

УДК 519.246.8

doi 10.26089/NumMet.v20r209

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ И МНОГОТОЧЕЧНЫЕ КОРРЕЛЯТОРЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛИ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ДИНАМО СО СЛУЧАЙНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Д. А. Грачев<sup>1</sup>, С. А. Елистратов<sup>2</sup>, Е. А. Михайлов<sup>3</sup>

Рассматривается стохастическая модель галактического динамо, в рамках которой коэффициент турбулентной диффузии считается случайным процессом с обновлением. Проведено численное моделирование статистических моментов, а также двухточечных и трехточечных корреляторов магнитного поля, показывающих взаимосвязь между его значениями в различные моменты времени. Продемонстрировано наличие перемежаемости, выражающейся в прогрессивном росте моментов и корреляторов в случае “спокойных” областей галактик с небольшой долей ионизированной компоненты водорода. Проведено сопоставление результатов численного эксперимента с результатами, полученными ранее аналитически.

**Ключевые слова:** галактическое динамо, магнитное поле, уравнения со случайными коэффициентами, перемежаемость, статистический момент.

**1. Введение.** В настоящее время существует большое количество исследований, посвященных процессу генерации магнитных полей в галактиках, на Солнце и на других звездах, внутри планет и др. Как правило, эти процессы обусловлены действием так называемого механизма динамо [1]. Различают два вида динамо — мелкомасштабное и крупномасштабное (или динамо среднего поля). Первое ответственно за генерацию магнитных полей с характерным линейным масштабом изменения, соответствующим турбулентным ячейкам (для галактик это примерно 50–100 пк). Второе же связано с генерацией полей, имеющих масштабы, сопоставимые с размером всего объекта.

С физической точки зрения механизм галактического динамо связан с переходом кинетической энергии межзвездного газа в энергию крупномасштабного магнитного поля. Этот переход, в свою очередь, обусловлен совокупностью двух процессов: дифференциального вращения (связанного с тем, что угловая скорость вращения галактики зависит от расстояния до ее центра) и так называемого альфа-эффекта, характеризующего “закрученность” турбулентных движений [2]. Данные явления описываются безразмерными параметрами, которые входят в уравнения динамо и выражаются через кинематические характеристики межзвездной среды: полутолщину галактического диска, угловую скорость вращения, скорость турбулентных движений и др. [1]. Обычно в “спокойных” галактиках, в которых основную роль играет атомарный водород, эти величины мало меняются в пределах галактического диска, и при расчетах их можно считать постоянными. Однако в случае интенсивного звездообразования и других бурных процессов образуется значительное число областей ионизированного водорода. Эти области имеют более высокую температуру, что заметно меняет соотношение между различными фазами межзвездной среды [3]. Тем самым в подобных случаях представляется не совсем корректным исследовать крупномасштабные магнитные поля при помощи уравнений динамо с детерминированными параметрами, характеризующими усредненные свойства межзвездного пространства. Это обстоятельство и определяет ключевую цель настоящей статьи — ввести в модель галактического динамо стохастические эффекты и перейти от рассмотрения усредненных уравнений к уравнениям со случайными коэффициентами.

С точки зрения численного моделирования исследование уравнений со случайными коэффициентами представляет существенный интерес по нескольким причинам. Во-первых, решения подобных уравнений обнаруживают ряд неожиданных свойств [4], мало зависящих от конкретного вида уравнения [5]. Например, различные моменты решения могут расти с разной скоростью, хотя при этом выборочно (с вероятностью 1) само решение в некоторой точке может даже убывать (так называемое явление перемежаемости,

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва, Россия; науч. сотр., e-mail: dengrac@mail.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва, Россия; студент, e-mail: invsbl\_mn@mail.ru

<sup>3</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва, Россия; ассистент, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

подробнее об этом см. ниже). Во-вторых, необходимость проведения численного эксперимента обусловлена также тем, что аналитические результаты обычно имеют вид некоторых предельных утверждений, из которых совершенно неясно, начиная с каких значений асимптотического параметра они справедливы. Показательным примером параметра подобного рода служит минимальный объем выборки независимых случайных реализаций решения, который необходим в численном эксперименте для моделирования его многоточечных корреляторов и высших статистических моментов. Рассмотрению этого объема мы тоже уделим в данной статье самое пристальное внимание.

Заметим, что стохастические модели динамо (причем не только галактического) на сегодняшний день изучены довольно мало. Ранее математический аппарат, связанный с использованием эволюционных уравнений со случайными коэффициентами, применялся главным образом в задачах мелкомасштабного (турбулентного) динамо [4]. Существуют также немногочисленные работы, посвященные изучению стохастических эффектов в теории солнечного динамо (см., например, [5–7]). Что же касается галактического динамо, то здесь в указанном контексте можно отметить ряд исследований, связанных со случайностью коэффициента, отвечающего за альфа-эффект [8, 9].

В нашей статье мы полагаем случайным коэффициент, отвечающий за турбулентную диффузию. При этом выбор конкретной модели случайного коэффициента продиктован следующими физическими соображениями. Во-первых, эта модель должна учитывать то, что в галактике области интенсивного звездообразования и других активных процессов (т.е. “сгустки” ионизованного водорода) расположены случайным образом и существуют в течение сравнительно недолгого времени. Исходя из этой базовой предпосылки, мы выбираем для описания коэффициента турбулентной диффузии модель случайного процесса с обновлением, который имеет малое, но конечное время памяти. Во-вторых, кроме высокотемпературных областей ионизованного водорода, в галактиках присутствуют “спокойные” области, в которых основную роль играет атомарный водород. Исходя из данного соображения, мы далее полагаем, что на каждом из интервалов обновления величина турбулентной диффузии принимает с определенной вероятностью  $p$  одно из двух возможных значений (см. ниже). Первое из них соответствует области ионизованного водорода, а второе — области атомарного. При этом значение вероятности характеризует интенсивность звездообразования и прочих процессов, вызывающих неоднородность. Как показано в работе [10], величина  $p$  связана с интенсивностью звездообразования по закону  $p = 12\Sigma$ , где  $\Sigma$  — поверхностная плотность звездообразования, измеряемая в  $M_{\text{Sun}}/\text{кпк}^2 \cdot \text{год}$ .

**2. Основные уравнения галактического динамо. Планарное приближение.** Полное магнитное поле  $\mathbf{H}$  галактики можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{b}.$$

Здесь  $\mathbf{B}$  — крупномасштабное (регулярное) поле с характерным масштабом изменения порядка нескольких килопарсек, а  $\mathbf{b}$  — мелкомасштабная компонента с характерным масштабом порядка 100 парсек.

Эволюция регулярной компоненты  $\mathbf{B}$  магнитного поля описывается уравнением Штеенбека–Краузе–Рэдлера, которое возникает путем усреднения уравнений магнитной гидродинамики по масштабам, превышающим характерные размеры турбулентности [11]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot} (\alpha \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  — скорость крупномасштабных движений среды (связанных, как правило, с вращением галактики),  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий “закрученность” турбулентных движений,  $\eta = lv/3$  — коэффициент турбулентной диффузии,  $l$  — масштаб турбулентной ячейки,  $v$  — скорость турбулентных движений.

Непосредственное исследование уравнения (1) представляет собой весьма сложную задачу, поэтому на практике часто используются различные двумерные приближения. В случае, когда галактический диск достаточно тонкий, общепринятым подходом является использование так называемого планарного приближения [12, 13]. Оно позволяет переписать уравнение (1) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка по времени, которая описывает две основные компоненты магнитного поля — радиальную  $B_r$  и угловую  $B_\varphi$ :

$$\frac{dB_r}{dt} = -\frac{\pi\alpha}{2h} B_\varphi - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_r, \quad \frac{dB_\varphi}{dt} = -r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_\varphi. \quad (2)$$

Полагая, что “спокойной” области галактики соответствует коэффициент турбулентной диффузии  $\eta_0$ , введем “безразмерное” время  $t' = \frac{\eta_0}{h^2} t$  [12] и два безразмерных параметра

$$R_\alpha = \frac{\pi\alpha h}{2\eta_0}, \quad R_\omega = \frac{1}{\eta_0} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} h^2.$$

Тогда система (2) примет вид

$$\frac{dB_r}{dt'} = -R_\alpha B_\varphi - kB_r, \quad \frac{dB_\varphi}{dt'} = -R_\omega B_r - kB_\varphi, \quad (3)$$

где  $k = \frac{\pi^2 \eta}{4\eta_0}$  — коэффициент, показывающий, во сколько раз значение турбулентной диффузии в исследуемой области отличается от значения, соответствующего “спокойной” области галактики с небольшой долей ионизованной компоненты водорода. Далее мы опускаем штрихи и понимаем под временем только его безразмерный вариант. Кроме того, следуя [14], мы полагаем в численном эксперименте  $R_\alpha = 1$  и  $R_\omega = 10$ , что примерно совпадает с соответствующими значениями в детерминистических моделях.

**3. Численный эксперимент.** Дадим конструктивное описание случайного коэффициента  $k$ , характеризующего значение турбулентной диффузии в исследуемой задаче. Как уже отмечалось выше, мы выбираем это описание, ориентируясь на модель случайного процесса с обновлением.

Пусть полупрямая  $t \geq 0$  разбита на равные отрезки длины  $\delta$  (корреляционная длина, которая используется в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления). Далее, пусть процесс  $k(t)$  теряет память точно в точках  $t_n = n\delta$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Это означает, что величины  $k_n$  на полусегментах  $[0; \delta), \dots, [n\delta; (n+1)\delta)$  предполагаются статистически независимыми и имеющими одинаковые статистические характеристики (а именно: среднее значение, дисперсию, корреляционную функцию и др.). Кроме того, предполагается статистическая независимость точек обновления от всех процессов  $k_n(t)$ . Это и есть модель процесса с обновлением. Из-за фиксированных точек обновления такой процесс статистически неоднороден (в масштабах, сопоставимых с  $\delta$ ), и его корреляционная функция  $\langle k(t_1)k(t_2) \rangle$  зависит от обеих точек  $t_1$  и  $t_2$ .

В рамках численного эксперимента мы для определенности считаем, что процесс  $k$  является кусочно-постоянной случайной функцией, которая принимает с определенной вероятностью одно из двух заданных значений. Первое из этих значений соответствует области ионизованного водорода, а второе — атомарного. Следуя работам [10] и [14], мы полагаем, что на каждом интервале обновления

$$k = \begin{cases} 7.5 & \text{с вероятностью } p, \\ 2.5 & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

В заключение данного раздела отметим, что при построении односточечных статистических моментов магнитного поля

$$\sqrt[m]{\langle B^m(t) \rangle},$$

а также его двухточечного и трехточечного корреляторов

$$\sqrt{\langle B(t)B(t+\tau) \rangle} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\langle B(t)B(t+\tau)B(t+2\tau) \rangle}$$

мы усредняли случайные реализации решения, полученные как результат перемножения большого числа независимых случайных матриц. Поясним, что имеется в виду. Для этого перепишем систему (3) в матричной форме для двумерного вектора-строки  $\mathbf{B} = (B_r, B_\varphi)$ :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} -k & -R_\omega \\ -R_\alpha & -k \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Чтобы избежать проблемы, связанной с усреднением зависимых случайных сомножителей, введем фундаментальную матрицу  $G(s, t)$  системы (4), т.е. матрицу, обладающую свойством  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(s)G(s, t)$  при  $s < t$ . Используя  $G$ , можно получить формулу, связывающую значения магнитного поля  $\mathbf{B}$  в двух соседних точках обновления, а именно, в точке  $t_n = n\delta$  и в точке  $t_{n+1} = (n+1)\delta$ :

$$\mathbf{B}(t_{n+1}) = \mathbf{B}(t_n)G_{n+1}.$$

В последнем выражении матрица  $G_{n+1}$  имеет вид (см. [10])

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \delta) & -\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} \sinh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \delta) \\ -\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \sinh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \delta) & \cosh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \delta) \end{pmatrix} \exp(-k_{n+1} \delta).$$

Итак, на произвольном шаге вектор магнитного поля задается при помощи выражения

$$\mathbf{B}(t_n) = \mathbf{B}(0)G(n), \quad \text{где } G(n) = G_1 G_2 \dots G_n. \quad (5)$$

Каждая матрица  $G_i$  в формуле (5) определяется только значением коэффициента  $k$  на  $i$ -м интервале обновления, что позволяет в рамках численного эксперимента получить необходимый объем выборки независимых случайных реализаций магнитного поля. Проводя по этому объему усреднение, мы далее строим одноточечные статистические моменты, а также двух- и трехточечные корреляторы, показывающие взаимосвязь между значениями поля в различные моменты времени. При этом соответствующие значения вычисляются в точках обновления  $t_n = n\delta$  случайного процесса  $k$ .

**4. Результаты численного моделирования.** Прежде всего мы рассмотрим поведение одноточечных статистических моментов магнитного поля. Для этого выберем в качестве интервала обновления  $\delta = 0.1$  (при переходе к “размерным” единицам такое значение соответствует величине порядка  $10^7$  лет, что близко к характерному времени жизни областей ионизованного водорода в галактике) и проведем усреднение по выборке объема  $10^5$  реализаций, построенных по формуле (5).

Как предсказывает аналитическая теория, эволюция крупномасштабных полей носит пороговый характер и возможен как рост магнитного поля и его моментов, так и затухание [15]. Проведенный численный эксперимент подтверждает это; кроме того, удастся определить критическое значение вероятности  $p_{cr}$ , при котором происходит переключение с одного режима на другой. Оказалось, что устойчивый рост типичной реализации магнитного поля, его среднего и моментов высших порядков наблюдается при  $p < p_{cr} = 0.14$  (см. рис. 1, где выбрано значение  $p = 0.1$ ). Соответственно, если  $p > 0.14$ , то происходит разрушение крупномасштабных структур и рост поля сменяется затуханием (см. рис. 2, где  $p = 0.5$ ).

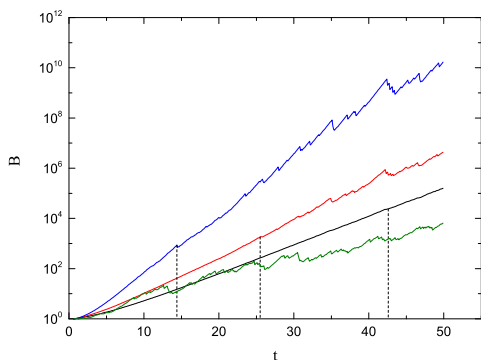


Рис. 1. Магнитное поле при  $p = 0.1$ . Черным цветом показано среднее решение, красным — среднеквадратичное, синим — момент третьего порядка. Зеленому цвету соответствует характерная реализация

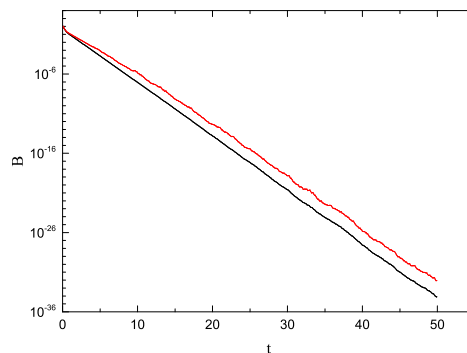


Рис. 2. Магнитное поле при  $p = 0.5$ . Черным цветом показано среднее решение, красным — среднеквадратичное

Обратим внимание на то, что скорость экспоненциального роста статистического момента  $m$ -го порядка

$$\gamma_m = \frac{\ln \sqrt[m]{\langle B^m(t) \rangle}}{t}$$

растет с увеличением его номера  $m$ , причем это наблюдается даже на малых масштабах, на которых экспоненциальный рост типичной реализации еще не начался (рис. 1). Подобный эффект, называемый в физике случайных сред перемежаемостью [16], характерен для весьма широкого класса эволюционных уравнений со случайными коэффициентами [17]. Он обусловлен появлением крайне редких, но при этом чрезвычайно быстро растущих реализаций решения, наличие которых, однако, и вносит определяющий вклад в формирование его среднего и моментов высших порядков (подробнее об этом см. ниже). С точки зрения численного моделирования именно явление перемежаемости ответственно за то, что для воспроизведения предсказанных аналитической теорией свойств моментов приходится использовать колоссальные объемы выборки, причем это имеет место даже для достаточно простых линейных уравнений [18, 19].

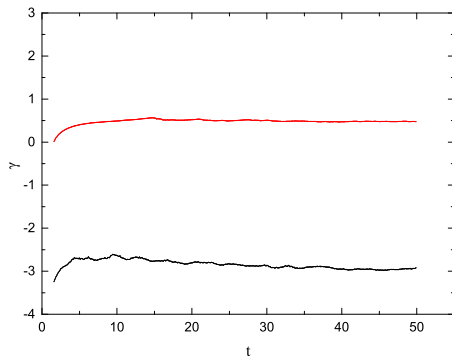


Рис. 3. Скорости роста корреляционных функций при  $\tau = 0.4$ . Красный цвет соответствует возрастающему полю, черный — затухающему

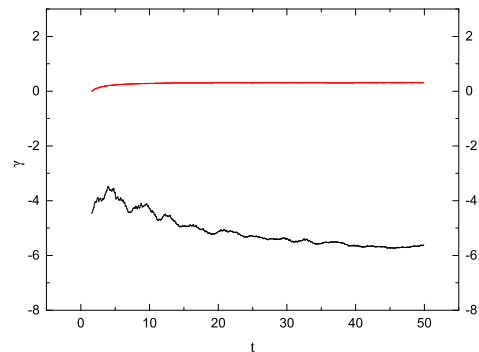


Рис. 4. Скорости роста трехточечных корреляторов при  $\tau = 0.4$ . Красный цвет соответствует возрастающему полю, черный — затухающему

Заметим, что с увеличением  $m$  скорости роста  $\gamma_m$  и  $\gamma_{m+1}$  двух следующих друг за другом моментов все более сближаются. Так, в нашем случае для среднего решения и его трех последующих моментов имеем

$$\gamma_1 = 0.24, \quad \gamma_2 = 0.3, \quad \gamma_3 = 0.34, \quad \gamma_4 = 0.35$$

соответственно. Оказалось, что подобная тенденция характерна и для высших статистических моментов решений других дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами, воспроизводящих явление перемежаемости, в частности для уравнения Якоби [20, 21]. Аналитическая теория предсказывает, что при весьма общих условиях имеет место асимптотическое соотношение

$$\frac{\gamma_m}{\gamma_{m+1}} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty.$$

Данный результат можно интерпретировать как указание на то, что эффекты перемежаемости, выражающиеся в виде очень редких, но аномально сильных “пиков” в поведении некоторых случайных реализаций решения, оказывают серьезное влияние лишь на моменты относительно низких порядков [20].

Перейдем теперь к рассмотрению двухточечного и трехточечного корреляторов

$$\sqrt{\langle B(t)B(t+\tau) \rangle} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\langle B(t)B(t+\tau)B(t+2\tau) \rangle}$$

магнитного поля. Подобно одноточечным моментам, в случае “спокойной” галактики, когда  $p < 0.14$ , наблюдается их устойчивый экспоненциальный рост; если же  $p > 0.14$ , то рост сменяется затуханием. Для наглядности мы приводим здесь лишь графики зависимостей скоростей роста от времени — для корреляционной функции это рис. 3, а для трехточечного коррелятора это рис. 4.

Сравним теперь поведение одноточечных моментов с соответствующими многоточечными корреляторами (рис. 5). Во-первых, видно, что до точки срыва экспоненциального роста корреляционная функция растет несколько быстрее, чем одноточечный статистический момент второго порядка; аналогично ведет себя и трехточечный коррелятор по отношению к третьему моменту. Во-вторых (см. рис. 1), с увеличением  $t$  рост статистических моментов начинает (в силу ограниченности объема выборки) замедляться, причем точка начала замедления удаляется от начала координат с уменьшением номера момента. Все это справедливо и для многоточечных корреляторов (см. рис. 5). Теория предсказывает, что объем выборки, необходимый для воспроизведения прогрессивного роста статистических моментов (корреляторов), должен экспоненциально расти с ростом  $t$ .

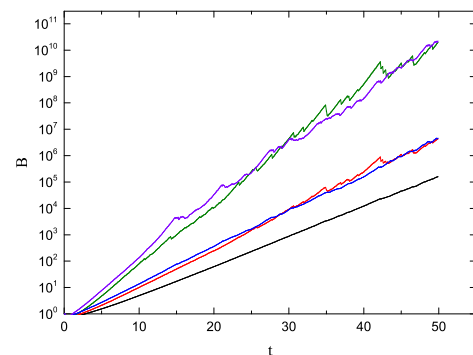


Рис. 5. Статистические моменты и корреляторы при  $p = 0.1$ . Черный цвет соответствует среднему, красный — среднеквадратичному, синий — корреляционной функции, зеленый — среднекубическому, фиолетовый — трехточечному коррелятору

Заметим также, что при фиксированном объеме выборки длина участка экспоненциального роста у многоточечного коррелятора оказывается систематически меньше той, которую имеет соответствующий одноточечный момент. Данный результат представлен ниже для трех различных объемов выборки (см. таблицу).

Длина участка экспоненциального роста

Выборка	$\langle B(t) \rangle$	$\sqrt{\langle B^2(t) \rangle}$	$\sqrt[3]{\langle B^3(t) \rangle}$	$\sqrt{\langle B(t)B(t+\tau) \rangle}$	$\sqrt[3]{\langle B(t)B(t+\tau)B(t+2\tau) \rangle}$
$10^3$	19.2	9.5	4.7	8.2	3.6
$10^4$	36.3	18.3	9.2	17.8	7.6
$10^5$	42.5	24.9	14.4	23.8	10.6

**5. Обсуждение.** Итак, в рамках планарного приближения мы рассмотрели модель галактического динамо со случайной турбулентной диффузией. Выбирая в численном эксперименте в качестве интервала обновления величину, близкую к характерному времени существования областей ионизованного водорода, мы исследовали поведение статистических моментов и многоточечных корреляторов магнитного поля. Показано, что его эволюция носит пороговый характер — в зависимости от того, насколько интенсивно протекают процессы, связанные с возникновением неоднородностей (звездообразование, взрывы сверхновых и др.), возможен как рост магнитного поля, так и его затухание. Данный результат представляется вполне адекватным с физической точки зрения и соответствует результатам, полученным ранее в детерминистических моделях (см., например, [8]).

Кроме того, проведенное исследование продемонстрировало наличие перемежаемости, выражающейся в прогрессивном росте статистических моментов и многоточечных корреляторов магнитного поля даже тогда, когда экспоненциальный рост его типичной реализации еще не начался. Данный эффект, связанный, как уже отмечалось, с очень редкими, но при этом аномально быстро растущими реализациями, присущ весьма широкому классу стохастических уравнений с решениями мультипликативного типа. Поясним на простом примере, взятом из работы [16], что имеется в виду.

Рассмотрим случайную величину

$$\Psi_N = \prod_{j=1}^N \xi_j = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_N,$$

представляющую собой произведение  $N$  одинаково распределенных независимых случайных величин  $\xi_j$ , принимающих с одинаковой вероятностью  $1/2$  значения 0 и 2. Очевидно, при сколь угодно больших  $N$  все реализации  $\Psi_N$ , кроме одной, равны 0. Однако именно эта крайне маловероятная реализация, принимающая значение  $2^N$ , и будет определять среднее

$$\langle \Psi_N \rangle = \frac{0 + 0 + \dots + 0 + 2^N}{2^N} = 1,$$

средний квадрат

$$\langle \Psi_N^2 \rangle = \frac{0 + 0 + \dots + 0 + 2^{2N}}{2^N} = 2^N$$

и моменты высших порядков

$$\langle \Psi_N^p \rangle = 2^{(p-1)N},$$

которые экспоненциально растут со скоростью

$$\gamma_p = \frac{\log_2 \langle \Psi_N^p \rangle}{N} = p - 1.$$

Рассмотренная в настоящей работе модель галактического динамо также связана с мультипликативным характером решения, поскольку магнитное поле формируется как результат перемножения независимых одинаково распределенных случайных матриц (см. формулу (5)). Разумеется, свойства произведений большого числа независимых случайных матриц отличаются от соответствующих свойств произведений случайных чисел, однако, как показывает исследование *лагранжевых* моделей [22], и в том, и в другом случае обнаруживаются родственные эффекты и, в частности, эффект перемежаемости.

Авторы благодарны Д. Д. Соколову за полезные обсуждения при подготовке статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-32-00124).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D.* Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the square kilometre array // *Astron. Astrophys.* 2009. **494**, N 1. 21–32.
2. *Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D.* Galactic magnetism: recent development and perspectives // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1996. **34**. 155–206.
3. *Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Ефремов Ю.Н.* Темп звездообразования и магнитные поля спиральных галактик // *Письма в астрономический журнал.* 2012. **38**, № 9. 611–616.
4. *Artyushkova M.E., Sokoloff D.D.* Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // *Magnetohydrodynamics.* 2006. **42**, N 1. 3–20.
5. *Proctor M.R.E.* Effects of fluctuation on  $\alpha\Omega$  dynamo models // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2007. **382**, N 1. L39–L42.
6. *Newton A.P.L., Kim E.* Determining the temporal dynamics of the solar  $\alpha$  effect // *Astron. Astrophys.* 2013. **551**. doi 10.1051/0004-6361/201219456.
7. *Passos D., Nandy D., Hazra S., Lopes I.* A solar dynamo model driven by mean-field alpha and Babcock–Leighton sources: fluctuations, grand-minima-maxima, and hemispheric asymmetry in sunspot cycles // *Astron. Astrophys.* 2014. **563**. doi 10.1051/0004-6361/201322635.
8. *Михайлов Е.А.* Звездообразование и модель галактического динамо с потоками спиральности // *Письма в астрономический журнал.* 2014. **40**, № 7. 445–453.
9. *Sur S., Subramanian K.* Galactic dynamo action in presence of stochastic  $\alpha$  and shear // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2009. **392**, N 1. L6–L10.
10. *Mikhailov E.A., Modyaev I.I.* Dynamo equations with random coefficients // *Magnetohydrodynamics.* 2015. **51**, N 2. 285–292.
11. *Krause F., Rüdler K.-H.* Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Oxford: Pergamon Press, 1980.
12. *Moss D.* On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1995. **275**, N 1. 191–194.
13. *Phillips A.* A comparison of the asymptotic and no-z approximations for galactic dynamos // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 2001. **94**, N 1–2. 135–150.
14. *Михайлов Е.А., Пушкарев В.В.* Влияние звездообразования на крупномасштабные структуры галактического магнитного поля // *Астрофизический бюллетень.* 2018. **73**, № 4. 451–456.
15. *Михайлов Е.А., Пушкарев В.В.* Флуктуации коэффициента турбулентной диффузии в уравнениях галактического динамо // *Вычислительные методы и программирование.* 2016. **17**. 447–454.
16. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // *Успехи физических наук.* 1987. **152**, № 1. 3–32.
17. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* The Almighty chance. Singapore: World Scientific, 1990.
18. *Грачев Д.А., Соколов Д.Д.* Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин // *Вычислительные методы и программирование.* 2007. **8**. 1–5.
19. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // *Астрон. ж.* 2005. **82**, № 7. 584–589.
20. *Грачев Д.А.* О соотношении между численным и аналитическим подходами к исследованию стохастических дифференциальных уравнений // *Вычислительные методы и программирование.* 2008. **9**. 234–238.
21. *Grachev D.A.* Averaging of Jacobi fields along geodesics on manifolds of random curvature // *Journal of Mathematical Sciences.* 2009. **160**, N 1. 128–138.
22. *Грачев Д.А., Михайлов Е.А.* Численное моделирование двухточечного коррелятора для лагранжевых решений некоторых эволюционных уравнений // *Вычислительные методы и программирование.* 2017. **18**. 277–283.

Поступила в редакцию  
15.02.2019

---

### Statistical Moments and Multipoint Magnetic Field Correlators in a Galactic Dynamo Model with Random Turbulent Diffusion

D. A. Grachev<sup>1</sup>, S. A. Elistratov<sup>2</sup>, and E. A. Mikhailov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: dengrac@mail.ru*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Student, e-mail: invsbl\_mn@mail.ru*

<sup>3</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Assistant, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru*

Received February 15, 2019

**Abstract:** In this paper we consider a stochastic model of the galactic dynamo in which the coefficient of turbulent diffusion is considered as a random process with renewal. The numerical simulation of statistical moments as well as two-point and three-point correlators of the magnetic field showing the relation between its values at various time instants is performed. The presence of intermittency expressed in the progressive growth of moments and correlators in the case of “quiet” regions of galaxies with a small fraction of the ionized hydrogen component is shown. The numerical results are compared with the results obtained analytically earlier.

**Keywords:** galactic dynamo, magnetic field, equations with random coefficients, intermittency, statistical moment.

### References

1. T. G. Arshakian, R. Beck, M. Krause, and D. Sokoloff, “Evolution of Magnetic Fields in Galaxies and Future Observational Tests with the Square Kilometre Array,” *Astron. Astrophys.* **494** (1), 21–32 (2009).
2. R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, et al., “Galactic Magnetism: Recent Development and Perspectives,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 155–206 (1996).
3. E. A. Mikhailov, D. D. Sokoloff, and Yu. N. Efremov, “Star Formation Rate and Magnetic Fields in Spiral Galaxies,” *Pis'ma Astron. Zh.* **38** (9), 611–616 (2012) [*Astron. Lett.* **38** (9), 543–548 (2012)].
4. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, “Modelling Small-Scale Dynamo by the Jacobi Equation,” *Magnetohydrodynamics* **42** (1), 3–20 (2006).
5. M. R. E. Proctor, “Effects of Fluctuation on  $\alpha\Omega$  Dynamo Models,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **382** (1), L39–L42 (2007).
6. A. P. L. Newton and E. Kim, “Determining the Temporal Dynamics of the Solar  $\alpha$  Effect,” *Astron. Astrophys.* **551** (2013). doi 10.1051/0004-6361/201219456
7. D. Passos, D. Nandy, S. Hazra, and I. Lopes, “A Solar Dynamo Model Driven by Mean-Field Alpha and Babcock–Leighton Sources: Fluctuations, Grand-Minima-Maxima, and Hemispheric Asymmetry in Sunspot Cycles,” *Astron. Astrophys.* **563** (2014). doi 10.1051/0004-6361/201322635
8. E. A. Mikhailov, “Star Formation and Galactic Dynamo Model with Helicity Fluxes,” *Pis'ma Astron. Zh.* **40** (7), 445–453 (2014) [*Astron. Lett.* **40** (7), 398–405 (2014)].
9. S. Sur and K. Subramanian, “Galactic Dynamo Action in Presence of Stochastic  $\alpha$  and Shear,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **392** (1), L6–L10 (2009).
10. E. A. Mikhailov and I. I. Modyaev, “Dynamo Equations with Random Coefficients,” *Magnetohydrodynamics* **51** (2), 285–292 (2015).
11. F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Pergamon, Oxford, 1980).
12. D. Moss, “On the Generation of Bisymmetric Magnetic Field Structures in Spiral Galaxies by Tidal Interactions,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** (1), 191–194 (1995).
13. A. Phillips, “A Comparison of the Asymptotic and no-z Approximations for Galactic Dynamos,” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **94** (1–2), 135–150 (2001).
14. E. A. Mikhailov and V. V. Pushkarev, “Influence of Star Formation on Large Scale Structures of Galactic Magnetic Fields,” *Astrofiz. Byull.* **73** (4), 451–456 (2018) [*Astrophys. Bull.* **73** (4), 425–429 (2018)].
15. E. A. Mikhailov and V. V. Pushkarev, “Fluctuations of the Turbulent Diffusion Coefficient in Galaxy Dynamo Equations,” *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 447–454 (2016).
16. Ya. B. Zeldovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, “Intermittency in Random Media,” *Usp. Fiz. Nauk* **152** (1), 3–32 (1987) [*Sov. Phys. Usp.* **30** (5), 353–369 (1987)].
17. Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *The Almighty Chance* (World Scientific, Singapore, 1990).
18. D. A. Grachev and D. D. Sokoloff, “Numerical Modeling of Growth of Multiplicative Random Quantities,” *Vychisl. Metody Programm.* **8**, 1–5 (2007).



19. M. E. Artyushkova and D. D. Sokolov, "Numerical Modeling of the Solutions of the Jacobi Equation on a Geodesic with Random Curvature," *Astron. Zh.* **82** (7), 584–589 (2005) [*Astron. Rep.* **49** (7), 520–525 (2005)].
20. D. A. Grachev, "A Relation between Numerical and Analytical Results for Stochastic Differential Equations," *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 234–238 (2008).
21. D. A. Grachev, "Averaging of Jacobi Fields along Geodesics on Manifolds of Random Curvature," *J. Math. Sci.* **160** (1), 128–138 (2009).
22. D. A. Grachev and E. A. Mikhailov, "Numerical Modeling of a Two-Point Correlator for the Lagrange Solutions of Some Evolution Equations," *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 277–283 (2017).