация веса схемы выполнена из соображений минимизации погрешности (25). На рис. 2а приведена зависимость погрешности ψ_m от значений $|\chi_m|$ численного решения задачи диффузии–конвекции на основе схемы с оптимальным весом, описывающая погрешности определения коэффициентов при собственных функциях. Значение оптимального весового параметра находится в диапазоне 0.5–0.6. На рис. 2б показаны графики функции решения: 1 — график функции решения, полученный с использованием явной схемы ($N = 10000$, $\tau = 1/100$ сек.), 2 — график функции решения, полученный с использованием схемы с оптимальным весом (13) ($N = 100$, $\tau = 1$ сек.).

На рис. 2б видим, что указанные графики практически совпадают. Таким образом, для достижения

заданной точности явной схемы потребуется сделать в 100 раз больше шагов, чем для схемы с оптимальным весом.

Заключение. В настоящей статье рассматривается задача нахождения оптимального параметра схемы с весами для одномерного уравнения диффузии–конвекции. Получена оценка погрешности аппроксимации уравнения по временной переменной. Получены зависимости оптимального веса и шага схемы от величины относительной погрешности. На примере решения тестовой задачи показана эффективность использования схемы с оптимальным весом вида (21) в сравнении с явной схемой. Результаты данной работы путем несложных преобразований могут быть обобщены на случай неоднородного или многомерного уравнения диффузии–конвекции [16–18].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19–01–00701).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подгорный К.А., Леонов А.В. Моделирование процессов распространения взвешенного вещества в морских прибрежных акваториях. 1. Описание SM-модели // *Океанологические исследования*. 2017. **45**, № 1. 109–141.
2. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Гибридный подход к решению одномерных уравнений газовой динамики // *Математическое моделирование*. 2018. **30**, № 8. 17–31.
3. Morton K.W., Kellogg R.B. Numerical solution of convection–diffusion problems. London: Chapman and Hall, 1996.
4. Вабищевич П.Н., Захаров П.Е. Схемы попеременно-треугольного метода для задач конвекции–диффузии // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. **56**, № 4. 587–604.
5. Hundsdorfer W., Verwer J.G. Numerical solution of time-dependent advection–diffusion–reaction equations. Berlin: Springer, 2003.
6. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2017. **57**, № 6. 985–1002.
7. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах // *Вычислительные методы программирования*. 2015. **16**. 328–338.
8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V. Parallel solution of sediment and suspension transportation problems on the basis of explicit schemes // *Communications in Computer and Information Science*. Vol. 910. Cham: Springer, 2018. 306–321.
9. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987.
10. Самарский А.А., Гумин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Едиториал, 2004.
12. Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1940. **4**, № 6. 521–528.
13. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишнев А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // *Матем. моделирование*. 2013. **25**, № 11. 53–64.
14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Яковлевский М.В. Точность численного решения уравнения диффузии–конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ.* 2016. **5**, № 1. 47–62.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
16. Afanas'eva N.M., Churbanov A.G., Vabishchevich P.N. Unconditionally monotone schemes for unsteady convection–diffusion Problems // *Comput. Meth. Applied Math.* 2013. **13**, N 2. 185–205.
17. Sutton T.M., Aviles B.N. Diffusion theory methods for spatial kinetics calculations // *Progress in Nuclear Energy*. 1996. **30**, N 2. 119–182.
18. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. Reconstruction of 2001 ecological disaster in the Azov sea on the basis of precise hydrophysics models // *Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications*. Amsterdam: Elsevier, 2005. 231–238.

Поступила в редакцию
3.06.2019

A Difference Scheme with the Optimal Weight for the Diffusion–Convection Equation

A. I. Sukhinov¹, A. E. Chistyakov², V. V. Sidoryakina³, and S. V. Protsenko⁴

¹ Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Department, e-mail: sukhinov@gmail.com

² Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: cheese_05@mail.ru

³ A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State Economical University; ul. Initsiativnaya 48, Taganrog, 347936, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: cvv9@mail.ru

⁴ Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Graduate Student, e-mail: rab55555@rambler.ru

Received June 3, 2019

Abstract: A difference scheme with weights for a homogeneous spatially one-dimensional diffusion–convection equation is studied. An analysis of the approximation error for the difference scheme as a time step function is performed on the basis of the expansion of the solution and approximation error in a trigonometric basis. An algorithm is proposed to find the optimal weight value that ensures the minimum approximation error of the solution to an initial boundary value problem for given values of the time grid steps. A better accuracy of the constructed scheme with the optimal weight compared to the explicit scheme as well as the efficiency of the algorithm for finding the optimal weight value is shown using a test problem.

Keywords: diffusion–convection equation, difference scheme with weights, optimal value of the weight parameter, approximation error, solution accuracy.

References

1. K. A. Podgornyi and A. V. Leonov, “Modelling of Suspended Matter Distribution in Marine Coastal Areas. 1. Description of the SM-model,” *Okeanologich. Issled.* **45** (1), 109–141 (2017).
2. Y. A. Kriksin and V. F. Tishkin, “Hybrid Approach to Solve Single-Dimensional Gas Dynamics Equations,” *Mat. Model.* **30** (8), 17–31 (2018) [*Math. Models Comput. Simul.* **11** (2), 256–265 (2019)].
3. K. W. Morton and R. B. Kellogg, *Numerical Solution of Convection–Diffusion Problems* (Chapman and Hall, London, 1996).
4. P. N. Vabishchevich and P. E. Zakharov, “Alternating Triangular Schemes for Convection–Diffusion Problems,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **56** (4), 587–604 (2016) [*Comput. Math. Math. Phys.* **56** (4), 576–592 (2016)].
5. W. Hundsdorfer and J. G. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations* (Springer, Berlin, 2003).
6. V. V. Sidoryakina and A. I. Sukhinov, “Well-Posedness Analysis and Numerical Implementation of a Linearized Two-Dimensional Bottom Sediment Transport Problem,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **57** (6), 985–1002 (2017) [*Comput. Math. Math. Phys.* **57** (6), 978–994 (2017)].
7. A. I. Sukhinov, E. A. Protsenko, A. E. Chistyakov, and S. A. Shreter, “Comparison of Computational Efficiency of Explicit and Implicit Schemes for the Sediment Transport Problem in Coastal Zones,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 328–338 (2015).
8. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and V. V. Sidoryakina, “Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes,” in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2018), Vol. 910, pp. 306–321.
9. G. I. Marchuk, V. P. Dymnikov, and V. B. Zalesnyi, *Mathematical Models in Geophysical Fluid Dynamics and Numerical Methods of Their Implementation* (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1987) [in Russian].
10. A. A. Samarskii and A. V. Gulina, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
11. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Convection–Diffusion Problems* (Editorial, Moscow, 2004) [in Russian].
12. V. T. Pinkevich, “The Order of the Remainder Term of Fourier Series of Functions Which are Differentiable in the Sense of Weyl,” *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Matem.* **4** (6), 521–528 (1940).
13. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and A. V. Shishenya, “Error Estimate for Diffusion Equations Solved by Schemes with Weights,” *Mat. Model.* **25** (11), 53–64 (2013) [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (3), 324–331 (2014)].
14. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and M. V. Yakobovskii, “Accuracy of the Numerical Solution of the Equations of Diffusion-Convection Using the Difference Schemes of Second and Fourth Order Approximation Error,” *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Vychisl. Mat. Inf.* **5** (1), 47–62 (2016).
15. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 2004; Dover, New York, 2011).

16. N. M. Afanas'eva, A. G. Churbanov, and P. N. Vabishchevich, "Unconditionally Monotone Schemes for Unsteady Convection–Diffusion Problems," *Comput. Methods Appl. Math.* **13** (2), 185–205 (2013).
17. T. M. Sutton and B. N. Aviles, "Diffusion Theory Methods for Spatial Kinetics Calculations," *Prog. Nucl. Energ.* **30** (2), 119–182 (1996).
18. A. I. Sukhinov and A. A. Sukhinov, "Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models," in *Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications* (Elsevier, Amsterdam, 2005), pp. 231–238.