

УДК 519.633

doi 10.26089/NumMet.v20r212

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА С НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Г. В. Кривовичев¹, М. П. Мащинская²

Статья посвящена анализу устойчивости неявных конечно-разностных схем для системы кинетических уравнений, применяемых для проведения гидродинамических расчетов в рамках метода решеточных уравнений Больцмана. Представлены семейства двухслойных и трехслойных схем с направленными разностями первого–четвертого порядков аппроксимации по пространственным переменным. Важной особенностью схем является то, что конвективные слагаемые аппроксимируются одной конечной разностью. Показано, что в выражении для аппроксимационной вязкости схем высоких порядков отсутствуют фиктивные слагаемые, что позволяет применять их во всем диапазоне значений времени релаксации. Анализ устойчивости проводится по линейному приближению с использованием метода Неймана. Получены приближенные условия устойчивости в виде неравенств на значения параметра Куранта. При расчетах показано, что площади областей устойчивости в пространстве параметров у двухслойных схем больше, чем у трехслойных. Исследованные схемы могут применяться при расчетах как непосредственно, так и в методах типа предиктор–корректор.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, неявные разностные схемы, устойчивость.

1. Введение. В последние годы в области вычислительной гидродинамики при проведении расчетов на многопроцессорных системах все большей популярностью пользуется метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее метод LBM) [1]. Это связано как с широкими возможностями для распараллеливания его алгоритмов [2, 3], так и с мезоскопической природой метода, позволяющей производить моделирование сложных физических процессов, таких, как течения с фазовыми переходами [4, 5] и течения в пористых средах [6].

Ключевой особенностью метода LBM является то, что он основан на решении дискретных кинетических уравнений относительно функций распределения частиц с заданными скоростями (решеточных уравнений Больцмана, lattice Boltzmann equations, далее LBE-уравнения). Эти уравнения могут рассматриваться как явные разностные схемы на равномерной сетке для системы уравнений Больцмана с дискретными скоростями [7]. Недостатком метода, основанным на использовании LBE-уравнений, можно считать его условную устойчивость — на значения параметра релаксации накладывается определенное ограничение. Число Куранта при этом является постоянным и равным единице, что задает жесткую связь значений шагов по времени и пространству. Для устранения этого недостатка были предложены так называемые схемы, не привязанные к решетке (off-lattice schemes), при применении которых шаги могут варьироваться независимо. Кроме устойчивости, это может улучшить и точность метода, а также дает возможность использования неравномерных и адаптивных сеток. Такие схемы могут строиться с использованием широко известных методов дискретизации — метода конечных разностей [8–11], метода конечных объемов [12, 13] и метода конечных элементов [14, 15].

Настоящая статья посвящена построению и исследованию неявных конечно-разностных решеточных схем Больцмана (implicit finite-difference-based lattice Boltzmann schemes). Для аппроксимации по пространственным переменным используется специальный подход, в рамках которого конвективные члены в кинетических уравнениях приближаются одной конечной разностью, узлы при этом располагаются вдоль проекций характеристик на физическое пространство (так называемые характеристические (characteristic-based) схемы [8, 16]). Для аппроксимации используются направленные разности первого–четвертого порядков. Построены двухслойные и трехслойные схемы. С помощью метода Неймана проводится анализ

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский пр., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург; доцент, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru

² Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский пр., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург; студент, e-mail: m.maschinskaya@mail.ru

устойчивости по линейному приближению. Получены приближенные условия устойчивости в виде неравенств на значения параметра Куранта и исследована зависимость площади области устойчивости от этого параметра. Работа является продолжением исследований, начатых в [17–19], в которых исследуются явные характеристические конечно-разностные решеточные схемы Больцмана.

2. Конечно-разностные схемы. Разностные схемы, используемые в рамках метода ЛВМ, применяются при решении задач для системы кинетических уравнений с дискретными скоростями:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(\text{eq})}). \quad (1)$$

Здесь t — время, \mathbf{r} — вектор пространственных переменных, $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$, $i = \overline{1, n}$ — функции распределения частиц со скоростями $\mathbf{V}_i = V \mathbf{e}_i$, где $V = l/\delta t$, l — средняя длина свободного пробега, δt — среднее время свободного пробега, \mathbf{e}_i — безразмерные векторы, задающие шаблон в пространстве скоростей, λ — время релаксации, $f_i^{(\text{eq})} = f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f})$ — равновесные функции распределения, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$.

Макроскопические переменные — плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ и скорость $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ — вычисляются следующим образом:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i f_i(t, \mathbf{r}). \quad (2)$$

При расчетах плоских течений часто используется шаблон D2Q9, определяемый следующими векторами \mathbf{e}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (0, 0), & \mathbf{e}_2 &= (1, 0), & \mathbf{e}_3 &= (0, 1), & \mathbf{e}_4 &= (-1, 0), & \mathbf{e}_5 &= (0, -1), \\ \mathbf{e}_6 &= (1, 1), & \mathbf{e}_7 &= (-1, 1), & \mathbf{e}_8 &= (-1, -1), & \mathbf{e}_9 &= (1, -1). \end{aligned}$$

Равновесные функции распределения при этом аппроксимируются следующим образом:

$$f_i^{(\text{eq})} = f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}) = f_i^{(\text{eq})}(\rho, \mathbf{u}) = W_i \rho \left(1 + 3 \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{V^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})^2}{V^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{V^2} \right), \quad (3)$$

где $W_i = 4/9$ для $i = 1$; $1/9$ для $i = 2, 3, 4, 5$; $1/36$ для $i = 6, 7, 8, 9$.

Система ЛВЕ-уравнений представляет собой разностную схему, аппроксимирующую (1) на сетке с шагами δt по времени и l по пространственным переменным, имеющую следующий вид:

$$f_i(t + \delta t, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\tau} (f_i(t, \mathbf{r}) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t, \mathbf{r}))), \quad (4)$$

где $\tau = \lambda/\delta t$ — безразмерное время релаксации. Коэффициент кинематической вязкости ν связан с параметром τ следующим соотношением:

$$\nu = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{3\delta t},$$

откуда сразу следует необходимое условие устойчивости: $\tau > 1/2$. Для числа Куранта в случае ЛВЕ-уравнений выполнено соотношение $\gamma = V\delta t/l = 1$, в связи с чем значения шагов нельзя варьировать независимо друг от друга, влияя тем самым на устойчивость и точность метода.

В настоящей работе рассматриваются конечно-разностные схемы, аппроксимирующие (1) на пространственной и временной сетках, построенных с шагами l и $\Delta t \neq \delta t$ соответственно. Для аппроксимации по пространственным переменным конвективные члены $\mathbf{V}_i \nabla f_i$ заменяются одной конечной разностью с шаблоном, узлы которого располагаются вдоль проекций характеристик на физическое пространство. В случае явных схем такой подход позволяет улучшать устойчивость метода по сравнению со случаями схем, в которых производные, входящие в $\mathbf{V}_i \nabla f_i$, аппроксимируются раздельно [17–19].

Для улучшения устойчивости предлагается посредством аппроксимации производной по t строить неявные схемы. Необходимо отметить, что использование таких схем требует решения на каждом временном слое в каждом узле сетки системы нелинейных алгебраических уравнений с помощью итерационных методов, что, безусловно, увеличивает время расчетов. Однако такие схемы позволяют использовать большие значения шага по времени по сравнению с явными схемами. При этом неявные схемы могут использоваться в методах типа предиктор–корректор без необходимости использования итерационных процедур [20].

В рамках метода ЛВМ неявные схемы использовались в достаточно большом числе работ. В [21] для случая модели с несколькими временами релаксации были предложены неявные схемы, основанные на

методе Эйлера и методах Рунге–Кутты высоких порядков, пространственные производные при этом аппроксимировались с помощью направленных разностей третьего порядка. В [22] предложен полунявный метод типа предиктор–корректор, основанный на использовании макропеременных. В этой статье на простых численных примерах показано, что схема является устойчивой в широком диапазоне значений шага по времени, но не исследовано влияние параметров. В [23] рассмотрена полунявная схема с конечными разностями. Устойчивость этой схемы была позднее исследована в [9]. Авторы [24] проводили сравнение явных и неявных LBE-уравнений в применении к задачам об установившихся течениях. Преимущества неявных схем проявились в случае больших значений числа Рейнольдса. В [25] предложен подход к реализации off-lattice схем с помощью метода расщепления. На одном из его этапов вместо (1) решается система линейных уравнений переноса, для которой была предложена неявная схема на основе метода конечных элементов Тейлора–Галеркина, позволяющая проводить расчеты на неструктурированных сетках. В [26] предложена конечно-элементная параметрическая неявная схема на основе метода наименьших квадратов. Явно-неявные (implicit-explicit) схемы для решения задач динамики сжимаемых сред предложены в [27, 28].

2.1. Аппроксимация конвективных членов. В настоящей работе конвективные члены $\mathbf{V}_i \nabla f_i$ в узле (t_{j+1}, \mathbf{r}) будем аппроксимировать с использованием направленных разностей первого–четвертого порядков аппроксимации следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx \frac{V}{l} \left(f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) - f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) \right), \\ \mathbf{V}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx \frac{V}{2l} \left(-3f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + 4f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) - f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + 2\mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) \right), \\ \mathbf{V}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx \frac{V}{6l} \left(-11f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + 18f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 9f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + 2\mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) + 2f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + 3\mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) \right), \\ \mathbf{V}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx \frac{V}{12l} \left(-25f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + 48f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 36f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + 2\mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) + 16f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + 3\mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) - 3f_i \left(t_{j+1}, \mathbf{r} + 4\mathbf{V}_i \frac{l}{V} \right) \right). \end{aligned}$$

2.2. Аппроксимация производной по времени. Рассмотрим два способа аппроксимации производной по времени. Двухслойные схемы построим, используя левую разностную производную с шагом $\Delta t/2$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(t_{j+1}, \mathbf{r}) \approx \frac{f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r})}{\Delta t/2},$$

где $t_{j+1/2} = t_j + \Delta t/2$. Значения $f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r})$ заменим следующей полусуммой:

$$f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}) \approx \frac{1}{2} (f_i(t_j, \mathbf{r}) + f_i(t_{j+1}, \mathbf{r})).$$

При построении трехслойных схем аппроксимируем производную с шагом Δt :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(t_{j+1}, \mathbf{r}) = \frac{f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) - f_i(t_j, \mathbf{r})}{\Delta t},$$

при этом $f_i(t_j, \mathbf{r})$ заменим таким образом:

$$f_i(t_j, \mathbf{r}) \approx \frac{1}{2} (f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + f_i(t_{j-1}, \mathbf{r})).$$

2.3. Конечно-разностные схемы. Подставляя представленные выше аппроксимации в (1), получим разностные схемы, задаваемые в случае двухслойных схем формулой

$$f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + f_i(t_j, \mathbf{r})) - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}_h(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r})) - \frac{\Delta t}{2\lambda} \left(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) - f_i^{(\text{eq})}(f(t_j, \mathbf{r})) \right), \quad (5)$$

где \mathcal{L}_h — сеточный оператор, аппроксимирующий $\mathbf{V}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r})$. Трехслойные схемы будут задаваться аналогично:

$$f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + f_i(t_{j-1}, \mathbf{r})) - \Delta t \mathcal{L}_h(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r})) - \frac{\Delta t}{\lambda} \left(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r})) \right). \quad (6)$$

Первые дифференциальные приближения схем первого порядка для обоих классов имеют вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} V_{i\alpha} V_{i\beta} = -\frac{1}{\lambda} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right),$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, при этом $x_1 = x$ и $x_2 = y$. Для схем высоких порядков первые дифференциальные приближения задаются следующим образом:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\lambda} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right).$$

В [8] для конечно-разностных схем для (1) с первым приближением вида

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + V_{i\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} - \psi \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} V_{i\alpha} V_{i\beta} = -\frac{1}{\lambda} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right)$$

с использованием метода Чепмена–Энскога было получено следующее выражение для коэффициента ν :

$$\nu = \chi V^2 (\lambda + \psi),$$

где $\chi = 1/3$ для случая шаблона D2Q9. Таким образом, для схем первого порядка получим соотношение

$$\nu = \left(\lambda - \frac{\delta t}{2} \right) \frac{V^2}{3}, \quad (7)$$

которое, как можно видеть, совпадает с выражением для случая системы ЛВЕ-уравнений (4). В случае схем высоких порядков выражение имеет вид

$$\nu = \lambda \frac{V^2}{3} \quad (8)$$

и совпадает с выражением для коэффициента кинематической вязкости, полученного при применении метода Чепмена–Энскога к исходной системе уравнений (1) [8]. Таким образом, в выражениях для аппроксимационной вязкости схем высоких порядков, задаваемых посредством (5)–(6), отсутствуют фиктивные, не имеющие физического смысла, слагаемые.

Из (7) и (8) непосредственно вытекают необходимые условия устойчивости, связанные с неотрицательностью коэффициента вязкости: $\tau > 1/2$ для схем первого порядка и $\tau > 0$ для схем высоких порядков.

3. Анализ устойчивости. Для исследования устойчивости введем безразмерные переменные

$$t' = \frac{t}{\delta t}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{l}, \quad f'_i = \frac{f_i}{\Phi_i}, \quad (9)$$

где Φ_i — характерные значения функций распределения. В дальнейшем штрихи в обозначениях безразмерных переменных будем опускать. Подставляя (9) в (1), получим

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{e}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right). \quad (10)$$

Выражения для разностных схем примут вид

$$f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + f_i(t_j, \mathbf{r})) - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}_h(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r})) - \frac{\Delta t}{2\tau} \left(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r})) \right), \quad (11)$$

$$f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + f_i(t_{j-1}, \mathbf{r})) - \Delta t \mathcal{L}_h(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r})) - \frac{\Delta t}{\tau} \left(f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r})) \right), \quad (12)$$

при этом выражения, аппроксимирующие $\mathbf{e}_i \nabla f_i$, принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{e}_i) - f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}), \\ \mathbf{e}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx \frac{1}{2}(-3f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + 4f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{e}_i) - f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + 2\mathbf{e}_i)), \\ \mathbf{e}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx \frac{1}{6}(-11f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + 18f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{e}_i) - \\ &\quad - 9f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + 2\mathbf{e}_i) + 2f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + 3\mathbf{e}_i)), \\ \mathbf{e}_i \nabla f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) &\approx \frac{1}{12}(-25f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}) + 48f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + \mathbf{e}_i) - \\ &\quad - 36f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + 2\mathbf{e}_i) + 16f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + 3\mathbf{e}_i) - 3f_i(t_{j+1}, \mathbf{r} + 4\mathbf{e}_i)). \end{aligned}$$

При исследовании устойчивости будем применять подход, основанный на использовании метода Неймана [17–19]. Будем рассматривать развивающиеся во времени отклонения от стационарных решений системы (10). Эти решения определяются двумя режимами течения в неограниченной области, задаваемыми значениями макроскопических безразмерных переменных: $\rho = 1$, $u_x = U$, $u_y = 0$ (режим 1) и $\rho = 1$, $u_x = u_y = U$ (режим 2), где $U \in [0, 1]$. Этим режимам течения отвечают следующие стационарные (невозмущенные) решения (10): $f_i = \bar{f}_i = f_i^{(\text{eq})}(\rho, \mathbf{u}) = \text{const}$.

Представляя решения (11), (12) в виде

$$f_i(t, \mathbf{r}) = \bar{f}_i + \delta f_i(t, \mathbf{r}) \quad (13)$$

и производя подстановку (13) в (11) и (12), затем линеаризуя члены $f_i^{(\text{eq})}$ относительно стационарного решения, получим систему относительно возмущений δf_i . Ее решения представимы в виде [29]

$$\delta f_i(t, \mathbf{r}) = F_i(t) \exp(j\mathbf{\Theta}\mathbf{r}),$$

где $j^2 = -1$, $\mathbf{\Theta} = (\theta_x, \theta_y)$, $\theta_\alpha \in [-\pi, \pi]$, $\alpha = x, y$.

Для нахождения функций F_i рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$AS(t_{j+1}) = BS(t_j). \quad (14)$$

Посредством $G = A^{-1}B$ задается матрица перехода разностной схемы, а S состоит из $F(t_j)$ и $F(t_{j-1})$ в зависимости от класса рассматриваемых схем. Обращение матрицы A , в силу относительно малой размерности, можно производить методом Гаусса. Таким образом, задача об исследовании устойчивости стационарного решения сводится к анализу устойчивости нулевого решения системы (14).

В случае двухслойных схем (11) имеем $B = E$, $S = F$, $A = C$, где компоненты C задаются:

– для схемы первого порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} 1 + \Delta t(\exp(j\mathbf{\Theta}_i) - 1) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) \right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i, \end{cases}$$

– для схемы второго порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} 1 + \frac{\Delta t}{2}(-3 + 4\exp(j\mathbf{\Theta}_i) - \exp(2j\mathbf{\Theta}_i)) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) \right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i, \end{cases}$$

– для схемы третьего порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} 1 + \frac{\Delta t}{6}(-11 + 18\exp(j\mathbf{\Theta}_i) - 9\exp(2j\mathbf{\Theta}_i) + 2\exp(3j\mathbf{\Theta}_i)) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) \right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i, \end{cases}$$

– для схемы четвертого порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} 1 + \frac{\Delta t}{12}(-25 + 48 \exp(j\Theta_i) - 36 \exp(2j\Theta_i) + \\ + 16 \exp(3j\Theta_i) - 3 \exp(4j\Theta_i)) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}})\right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i. \end{cases}$$

В случае трехслойных схем будем иметь

$$S_i(t_j) = F_i(t_{j-1}), \quad S_{i+9}(t_j) = F_i(t_j), \quad i = \overline{1,9}, \quad A = \begin{pmatrix} E_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} \\ O_{9 \times 9} & C_{9 \times 9} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} O_{9 \times 9} & E_{9 \times 9} \\ \frac{1}{2} E_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} \end{pmatrix}.$$

Выражения для C_{is} принимают вид

— для схемы первого порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \Delta t(\exp(j\Theta_i) - 1) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}})\right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i, \end{cases}$$

— для схемы второго порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\Delta t}{2}(-3 + 4 \exp(j\Theta_i) - \exp(2j\Theta_i)) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}})\right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i, \end{cases}$$

— для схемы третьего порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\Delta t}{6}(-11 + 18 \exp(j\Theta_i) - 9 \exp(2j\Theta_i) + 2 \exp(3j\Theta_i)) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}})\right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i, \end{cases}$$

— для схемы четвертого порядка:

$$C_{is} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\Delta t}{12}(-25 + 48 \exp(j\Theta_i) - 36 \exp(2j\Theta_i) + \\ + 16 \exp(3j\Theta_i) - 3 \exp(4j\Theta_i)) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(1 - \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}})\right), & s = i, \\ -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}), & s \neq i. \end{cases}$$

Критерий устойчивости решений системы (14) состоит в том, что все собственные значения матрицы G по модулю не должны превосходить единицы [29].

При всех принятых допущениях собственные значения матрицы G являются функциями параметров $\theta_x, \theta_y, U, \tau, \Delta t$. При проведении расчетов вместо шага Δt рассматривалось число Куранта γ . Задача на поиск собственных значений решалась с помощью QR-алгоритма, реализованного на языке FORTRAN90 в пакете EISPACK [30].

Исследование устойчивости будем производить посредством построения областей устойчивости на плоскости параметров (τ, U) при разных значениях параметра Куранта γ . Точка считается входящей в область устойчивости, если при фиксированных значениях τ и U для всех значений θ_x и θ_y , рассматриваемых на некоторой сетке, все собственные значения матрицы G по модулю не превосходят единицы. Во всех случаях область устойчивости представляла собой односвязную область, примыкающую к оси $O\tau$. Площадь области устойчивости вычислялась по квадратурной форме трапеций.

При проведении численных расчетов параметр γ варьировался в диапазоне от 0 до 25. При рассмотрении изменения параметра τ для схем первого порядка брался интервал $(0.5, 1]$, для схем второго порядка — интервал $(0, 1]$, в случае схем третьего и четвертого порядков — интервал $(0, 5]$ в связи с тем, что при $\tau \in (0, 1]$ их области устойчивости оказались пустыми. Значения всех параметров выбирались

на равномерных сетках из 100 узлов. Ниже представлен алгоритм для численного построения области устойчивости в пространстве параметров.

При заданном значении γ построить сетки по $U, \tau, \theta_x, \theta_y$;

```

for  $i$  in  $U$  do
  Вычислить  $f_1^{(eq)}, \dots, f_n^{(eq)}$  при значении  $U[i]$  для получения невозмущенного решения;
  for  $j$  in  $\tau$  do
    for  $k$  in  $\theta_x$  do
      for  $l$  in  $\theta_y$  do
        Вычислить на невозмущенном решении матрицы  $A, B$  при значениях  $\tau[j], \theta_x[k], \theta_y[l]$ ;
        Вычислить матрицу перехода  $G = A^{-1}B$ ;
        Найти собственные значения  $\lambda_p, p = \overline{1, n}$  матрицы  $G$  (процедура cg из EISPACK);
         $L[k, l] = \max_n |\lambda_p|$ ;
      end
    end
    if  $S[i, j] = \max_{k, l} L \leq 1$  then
      Точка  $(U[i], \tau[j])$  входит в область устойчивости;
    else
      Точка  $(U[i], \tau[j])$  не входит в область устойчивости;
    end
  end
end

```

Основной целью анализа устойчивости было исследование влияния параметра γ на площадь области устойчивости и получение условий устойчивости вида $\gamma \geq \gamma_{\min}$. Такой вид условий устойчивости связан с неявной природой рассматриваемых схем.

Значения γ_{\min} для неявных схем

Тип схемы \ порядок:	Первый	Второй	Третий	Четвертый
Двухслойная	2	0.8	0.3	0.1
Трехслойная	1	0.3	1.1	1.1

В таблице приведены полученные в результате численных экспериментов значения γ_{\min} . Как можно видеть, значения для случая трехслойных схем первого и второго порядков меньше, чем для двухслойных, что задает больший диапазон возможных значений γ , хотя в обоих случаях он ограничен только снизу. В случае схем высоких порядков имеет место противоположная ситуация.

На рис. 1–4 представлены графики площади устойчивости S как функции параметра γ . Как можно видеть, для всех схем характерен выход площади на некоторое стационарное значение. При этом площади для случаев двухслойных схем для большей части значений γ больше, чем для трехслойных, что позволяет рекомендовать их для решения прикладных задач.

Предложенные неявные схемы могут использоваться как непосредственно, так и в методах типа предиктор–корректор. В первом случае возникает необходимость в решении в каждый момент t_{j+1} в каждом узле пространственной сетки системы нелинейных алгебраических уравнений относительно значений f_i , что занимает существенно больше времени, чем применение традиционных ЛВЕ-уравнений, а в случае использования метода Ньютона требует дополнительного вычисления матрицы Якоби. Хотя и такие алгоритмы, за счет локального характера схем, эффективно подвергаются распараллеливанию [31]. Во втором случае схемы (5) или (6) могут использоваться при вычислениях в качестве корректора в паре с предиктором — явной схемой. Примеры использования такого метода на основе схем первого порядка приведены в [20], где численно решались задачи о течении в каверне и о вихрях Тейлора. Такой подход значительно проще в реализации и не требует применения итерационных процедур. Однако при этом введение в вычислительный алгоритм явного метода существенно влияет на устойчивость — как показано при расчетах [20], условия устойчивости, в отличие от чисто неявных схем, имеют вид $\gamma \leq \gamma_{\max}$, но при этом использование характеристических схем позволяет улучшить устойчивость по сравнению со случаем схем с отдельными аппроксимациями пространственных производных в членах $V_i \nabla f_i$.

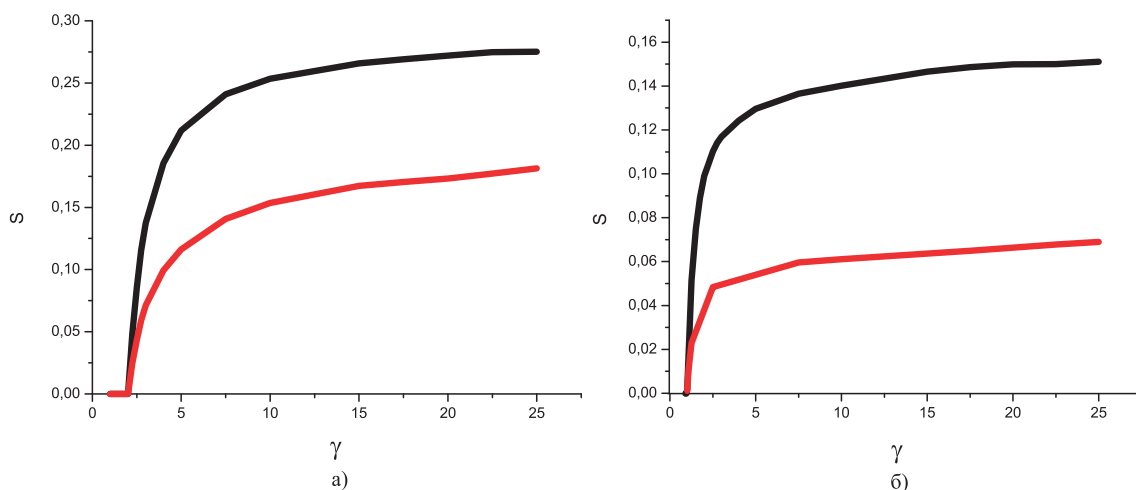


Рис. 1. Зависимость площади области устойчивости схем первого порядка от γ : а) двухслойная схема; б) трехслойная схема. Черная кривая — случай режима 1; красная кривая — случай режима 2

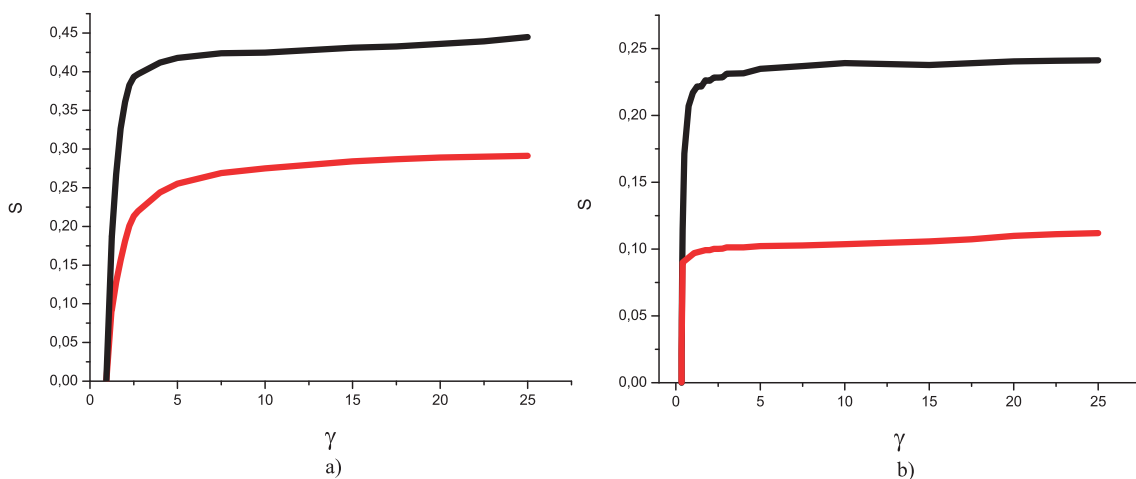


Рис. 2. Зависимость площади области устойчивости схем второго порядка от γ : а) двухслойная схема; б) трехслойная схема. Черная кривая — случай режима 1; красная кривая — случай режима 2

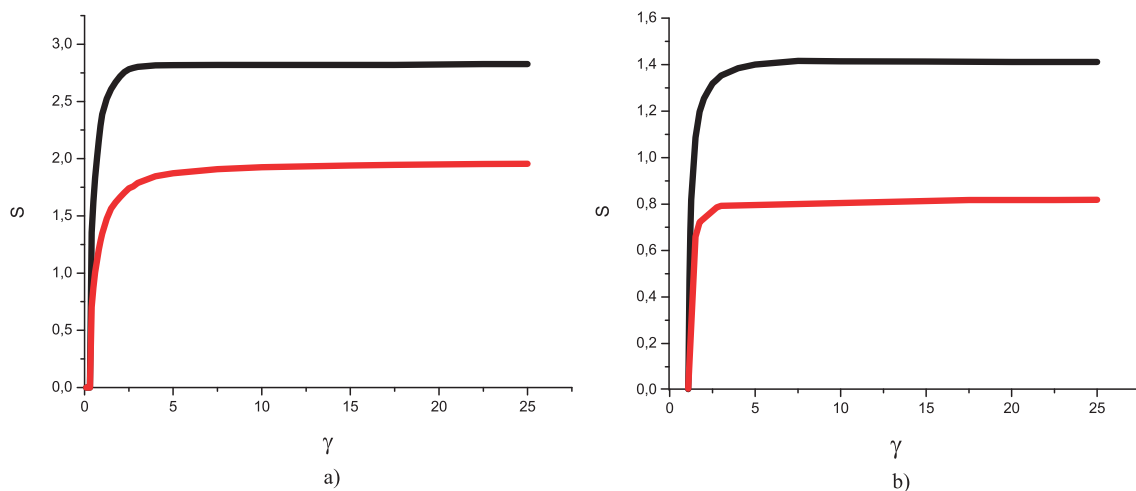


Рис. 3. Зависимость площади области устойчивости схем третьего порядка от γ : а) двухслойная схема; б) трехслойная схема. Черная кривая — случай режима 1; красная кривая — случай режима 2

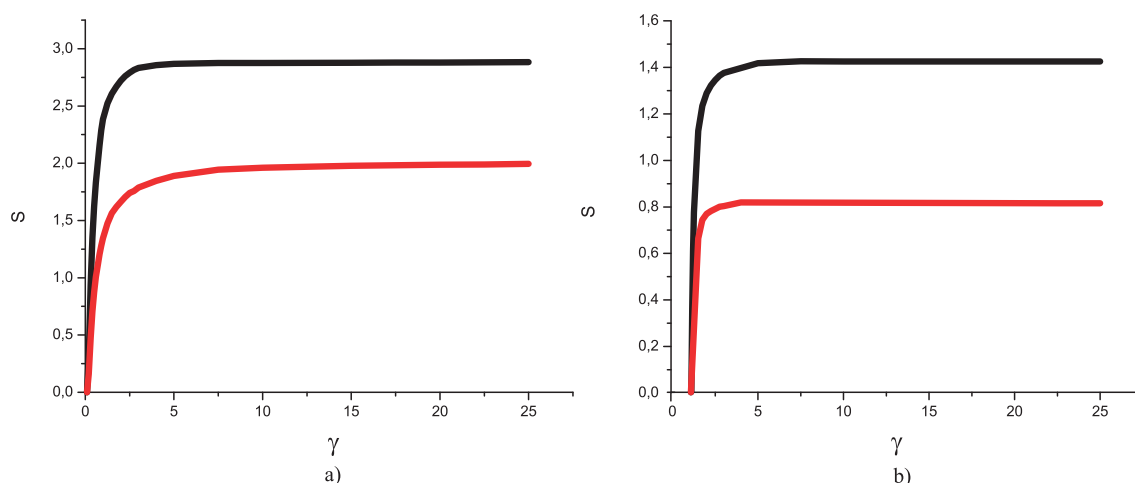


Рис. 4. Зависимость площади области устойчивости схем четвертого порядка от γ : а) двухслойная схема; б) трехслойная схема. Черная кривая — случай режима 1; красная кривая — случай режима 2

4. Заключение. Статья посвящена построению и анализу неявных конечно-разностных схем для системы кинетических уравнений с дискретными скоростями для последующего использования в рамках метода ЛВМ. Построены двухслойные и трехслойные схемы. Показано, что в выражении для аппроксимационной вязкости схем высоких порядков аппроксимации отсутствуют фиктивные слагаемые, что дает возможность проведения расчетов при любых значениях параметра релаксации. Анализ устойчивости проводится по линейному приближению на основе метода Неймана с использованием QR-алгоритма для решения задач на собственные значения. Получены приближенные условия устойчивости в виде неравенств на значения числа Куранта. Показано, что площади областей устойчивости в пространстве параметров у двухслойных схем больше, чем в случае их трехслойных аналогов. Построенные схемы могут использоваться как независимо, так и в методах типа предиктор–корректор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Succi S.* The lattice Boltzmann equation for complex states of flowing matter. Oxford: Oxford University Press, 2018.
2. *Бижулов Д.А., Секин Д.С.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых значений функций распределения для GPU // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 370–374.
3. *Бижулов Д.А.* Эффективная реализация метода решеточных уравнений Больцмана для гибридных суперкомпьютерных систем // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 205–214.
4. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 130–138.
5. *Куперштох А.Л., Медведев Д.А., Грибанов И.И.* Моделирование тепломассопереноса в среде с фазовыми переходами методом решеточных уравнений Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 317–328.
6. *Wang J., Kang Q., Wang Y., Pawar R., Rahman S.S.* Simulation of gas flow in micro-porous media with the regularized lattice Boltzmann method // Fuel. 2017. **205**. 232–246.
7. *He X., Luo L.-S.* A priori derivation of the lattice Boltzmann equation // Physical Review E. 1997. **55**, N 6. R6333–R6336.
8. *Sofonea V., Sekerka R.F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // Journal of Computational Physics. 2003. **184**, N 2. 422–434.
9. *Seta T., Takakashi R.* Numerical stability analysis of FDLBM // Journal of Statistical Physics. 2002. **107**, N 1–2. 557–572.
10. *Shi X., Huang X., Zheng Y., Ji T.* A hybrid algorithm of lattice Boltzmann method and finite-difference-based lattice Boltzmann method for viscous flows // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2017. **85**, N 11. 641–661.
11. *Fakhari A., Lee T.* Finite-difference lattice Boltzmann method with a block-structured adaptive-mesh-refinement technique // Physical Review E. 2014. **89**. 033310-1–033310-12.
12. *Li W., Li W.* A gas-kinetic BGK scheme for the finite volume lattice Boltzmann method for nearly incompressible flows // Computers and Fluids. 2018. **162**. 126–138.
13. *Chen L., Schaefer L.* Godunov-type upwind flux schemes of the two-dimensional finite volume discrete Boltzmann method // Computers and Mathematics with Applications. 2018. **75**, N 9. 3105–3126.

14. Shao W., Li J. Three time integration methods for incompressible flows with discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method // *Computers and Mathematics with Applications*. 2018. **75**, N 11. 4091–4106.
15. Min M., Lee T. A spectral-element discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method for nearly compressible flows // *Journal of Computational Physics*. 2011. **230**, N 1. 245–259.
16. Biciusca T., Horga A., Sofonea V. Simulation of liquid-vapor phase separation on GPUs using Lattice Boltzmann models with off-lattice velocity sets // *Comptes Rendus Mécanique*. 2015. **343**, N 10–11. 580–588.
17. Кривовичев Г.В., Михеев С.А. Исследование устойчивости трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 211–221.
18. Кривовичев Г.В., Михеев С.А. Исследование устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана с направленными разностями повышенного порядка аппроксимации // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. **16**. 196–204.
19. Krivovichev G.V., Mikheev S.A. On the stability of multi-step finite-difference-based lattice Boltzmann schemes // *International Journal of Computational Methods*. 2019. **16**. doi 10.1142/S0219876218500871.
20. Кривовичев Г.В., Воскобойникова Е.В. О применении конечно-разностных схем типа предиктор-корректор в методе решеточных уравнений Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. **16**. 10–17.
21. Asinari P. Semi-implicit-linearized multiple-relaxation-time formulation of lattice Boltzmann schemes for mixture modeling // *Physical Review E*. 2006. **63**. doi 10.1103/PhysRevE.73.056705.
22. Rector D.R., Stewart M.L. A semi-implicit lattice method for simulating flow // *Journal of Computational Physics*. 2010. **229**, N 19. 6732–6743.
23. Cao N., Chen S., Jin S., Martinez D. Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method // *Physical Review E*. 1997. **55**, N 1. R21–R24.
24. Bernaschi M., Succi S., Chen H. Accelerated lattice Boltzmann schemes for steady-state flow simulations // *Journal of Scientific Computing*. 2001. **16**, N 2. 135–144.
25. Lee T., Lin C.-L. An Eulerian description of the streaming process in the lattice Boltzmann equation // *Journal of Computational Physics*. 2003. **185**, N 2. 445–471.
26. Li Y., LeBoeuf E.J., Basu P.K. Least-squares finite-element lattice Boltzmann method // *Physical Review E*. 2004. **69**. doi 10.1103/PhysRevE.69.065701.
27. Wang Y., He Y.L., Zhao T.S., Tang G.H., Tao W.Q. Implicit-explicit finite-difference lattice Boltzmann method for compressible flows // *International Journal of Modern Physics C*. 2007. **18**, N 12. 1961–1983.
28. Qiu R.-F., You Y.-C., Zhu C.-X., Chen R.-Q. Lattice Boltzmann simulation for high-speed compressible viscous flows with a boundary layer // *Applied Mathematical Modelling*. 2017. **48**. 567–583.
29. Рунтмайер П., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М: Мир, 1972.
30. Garbow B.S. EISPACK — a package of matrix eigensystem routines // *Computer Physics Communications*. 1974. **7**. 179–184.
31. Prokhorova E.A., Krivovichev G.V. Parallel realization of the computational algorithm based on the implicit lattice Boltzmann equations // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. **1038**, N 1. doi 10.1088/1742-6596/1038/1/012041.

Поступила в редакцию
21.03.2019

Stability Analysis of the Implicit Finite-Difference-Based Upwind Lattice Boltzmann Schemes

G. V. Krivovichev¹ and M. P. Mashchinskaya²

¹ Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru

² Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Student, e-mail: m.maschinskaya@mail.ru

Received March 21, 2019

Abstract: The paper is devoted to the stability analysis of the implicit finite-difference schemes for the system of kinetic equations used for the hydrodynamic computations in the framework of the lattice Boltzmann method. The families of two- and three-layer upwind schemes of the first to fourth approximation orders on spatial variables are considered. An important feature of the presented schemes is that the convective terms are approximated by one finite difference. It is shown that, for the high-order schemes, in the expression for the current viscosity there are no fictitious terms, which makes it possible to perform computations in the whole range of relaxation time values. The stability analysis is based on the application of the von Neumann method

to the linear approximations of the schemes. The stability conditions are obtained in the form of inequalities imposed on the Courant number values. It is also shown that the areas of stability domains for the two-layer schemes are greater than for the three-layer schemes in the parameter space. The considered schemes can be used as the fully implicit schemes in computational algorithms directly or in the predictor–corrector methods.

Keywords: lattice Boltzmann method, implicit finite-difference schemes, stability.

References

1. S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Complex States of Flowing Matter* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2018).
2. D. A. Bikulov and D. S. Senin, “Implementation of the Lattice Boltzmann Method without Stored Distribution Functions on GPU,” *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 370–374 (2013).
3. D. A. Bikulov, “An Efficient Implementation of the Lattice Boltzmann Method for Hybrid Supercomputers,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 205–214 (2015).
4. A. L. Kupershtokh, “Three-Dimensional Simulations of Two-Phase Liquid–Vapor Systems on GPU Using the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 130–138 (2012).
5. A. L. Kupershtokh, D. A. Medvedev, and I. I. Griбанov, “Modeling of Thermal Flows in a Medium with Phase Transitions Using the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 317–328 (2014).
6. J. Wang, Q. Kang, Y. Wang, et al., “Simulation of Gas Flow in Micro-Porous Media with the Regularized Lattice Boltzmann Method,” *Fuel* **205**, 232–246 (2017).
7. X. He and L.-S. Luo, “A Priori Derivation of the Lattice Boltzmann Equation,” *Phys. Rev. E* **55** (6), R6333–R6336 (1997).
8. V. Sofonea and R. F. Sekerka, “Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models,” *J. Comput. Phys.* **184** (2), 422–434 (2003).
9. T. Seta and R. Takakashi, “Numerical Stability Analysis of FDLBM,” *J. Stat. Phys.* **107** (1–2), 557–572 (2002).
10. X. Shi, X. Huang, Y. Zheng, and T. Ji, “A Hybrid Algorithm of Lattice Boltzmann Method and Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Method for Viscous Flows,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **85** (11), 641–661 (2017).
11. A. Fakhari and T. Lee, “Finite-Difference Lattice Boltzmann Method with a Block-Structured Adaptive-Mesh-Refinement Technique,” *Phys. Rev. E* **89**, 033310-1–033310-12 (2014).
12. W. Li and W. Li, “A Gas-Kinetic BGK Scheme for the Finite Volume Lattice Boltzmann Method for Nearly Incompressible Flows,” *Comput. Fluids* **162**, 126–138 (2018).
13. L. Chen and L. Schaefer, “Godunov-Type Upwind Flux Schemes of the Two-Dimensional Finite Volume Discrete Boltzmann Method,” *Comput. Math. Appl.* **75** (9), 3105–3126 (2018).
14. W. Shao and J. Li, “Three Time Integration Methods for Incompressible Flows with Discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method,” *Comput. Math. Appl.* **75** (11), 4091–4106 (2018).
15. M. Min and T. Lee, “A Spectral-Element Discontinuous Galerkin Lattice Boltzmann Method for Nearly Compressible Flows,” *J. Comput. Phys.* **230** (1), 245–259 (2011).
16. T. Biciusca, A. Horga, and V. Sofonea, “Simulation of Liquid–vapour Phase Separation on GPUs Using Lattice Boltzmann Models with Off-Lattice Velocity Sets,” *Comptes Rendus Mécanique* **343** (10–11), 580–588 (2015).
17. G. V. Krivovichev and S. A. Mikheev, “Stability of Three-Layer Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 211–221 (2014).
18. G. V. Krivovichev and S. A. Mikheev, “Stability Study of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes with Upwind Differences of High Order Approximation,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 196–204 (2015).
19. G. V. Krivovichev and S. A. Mikheev, “On the Stability of Multi-Step Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes,” *Int. J. Comput. Meth.* **16** (2019). doi 10.1142/S0219876218500871
20. G. V. Krivovichev and E. V. Voskoboinikova, “Application of Predictor–Corrector Finite-Difference-Based Schemes in the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 10–17 (2015).
21. P. Asinari, “Semi-Implicit-Linearized Multiple-Relaxation-Time Formulation of Lattice Boltzmann Schemes for Mixture Modeling,” *Phys. Rev. E* **63** (2006). doi 10.1103/PhysRevE.73.056705
22. D. R. Rector and M. L. Stewart, “A Semi-Implicit Lattice Method for Simulating Flow,” *J. Comput. Phys.* **229** (19), 6732–6743 (2010).

23. N. Cao, S. Chen, S. Jin, and D. Martinez, “Physical Symmetry and Lattice Symmetry in the Lattice Boltzmann Method,” *Phys. Rev. E* **55** (1), R21–R24 (1997).
 24. M. Bernaschi, S. Succi, and H. Chen, “Accelerated Lattice Boltzmann Schemes for Steady-State Flow Simulations,” *J. Sci. Comput.* **16** (2), 135–144 (2001).
 25. T. Lee and C.-L. Lin, “An Eulerian Description of the Streaming Process in the Lattice Boltzmann Equation,” *J. Comput. Phys.* **185** (2), 445–471 (2003).
 26. Y. Li, E. J. LeBoeuf, and P. K. Basu, “Least-Squares Finite-Element Lattice Boltzmann Method,” *Phys. Rev. E* **69** (2004). doi 10.1103/PhysRevE.69.065701
 27. Y. Wang, Y. L. He, T. S. Zhao, et al., “Implicit-Explicit Finite-Difference Lattice Boltzmann Method for Compressible Flows,” *Int. J. Mod. Phys. C* **18** (12), 1961–1983 (2007).
 28. R.-F. Qiu, Y.-C. You, C.-X. Zhu, and R.-Q. Chen, “Lattice Boltzmann Simulation for High-Speed Compressible Viscous Flows with a Boundary Layer,” *Appl. Math. Model.* **48**, 567–583 (2017).
 29. R. D. Richtmyer and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems* (Wiley, New York, 1967; Mir, Moscow, 1972).
 30. B. S. Garbow, “EISPACK — A Package of Matrix Eigensystem Routines,” *Comput. Phys. Commun.* **7**, 179–184 (1974).
 31. E. A. Prokhorova and G. V. Krivovichev, “Parallel Realization of the Computational Algorithm Based on the Implicit Lattice Boltzmann Equations,” *J. Phys. Conf. Ser.* **1038** (2018). doi 10.1088/1742-6596/1038/1/012041
-