

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v20r216

## О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ КАБАРЕ И КРЕСТ

А. И. Сухинов<sup>1</sup>, А. Е. Чистяков<sup>2</sup>, Е. А. Проценко<sup>3</sup>

Для решения задачи переноса в статье предложено использовать схему, построенную на основе линейной комбинации разностной схемы “кабаре” (англ. Upwind Leapfrog) и “крест” (англ. Standard Leapfrog) с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации. Проведено сравнение расчетов для задачи переноса на основе предложенной схемы с результатами, полученными с использованием схемы, построенной на основе линейной комбинации схемы с центральными разностями и схемы “кабаре”, и двухпараметрической разностной схемы третьего порядка точности.

**Ключевые слова:** задача переноса, схема “крест”, схема “кабаре”, линейно-взвешенная комбинация, повышение точности.

**Введение.** В настоящей статье рассматривается численное решение задачи переноса на основе усовершенствованной схемы “кабаре”, разностный оператор которой представляет собой линейную комбинацию разностных операторов схемы “крест” и “кабаре” [1]. Разностные схемы “крест” и “кабаре” обладают достаточно близкими свойствами: являются бездиссипативными и имеют второй порядок точности относительно шагов по пространственному и временному координатным направлениям. Несмотря на такие свойства схемы, они обладают невысокой точностью. Высокую точность численного решения задачи переноса показала усовершенствованная схема “кабаре” [2], разностный оператор которой представляет собой линейную комбинацию разностных операторов схемы с центральными разностями и схемы “кабаре”, а также двухпараметрическое семейство разностных схем [3, 4].

При линейной комбинации двух схем с близкими свойствами часто происходит взаимная компенсация погрешностей аппроксимации, и при этом полученная в результате схема обладает лучшими свойствами, чем исходные схемы. В связи с вышеизложенным, авторы работы задались целью получить более точную разностную схему на основе линейной комбинации схемы “крест” и схемы “кабаре”.

**1. Разностные схемы “кабаре” и “крест” для уравнения переноса.** Рассмотрим уравнение переноса [5]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $x \in [0, L]$ ,  $q(0, x) = q^0(x)$ ,  $q(t, 0) = 0$  и  $u = \text{const}$ .

Введем равномерную расчетную сетку

$$\omega = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \bar{\omega}_h = \{x_i | x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = L\}, \\ \omega_\tau = \{t^n | n = 0, 1, \dots, T\}, \\ \tau = t^{n+1} - t^n = \text{const}. \end{cases}$$

Для численного решения поставленной задачи можно использовать следующие конечно-разностные схемы:

— схема “кабаре” [1]:

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} &= 0, \quad u \geq 0; \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} &= 0, \quad u < 0; \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону; профессор, зав. кафедрой, e-mail: sukhinov@gmail.com

<sup>2</sup> Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону; профессор, e-mail: cheese\_05@mail.ru

<sup>3</sup> Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета, ул. Инициативная, 48, 347936, г. Таганрог; доцент, e-mail: earpos@rambler.ru

— схема “крест” (“чехарда”):

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = 0. \tag{3}$$

Модельная задача I. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad u = 0.5 \text{ м/с}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad q(t, 0) = 0$$

с начальными условиями  $q^0(x) = \theta(20 - x) - \theta(10 - x)$ , где  $\theta(x)$  — функция Хэвисайда.

Параметры расчетной сетки: скорость, шаг по времени  $\tau = 0.02$  с, шаг по пространству  $h = 1$  м, длина интервала по времени  $T$  равна 100 с. На рис. 1 представлены решения модельной задачи I на основе схем (2)–(3) (1 — численное решение, 2 — точное).

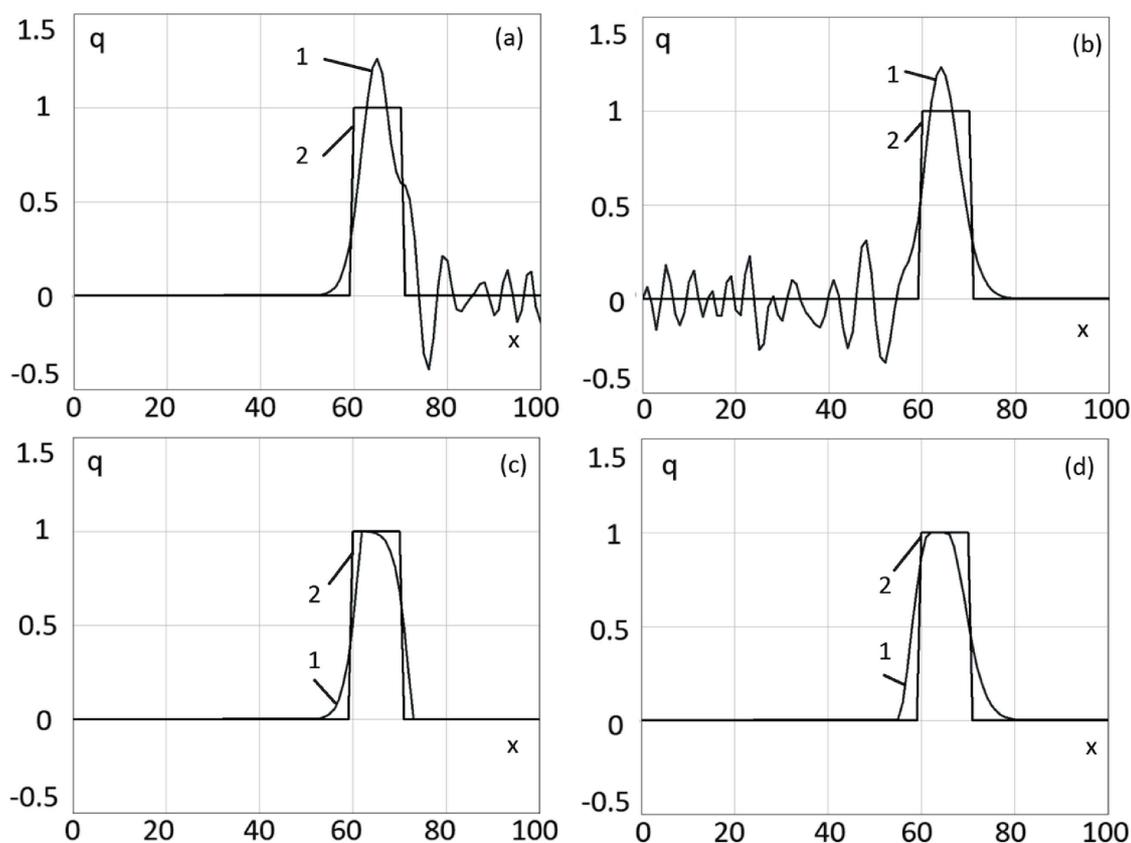


Рис. 1. Решения модельной задачи I на основе схем “кабаре” (а), “крест” (b) и “кабаре” (с), “крест” (d) с ограничителями решения

**Замечание 1.** Рис. 1а и 1b демонстрируют, что рассмотренные схемы имеют осцилляции (энтропийные возмущения) [6], при этом решение, полученное на основе схемы “кабаре”, имеет осцилляции в правой части расчетной области — перед передним фронтом волны, а на основе схемы “крест” — в левой части расчетной области — за задним фронтом волны. В рассмотренных схемах осцилляции порождаются дисперсией. В схеме “кабаре” высокие гармоники имеют “фазовую скорость” выше реальной, в схеме “крест” — ниже.

**Замечание 2.** Схемы “кабаре” и “крест” бездиссипативны, и по этой причине они не являются монотонными и их не рекомендуется использовать в задачах переноса с разрывными начальными данными без искусственной вязкости или иных монотонизирующих решение процедур. Для схемы “кабаре” для этой цели лучше всего использовать нелинейную коррекцию потоков (ограничители) [7–9], базирующуюся на принципе максимума. Комбинация схем “крест” [8, 9] и “кабаре” уже не является бездиссипативной, и ее решение на разрывных функциях имеет меньшие осцилляции. Решения модельной задачи I на основе схем “крест” и “кабаре” с ограничителями решения приведены на рис. 1с и 1d.

**2. Устойчивость и дисперсионные свойства схемы “кабаре”.** Для исследования устойчивости схемы “кабаре” на основе метода гармоник [10, 11] воспользуемся подстановкой  $q_i^n = \varphi^n \cdot e^{jki}$ , тогда уравнение (2) примет вид (случай  $u \geq 0$ ):

$$\frac{\varphi - 1}{2\tau} + \frac{e^{-jk} - e^{-jk}/\varphi}{2\tau} + u \frac{1 - e^{-jk}}{h} = 0,$$

или

$$\varphi^2 - (1 - 2c)(1 - e^{-jk})\varphi - e^{-jk} = 0, \quad c = u\tau/h.$$

Решение этого квадратного уравнения относительно  $\varphi$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= (1/2 - c)(1 - e^{-jk}) \pm \sqrt{\left((1/2 - c)(1 - e^{-jk})\right)^2 + e^{-jk}} = \\ &= e^{-jk/2} \left( j(1 - 2c) \sin(k/2) \pm \sqrt{1 - \left((1 - 2c) \sin(k/2)\right)^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим случай  $c = 0$ :

$$\varphi_{1,2} = e^{-jk/2} \left( j \sin(k/2) \pm \sqrt{1 - \sin^2(k/2)} \right) = e^{-jk/2} (j \sin(k/2) \pm \cos(k/2)).$$

В результате получим  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = -e^{-jk}$ ; следовательно,  $\varphi_2$  не является решением. Нетрудно убедиться, что  $|\varphi_1| = 1$  при  $c \leq 1$ .

**Замечание 3.** Решение уравнения переноса (1) с начальными условиями  $q(0, x) = \exp(j\omega_n x)$  будет иметь вид  $q(t, x) = \exp(j\omega_n(x - ut))$ . Здесь  $\omega_n = n\omega = k/h$  — угловая частота,  $n$  — номер гармоники,  $\omega = 2\pi/L = 2\pi/(hN)$ . Таким образом, при решении задачи переноса с начальными условиями, заданными гармонической функцией, переход между временными слоями соответствует умножению на функцию  $\phi(c, k) = \exp(-j\omega_n u\tau) = \exp(-jkc)$  при  $k \in [0, \pi]$ . Аргумент функции  $\phi(c, k)$  описывает фазовую скорость гармоник для задачи переноса и имеет вид  $\text{Arg}(\phi(c, k)) = -kc$ .

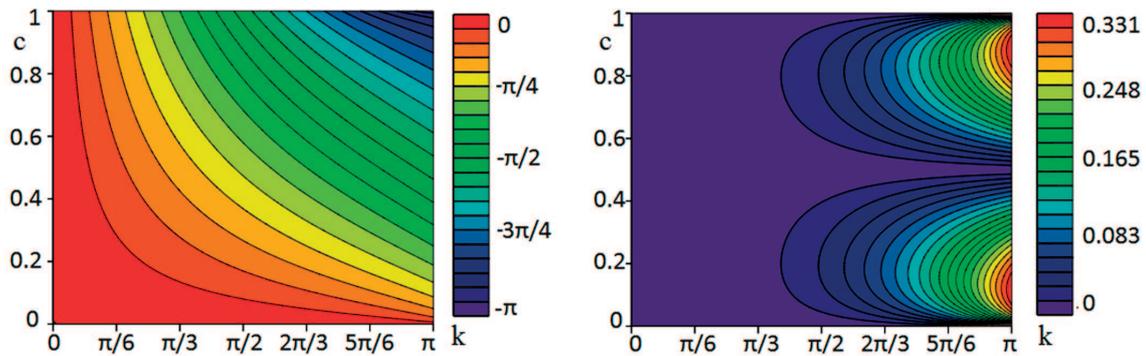


Рис. 2. Дисперсионная поверхность характеристического уравнения схемы “кабаре” (слева), отклонение дисперсионной поверхности корня характеристического уравнения схемы “кабаре” от точных значений (справа)

На рис. 2 представлено “изображение” дисперсионной поверхности первого корня характеристического уравнения для схемы “кабаре”. Рисунок иллюстрирует отклонение дисперсионной поверхности от точных значений (точное значение дисперсионной поверхности равно  $d(c, k) = -kc$ ).

Исследуем зависимость погрешности расчетов задачи переноса для различных гармоник в случае малых чисел Куранта ( $c \rightarrow 0$ ). Рассмотрим разность функций  $\varphi_1(c, k)$  и  $\phi(c, k)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1(c, k) - \phi(c, k) &= e^{-jk/2} \left( j(1 - 2c) \sin(k/2) + \sqrt{1 - \left((1 - 2c) \sin(k/2)\right)^2} \right) - e^{-jck} = \\ &= e^{-jk/2} \left( j \sin(k/2) - 2jc \sin(k/2) + \sqrt{1 - (1 - 4c + 4c^2) \sin^2(k/2)} \right) - e^{-jck} \approx \\ &\approx e^{-jk/2} \left( j \sin(k/2) - 2jc \sin(k/2) + \cos(k/2) \sqrt{1 + 4c \cdot \text{tg}^2(k/2)} \right) - e^{-jck} \approx \\ &\approx 1 - e^{-jck} + 2e^{-jk/2} c \sin(k/2) (\text{tg}(k/2) - j) = jc(k - 2 \cdot \text{tg}(k/2)). \end{aligned}$$

**Замечание 4.** Измельчение сетки приводит к линейному росту количества слоев по времени. Из полученной в работе зависимости следует, что при решении уравнения переноса на основе схемы “кабаре” и при малых числах Куранта уменьшение шага по времени не приводит к повышению точности. Погрешность расчетов для задачи переноса на основе схемы “кабаре” в пределе равна функции:  $f(k) = 2 \cdot \text{tg}(k/2) - k$ .

Исследуем отдельно случай  $k = \pi$ :

$$\varphi_1(c, k) - \phi(c, k) = 1 - 2c - j\sqrt{1 - (1 - 2c)^2} - e^{-jc\pi} \approx -2j\sqrt{c}.$$

**Замечание 5.** Из полученной нами зависимости погрешности расчетов для задачи переноса следует, что дробление шагов сетки по времени приводит к неограниченному росту фазы на частоте с периодом волны, равным двум узлам по пространственной координате.

**3. Устойчивость и дисперсионные свойства схемы “крест”.** Для исследования устойчивости схемы “крест” на основе метода гармоник воспользуемся подстановкой  $q_i^n = \varphi^n \cdot e^{jki}$ , тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{\varphi - 1/\varphi}{2\tau} + u \frac{e^{jk} - e^{-jk}}{2h} = 0, \quad \text{или} \quad \varphi^2 + 2jc \sin(k)\varphi - 1 = 0, \quad c = u\tau/h.$$

Решение этого квадратного уравнения относительно  $\varphi$  запишем в виде

$$\varphi_{1,2} = -jc \sin(k) \pm \sqrt{1 - c^2 \sin^2(k)}.$$

При  $c = 0$  имеем  $\varphi_1 = 1$  и  $\varphi_2 = -1$ ; следовательно,  $\varphi_2$  не является решением. Нетрудно убедиться, что  $|\varphi_1| = 1$  при  $c \leq 1$ . На рис. 3 представлена функция  $\text{Arg}(\phi(c, k)) = -kc$  и “изображение” дисперсионной поверхности первого корня характеристического уравнения для схемы “крест”.

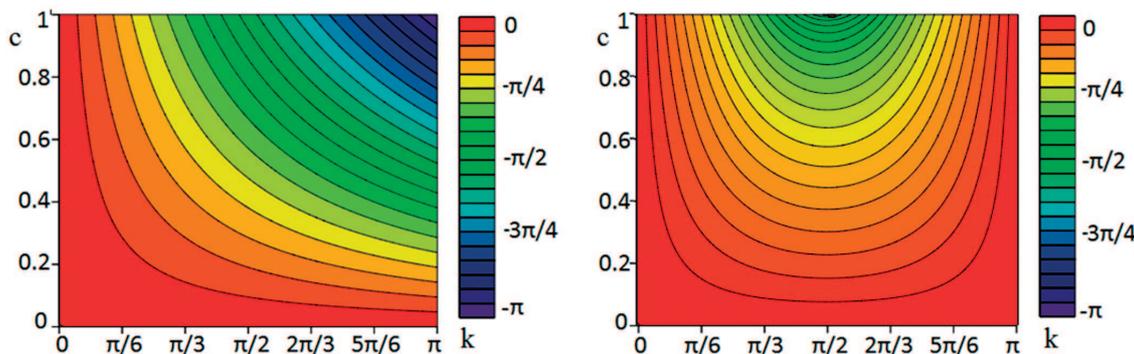


Рис. 3. Значения аргумента функции  $\phi(c, k)$  (слева) и дисперсионная поверхность характеристического уравнения разностной схемы “крест” (справа)

**Замечание 6.** Сопоставляя “изображения” функции, представленные на рис. 3, можно сделать вывод о том, что разностная схема “крест” для уравнения переноса плохо описывает изменение фазы гармоник с периодами волны менее 4 узлов ( $k \geq \pi/2$ ). При использовании данной схемы для расчета задачи переноса в случае периода волны равного 2 узлам ( $k = \pi$ ) изменения фазы не происходит.

**4. Линейная комбинация схем “кабаре” и “крест”.** Рассмотрим разностную схему “кабаре” (случай  $u \geq 0$ ):

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0. \tag{5}$$

Воспользуемся разложениями функций  $q_i^{n\pm 1}$  и  $q_{(i-1/2)\pm 1/2}^n$  в ряд Тейлора в окрестности точек  $(i, n)$  и  $(i - 1/2, n)$  соответственно:

$$q_i^{n\pm 1} = q_i^n \pm \tau(q_t)_i^n + \frac{\tau^2}{2} (q_{tt})_i^n \pm \frac{\tau^3}{3!} (q_{ttt})_i^n + \frac{\tau^4}{4!} (q_{tttt})_i^n + O(\tau^5); \tag{6}$$

$$q_{(i-1/2)\pm 1/2}^n = q_{i-1/2}^n \pm \frac{h}{2} (q_x)_{i-1/2}^n + \frac{h^2}{8} (q_{xx})_{i-1/2}^n \pm \frac{h^3}{48} (q_{xxx})_{i-1/2}^n + \frac{h^4}{384} (q_{xxxx})_{i-1/2}^n + O(h^5). \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получим:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = (q_t)_{i-1/2}^n + u(q_x)_{i-1/2}^n - \frac{uh^2}{12} (q_{xxx})_{i-1/2}^n + \frac{u^2\tau h}{4} (q_{xxx})_{i-1/2}^n - \frac{u^3\tau^2}{6} (q_{xxx})_{i-1/2}^n + O(h^4). \quad (8)$$

С учетом уравнения (1) имеем

$$q_t = -uq_x, \quad q_{tt} = u^2q_{xx}, \quad q_{ttt} = -u^3q_{xxx}, \quad q_{tttt} = u^4q_{xxxx}, \quad (9)$$

и равенство (8) примет вид

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = (q_t + uq_x)_{i-1/2}^n - \frac{(c-1)(2c-1)}{12} uh^2 (q_{xxx})_{i-1/2}^n + O(h^4). \quad (10)$$

Рассмотрим разностную схему “крест”

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = 0. \quad (11)$$

Воспользуемся разложением функции  $q_{i\pm 1}^n$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(i, n)$ :

$$q_{i\pm 1}^n = q_i^n \pm h(q_x)_i^n + \frac{h^2}{2} (q_{xx})_i^n \pm \frac{h^3}{3!} (q_{xxx})_i^n + \frac{h^4}{4!} (q_{xxxx})_i^n + O(h^5). \quad (12)$$

Подставим (12), (6) в (11):

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = (q_t)_i^n + \frac{\tau^2}{6} (q_{ttt})_i^n + u(q_x)_i^n + u \frac{h^2}{6} (q_{xxx})_i^n + O(\tau^4 + h^4). \quad (13)$$

С учетом (9) равенство (13) примет вид

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = (q_t + uq_x)_i^n + \frac{1-c^2}{6} uh^2 (q_{xxx})_i^n + O(h^4). \quad (14)$$

Рассмотрим линейную комбинацию разностной схемы “кабаре” и “крест” с весовыми коэффициентами  $2/3$  и  $1/3$  соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_{i-1}^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u \geq 0; \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_{i-1}^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу (9), (10) и (14) схема (15) имеет локальную погрешность аппроксимации относительно фиктивного узла  $(i - 1/3, n)$  равную  $\frac{c(1-c)}{6} uh^2 q_{xxx} + O(h^3)$ .

**Замечание 7.** Из полученной оценки погрешности следует, что при малых числах Куранта схему (15), имеющую погрешность аппроксимации  $O(ch^2)$ , использовать предпочтительнее, чем исходные схемы “кабаре” (5) и “крест” (11), погрешности аппроксимаций которых равны  $O(h^2)$ .

На рис. 4 приведены решения модельной задачи I (1 — точное решение, 2 — численное) на основе схемы (5). Расчетные интервалы по времени  $T$  составляли 100 с и 500 с.

**5. Устойчивость и дисперсионные свойства схемы, полученной на основе линейной комбинации схем “кабаре” и “крест”.** Диссипативные и дисперсионные свойства гибридной схемы “крест” и “кабаре” подробно изучены и описаны в публикации [8], а также в диссертации [9]. В данной работе исследуется поведение гибридной схемы (15) при малых значениях числа Куранта, полученной из соотношений минимизации порядка погрешности аппроксимации.

Воспользуемся методом гармоник для исследования устойчивости схемы, полученной на основе линейной комбинации схем “кабаре” и “крест” (15). Подставим  $q_i^n = \varphi^n \cdot e^{jki}$  в уравнение (15) (случай  $u \geq 0$ ):

$$\frac{\varphi - 1}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{e^{-jk} - e^{-jk}/\varphi}{2\tau} + u \frac{1 - e^{-jk}}{h} \right) + \frac{1 - 1/\varphi}{3\tau} + u \frac{e^{jk} - e^{-jk}}{3h} = 0,$$

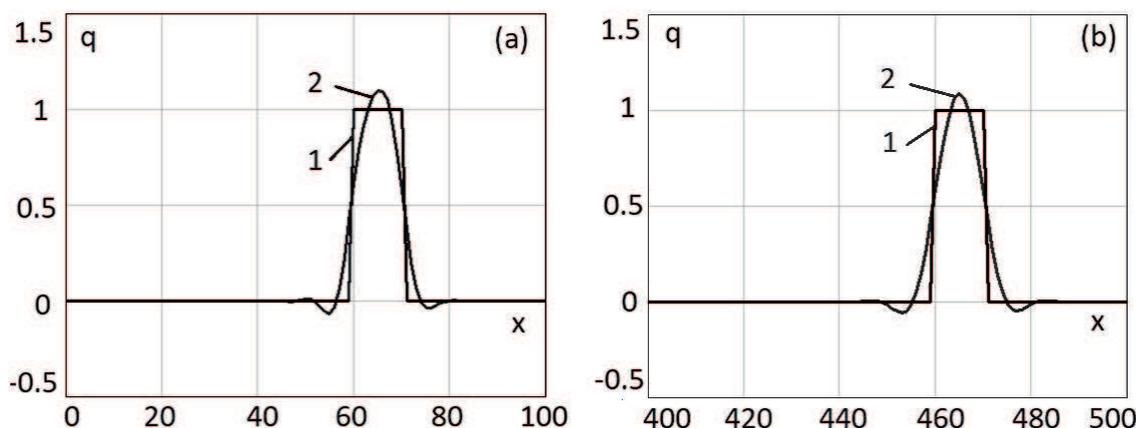


Рис. 4. Решения модельной задачи I: а) расчетный интервал 100 с, б) 500 с

или

$$\varphi^2 + \left( \frac{4c-2}{3}(1-\cos k) + \frac{6c-2}{3}j \sin k \right) \varphi - \frac{2 \cos k + 1 - 2j \sin k}{3} = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения относительно  $\varphi$  запишем в виде

$$\varphi_{1,2} = \frac{1-2c}{3}(1-\cos k) + \frac{1-3c}{3}j \sin k \pm \sqrt{\left( \frac{1-2c}{3}(1-\cos k) + \frac{1-3c}{3}j \sin k \right)^2 + \frac{2 \cos k + 1 - 2j \sin k}{3}}.$$

Будем считать, что при расчете  $\varphi_1$  берется значение корня комплексного числа с неотрицательной вещественной частью (аргумент комплексного числа принадлежит полуинтервалу  $[-\pi/2, \pi/2)$ ). Рассмотрим случай  $c = 0$ :

$$\varphi_{1,2} = \frac{1-e^{-jk}}{3} \pm \sqrt{\left( \frac{1-e^{-jk}}{3} \right)^2 + \frac{2e^{-jk}+1}{3}} = \frac{1-e^{-jk}}{3} \pm \frac{2+e^{-jk}}{3}.$$

Отсюда получаем  $\varphi_1 = 1$  и  $\varphi_2 = (-1 - 2e^{-jk})/3$ ; следовательно,  $\varphi_2$  не является решением. Исследованы значения функции  $|\varphi_1(c, k)| \in [0, 1]$  при  $k \in [0, \pi]$  и  $c \in [0, 1]$ . На рис. 5 представлены значения модуля и аргумента функции  $\varphi_1(c, k)$  в зависимости от значений параметров  $k$  и  $c$ .

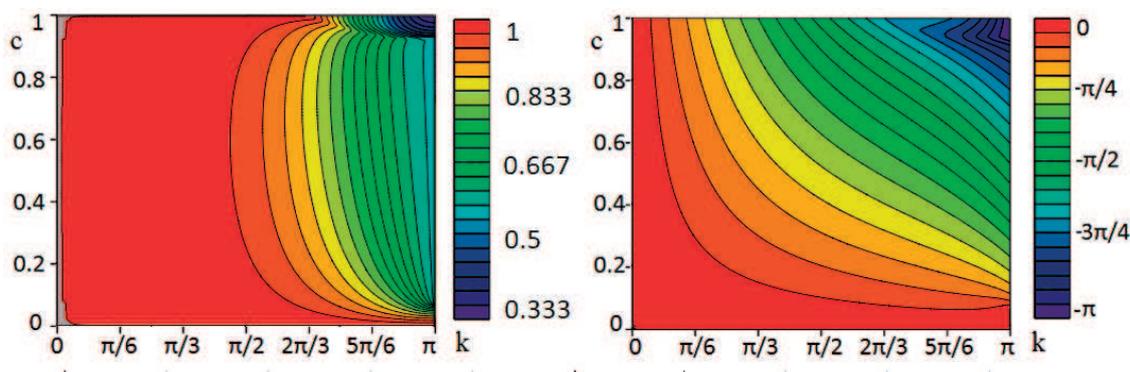


Рис. 5. Значения модуля (слева) и аргумента (справа) корня характеристического уравнения  $\varphi_1(c, k)$  для схемы, полученной на основе линейной комбинации схем “кабаре” и “крест”

Исследуем дисперсионные свойства схемы (15) в области малых чисел Куранта. Рассмотрим разность

функций  $\varphi_1(c, k)$  и  $\phi(c, k)$ :

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 - \phi(c, k) &= \frac{1 - e^{-jk}}{3} - \frac{2c}{3}(1 - \cos k) - jc \sin k + \\
 &+ \sqrt{\left(\frac{1 - e^{-jk}}{3} - \frac{2c}{3}(1 - \cos k) - jc \sin k\right)^2 + \frac{2e^{-jk} + 1}{3} - e^{-jck}} \approx \\
 &\approx \frac{1 - e^{-jk}}{3} - \frac{2c}{3}(1 - \cos k) - jc \sin k + \\
 &+ \left(\frac{2 + e^{-jk}}{3}\right) \sqrt{1 - 6 \frac{1 - e^{-jk}}{(2 + e^{-jk})^2} \left(\frac{2c}{3}(1 - \cos k) + jc \sin k\right)} - e^{-jck} \approx \\
 &\approx 1 - \frac{2c}{3}(1 - \cos k) - jc \sin k - \frac{1 - e^{-jk}}{2 + e^{-jk}} \left(\frac{2c}{3}(1 - \cos k) + jc \sin k\right) - \cos Ak + j \sin ck \approx \\
 &\approx -\frac{2(1 - \cos k) + (1 - e^{-jk})j \sin k}{2 + e^{-jk}} c = \left(-\frac{6 + j \sin k}{2 + e^{-jk}} + 2 + j \sin k\right) c.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

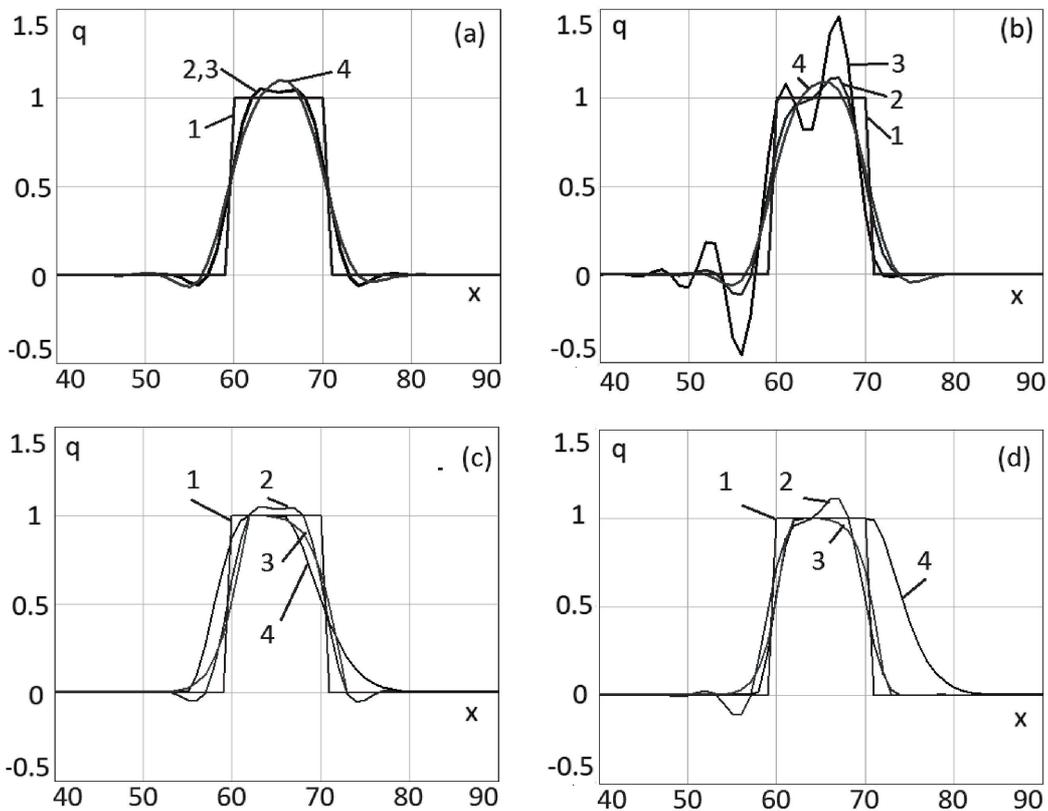


Рис. 6. Решения модельной задачи I (сверху: 1 – точное решение, 2 – численное решение на основе схемы (15), 3 – на основе схемы (17), 4 – на основе схемы третьего порядка точности (18); снизу: 1 – точное решение, 2 – численное решение на основе схемы (15), 3 – на основе схемы “кабаре” с ограничителями решения, 4 – на основе схемы “крест” с ограничителями решения); шаг по времени  $\tau = 0.02$  с (слева),  $\tau = 0.4$  с (справа)

**Замечание 8.** Из выражения (16) и с учетом того, что измельчение сетки приводит к линейному росту количества слоев по времени, следует, что при малых числах Куранта погрешность решения для уравнения переноса на основе схемы (15) в пределе равна функции

$$f(k) = \left| -\frac{6 + j \sin k}{2 + e^{-jk}} + 2 + j \sin k \right|.$$

**6. Результаты тестовых расчетов.** Проведем сравнение расчетов на основе предложенной схемы (15) с результатами, полученными с использованием различных схем.

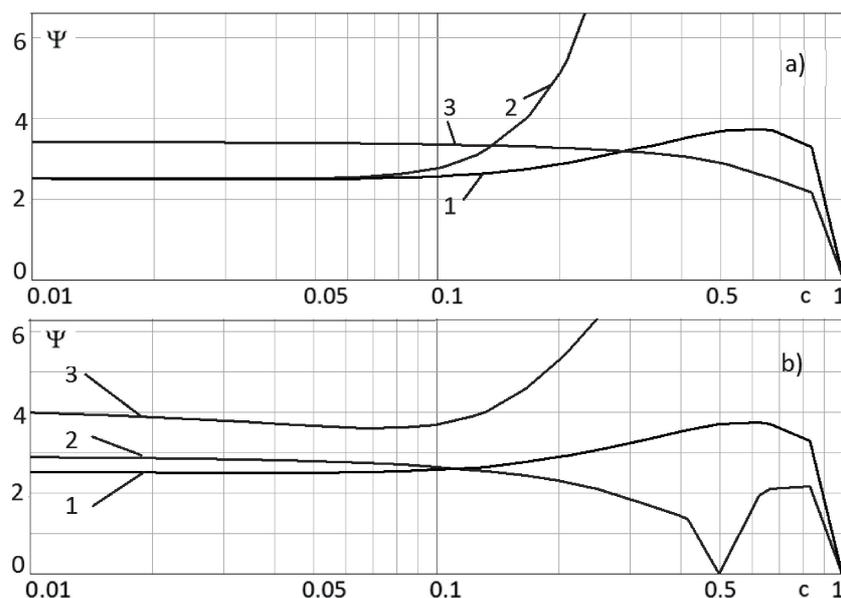


Рис. 7. Значения погрешностей численного решения модельной задачи I в зависимости от значений чисел Куранта (сверху: 1 – схемы (15), 2 – схемы (17) и 3 – схемы (18); снизу: 1 – схемы (15), 2 – схемы “кабаре” с ограничителями и 3 – схемы “крест” с ограничителями)

Схема I – схема, полученная в результате линейной комбинации центральной разностной схемы и схемы “кабаре” [8]:

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n + 4q_i^n - 5q_{i-1}^n}{4h} &= 0, \quad u \geq 0; \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{5q_{i+1}^n + 4q_i^n - q_{i-1}^n}{4h} &= 0, \quad u < 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Схема II – двухпараметрическая разностная схема [2, 12]

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + u \frac{\tilde{q}_{i+1/2}^n - \tilde{q}_{i-1/2}^n}{h} = 0, \tag{18}$$

где  $\tilde{q}_{i+1/2}^n = \alpha \begin{pmatrix} q_{i-1}^n \\ q_{i+2}^n \end{pmatrix} + (1 - \alpha - \beta) \begin{pmatrix} q_i^n \\ q_{i+1}^n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q_{i+1}^n \\ q_i^n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u \geq 0, \\ u < 0. \end{matrix}$

При  $\alpha = (c^2 - 1)/6, \beta = (c - 1)(c - 2)/6$  схема (18) обладает третьим порядком точности  $O(\tau^3 + h^3)$ .

На рис. 6 приведены решения модельной задачи I.

Сверху: 1 – точное решение, 2 – численное решение на основе схемы (15), 3 – на основе схемы (17), 4 – на основе схемы третьего порядка точности (18).

Снизу: 1 – точное решение, 2 – численное решение на основе схемы (15), 3 – на основе схемы “кабаре” с ограничителями решения, 4 – на основе схемы “крест” с ограничителями решения.

Шаг по времени  $\tau = 0.02$  с на рисунках (а) и (с) и  $\tau = 0.4$  с на рисунках (b) и (d), при этом числа Куранта равны 0.01 и 0.2 соответственно.

На рис. 7 представлены значения погрешностей численного решения модельной задачи I на основе схемы (15), схемы (17) и схемы третьего порядка точности (18), а также схем “крест” и “кабаре” с ограничителями в зависимости от значений чисел Куранта. Длина интервала по времени  $T$  равна 100 с. Шаг по времени  $\tau$  принимал значения от 0.02 с до 2 с. Числа Куранта находятся в диапазоне от 0.01 до 1.

На рис. 8 представлены графики функции погрешности  $\Psi^n$  в норме  $L_1$ , зависящей от длины расчетного интервала по времени.

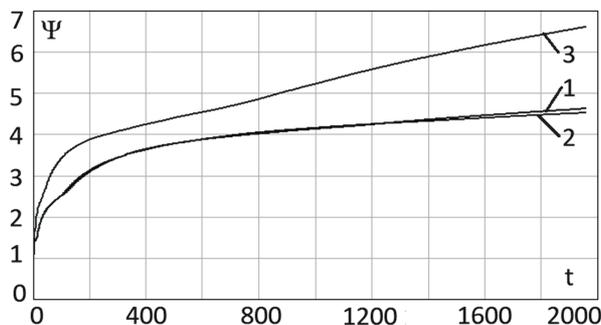


Рис. 8. Функции погрешности в норме  $L_1$ , зависящей от длины расчетного интервала: 1 – предложенная схема (15), 2 – схема (17), 3 – схема (18)

**7. Аппроксимация задачи конвекции–диффузии.** Рассмотрим нестационарное уравнение конвекции–диффузии [4, 13]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (19)$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $x \in [0, L]$ , с граничными и начальными условиями

$$q(0, x) = q^0(x), \quad q(t, 0) = q(t, L) = 0, \quad u = \text{const}.$$

Для аппроксимации оператора конвекции будем использовать разностный оператор схемы, полученной как результат линейной комбинации схемы с центральными разностями (3) и схемы “кабаре” (4):

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = \\ = 2\mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}, \quad u \geq 0; \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = \\ = 2\mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

*Модельная задача II.* Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad u = 0.5 \text{ м/с}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad q(t, 0) = q(t, L) = 0$$

с начальными условиями  $q^0(x) = \theta(20 - x) - \theta(10 - x)$ .

Решение модельной задачи II может быть представлено в виде [14]

$$q(t, x) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m^0 e^{-\mu\omega^2 m^2 t} \sin(\omega m x), \quad c_m^0 = \frac{2}{L} \int_0^l q^0(x + ut) \sin(\omega m x) dx, \quad \omega = \frac{\pi}{L}.$$

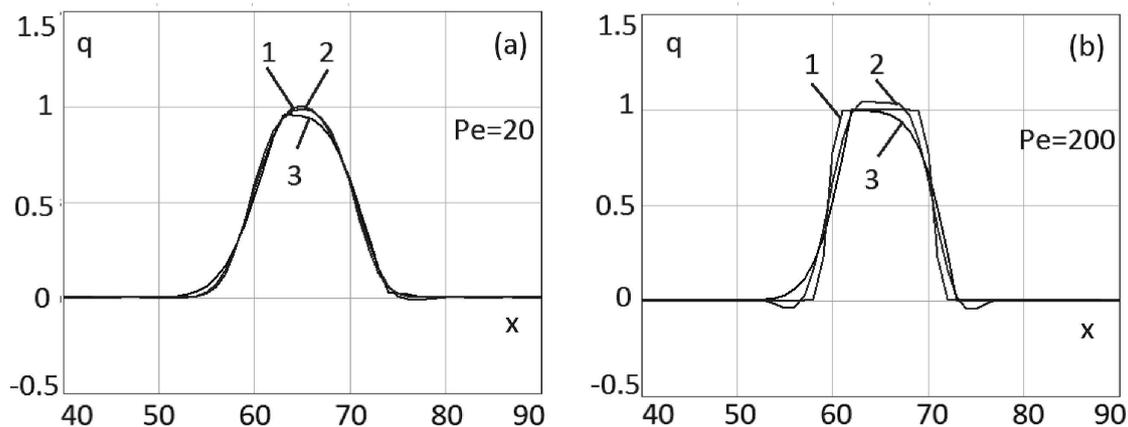


Рис. 9. Решения модельной задачи II: сеточное число Пекле равно 20 (а), 200 (б)

На рис. 9 представлены решения модельной задачи II (1 — аналитическое решение, 2 — численное на основе схемы (20), 3 — схемы “кабаре” с ограничителями решения). Параметр  $\mu$  равен  $0.025 \text{ м}^2/\text{с}$  (а) и  $0.0025 \text{ м}^2/\text{с}$  (б). При этом сеточные числа Пекле [4] ( $Pe = uh/\mu$ ) равны 20 и 200 соответственно.

На рис. 10. представлены графики функции погрешности  $\Psi^n$  решения модельной задачи II на основе разностной схемы (20) и схемы “кабаре” с ограничителями решения в норме  $L_1$ , зависящей от сеточного числа Пекле.

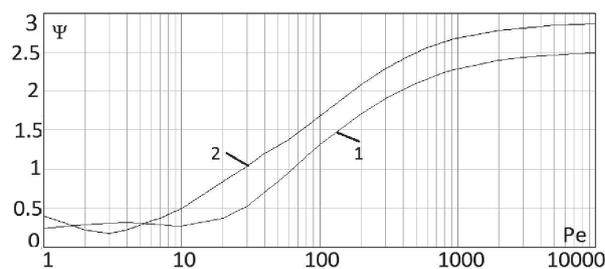


Рис. 10. Функции погрешности решения модельной задачи II в норме  $L_1$ , зависящей от сеточного числа Пекле: 1 — на основе разностной схемы (20), 2 — схемы “кабаре” с ограничителями решения

Рис. 10 иллюстрирует, что предложенная разностная схема (20) для решения задачи (19) имеет незначительную погрешность в широком диапазоне сеточных чисел Пекле.

**Заключение.** Результаты выполненных численных экспериментов показали, что схемы типа “кабаре” имеют осцилляции в правой части расчетной области, локализованные в узлах сетки, в которых располагается распространяющаяся волна (импульс), а вычисленные на основе схемы “крест” — в левой части расчетной области (за задним фронтом волны). В рассмотренных схемах осцилляции порождаются дисперсией. В схеме “кабаре” высокие гармоники имеют “фазовую скорость” выше реальной, а в схеме “крест” — ниже. Измельчение сетки приводит к линейному росту количества слоев по времени. Из полученного в работе выражения следует, что при решении уравнения переноса на основе схемы “кабаре” и при малых числах Куранта уменьшение шага по времени не приводит к повышению точности. Погрешность расчетов задачи переноса на основе схемы “кабаре” в пределе равна функции  $f(k) = 2 \operatorname{tg}(k/2) - k$ . Разностная схема “крест” для уравнения переноса плохо описывает изменение фазы гармоник с периодами волны менее 4 узлов ( $k \geq \pi/2$ ), а в случае периода волны равного 2 узлам ( $k = \pi$ ) при использовании данной схемы изменение фазы не происходит.

В настоящей статье для решения задачи переноса предложено использовать схему, построенную на основе линейной комбинации разностной схемы “кабаре” и схемы “крест” с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно. Авторами получена оценка погрешности аппроксимации для предложенной разностной схемы, из которой следует, что при малых числах Куранта данную схему, имеющую погрешность аппроксимации  $O(ch^2)$ , использовать предпочтительнее, чем исходные схемы “кабаре” и “крест”, погрешности аппроксимаций которых имеют порядок  $O(h^2)$ , так как для интересных с точки зрения приложений случаев константа  $c$  значительно меньше единицы.

Представлено сравнение расчетов задачи переноса на основе предложенной схемы с результатами, полученными с использованием линейной комбинации центральной разностной схемы и схемы “кабаре”, а также с двухпараметрической разностной схемой третьего порядка точности. В норме сеточного пространства  $L_1$  приведены зависимости погрешностей численного решения модельных задач переноса на основе вышеизложенных схем в зависимости от значений чисел Куранта. Из представленных в работе примеров следует, что при малых числах Куранта (0.1 и менее) предложенная схема, как и схема, полученная в результате линейной комбинации центральной разностной схемы и схемы “кабаре”, намного точнее остальных рассмотренных в работе схем. Следует отметить, что предложенная схема имеет устойчивое решение в диапазоне чисел Куранта от 0 до 1. Для нестационарного уравнения конвекции–диффузии предложенная разностная схема имеет незначительную погрешность в широком диапазоне сеточных чисел Пекле.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00623).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. **10**, № 1. 86–100.
2. Сухинов А.И., Белова Ю.В., Чистяков А.Е. Решение задачи переноса веществ при больших числах Пекле // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 371–380.
3. Гуцин В.А. Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации // Матем. моделирование. 2016. **28**, № 2. 6–18.
4. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. **27**, № 4. 594–609.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал, 1999.
6. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики // Матем. моделирование. 2014. **26**, № 1. 17–32.

7. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
8. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Карабасов С.А., Маркештейн А.П. Новая схема “двухслойный крест” для моделирования стохастических уравнений Ландау–Лифшица // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. **54**, № 2. 298–317.
9. Глотов В.Ю. Математическая модель свободной турбулентности на основе принципа максимума: диссертация кандидата физ.-мат. наук. М., 2014.
10. Самарский А.А. О регуляризации разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. **7**, № 1. 62–93.
11. Самарский А.А. Классы устойчивых схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. **7**, № 5. 1096–1133.
12. Федоренко Р.П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. **2**, № 6. 1122–1128.
13. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишня А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Матем. моделирование. 2012. **24**, № 8, 32–44.
14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Яковлевский М.В. Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ. 2016. **5**, № 1. 47–62.

Поступила в редакцию  
16.04.2019

---

## Upwind and Standard Leapfrog Difference Schemes

A. I. Sukhinov<sup>1</sup>, A. E. Chistyakov<sup>2</sup>, and E. A. Protsenko<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Department, e-mail: sukhinov@gmail.com

<sup>2</sup> Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344010, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: cheese\_05@mail.ru

<sup>3</sup> A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State Economical University; ul. Initsiativnaya 48, Taganrog, 347936, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: eapros@rambler.ru

Received April 16, 2019

**Abstract:** In order to solve the transfer problem, it is proposed to use the scheme based on a linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weighting coefficients obtained by minimizing the approximation error. The estimate of the approximation error of the proposed difference scheme shows that, for small Courant numbers, this scheme whose approximation error is  $O(ch^2)$ , where the constant  $c$  is significantly less than unity, is preferable to use than the original Upwind and Standard Leapfrog schemes whose approximation errors are  $O(h^2)$ . The numerical results for the transfer problem based on the proposed scheme are compared with the results obtained using the following schemes: (i) the scheme based on a linear combination of the Standard Leapfrog scheme and the Upwind Leapfrog scheme and (ii) the two-parameter difference scheme of the third order of accuracy.

**Keywords:** transfer problem, Standard Leapfrog scheme, Upwind Leapfrog scheme, linear weighted combination, increasing of accuracy.

## References

1. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, “Finite Difference Approximation of Convective Transport Equation with Space Splitting Time Derivative,” *Mat. Model.* **10** (1), 86–100 (1998).
2. A. I. Sukhinov, Yu. V. Belova, and A. E. Chistyakov, “Solution of the Matter Transport Problem at High Peclet Numbers,” *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 371–380 (2017).
3. V. A. Gushchin, “Family of Quasi-Monotonic Finite-Difference Schemes of the Second-Order of Approximation,” *Mat. Model.* **28** (2), 6–18 (2016) [*Math. Models Comput. Simul.* **8** (5), 487–496 (2016)].
4. O. M. Belotserkovskii, V. A. Gushchin, and V. N. Kon’shin, “The Splitting Method for Investigating Flows of a Stratified Liquid with a Free Surface,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **27** (4), 594–609 (1987) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **27** (2), 181–191 (1987)].

5. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Convection–Diffusion Problems* (Editorial, Moscow, 1999) [in Russian].
6. M. E. Ladonkina, O. A. Neklyudova, and V. F. Tishkin, “Application of the RKDG Method for Gas Dynamics Problems,” *Mat. Model.* **26** (1), 17–32 (2014) [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (4), 397–407 (2014)].
7. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
8. V. Yu. Glotov, V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and A. P. Markesteijn, “New Two-Level Leapfrog Scheme for Modeling the Stochastic Landau–Lifshitz Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **54** (2), 298–317 (2014) [*Comput. Math. Math. Phys.* **54** (2), 315–334 (2014)].
9. V. Yu. Glotov, *A Mathematical Model of Free Turbulence Based on Maximum Principle*, Candidate’s Dissertation in Mathematics and Physics (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2014).
10. A. A. Samarskii, “Regularization of Difference Schemes,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **7** (1), 62–93 (1967) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **7** (1), 79–120 (1967)].
11. A. A. Samarskii, “Classes of Stable Schemes,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **7** (5), 1096–1133 (1967) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **7** (5), 171–223 (1967)].
12. R. P. Fedorenko, “The Application of Difference Schemes of High Accuracy to the Numerical Solution of Hyperbolic Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **2** (6), 1122–1128 (1962) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **2** (6), 1355–1365 (1963)].
13. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. F. Timofeeva, and A. V. Shishenya, “Mathematical Model for Calculating Coastal Wave Processes,” *Mat. Model.* **24** (8), 32–44 (2012) [*Math. Models Comput. Simul.* **5** (2), 122–129 (2013)].
14. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and M. V. Iakobovskii, “Accuracy of the Numerical Solution of the Equations of Diffusion–Convection Using the Difference Schemes of Second and Fourth Order Approximation Error,” *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Vychisl. Mat. Inf.* **5** (1), 47–62 (2016).