УДК 519.6; 517.958:5 doi 10.26089/NumMet.v20r323

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ 3D УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

А. В. Гончарский[1], В. А. Кубышкин[2], С. Ю. Романов[3], С. Ю. Серёжников[4]

Обратная задача 3D ультразвуковой томографии рассматривается в статье как нелинейная коэффициентная обратная задача для уравнения гиперболического типа. Используемая математическая модель хорошо описывает как дифракционные эффекты, так и поглощение ультразвука в неоднородной среде. В рассматриваемой постановке реконструируется скорость распространения акустической волны как функция трех координат. Количество неизвестных в нелинейной обратной задаче составляет порядка 50 миллионов. Разработанные итерационные алгоритмы решения обратной задачи ориентированы на использование GPU-кластеров. Основным результатом работы является апробация алгоритмов на экспериментальных данных. В эксперименте использовался стенд для 3D ультразвуковых томографических исследований, разработанный в МГУ имени М. В. Ломоносова. Акустические параметры фантомов близки к акустическим параметрам мягких тканей человека. Объем экспериментальных данных составляет порядка 3 ГБ. Интерпретация данных эксперимента позволила не только продемонстрировать эффективность разработанных алгоритмов, но и подтвердила адекватность математической модели реальности. Для реализации разработанных численных алгоритмов использовался графический кластер суперкомпьютера “Ломоносов-2”.

Ключевые слова: ультразвуковая томография, обратные задачи, медицинская диагностика, GPU кластер.

1. Введение. Термин “3D ультразвуковая томография” требует уточнения. “Томо” в переводе с греческого означает “срез”. Наиболее широко в практике используется послойная “2.5D” томография, в которой исследование 3D объекта осуществляется по отдельным двумерным сечениям. Такая схема исследований типична для рентгеновской, МРТ, позитронно-эмиссионной томографии [1]. Эта же схема зачастую используется и в ультразвуковой томографии [2, 3]. В обратных задачах волновой томографии, к которой относится и ультразвуковая томография, ситуация намного сложнее, чем, например, в рентгеновской томографии. Коэффициент рефракции рентгеновских лучей для любого вещества практически равняется единице, что позволяет без труда свести трехмерную обратную задачу к набору двумерных обратных задач.

В волновой томографии значимыми являются эффекты дифракции и рефракции волн. По этой причине обратную задачу нужно формулировать как трехмерную коэффициентную обратную задачу, в которой скорость распространения волны внутри исследуемого объекта и коэффициент поглощения ищутся как функции трех координат [4]. Именно в такой полностью трехмерной постановке рассматривается обратная задача ультразвуковой томографии в настоящей работе.

Одним из наиболее интересных приложений ультразвуковой томографии является дифференциальная диагностика рака молочной железы. Работы в этом направлении ведутся в США, Германии, России [2, 5–7]. Разработки находятся на стадии макетов и прототипов. Прорывные математические результаты в области решения обратных задач волновой томографии получены в последнее десятилетие. В основе этих результатов лежит формула для прямого вычисления градиента функционала невязки между экспериментальным и численно рассчитанным волновым полем [8–10]. Последний результат позволяет предложить эффективные итерационные алгоритмы для решения обратной задачи 3D ультразвуковой томографии [11].

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет фундаментальной медицины, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. кафедрой, e-mail: info@fbm.msu.ru
[3] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com
[4] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; электроник, e-mail: s2110sj@gmail.com

Рассматриваемая обратная задача является нелинейной. Вследствие этого итерационные градиентные методы минимизации функционала невязки могут сходиться к точке локального, а не глобального минимума. Акустические параметры мягких тканей мало отличаются от параметров воды. Это означает, что в качестве начального приближения для метода градиентного спуска разумно использовать скорость распространения волны в воде. Как показали вычислительные эксперименты [12], при решении типовых задач томографической диагностики итерационный процесс минимизации функционала невязки вполне может остановиться в точке локального минимума.

В настоящей работе предложен так называемый поэтапный метод решения обратной задачи ультразвуковой томографии. Экспериментальные данные, регистрируемые каждым детектором, представляют собой одномерные сигналы, зависящие от времени. Суть поэтапного метода заключается в том, что на первом этапе принятые сигналы фильтруются, и для расчетов используется только низкочастотная часть спектра сигналов от 50 до 200 кГц. В качестве начального приближения для итерационного процесса на первом этапе используется константа. На втором этапе для расчетов используется более широкая полоса спектра, а в качестве начального приближения используется приближенное решение, полученное на первом этапе. На последующих этапах полоса спектра расширяется далее, пока не будет использован весь спектр зарегистрированных сигналов. Верхняя граница спектра сдвигается в область более высоких частот, а нижняя граница 50 кГц остается неизменной. Разрешающая способность томографа определяется верхней границей спектральной полосы.

Предложенный поэтапный метод решения обратных задач волновой томографии обеспечивает сходимость итерационного процесса к точке глобального минимума, а также позволяет существенно сократить время расчетов. Эффективность поэтапного метода продемонстрирована на реальных экспериментальных данных. Интерпретация данных эксперимента позволила не только продемонстрировать эффективность разработанных алгоритмов, но и подтвердила адекватность используемой математической модели.

Эксперименты проводились на стенде для ультразвуковых томографических исследований, разработанном в НИВЦ МГУ [13]. Исследуемый образец (“фантом”) по акустическим параметрам был близок к мягким тканям человека. Акустическое поле регистрировалось на цилиндрической поверхности прецизионным гидрофоном. В качестве источников зондирующих импульсов использовались широкополосные пьезокерамические излучатели, волновой фронт которых близок к сферическому.

Количество положений источников N_s в эксперименте составляло 48, а количество положений приемника $N_d \approx 20\,000$. В томографических исследованиях качество реконструированного изображения напрямую зависит от произведения $N_s \cdot N_d$, которое в эксперименте составляло около 1 млн. Такой выбор параметров N_s и N_d не является случайным. Вычислительная сложность разработанного метода решения обратных задач волновой томографии не зависит от N_d и прямо пропорциональна N_s. Оптимальный вариант распараллеливания алгоритма на GPU-кластерах достигается, когда в схеме эксперимента используется сравнительно небольшое количество положений источников и очень большое количество положений приемника. Выбранное соотношение параметров N_s и N_d также обеспечивает высокое качество реконструированных ультразвуковых изображений.

С вычислительной точки зрения рассматриваемые обратные задачи 3D ультразвуковой томографии являются чрезвычайно сложными. Для решения таких задач необходимо использовать суперкомпьютеры. В статье показано, что наиболее эффективным для реализации предложенных алгоритмов является использование графических кластеров. Расчеты проводились на GPU-разделе суперкомпьютера “Ломоносов-2” МГУ [14].

Интерпретация данных, полученных в эксперименте, показала, что в обратных задачах 3D ультразвуковой томографии можно достичь пространственного разрешения порядка 2 мм даже при сравнительно невысоком контрасте исследуемого объекта, составлявшем не более 20%. В обратной задаче реконструируются как скорость звука, так и коэффициент поглощения как функции трех пространственных координат. Скоростной разрез реконструируется лучше, чем коэффициент поглощения. В реальных задачах диагностики мягких тканей поглощение является значимым фактором [15, 16], поэтому для интерпретации данных использовалась математическая модель, учитывающая как дифракционные эффекты, так и поглощение.

2. Постановка обратной задачи 3D ультразвуковой томографии. Основным результатом настоящей работы является тот факт, что разработанные алгоритмы решения обратных задач 3D волновой томографии были впервые апробированы на экспериментальных данных. Схема эксперимента приведена на рис. 1. Исследуемый объект 1 расположен в заполненной водой емкости. Источники зондирующих импульсов 2 расположены вокруг объекта. Акустическое поле измеряется на цилиндрической поверхности 3. Измерения волнового поля проводятся для каждого положения источника. Такая схема томографического обследования может быть использована в медицинском томографическом комплексе для ранней диагностики рака молочной железы.

Обратная задача состоит в том, чтобы по всем измеренным данным восстановить скорость звука $c(\boldsymbol{r})$ внутри исследуемого объекта как функцию трех координат $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$. Для решения этой обратной задачи использовалась скалярная волновая модель, описываемая гиперболическим уравнением второго порядка. Эта модель учитывает эффекты дифракции, рефракции и поглощения ультразвуковых волн. Согласно скалярной волновой модели, акустическое давление $u(\boldsymbol{r}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$c(\boldsymbol{r})u_{tt}(\boldsymbol{r}, t) + a(\boldsymbol{r})u_t(\boldsymbol{r}, t) - \Delta u(\boldsymbol{r}, t) = 0; \quad (1)$$

$$u(\boldsymbol{r}, t)\big|_{t=0} = F_0(\boldsymbol{r}), \quad u_t(\boldsymbol{r}, t)\big|_{t=0} = F_1(\boldsymbol{r}). \quad (2)$$

Здесь $c(\boldsymbol{r}) = 1/v^2(\boldsymbol{r})$, $v(\boldsymbol{r})$ — искомая скорость распространения волны, $a(\boldsymbol{r})$ — коэффициент поглощения, Δ — оператор Лапласа по переменной $\boldsymbol{r}$. Начальные условия $F_0(\boldsymbol{r})$ и $F_1(\boldsymbol{r})$ определяют волновое поле в начальный момент времени.

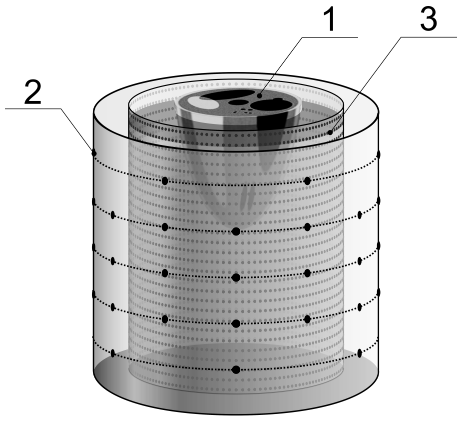


Рис. 1. Схема эксперимента

Обратная задача определения коэффициентов волнового уравнения является некорректно-поставленной [17, 18]. Сформулируем эту задачу как задачу минимизации функционала невязки

$$\Phi\big(u(c, a)\big) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \int\limits_S \big(u(\boldsymbol{s}, t) - U(\boldsymbol{s}, t)\big)^2 \, d\boldsymbol{s} \, dt \quad (3)$$

по его аргументу (c, a). Здесь волновое поле $u(\boldsymbol{s}, t)$ является решением прямой задачи (1)–(2) в точках $\boldsymbol{s}$, где располагаются приемники, при заданных коэффициентах $c(\boldsymbol{r}) = 1/v^2(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$. Точное решение обратной задачи представляет собой такие значения $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$, при которых решение $u(\boldsymbol{s}, t)$ прямой задачи (1)–(2) в точках $\boldsymbol{s}$ совпадает с волновым полем $U(\boldsymbol{s}, t)$, измеренным приемниками в этих точках. Значение функционала невязки представляет собой сумму значений (3), полученных при каждом положении источника зондирующего излучения.

Представления для градиента функционала невязки $\Phi'(c, a)$ в различных постановках были получены в работах авторов [4, 10, 19]. Градиент $\Phi'\big(u(c, a)\big) = \big\{\Phi'_c(u), \Phi'_a(u)\big\}$ функционала невязки представляет собой главную линейную часть приращения функционала относительно вариации искомых коэффициентов $\{dc, da\}$ и имеет следующий вид:

$$\Phi'_c\big(u(c)\big) = \int\limits_0^T w_t(\boldsymbol{r}, t)u_t(\boldsymbol{r}, t)\, dt, \quad \Phi'_a\big(u(a)\big) = \int\limits_0^T w_t(\boldsymbol{r}, t)u(\boldsymbol{r}, t)\, dt. \quad (4)$$

Здесь $u(\boldsymbol{r}, t)$ — решение прямой задачи (1)–(2), а $w(\boldsymbol{r}, t)$ — решение следующей, “сопряженной” задачи при заданных $c(\boldsymbol{r})$, $a(\boldsymbol{r})$ и $u(\boldsymbol{r}, t)$:

$$c(\boldsymbol{r})w_{tt}(\boldsymbol{r}, t) - a(\boldsymbol{r})w_t(\boldsymbol{r}, t) - \Delta w(\boldsymbol{r}, t) = E(\boldsymbol{r}, t); \quad (5)$$

$$w(\boldsymbol{r}, t = T) = 0, \quad w_t(\boldsymbol{r}, t = T) = 0. \quad (6)$$

В тех точках, где измеренное волновое поле $U(\boldsymbol{r}, t)$ известно, $E(\boldsymbol{r}, t) = u(\boldsymbol{r}, t) - U(\boldsymbol{r}, t)$. В остальных точках полагается $E(\boldsymbol{r}, t) = 0$. На границе расчетной области ставятся условия неотражения [20]. Для вычисления градиента (4) нужно решить прямую задачу (1)–(2) и сопряженную задачу (5)–(6). Зная градиент, можно минимизировать функционал невязки с помощью итерационных градиентных методов.

3. Численные методы решения обратной задачи 3D ультразвуковой томографии.

3.1. Аппроксимация волнового уравнения. Для численной реализации предложенного метода решения обратных задач волновой томографии был использован конечно-разностный метод. Конечно-разностные методы эффективно распараллеливаются на графических процессорах и GPU-кластерах [21]. В такой постановке решение дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. На области изменения аргументов $\boldsymbol{r}$ и t введем равномерную дискретную сетку

$$x_i = ih,\ 0 \leqslant i < n; \quad y_j = jh,\ 0 \leqslant j < n; \qquad z_l = lh,\ 0 \leqslant l < n; \quad t_k = k\tau,\ 0 \leqslant k < m,$$

где h — шаг сетки по пространственным переменным, τ — шаг сетки по времени. Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $\sqrt{3}\,c^{-0.5}\tau < h$. Здесь $c^{-0.5} = v$ — скорость звука. Для аппроксимации уравнения (1) используем следующую разностную схему 2-го порядка:

$$c_{ijl}\,\frac{u_{ijl}^{k+1} - 2u_{ijl}^{k} + u_{ijl}^{k-1}}{\tau^2} + a_{ijl}\,\frac{u_{ijl}^{k+1} - u_{ijl}^{k-1}}{\tau} - \frac{\Delta u_{ijl}^{k}}{h^2} = 0. \tag{7}$$

Здесь $u_{ijl}^{k} = u(x_i, y_j, z_l, t_k)$ — значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ в точке (i, j, l) в момент времени k; c_{ijl} и a_{ijl} — значения $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$ в точке (i, j, l). Первое слагаемое аппроксимирует $c(\boldsymbol{r})u_{tt}(\boldsymbol{r}, t)$, второе — $a(\boldsymbol{r})u_t(\boldsymbol{r}, t)$. Символом Δ обозначен дискретный лапласиан, который вычисляется по формуле

$$\Delta u_{i_0, j_0, l_0}^{k} = \sum_{i=i_0-K}^{i_0+K}\;\sum_{j=j_0-K}^{j_0+K}\;\sum_{k=k_0-K}^{k_0+K} b_{ijl}u_{ijl}^{k}.$$

Число K определяет размер шаблона дискретного лапласиана. Для расчетов использовалось $K = 2$, что соответствует шаблону $5 \times 5 \times 5$ точек сетки. Коэффициенты b_{ijl} приведены, например, в [22, 23]. Выделяя член u_{ijl}^{k+1} для $(k+1)$-го шага по времени, получим явную формулу для расчета распространения волны последовательно по времени.

Градиент (4) функционала невязки вычислялся для каждого положения источника по разностной формуле

$$\Phi_c'(x_i, y_j, z_l) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\left(u_{ijl}^{k+1} - u_{ijl}^{k}\right)\left(w_{ijl}^{k+1} - w_{ijl}^{k}\right)}{\tau}\,, \quad \Phi_a'(x_i, y_j, z_l) = \sum_{k=0}^{m} \frac{u_{ijl}^{k}\left(w_{ijl}^{k+1} - w_{ijl}^{k}\right)}{\tau}\,. \tag{8}$$

Градиент суммируется по всем источникам и используется для минимизации функционала невязки методом градиентного спуска.

3.2. Градиентные методы минимизации функционала невязки. Для минимизации функционала невязки (3) используется итерационный градиентный алгоритм. На каждой итерации n вычисляется градиент по формуле (4), который определяет направление максимального убывания функционала невязки. С помощью метода наискорейшего спуска строится итерационная последовательность $\left\{c^{(n)}, a^{(n)}\right\}$, которая сходится к точке минимума функционала. Данный метод состоит из следующих шагов.

1. В качестве начального приближения на первой итерации задается $c^{(0)} = c_0 = \text{const}$, $a^{(0)} = 0$.

2. Для заданных $c^{(n)}$, $a^{(n)}$ решается прямая задача (1)–(2) в разностной аппроксимации. С помощью явной разностной схемы (7) решается прямая задача вычисления волнового поля $u(\boldsymbol{r}, t)$.

3. Используя значения волнового поля $u(\boldsymbol{s}, t)$ на детекторах $\boldsymbol{s}$, решается сопряженная задача (5)–(6) в разностной аппроксимации. Результатом ее решения является волновое поле $w(\boldsymbol{r}, t)$ в каждой точке сетки.

4. Используя полученные значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ и $w(\boldsymbol{r}, t)$, вычисляется градиент $\Phi_c'(u), \Phi_a'(u)$ функционала невязки по формуле (8).

5. Зная градиент в точке $\left\{c^{(n)}, a^{(n)}\right\}$, вычисляем следующее итерационное приближение по формуле

$$\left\{c^{(n+1)}, a^{(n+1)}\right\} = \left\{c^{(n)}, a^{(n)}\right\} - \gamma^{(n)}\left\{\Phi_c', \Phi_a'\right\}.$$

   Величина шага $\gamma^{(1)}$ на первой итерации определяется из априорных соображений. Если значение функционала невязки на очередной итерации увеличивается, то уменьшаем $\gamma^{(n)}$ в 2 раза. Процесс возвращается к шагу 2.

Число итераций n является параметром регуляризации итерационного градиентного метода [18]. Процесс останавливается, когда значение функционала невязки становится равным априорной оценке погрешности входных данных.

3.3. Проблема сходимости итерационных методов решения обратных задач 3D ультразвуковой томографии. Одна из основных трудностей в решении обратных задач волновой томографии состоит в нелинейности этой задачи. Как следствие, функционал невязки не является выпуклым. Это означает, что итерационный процесс минимизации функционала невязки может сходиться к точке локального минимума. Для того чтобы построить приближенное решение обратной задачи, необходимо, чтобы итерационный процесс сходился к точке глобального минимума. В работах [12, 24] на модельных задачах было показано, что итерационный процесс вовсе не всегда сходится к точке глобального минимума и что сходимость итерационного градиентного метода главным образом определяется длиной волны зондирующего излучения. Предложенный поэтапный метод решения обратной задачи волновой томографии обеспечивает сходимость итерационного процесса к точке глобального минимума.

Идея этого метода может быть проиллюстрирована на простейшем одномерном варианте обратной задачи. Схема распространения одномерной волны приведена на рис. 2. Однородная струна имеет неоднородность, сосредоточенную в области $[-r; +r]$, в которой скорость распространения волны $\bar{c}$ постоянна, но отличается от скорости волны c_0 вне этой области. Волна имеет форму короткого импульса, обозначенного цифрой 1. Если бы неоднородности не было, то через определенный промежуток времени импульс переместился бы в положение, обозначенное цифрой 2. Если скорость волны внутри неоднородности выше, чем скорость вне ее, то импульс после прохождения неоднородности займет положение 3.

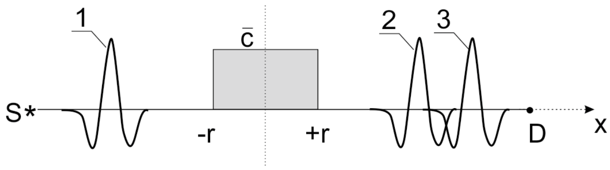


Рис. 2. Схема распространения одномерной волны через неоднородность

Обозначим неизвестную скорость волны внутри неоднородности как $c = c_0 + \Delta c$. Истинное значение скорости волны в неоднородности равно $\bar{c} = c_0 + \Delta\bar{c}$. Введем функционал невязки $\Phi(c) = \|U_e(t) - u_c(c,t)\|^2$. Здесь $U_e(t)$ — волна, зарегистрированная после прохождения неоднородности, а $u_c(t)$ — сигнал, рассчитанный при условии, что скорость волны внутри неоднородности равна c. Вычислим функционал невязки как функцию от Δc, или от разницы во времени прихода импульсов Δt, которая однозначно связана с Δc. Функционал невязки имеет глобальный минимум при $\Delta c = \Delta\bar{c}$, как показано на рис. 3а.

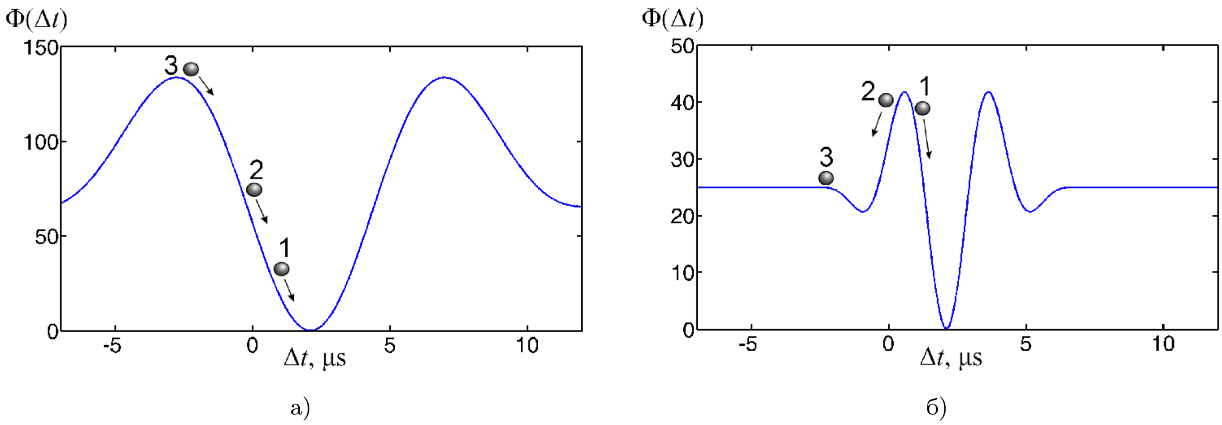


Рис. 3. График функционала невязки для одномерной задачи:
а) для длинных волн, б) для коротких волн

Ширина области глобального минимума функционала невязки пропорциональна длине волны зондирующего импульса. На рис. 3б зондирующий импульс в два раза короче, чем зондирующий импульс на рис. 3а. Чем шире спектр импульса, тем короче длина волны и у́же область сходимости итерационного градиентного процесса. Выбрав достаточно большую длину волны, можно построить приближенное решение обратной задачи, начав итерационный процесс с нулевого начального приближения. Приведенный одномерный пример иллюстрирует идею поэтапного метода решения обратных задач ультразвуковой томографии, где искомой является функция $c(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$.

Суть предложенного в настоящей работе поэтапного метода заключается в следующем. На первом этапе используется только низкочастотная часть спектра принятых сигналов от 50 до 200 кГц. В качестве начального приближения используется константа. С отфильтрованными таким образом данными решается обратная задача реконструкции скоростного разреза методом градиентного спуска. Полученное изображение имеет низкое разрешение, но его можно использовать как начальное приближение для итерационного процесса на втором этапе. Полоса частот на втором этапе составляет 50–300 кГц, что обеспечивает более высокое разрешение восстановленного изображения. Полученное на втором этапе приближенное решение используется как начальное приближение на следующем этапе и так далее, пока не будет использована вся зарегистрированная полоса спектра акустических сигналов. Сходимость итерационного процесса на каждом этапе обеспечивается тем, что уменьшение длины волны относительно предыдущего этапа невелико. На последнем этапе с применением частот 50–600 кГц реконструируется изображение высокого разрешения.

Расчет трехмерного волнового поля во времени является очень ресурсоемкой задачей. Объем расчетов растет как четвертая степень от количества точек сетки по каждому измерению. Однако на первых итерациях метода градиентного спуска приближенное решение еще далеко от точного и имеет низкое разрешение, а полоса спектра сигналов ограничена. Поэтому расчет приближенного решения на первых итерациях можно проводить на грубой сетке. По мере расширения используемой полосы частот размер сетки выбирается исходя из приемлемой численной дисперсии.

На первом этапе используется сетка с шагом $dx = 1.5$ мм. Основываясь на условии устойчивости Куранта $\sqrt{3}\,v_{\max} \cdot dt < dx$, заключаем, что при максимальной скорости звука $v_{\max} = 2$ км/с при $dx = 1.5$ мм шаг сетки по времени составит $dt = 0.6$ мкс. Таким образом, без существенной численной дисперсии можно применять частоты до 200 кГц. Полученное решение используется как начальное приближение для коэффициентов $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$ на втором этапе расчетов, где шаг сетки составляет 1 мм, а рабочий диапазон частот — до 300 кГц. Для получения следующего приближенного решения тоже нужно 15–20 итераций. На третьем этапе используется сетка с шагом 0.75 мм и полоса частот до 400 кГц, на четвертом — сетка с шагом 0.5 мм и полоса частот 50–600 кГц для реконструкции изображения высокого разрешения. Для получения приближенного решения на каждом этапе нужно 15–20 итераций градиентного спуска.

4. Реализация алгоритмов решения обратных задач 3D ультразвуковой томографии на GPU-кластерах. Алгоритм восстановления томографического изображения по экспериментальным данным состоит из процедуры обработки экспериментальных данных, которая выполняется один раз, и итерационного алгоритма решения обратной задачи. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 4. Обработка экспериментальных данных включает в себя следующие операции.

— Регистрация двух наборов данных — акустического поля, рассеянного исследуемым образцом (основное поле), и акустического поля в однородной среде (реперное поле).

— Первичная обработка данных, в которую входит коррекция неодновременности срабатывания задающего генератора и АЦП (jitter), коррекция АЧХ источников и приемников и других факторов.

— Определение геометрических параметров эксперимента, таких как положение источников и наклон осей приводов, а также других параметров путем измерения времени прихода импульсов при различных направлениях на приемник и статистической регрессии.

— Расчет начального импульса источников из реперного поля с помощью метода обращения времени.

В томографических задачах существуют понятия полно заданных и неполно заданных экспериментальных данных [25]. В случае ультразвуковой диагностики рака груди неполнота данных обусловлена тем, что невозможно измерить волновое поле со стороны груди пациента. Мы не можем расположить приемники на верхнем торце цилиндрической поверхности $Z = H$. Неполнота данных создает проблемы не только для решения обратной задачи, но даже для расчета прямой задачи распространения волны в однородной среде. Для решения прямой задачи необходимо задать начальные условия (2). Начальный импульс можно вычислить методом обращения времени [26], но для применения этого метода необходимо продолжить волну, измеренную на боковой поверхности цилиндра (рис. 5), на более широкую область. Эту задачу достаточно решить один раз.

Поскольку излучаемая источником волна близка к сферической, эта задача решается следующим образом. Волновое поле в точках $\boldsymbol{r}$, где отсутствуют приемники, вычисляется по формуле

$$u(\boldsymbol{r}, t) = A \cdot u(\boldsymbol{s}, t + dt), \quad A = \frac{|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r_0}|}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}|}, \quad dt = \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}| - |\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r_0}|)}{v_0},$$

где $\boldsymbol{s}$ — ближайшая к $\boldsymbol{r}$ точка, в которой измерено поле; $\boldsymbol{r_0}$ — положение источника, оцененное по времени прихода импульсов; v_0 — скорость звука в воде. Предложенный алгоритм позволяет с высокой точностью восстановить реальное акустическое поле на начальный момент времени.

После того как начальные условия определены, можно решить прямую задачу (1)–(2). Для вычисления градиента функционала невязки необходимо решить прямую задачу (1)–(2) в прямом времени и сопряженную задачу (5)–(6) в обратном времени. GPU-реализация алгоритма вычисления градиента состоит из следующих этапов (рис. 4).

Сначала рассчитывается волновое поле $u(\boldsymbol{r}, t)$ при заданных коэффициентах $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$ путем решения задачи (1)–(2) в прямом времени. Исходя из размещения ультразвуковых излучателей в эксперименте,

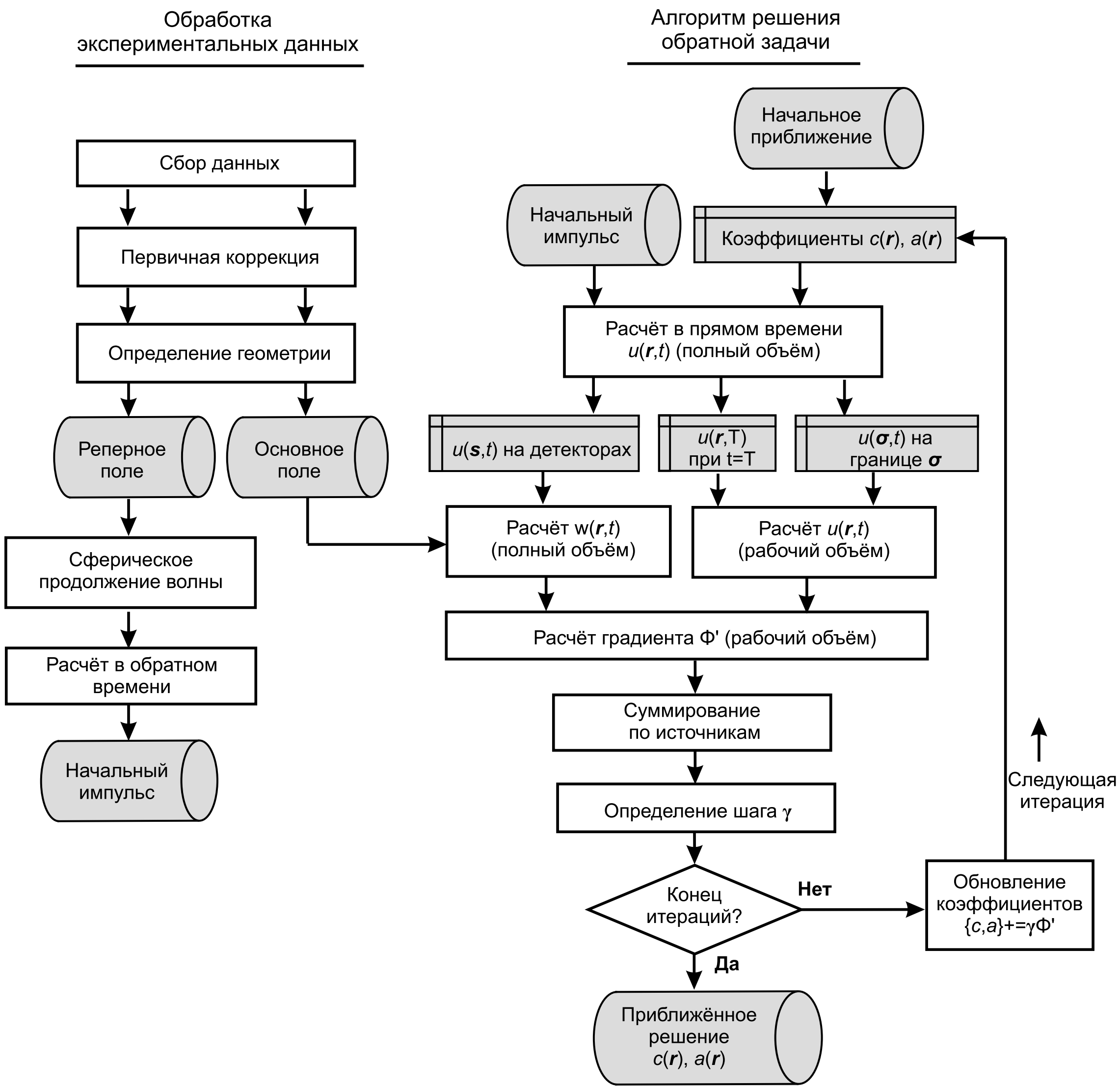


Рис. 4. Блок-схема алгоритмов обработки данных и решения обратной задачи

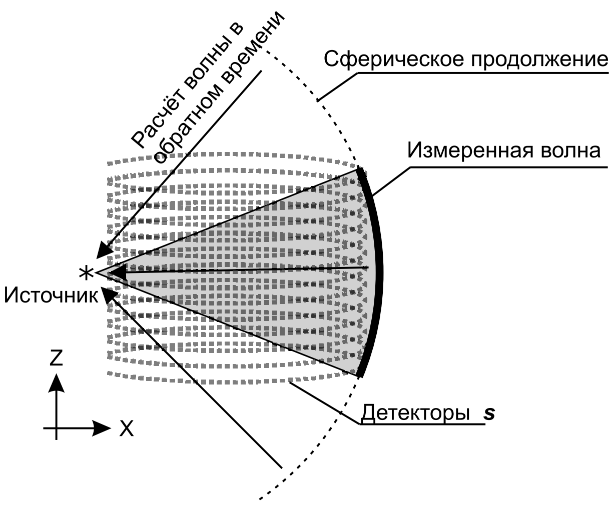


Рис. 5. Продолжение сферической волны для расчета начального импульса

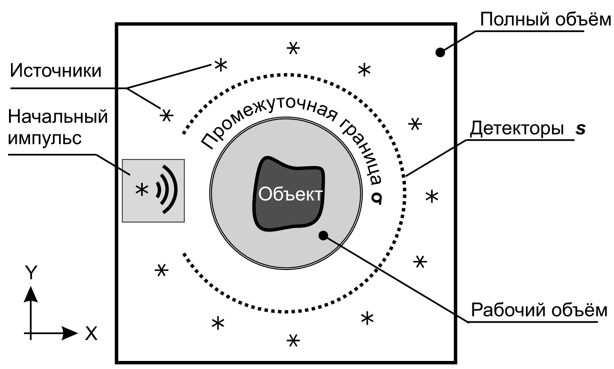


Рис. 6. Расчетные области в алгоритме решения обратной задачи

поле $u(\boldsymbol{r}, t)$ рассчитывается для полного объема, составляющего $380 \times 380 \times 380$ мм. В качестве начальных условий для расчета волнового поля $u(\boldsymbol{r}, t)$ используется начальный импульс, рассчитанный на этапе подготовки данных. Начальные данные сохраняются для некоторой области, окружающей источник, но не пересекающей исследуемый объект (рис. 6). В остальной части расчетной области начальные условия считаются нулевыми. Начальные данные сохраняются для двух первых шагов разностной схемы (7) по времени, чтобы задать начальные условия (2).

Для сокращения времени расчета градиента функционала невязки используется тот факт, что градиент нужно определить только в некоторой области, содержащей объект, а не во всем объеме. Для ограничения объема расчетной области мы вводим искусственную промежуточную границу σ, окружающую объект (рис. 6). В процессе расчета волнового поля $u(\boldsymbol{r}, t)$ в прямом времени в системной памяти сохраняются значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ на детекторах $\boldsymbol{s}$ и на промежуточной границе σ в каждый момент времени.

Затем решается сопряженная задача (5)–(6) в обратном времени. Волновое поле $w(\boldsymbol{r}, t)$ вычисляется из значений $u(\boldsymbol{s}, t)$, сохраненных на первом этапе, и экспериментально измеренного поля $U(\boldsymbol{s}, t)$. Для вычисления градиента по формуле (4) нужно знать $u(\boldsymbol{r}, t)$ в той же точке, что и $w(\boldsymbol{r}, t)$. При решении сопряженной задачи в обратном времени волновое поле $u(\boldsymbol{r}, t)$ рассчитывается из значений $u(\sigma, t)$ на промежуточной границе σ, а начальными условиями служат значения $u(\boldsymbol{r}, t = T)$, сохраненные на последнем шаге расчета $u(\boldsymbol{r}, t)$ в прямом времени. Поскольку волновое поле, удовлетворяющее уравнению (1), полностью определяется начальными и граничными условиями, при расчете сопряженной задачи в обратном времени значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ будут с точностью до вычислительной погрешности повторять значения $u(\boldsymbol{r}, t)$, полученные в прямом времени. Такой подход снимает необходимость хранить все значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ в объеме $X \times Y \times Z \times T$ для последующего вычисления градиента, что потребовало бы огромного объема памяти, и позволяет реализовать алгоритм вычисления градиента на графических процессорах с ограниченным объемом встроенной памяти.

Рабочий объем, внутри которого рассчитывается волновое поле $u(\boldsymbol{r}, t)$ в обратном времени, ограничен границей σ и составлял в эксперименте $120 \times 120 \times 140$ мм. В этом же объеме рассчитывается градиент по формуле (8). Рабочий объем составляет менее 10% от полного объема, в котором располагаются источники. Таким образом, основные затраты памяти и времени приходятся на расчет волнового поля во всем объеме.

Расчет волнового поля согласно разностной схеме (7) был распараллелен на GPU с помощью Z-marching метода [21], заключающегося в том, что все значения волнового поля в горизонтальном сечении $z = \text{const}$ вычисляются параллельно, а от сечения к сечению — последовательно. Значительное количество коэффициентов разностной схемы сохраняется от сечения к сечению в регистрах GPU, что обеспечивает высокую эффективность Z-marching метода. Расчеты для каждого источника независимы, за исключением операций суммирования градиента по всем источникам и обновления итерационного приближения $\left\{c^{(n)}, a^{(n)}\right\}$. Таким образом, задача эффективно распараллеливается на количество графических процессоров, соответствующее количеству источников, в данном случае 48.

Разработанные алгоритмы были протестированы на суперкомпьютере "Ломоносов-2", оснащенном GPU NVidia Tesla K40s с 12 ГБ VRAM. Предложенный поэтапный метод решения обратной задачи позволяет существенно снизить время расчета за счет того, что на первых этапах можно использовать намного более грубую сетку. На первом этапе использовалась сетка размером 256 точек по каждой координате X, Y, Z, на втором — 384, на третьем — 512 и на последнем — 768. Соответственно, время расчета на первом этапе составило 2 минуты, на втором — 7 минут, на третьем — 25, на четвертом этапе 140 минут на кластере из 48 графических процессоров. На каждом этапе выполняется 15–20 итераций градиентного метода.

Первостепенное влияние на время расчета оказывает размер расчетной области. Время расчета пропорционально четвертой степени размера области. В настоящей работе размер расчетной области обусловлен конструкцией экспериментального стенда и намного превышает размеры исследуемого объекта. Путем оптимизации расположения источников и приемников в ультразвуковом томографе размер расчетной области можно уменьшить. Уменьшение размера области всего на 25% приведет к сокращению времени расчета в 2.5 раза, что сделает время расчета вполне приемлемым для медицинских обследований.

С учетом быстрого прогресса в области разработки новых высокопроизводительных графических процессоров, время расчета может быть еще больше сокращено. В настоящее время уже появились графические процессоры, оснащенные High Bandwidth Memory и имеющие примерно втрое большую производительность, чем использованные авторами для расчетов. Применение таких устройств позволит сократить количество GPU в кластере до $N_s/2$, что составит порядка 24. Здесь N_s — количество положений источников.

Разработанный алгоритм выполняется практически полностью на GPU. Загрузка CPU в тестах на суперкомпьютере составила менее 2%. Вычислительный узел суперкомпьютера содержит 4 CPU и один GPU. Таким образом, для практической реализации разработанного алгоритма можно использовать компактные GPU-кластеры, содержащие по одному CPU на каждые 4–5 GPU. Авторами разработана архитектура GPU-кластера, который может использоваться как вычислительное устройство в составе томографических комплексов [21].

5. Постановка эксперимента и результаты реконструкции скоростного разреза по экспериментальным данным.

5.1. Обратные задачи метрологии измерительного тракта. Обратная задача ультразвуковой томографии как коэффициентная обратная задача для волнового уравнения (1) является основной задачей, для решения которой используются мощные современные суперкомпьютеры. Кроме этой задачи, на различных этапах обработки экспериментальных данных используются методы решения вспомогательных обратных задач. К таким задачам относится прежде всего задача определения положения источников и приемников.

С точки зрения математики входными данными задачи является массив значений зарегистрированного волнового поля при различных положениях источников и приемников. Волновое поле измеряется в чистой воде без исследуемого объекта. Искомыми в обратной задаче являются положения источников и приемников в пространстве. При малом (порядка 10%) отличии скорости звука в исследуемом объекте и в окружающей среде смещение приемника всего на 0.5 мм от расчетного положения приводит к размытию восстановленного томографического изображения примерно на 5 мм, поэтому положения приемников должны быть определены с высокой точностью. Данная задача решается с помощью измерения времени прихода импульсов на приемник с различных направлений, интерполяции полученных данных и статистической регрессии.

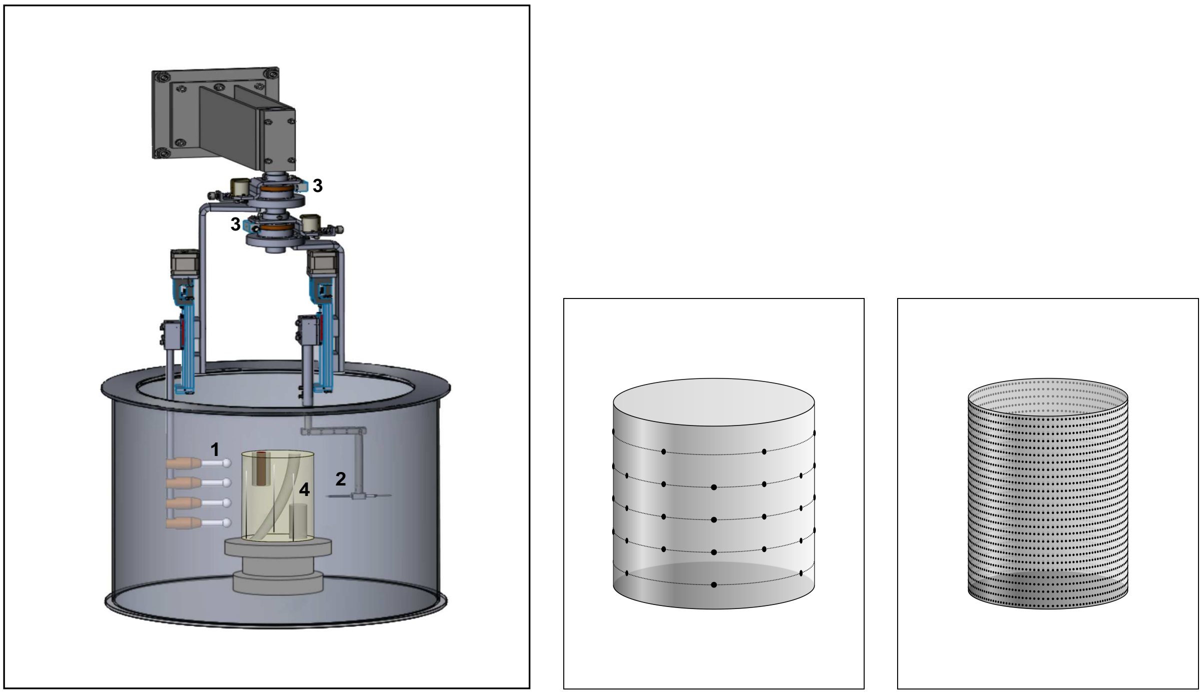
Другая важная обратная задача связана с проблемой реконструкции начального импульса, необходимого для решения прямой задачи распространения волн от источников. В эксперименте используются ультразвуковые излучатели, формирующие волновой фронт, близкий к сферическому. Однако в реальности источники отличаются друг от друга, и излучаемый ими начальный импульс является неизвестным. Для каждого источника можно измерить волновое поле на цилиндрической поверхности, которую пробегает приемник. Решая задачу распространения волны в обратном времени, можно получить начальные данные для уравнения (1), которые в дальнейшем используются для решения прямой задачи.

Важной проблемой в обратных задачах ультразвуковой диагностики является формирование зондирующего импульса заданной формы. В качестве задающего генератора используется цифровой генератор сигналов произвольной формы. Обратная задача состоит в расчете такого задающего электрического сигнала, с помощью которого на приемнике получается акустический сигнал заданной формы и спектра. Эта задача может решаться в линейной модели, описываемой одномерным уравнением типа свертки [27]. Методы решения таких задач хорошо изучены, и существуют стандартные программы, реализующие алгоритмы их решения [18].

5.2. Постановка эксперимента. Важным результатом настоящей работы является то, что разработанные алгоритмы 3D волновой томографии были впервые апробированы на реальных экспериментальных данных, полученных на стенде для ультразвуковых томографических исследований [28]. В качестве объектов исследования использовались фантомы, акустические параметры которых близки к акустическим параметрам мягких тканей человека.

3D модель стенда для ультразвуковых томографических исследований приведена на рис. 7а. Источники ультразвукового излучения 1 закреплены на вертикальной штанге, которая может перемещаться вертикально. Приемник ультразвукового излучения 2 закреплен на другой штанге, которая тоже может перемещаться вертикально. Каждая из штанг может вращаться с помощью приводов 3 вокруг оси цилиндрической емкости, в центре которой закреплен исследуемый образец 4. В процессе эксперимента источники занимают положения на цилиндрической поверхности, приведенной на рис. 7б, а акустическое поле измеряется приемником на цилиндрической поверхности, приведенной на рис. 7в. Такие измерения проводятся для каждого положения источника. В эксперименте использовалась сборка из четырех излучателей, которая в процессе эксперимента принимала 12 положений — всего $N_s = 48$ положений источников. Приемник перемещался по вертикали с шагом 3 мм и по окружности с шагом 0.5°. Общее количество положений приемника составляло $N_d \approx 20\,000$.

Функциональная схема экспериментального стенда приведена на рис. 8. Импульсы, формируемые задающим генератором, усиливаются и передаются через коммутатор поочередно на каждый из излучателей ультразвука. В эксперименте использовались четыре излучателя с близкими характеристиками. Рабочий диапазон частот излучателей составляет 50–800 кГц. В качестве приемника используется высокочувствительный пьезокерамический гидрофон Teledyne Reson TC4038, диаметр приемного элемента которого составляет 1.5 мм, а частотный диапазон — от 10 кГц до 1 МГц.



а) б) в)

Рис. 7. Экспериментальный стенд (а), схема расположения источников (б) и приемников (в)

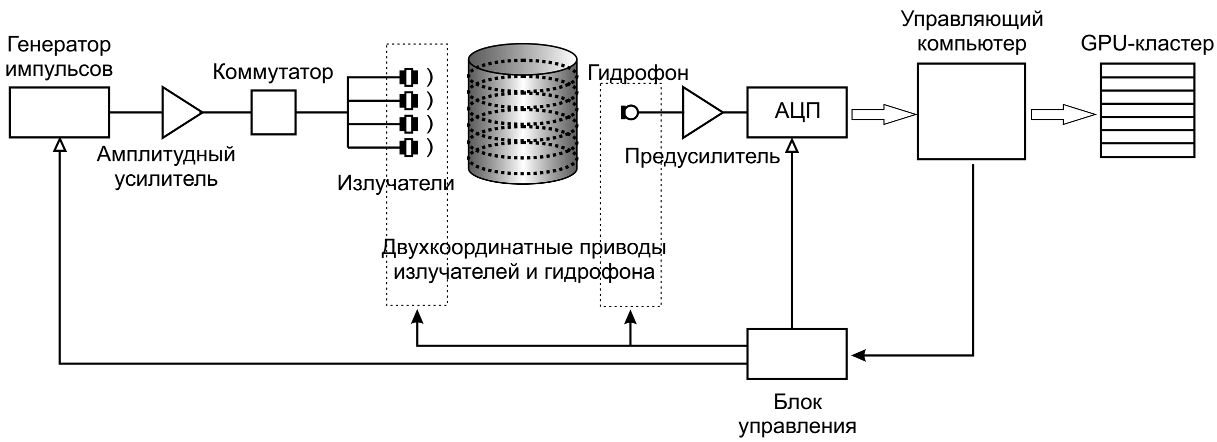


Рис. 8. Функциональная схема экспериментального стенда

Акустические сигнал, зарегистрированный гидрофоном, усиливается, оцифровывается и записывается управляющим компьютером. Для каждого положения источника регистрация волнового поля осуществляется на цилиндрической поверхности (рис. 7в). Зарегистрированный в каждом положении приемника сигнал имеет длительность 200 мкс. Сигнал оцифровывался с частотой 2.5 МГц с помощью модуля АЦП и поступал в управляющий компьютер. Регистрация волнового поля в эксперименте осуществляется автоматически. Персональный компьютер посредством микроконтроллерного блока осуществляет управление механизмами передвижения, сбором данных, запуском генератора сигналов и модуля АЦП. Продолжительность эксперимента составляет 1.5 часа. Объем оцифрованной информации составляет порядка 3 Гб.

5.3. Реконструкция скорости звука и коэффициента поглощения по экспериментальным данным. В качестве исследуемого образца (“фантома”) использовался цилиндр из силикона, в который были включены неоднородности.

Акустические параметры фантома близки к акустическим параметрам мягких тканей человека. Особенностью диагностики мягких тканей является низкий контраст объекта. Разница в скорости звука в тканях и в воде, а также в здоровых и пораженных тканях не превышает 10%.

На рис. 9 приведена 3D модель фантома. Силиконовый цилиндр 1 содержит полости 2, 3 и 4, заполненные водой, и вставку 5 из пластика с большей скоростью звука. Для крепления фантома используются тонкие металлические иглы 6. Диаметр цилиндра составляет 60 мм, высота — 120 мм. Исследуемый объект не является цилиндрически симметричным. Будем считать, что ось цилиндра совпадает с осью OZ. Сечения фантома в плоскостях $z = \text{const}$, параллельных основанию цилиндра, различны.

На рис. 10 приведены реконструированные сечения скорости звука в плоскостях $z = 16$ мм и $z = 71$ мм. Значения скорости звука показаны цифрами. В силиконовом цилиндре скорость звука составляет 1.44 км/с, что всего на 5% отличается от скорости звука в воде. На рис. 10а хорошо видна вставка 5 с более высокой скоростью звука 1.78 км/с.

Скорость звука в полости 2, заполненной водой, с высокой точностью совпадает со скоростью звука в окружающей воде. На рис. 10б видны полости 2 и 3, скорость звука в которых тоже близка к скорости звука в окружающей воде, и металлические иглы крепления 6. Диаметр игл составляет 1 мм.

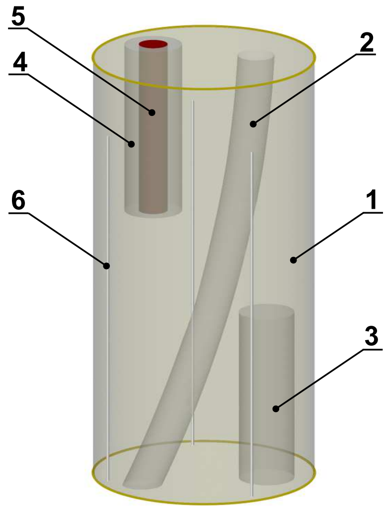


Рис. 9. 3D модель фантома

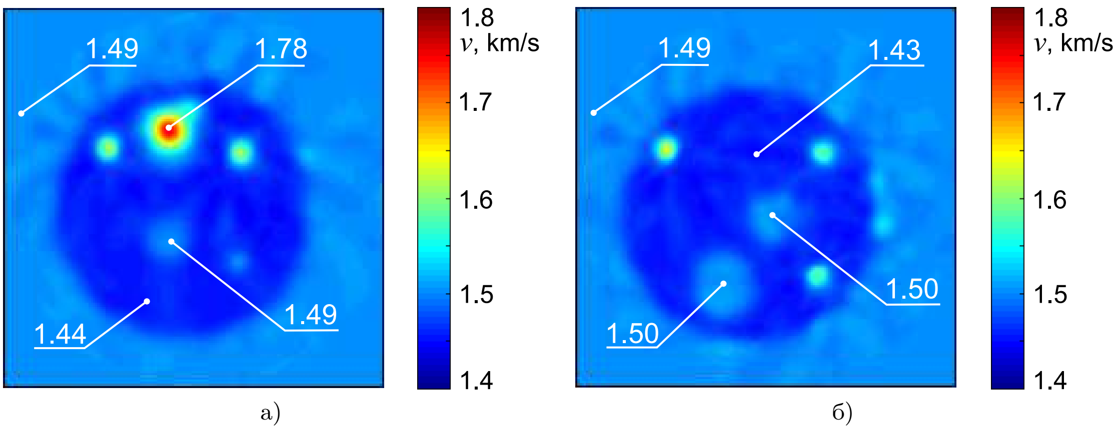


Рис. 10. Реконструированные сечения скорости звука в горизонтальных плоскостях: а) $z = 16$ мм, б) $z = 71$ мм

На рис. 11 приведены восстановленные сечения скорости звука внутри фантома в горизонтальных плоскостях $z = \text{const}$. На первых трех сечениях видна полость 4 и вставка 5, на следующих трех — только полость 2, на последних трех сечениях — полости 2 и 3. На горизонтальных сечениях также видны металлические иглы 6.

На рис. 12а приведено сечение скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ внутри фантома в вертикальной плоскости $y = \text{const}$, полученное на первом этапе поэтапного метода с использованием только низких частот в диапазоне 50–200 кГц. На рис. 12б приведено соответствующее сечение, реконструированное на последнем этапе расчета с использованием полосы частот 50–600 кГц.

Расчеты по реконструкции скоростного разреза и коэффициента поглощения проводились в четыре этапа, как описано в разделе 4 настоящей статьи. На первом этапе в качестве начального приближения использовалась скорость звука, равная константе. На последующих этапах в качестве начального приближения использовалось приближенное решение, полученное на предыдущем этапе. Применение поэтапного метода обеспечивает сходимость итерационного алгоритма к точке глобального минимума и существенно сокращает время расчетов, поскольку на первых этапах расчеты можно проводить на грубой сетке.

На рис. 12в приведено реконструированное сечение коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$. Коэффициент поглощения восстанавливается хуже, чем скорость звука $c(\boldsymbol{r})$. Это можно объяснить тем, что $a(\boldsymbol{r})$ является коэффициентом при первой производной от быстро осциллирующей функции $u(\boldsymbol{r}, t)$ в волновом уравнении (1), а $c(\boldsymbol{r})$ является коэффициентом при второй производной.

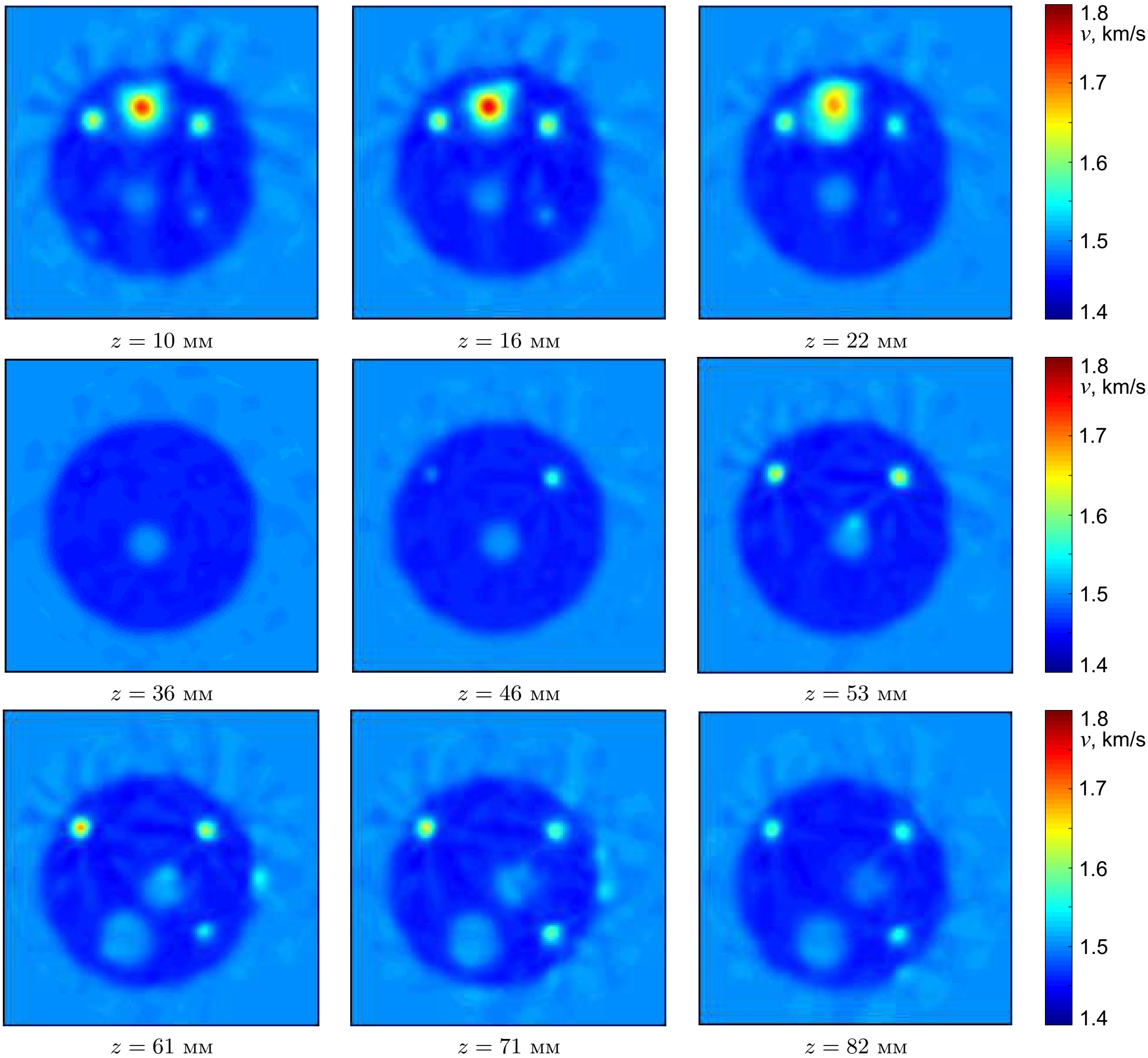


Рис. 11. Горизонтальные сечения скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ в плоскостях $z = \mathrm{const}$

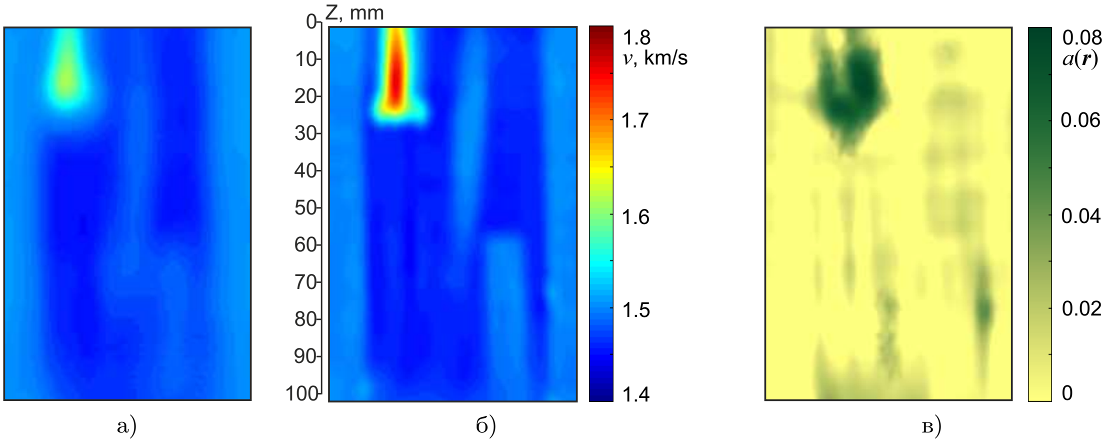


Рис. 12. Вертикальные сечения скорости звука $c(\boldsymbol{r})$, полученные на первом этапе метода с использованием частот до 200 кГц (а) и на последнем этапе с использованием частот до 600 кГц (б); реконструированный коэффициент поглощения $a(\boldsymbol{r})$ (в)

Материал фантома имеет низкий коэффициент поглощения. Единственным объектом, поглощение в котором существенно, является пластиковая вставка 5. Как видно из рис. 12в, область, в которой наблюдается значительное поглощение, совпадает с местом расположения вставки 5, а вне этой области поглощение незначимо. Несмотря на то что коэффициент поглощение восстанавливается хуже, учет поглощения в математической модели необходим для того, чтобы модель была адекватна реальности и можно было получить качественное изображение скорости звука. Результаты экспериментов показали, что предложенный метод позволяет получать высокое пространственное разрешение — порядка 2 мм в схеме с небольшим количеством источников и вращающимися приемниками. Такая томографическая схема может применяться в медицинских диагностических комплексах.

6. Заключение. Настоящая статья ориентирована на разработку методов ультразвуковой томографии для дифференциальной диагностики рака молочной железы. Каждый год более 1 миллионов женщин в мире и 62 тысячи в России заболевают раком молочной железы. Каждая седьмая россиянка в течение жизни рискует столкнуться с диагнозом рака молочной железы. Вероятность выживания составляет более 90%, если рак обнаружен на ранней стадии. Регулярные обследования с целью обнаружения новообразований на ранних стадиях — это наиболее эффективный способ борьбы с онкологическими заболеваниями.

Возможности использования обычных ультразвуковых диагностических приборов (УЗИ) для ранней диагностики рака ограничены. Рентгеновские томографы непригодны для регулярных обследований. Современной тенденцией в медицине является ограничение и отказ от использования ионизирующего излучения. В связи с этим представляется актуальной разработка ультразвуковых томографов для медицинских исследований мягких тканей человека.

Основным результатом работы является апробация алгоритмов решения обратных задач 3D ультразвуковой томографии на реальных экспериментальных данных. Предложенные методы восстановления трехмерного томографического изображения определяют не только форму неоднородностей, но и значение скорости звука внутри них. Такие методы позволяют осуществлять характеризацию тканей, сопоставляя каждой точке (x, y, z) исследуемого объекта величину скорости $c(x, y, z)$ распространения волны в этой точке. Разработанные алгоритмы позволяют реконструировать не только трехмерное распределение скорости звука внутри объекта, но и коэффициент поглощения $a(x, y, z)$. Качество реконструкции скорости звука выше, чем коэффициента поглощения.

Особенностью разработанных томографических методов является использование низкочастотных зондирующих сигналов в диапазоне 50–600 кГц. Именно использование низких частот позволяет обеспечить сходимость итерационного процесса. Хорошее совпадение результатов реконструкции со значениями скорости звука в неоднородностях подтверждает то, что используемая скалярная волновая модель хорошо совпадает с реальностью.

Разработанные алгоритмы ориентированы на использование GPU-суперкомпьютеров. Предложена архитектура GPU-кластера, который по своим характеристикам может использоваться в составе диагностических комплексов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01065). Работа выполнена в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kak A. C., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
2. *Sak M., Duric N., Littrup P., et al.* Using speed of sound imaging to characterize breast density // Ultrasound in Medicine & Biology. 2017. **43**, N 1. 91–103.
3. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Обратные задачи послойной ультразвуковой томографии с данными на цилиндрической поверхности // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 267–276.
4. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Низкочастотная трехмерная ультразвуковая томография // Доклады Российской Академии наук. 2016. **468**, № 3. 268–271.
5. *Jiřík R., Peterlík I., Ruiter N., et al.* Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2012. **59**, N 2. 254–264.
6. *Wiskin J., Borup D. T., Johnson S. A., Berggren M.* Non-linear inverse scattering: high resolution quantitative breast tissue tomography // The Journal of the Acoustical Society of America. 2012. **131**, N 5. 3802–3813.
7. *Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2015. **61**, № 2. 254–273.
8. *Natterer F.* Incomplete data problems in wave equation imaging // Inverse Problems and Imaging. 2010. **4**, N 4. 685–691.

9. *Beilina L., Klibanov M.V.* Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
10. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // Ultrasonics. 2016. **67**. 136–150.
11. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* A method of solving the coefficient inverse problems of wave tomography // Computers and Mathematics with Applications. 2019. **77**, N 4. 967–980.
12. *Romanov S.Y.* Supercomputer simulation study of the convergence of iterative methods for solving inverse problems of 3D acoustic tomography with the data on a cylindrical surface // Communications in Computer and Information Science. Vol. 965. Cham: Springer, 2019. 388–400.
13. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Низкочастотная ультразвуковая томография: математические методы и эксперимент // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2019. № 1. 40–47.
14. *Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin V., Opanasenko V.* "Lomonosov": supercomputing at Moscow State University // Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale. Boca Raton: CRC Press, 2013. 283–308.
15. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // Physics in Medicine and Biology. 2014. **59**, N 8. 1979–2004.
16. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Iterative methods for solving coefficient inverse problems of wave tomography in models with attenuation // Inverse Problems. 2017. **33**, N 2. doi: 10.1088/1361-6420/33/2/025003.
17. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Kluwer, 1994.
18. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
19. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Problems. 2013. **29**, N 7. doi:10.1088/0266-5611/29/7/075004.
20. *Engquist B., Majda A.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // Mathematics of Computation. 1977. **31**. 629–651.
21. *Goncharsky A., Seryozhnikov S.* The architecture of specialized GPU clusters used for solving the inverse problems of 3D low-frequency ultrasonic tomography // Communications in Computer and Information Science. Vol. 793. Cham: Springer, 2017. 363–375.
22. *Mu S.-Y., Chang H.-W.* Dispersion and local-error analysis of compact LFE-27 formula for obtaining sixth-order accurate numerical solutions of 3D Helmholtz equation // Progress in Electromagnetics Research. 2013. **143**. 285–314.
23. *Romanov S.Y.* Optimization of numerical algorithms for solving inverse problems of ultrasonic tomography on a supercomputer // Communications in Computer and Information Science. Vol. 793. Cham: Springer, 2017. 67–79.
24. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* Низкочастотная 3D ультразвуковая томография: двухчастотный метод // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 479–495.
25. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // Wave Motion. 2014. **51**, N 3. 389–404.
26. *Fink M.* Time reversal in acoustics // Contemporary Physics. 1996. **37**, N 2. 95–109.
27. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю.* О проблеме выбора начального приближения в обратных задачах ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 312–321.
28. *Goncharsky A., Seryozhnikov S.* Supercomputer technology for ultrasound tomographic image reconstruction: mathematical methods and experimental results // Communications in Computer and Information Science. Vol. 965. Cham: Springer, 2019. 401–413.

Поступила в редакцию
23.05.2019

Inverse Problems of Experimental Data Interpretation in 3D Ultrasound Tomography

A. V. Goncharsky[1], **V. A. Kubyshkin**[2], **S. Yu. Romanov**[3], **and S. Yu. Seryozhnikov**[4]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Fundamental Medicine; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Head of Department, e-mail: info@fbm.msu.ru*

[3] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: romanov60@gmail.com*

[4] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Electronic Engineer, e-mail: s2110sj@gmail.com*

Received May 23, 2019

Abstract: The inverse problem of 3D ultrasound tomography is considered in this paper as a nonlinear coefficient inverse problem for a hyperbolic equation. The employed mathematical model accurately describes the effects of ultrasound wave diffraction and absorption in inhomogeneous media. The velocity of acoustic waves inside the test sample is reconstructed as an unknown function of three spatial coordinates. The number of unknowns in the nonlinear inverse problem reaches 50 million. The developed iterative algorithms for solving the inverse problem are designed for GPU clusters. The main result of this study is testing the developed algorithms on experimental data. The experiments were carried out using a 3D ultrasound tomographic setup developed at Lomonosov Moscow State University. Acoustic properties of the test samples were close to those of human soft tissues. The volume of data collected in experiments is up to 3 GB. Experimental results show the efficiency of the proposed algorithms and confirm that the mathematical model is adequate to reality. The proposed algorithms were tested on the GPU partition of Lomonosov-2 supercomputer.

Keywords: ultrasound tomography, inverse problems, medical imaging, GPU cluster.

References

1. A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging* (IEEE Press, New York, 1988).

2. M. Sak, N. Duric, P. Littrup, et al., "Using Speed of Sound Imaging to Characterize Breast Density," Ultrasound Med. Biol. **43** (1), 91–103 (2017).

3. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Inverse Problems of Layer-by-Layer Ultrasonic Tomography with the Data Measured on a Cylindrical Surface," Vychisl. Metody Programm. **18**, 267–276 (2017).

4. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov and S. Yu. Seryozhnikov, "Low-Frequency Three-Dimensional Ultrasonic Tomography," Dokl. Akad. Nauk **468** (3), 268–271 (2016) [Dokl. Phys. **61** (5), 211–214 (2016)].

5. R. Jiřík, I. Peterlík, N. Ruiter, et al., "Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography," IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **59** (2), 254–264 (2012).

6. J. Wiskin, D. T. Borup, S. A. Johnson, and M. Berggren, "Non-Linear Inverse Scattering: High Resolution Quantitative Breast Tissue Tomography," J. Acoust. Soc. Am. **131** (5), 3802–3813 (2012).

7. V. A. Burov, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, "Reconstruction of the Sound Velocity and Absorption Spatial Distributions in Soft Biological Tissue Phantoms from Experimental Ultrasound Tomography Data," Akust. Zh. **61** (2), 254–273 (2015) [Acoust. Phys. **61** (2), 231–248 (2015)].

8. F. Natterer, "Incomplete Data Problems in Wave Equation Imaging," Inverse Probl. Imag. **4** (4), 685–691 (2010).

9. L. Beilina and M. V. Klibanov, *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems* (Springer, New York, 2012).

10. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "A Computer Simulation Study of Soft Tissue Characterization Using Low-Frequency Ultrasonic Tomography," Ultrasonics **67**, 136–150 (2016).

11. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "A Method of Solving the Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography," Comput. Math. Appl. **77** (4), 967–980 (2019).

12. S. Y. Romanov, "Supercomputer Simulation Study of the Convergence of Iterative Methods for Solving Inverse Problems of 3D Acoustic Tomography with the Data on a Cylindrical Surface," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2019), Vol. 965, pp. 388–400.

13. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Low-Frequency Ultrasonic Tomography: Mathematical Methods and Experimental Results," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz. Astron., No. 1, 40–47 (2019) [Moscow Univ. Phys. Bull. **74** (1), 43–51 (2019)].

14. V. Sadovnichy, A. Tikhonravov, V. Voevodin, and V. Opanasenko, "'Lomonosov': Supercomputing at Moscow State University," in *Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale* (CRC Press, Boca Raton, 2013), pp. 283–308.

15. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Inverse Problems of Ultrasound Tomography in Models with Attenuation," Phys. Med. Biol. **59** (8), 1979–2004 (2014).

16. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Iterative Methods for Solving Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography in Models with Attenuation," Inverse Probl. **33** (2) (2017).
doi: 10.1088/1361-6420/33/2/025003

17. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1994).

18. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems* (Springer, Dordrecht, 1995; Nauka, Moscow, 1990).

19. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Supercomputer Technologies in Inverse Problems of Ultrasound Tomography," Inverse Probl. **29** (7) (2013). doi 10.1088/0266-5611/29/7/075004

20. B. Engquist and A. Majda, "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves," Math. Comp. **31**, 629–651 (1977).

21. A. Goncharsky and S. Seryozhnikov, "The Architecture of Specialized GPU Clusters Used for Solving the Inverse Problems of 3D Low-Frequency Ultrasonic Tomography," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 793, pp. 363–375.

22. S.-Y. Mu and H.-W. Chang, "Dispersion and Local-Error Analysis of Compact LFE-27 Formula for Obtaining Sixth-order Accurate Numerical Solutions of 3D Helmholtz Equation," Prog. Electromagn. Res. **143**, 285–314 (2013).

23. S. Romanov, "Optimization of Numerical Algorithms for Solving Inverse Problems of Ultrasonic Tomography on a Supercomputer," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 793, pp. 67–79.

24. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Low-Frequency 3D Ultrasound Tomography: Dual-Frequency Method," Vychisl. Metody Programm. **19**, 479–495 (2018).

25. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Inverse Problems of 3D Ultrasonic Tomography with Complete and Incomplete Range Data," Wave Motion **51** (3), 389–404 (2014).

26. M. Fink, "Time Reversal in Acoustics," Contemp. Phys. **37** (2), 95–109 (1996).

27. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "The Problem of Choosing Initial Approximations in Inverse Problems of Ultrasound Tomography," Vychisl. Metody Programm. **18**, 312–321 (2017).

28. A. Goncharsky and S. Seryozhnikov, "Supercomputer Technology for Ultrasound Tomographic Image Reconstruction: Mathematical Methods and Experimental Results," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2019), Vol. 965, pp. 401–413.